

TD 5 : Phase sur-critique v2

Exercice 1. *Nombre d'arêtes dans la composante géante*

On considère $G_{n,p}$ avec $p = c/n$ et $c > 1$. On dénomme C_1 la plus grande composante (dite géante), et $\mathcal{C}(y)$ la composante qui contient $y \in [n]$. Soient $x(c)$ la solution dans $(0, 1)$ de $xe^{-x} = ce^{-c}$, et $f(n) \rightarrow \infty$ arbitrairement lentement. Pour cet exercice, il faut utiliser le Théorème 7 du cours.

1. Soit $a \in [n]$. Montrer que $\mathbb{P}(a \in C_1) = \mathbb{E}[|C_1|/n] = 1 - \frac{x}{c} + o(1)$.
2. On dit qu'une réalisation de $G_{n,p}$ n'est pas gentil si $\exists y \in [n]$ telle que $|\mathcal{C}(y)| \geq f(n) \log(n)$ et $\mathcal{C}(y) \neq C_1$. Soient $a \neq b \in [n]$, et $e = (a, b)$ l'arête entre a et b . Nous écrivons G pour $G_{n,p}$. Montrer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(e \in E(G), e \notin E(C_1), G \text{ gentil}) \\ & \leq \mathbb{P}\left(e \in E(G), |\mathcal{C}_{G \setminus b}(a)| < f(n) \log(n), |\mathcal{C}_{G \setminus \mathcal{C}(a)}(b)| < f(n) \log(n)\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(e \in E(G), e \notin E(C_1), G \text{ gentil}) \\ & \geq \mathbb{P}\left(e \in E(G), |\mathcal{C}_{G \setminus b}(a)| < f(n) \log(n)/2, |\mathcal{C}_{G \setminus \mathcal{C}(a)}(b)| < f(n) \log(n)/2, \right. \\ & \quad \left. G \setminus (\mathcal{C}(a) \cup \mathcal{C}(b)) \text{ gentil}\right). \end{aligned}$$

3. Décomposer selon les valeurs de $\mathcal{C}_{G \setminus b}(a)$ et $\mathcal{C}_{G \setminus \mathcal{C}(a)}(b)$ et utiliser l'indépendance pour montrer que

$$\mathbb{P}(e \in E(G), e \notin E(C_1), G \text{ gentil}) = \frac{c}{n} \left(\frac{x}{c} + o(1)\right) \left(\frac{x}{c} + o(1)\right) (1 - o(1)).$$

4. Dédire que

$$\mathbb{E}[|E(G) \setminus E(C_1)|] = \left(\frac{x^2}{c^2} + o(1)\right) \frac{cn}{2}.$$

5. Montrer que le nombre d'arêtes moyen dans la composante géante est donné par

$$\mathbb{E}[|E(C_1)|] = \left(1 - \frac{x^2}{c^2} + o(1)\right) \frac{cn}{2}.$$