TD 8 : Degrés suite v2

Exercice 1. *Procédure* `label`

On considère la procédure `label` définie dans le cours.

1. Montrer que si G et H sont isomorphes, alors `label` échoue sur G si et seulement si elle échoue sur H.
2. Montrer que si il existe un isomorphisme $\phi : G \to H$, et que `label` réussit et renvoie respectivement $(v_i)_{i=1}^n$ et $(w_i)_{i=1}^n$, alors pour tout i, $\phi(v_i) = w_i$.

Exercice 2. *Automorphismes de $G_{n,p}$*

1. Déduire de l'exercice précédent que si `label` réussit sur G, alors il n'y a pas d'automorphisme non trivial de G.
2. Déduire que pour p constant, il n'y a pas d'automorphisme non trivial de $G_{n,p}$ avec grande proba.
3. Pour $p = c/n$, y a-t-il des automorphismes non triviaux ? (indication : considérer des petites composantes connexes).

Exercice 3. *Degré maximum quasi déterminé*

On suppose ici que $p = o(\log(n)/n)$ et $p \gg 1/n^2$. Pour $j = j(n) \geq 0$, on note $\lambda_j = \lambda_j(n) = \mathbb{E}[X_j] = n\,\mathbb{P}(\mathrm{Bi}(n-1,p) = j)$. Pour tout n on fixe $k \geq pn$ tel que $\max(\lambda_k, \lambda_k^{-1})$ soit minimal.

1. Vérifier que $np/k \to 0$. En déduire que $\lambda_{k-1} \to \infty$ et $\lambda_{k+1} \to 0$.
2. Déduire qu'avec grande probabilité $\Delta(G) \in \{k, k-1\}$.
3. On suppose que λ_k converge dans $[0, \infty]$. Quelle est asymptotiquement la probabilité que $\Delta(G) = k$?