ENS de Lyon
Master 1 Mathématiques 2016-2017

Graphes aléatoires
E. Baur & M. Maazoun

# Examen 12 Mai 2017, 9h00-12h00

**Exercice 1.** *Variance d'une somme de fonctions indicatrices*

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une suite d'événements. Pour $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, on écrit $i \sim j$ si $i \neq j$ et $A_i$ et $A_j$ ne sont pas indépendants. On pose $S_m = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \cdots + \mathbb{1}_{A_m}$, et

$$\Delta_m = \sum_{i,j \in \{1,\ldots,m\}:\, i \sim j} \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right).$$

1. Montrer que $\mathrm{Var}(S_m) \leq \mathbb{E}[S_m] + \Delta_m$.
2. Montrer que si $\mathbb{E}[S_m] \to \infty$ et $\Delta_m = o(\mathbb{E}[S_m]^2)$, alors

$$\lim_{m \to \infty} \mathbb{P}(S_m > 0) = 1, \quad \text{et } \frac{S_m}{\mathbb{E}[S_m]} \xrightarrow{m \to \infty} 1 \quad \text{en probabilité.}$$

**Exercice 2.** *Couplage et distance en variation totale*

Soient $\lambda, \mu \geq 0$. Montrer que

$$d_{VT}\left(\mathrm{Poisson}(\lambda), \mathrm{Poisson}(\mu)\right) \leq |\lambda - \mu|.$$

**Indication :** Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres $\lambda_1$ et $\lambda_2$, alors $X + Y$ est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

**Exercice 3.** *Méthode de Stein-Chen*

On considère le graphe $G = G_{n,p}$, avec $p = c/n$, $c > 0$. On considère le nombre de triangles isolés $W$, que l'on décompose de la manière suivante. Soit $M = \binom{n}{3}$ et $T_1, \ldots, T_M$ une énumération des triangles de $K_n$. Si on pose $X_i = \mathbb{1}_{\{T_i \text{ présent et isolé dans } G\}}$, alors $W = \sum_{i=1}^{M} X_i$. On pose enfin $\lambda = \mathbb{E}[W]$, et $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. On va montrer que $d_{VT}(W, Z) \to 0$ quand $n \to \infty$.

1. Question de cours : rappeler l'opérateur de Stein de la loi Poisson($\lambda$), et l'équation caractérisant les fonctions $f_A$, pour $A \subset \mathbb{N}_0$. Déduire la majoration habituelle de $d_{VT}(W, Z)$.
2. Montrer (en utilisant l'invariance du graphe par réétiquetage) que

$$d_{VT}(W, Z) \leq \lambda \sup_{A \subset \mathbb{N}_0} \left| \mathbb{E}[f_A(W+1)] - \mathbb{E}[f_A(W) | X_1 = 1] \right|.$$

3. Soit $G'$ le graphe obtenu en ajoutant à $G$ les 3 arêtes de $T_1$ et en enlevant les $3(n-3)$ arêtes ayant exactement un sommet dans $T_1$. Alors $G'$ a la loi de $G$ sachant

$\{X_1 = 1\}$. On pose $Y_i = \mathbb{1}_{\{T_i \text{ présent et isolé dans } G'\}}$. Déduire (en admettant que $f_A$ est $(1 \wedge \lambda^{-1})$-lipschitzienne) que

$$d_{VT}(W, Z) \leq (\lambda \wedge 1) \left( \mathbb{E}[X_1] + \sum_{i=2}^{M} \mathbb{E}[|X_i - Y_i|] \right).$$

4. Que vaut $Y_i$ quand $i \neq 1$ et $T_i \cap T_1 \neq \emptyset$ ? Quand $T_i \cap T_1 = \emptyset$, montrer que $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$ est majorée par $\mathbb{P}(T_i$ présent dans $G$ et il existe une arête entre $T_1$ et $T_i)$ et estimer cette dernière probabilité. En déduire que $d_{VT}(W, Z)$ tend vers 0.
5. Déduire une convergence en loi pour $W$ quand $n \to \infty$. Attention : $\lambda$ dépend de $n$ mais converge, il faut utiliser l'Exercice 2 !

**Exercice 4.** *Opérateur de Stein pour la loi géometrique*

Soit $p \in (0, 1)$. On dit qu'une variable aléatoire $Z$ a la loi géometrique $\mathrm{Geom}(p)$ si

$$\mathbb{P}(Z = j) = (1 - p)^j p, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

À toute application $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, on associe l'application $\mathcal{A}f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{A}f(k) = (1 - p)f(k + 1) - f(k) + pf(0).$$

1. Montrer que si $Z \sim \mathrm{Geom}(p)$, alors $\mathbb{E}[\mathcal{A}f(Z)] = 0$ pour toute $f$ bornée.
2. Montrer que si pour une variable aléatoire $W$ non négative, $\mathbb{E}[\mathcal{A}f(W)] = 0$ pour toute $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ bornée, alors $W \sim \mathrm{Geom}(p)$.

**Indication :** Pour 2., vous pouvez considérer la fonction $f(k) = \mathbb{1}_{\{k=j\}}$ pour chaque $j \in \mathbb{N}_0$.

**Exercice 5.**

On considère le modèle $G_{n,p}$ pour $p = 1/2$. On pose pour $n, k \in \mathbb{N}$

$$g(n, k) = \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}.$$

1. Montrer que $G_{n,1/2}$ a la loi uniforme parmi tous les graphes sur $\{1, \ldots, n\}$.
2. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} g(n, k_n) = 0$ pour une suite $(k_n)_n \subset \mathbb{N}$, alors la probabilité qu'on a au moins une copie du graphe complet $K_{k_n}$ à $k_n$ sommets dans $G_{n,1/2}$ converge vers 0.
3. Supposons maintenant que $g(n, k_n) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Montrer que la probabilité qu'on a au moins une copie du graphe complet $K_{k_n}$ dans $G_{n,1/2}$ converge vers 1.
   **Indication :** Appliquer la méthode du second moment. Vous pouvez utiliser sans preuve le fait que
   $$\sum_{i=2}^{k_n - 1} \frac{\binom{k_n}{i}\binom{n-k_n}{k_n-i}}{\binom{n}{k_n}} 2^{\binom{i}{2}} = o(1).$$

4. Soit $k_0(n)$ le plus grand $k$ tel que $g(n,k) \geq 1$. On veut montrer que $k_0(n) \sim 2\log_2(n)$ quand $n \to \infty$. Suivre les étapes suivantes : a) Montrer que pour $n$ fixé, $k \mapsto g(n,k)$ est monotone décroissante. b) Montrer que pour chaque $\epsilon > 0$,

$$g(n, \lfloor (1-\epsilon) 2\log_2(n) \rfloor) \xrightarrow{n\to\infty} \infty, \quad g(n, \lfloor (1+\epsilon) 2\log_2(n) \rfloor) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

   c) Conclure.

5. Le nombre de clique d'un graphe est le plus grand $k$ tel que le graphe contient une copie de $K_k$. Montrer que la probabilité que le nombre de clique de $G_{n,1/2}$ est contenu dans $\{k_0(n)-1, k_0(n), k_0(n)+1\}$ converge vers 1.
   **Indication :** Utiliser 4.

6. Rappelons que le nombre chromatique $\chi(G)$ désigne le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier chaque sommet d'un graphe $G$ de façon que deux sommets adjacents quelconques soient de couleurs différentes. Montrer que la probabilité que

$$\chi(G_{n,1/2}) \geq \frac{n}{k_0(n)+1}$$

   tend vers 1.
   **Indication :** Regarder le complémentaire $G'_{n,1/2}$ de $G_{n,1/2}$, où une arête $e$ est présente si et seulement si elle n'apparaît pas dans $G_{n,1/2}$.