partiel de processus stochastiques M1 (2 heures)

Les notes de cours ne sont pas autorisées. Les premières questions de chaque exercice sont facultatives : il est conseillé de n'y répondre que si on répond également à toutes les autres, ou au contraire si l'on est bloqué sur les autres questions.

Exercise 1 : Points de croissance du mouvement brownien

On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ possède un point de croissance en $t > 0$ si t est un "maximum local à gauche et un minimum local à droite", autrement dit, si il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tous les s dans $[t-\varepsilon, t]$, on ait $f(s) \leq f(t)$, et pour tous les s dans $[t, t+\varepsilon]$, on ait $f(s) \geq f(t)$. Le but de cet exercice est de prouver que presque sûrement, la trajectoire d'un mouvement brownien ne possède pas de point de croissance.

On note A l'ensemble des fonctions continues qui possèdent (au moins) un point de croissance, et $\tilde{A} \subset A$ l'ensemble des fonctions continues f qui vérifient la propriété suivante :

$$\exists t > 0, \exists u > t, f(t) \leq 1, f(u) \geq f(t) + 2, \forall s \in [0,t], \forall s' \in [t,u], f(s) \leq f(t) \leq f(s').$$

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. Pour $s \geq 0$, on note $B^{(s)} = (B^{(s)}_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par $B^{(s)}_t = B_{s+t} - B_s$.

1. *Question facultative :* Montrer que presque-sûrement, la fonction B n'est constante sur aucun intervalle d'intérieur non vide.
2. Déduire le résultat suivant :
$$\mathbb{P}\left(\{B \in A\} \setminus \bigcup_{q,r\in\mathbb{Q}^*_+} \left\{ \left(\frac{1}{r} B^{(q)}_{\sqrt{r}t}\right)_{t\geq 0} \in \tilde{A} \right\}\right) = 0.$$
3. Montrer qu'il suffit de prouver $\mathbb{P}(B \in \tilde{A}) = 0$ pour en déduire $\mathbb{P}(B \in A) = 0$.

On va maintenant prouver $\mathbb{P}(B \in \tilde{A}) = 0$. Pour cela, on se fixe $\varepsilon \in]0,1[$, et on définit par récurrence $M_0 = 0$, $U_0 = 0$, puis, pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} T_k &:= \inf\{t > U_k, B_t - M_k \in \{-\varepsilon, 2\}\}, \\ M_{k+1} &:= \max_{t\in[0,T_k]} B_t, \\ U_{k+1} &:= \inf\{t > T_k, B_t = M_{k+1}\}. \end{aligned}$$

On définit également $X_k = M_k - M_{k-1}$, pour $k \geq 1$, et on introduit

$$E_\varepsilon := \{\exists k \geq 0, M_k \leq 1, X_{k+1} = 2\}.$$

4. Montrer que la suite (X_k) est iid. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 \geq x)$ pour x dans $]0,2]$, et en déduire l'espérance de X_1.
5. Montrer que l'on a
$$\mathbb{P}(E_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(M_k \leq 1).$$
6. On note $N := \inf\{k \geq 1, M_k > 1\}$. Montrer que N est fini presque sûrement et que l'on a
$$\mathbb{E}[M_N] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(M_k \leq 1).$$
7. En déduire $\mathbb{P}(E_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, puis conclure.

Exercise 2 : —*Théorème de Liouville dans* $\mathbb{R}^d$

Le but de cet exercice est de montrer de manière probabiliste le théorème de Liouville dans $\mathbb{R}^d$, qui affirme que toute fonction harmonique et bornée est constante. Soit donc $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ harmonique et bornée. On rappelle que cela signifie que f est C^2 et vérifie

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

On suppose que sous $\mathbb{P}_x$, où x est dans $\mathbb{R}^d$, le processus B est un mouvement Brownien en dimension d issu de x. Pour $t > 0$ et x et y réels, on note $p(t; x, y)$ la densité de la gaussienne centrée en x et de variance t, soit

$$p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

Pour $t > 0$ et x et y dans $\mathbb{R}^d$, on note $p_d(t; x, y)$ la densité du vecteur gaussien centré en x et de matrice de covariance $t\,\mathrm{Id}$, soit

$$p_d(t; x, y) = \prod_{i=1}^{d} p(t; x_i, y_i).$$

1. *Question facultative :* Vérifier que l'on a
$$\frac{\partial p}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t; x, y),$$
et en déduire
$$\frac{\partial p_d}{\partial t}(t; x, y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 p_d}{\partial y_i^2}(t; x, y) \underset{\text{not.}}{=} \frac{1}{2}\Delta_y p_d(t; x, y).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note φ_x la fonction définie par

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_x(t) = \mathbb{E}_x[f(B_t)].$$

Montrer que φ_x est continue en 0, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle.
3. On travaille sous $\mathbb{P}_x$, avec $x \in \mathbb{R}^d$ fixé. Montrer que le processus $M_t = f(B_t)$ est une martingale.
4. En déduire que M_t converge presque sûrement. On notera M_∞ sa limite p.s.
5. En utilisant que M_∞ est mesurable par rapport à la tribu asymptotique $\cap_{t>0}\sigma(B_u, u \geq t)$, montrer que M_∞ est constante presque sûrement.
6. Montrer que la valeur de cette constante ne dépend pas de x, et en déduire le théorème de Liouville.