
Devoir Maison 1

Version 2 sans les coquilles signalées par mail. À rendre le 4 octobre au début du TD dernier délai. La clarté de la rédaction et la propreté de la présentation seront appréciées. Bon courage !

Exercice 1. (Une topologie Exotique sur $\mathbb{Z}$)

1^{ere} **Partie :**

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que la distance d est ultramétrique si pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

1. Montrer que dans un espace ultramétrique, tout point dans une boule en est le centre : $\forall a \in B(x, \rho), B(x, \rho) = B(a, \rho)$. De même pour les boules fermées. Que dire de deux boules qui s'intersectent ?
2. Montrer aussi que les boules ouvertes sont fermées et que les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes.

2^{eme} **Partie**

On considère la fonction $||.|| : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$||x|| = \frac{1}{\max\{k \geq 1 : \forall i \in [\![1, k]\!], i \text{ divise } x\}},$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}$ en admettant que $\frac{1}{\infty} = 0$.

On pose $d(x, y) := ||x - y||$ pour tout x et y dans $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que d définit une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$. Montrer que la suite $x_n := n!$ est convergente et donner sa limite.
2. Montrer que $\times$ et $+$ sont continues $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, où on équipera $\mathbb{Z}^2$ de la métrique produit $d_{\mathbb{Z}^2}((a, b), (c, d)) = \max(d(a, c), d(b, d))$.
3. Soit $\mathcal{B} = \{a + b\mathbb{Z}; (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\}$. Montrer que les éléments de $\mathcal{B}$ sont à la fois ouverts et fermés pour la topologie sur $\mathbb{Z}$ associée à d.
   Indication : Pour l'ouverture des $a + b\mathbb{Z}$ on pourra montrer que la boule $B(x, \frac{1}{b}) \subset a + b\mathbb{Z}$ pour tout $x \in a + b\mathbb{Z}$
4. Monter que tout pour tout r et pour tout $b \in \mathbb{Z}$ tel que $||b|| < r$,
   $$a + b\mathbb{Z} \subset B(a, r).$$
   En déduire que toute les boules ouvertes (et donc les ouverts) s'écrivent comme réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Qu'est $\mathcal{B}$ pour l'espace métrique (E, d) ?
5. Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{P}} p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$. Cet ensemble est-il fermé ? Que peut-on en déduire pour la cardinalité de l'ensemble des nombres premiers ? Justifier votre réponse.

6. Soit P et Q deux ensembles disjoints de nombres premiers. Montrer qu'il existe $a_p \in \mathbb{Z}$ pour $p \in P$, et $b_q \in \mathbb{Z}$ pour $q \in Q$, tels que
$$A = \bigcup_{p \in P} (p + a_p\mathbb{Z}), \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{q \in Q} (q + a_q\mathbb{Z}),$$
soient disjoints. *Indication* : travailler dans $[\![2, \infty[\![$, et utiliser l'exercice 15 du TD 1.

Exercice 2. On munit $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ de $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$.

1. Montrer que d est une distance sur C.
2. On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $p_{n_0} : (C, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $p_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ est continue.
3. Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \to C$. Montrer que f est continue si et seulement si $p_n \circ f$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère le sous-ensemble suivant de $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$:
$$H = \{(x_n)_{n\geq 0} \in C : \forall n \geq 0, 0 \leq x_n \leq 1/(n+1)\}.$$

4. Montrer que $H \subset \ell^2(\mathbb{N})$, $H \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ et que les topologies induites par ces deux espaces sur H coincïdent.
5. Montrer que $\phi : H \to C$ défini par $\phi((x_n)_{n\geq 0}) = (x_0, 2x_1, 3x_2, \ldots)$ est un homéomorphisme quand H est équipé de la topologie issue de ℓ_2 (la même que ℓ^∞ donc !), et C est équipé de la métrique produit définie au début de l'exercice.