École Normale Supérieure de Lyon **Année 2017–2018**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 10 : Formule de Taylor

Exercice 1. *(Diagonalisation simultanée)*
On se place dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme euclidienne notée $||.||$ et du produit scalaire noté $\langle , \rangle$. On note S la sphère unité

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}.$$

Soit A une matrice symétrique réelle.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\langle Ax, x\rangle}{||x||^2} \end{aligned}$$

   est continue et que sa restriction à S admet un maximum sur S.
   Soit e_1 un vecteur unitaire en lequel ce maximum est atteint.
2. Montrer que e_1 est un maximum pour f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. Calculer la différentielle de f et montrer que

$$Df(e_1).h = 2\langle Ae_1, h\rangle - 2\langle Ae_1, e_1\rangle\langle e_1, h\rangle$$

   pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
4. En deduire que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, l'égalité $\langle e_1, h\rangle = 0$ implique l'égalité $\langle Ae_1, h\rangle = 0$
5. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice A est diagonalisable.

Exercice 2. *(Inégalité de Glaeser)*
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \longrightarrow R$ une application de classe C^2 et positive. On suppose qu'il existe une constante M telle que $||D^2 f(x)|| \leq M$ pour tout x.
Montrer que

$$||Df(x)|| \leq \sqrt{2Mf(x)}.$$

Exercice 3. *(Exercice du cours)*
Supposons que f est une fonction p fois différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose $|\alpha| = \sum \alpha_k$. On adoptera les notations suivantes :

$$\partial^\alpha f(a) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} ... \frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n}(a)$$

Si $h \in \mathbb{R}^n$ on note $h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$

1. Exprimer $D^p f(a)(h, ..., h)$ comme une somme sur tous les $\alpha : |\alpha| = p$ de $h^\alpha \partial^\alpha f(a)$
2. En déduire une formule explicite du polynôme de Taylor de degré p qui approche la fonction f en a

Exercice 4. *(Condition nécessaire d'analyticité)*
Soit f une application C^∞ d'un intervalle ouvert I de centre x_0 dans un espace de Banach E. On suppose que les dérivées d'ordre pair admettent une majoration de la forme : $||f^{(2n)}(x)\| \leq M(2n)!\,k^n$ où $M > 0$ et $k > 0$ sont des constantes indépendantes de n.

1. Quelles majorations peut-on déduire pour les dérivées d'ordre impair ?
2. Montrer, à l'aide de cette majoration, que la série de Taylor de f en x_0 converge vers f en tout point d'un certain voisinage de x_0.

Exercice 5. *(Lemme d'Hadamard à l'ordre 2)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^m, avec $m \geq 2$ telle que $F(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = 0, 1 \leq i \leq n$, on pose $a_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)$. En appliquant par exemple la formule de Taylor avec reste intégral, montrer qu'il existe des fonctions g_{ij} de classe C^{m-2} tel que $g_{ij} = g_{ji}, g_{ij}(0) = a_{ij}$ et

$$F(x) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) x_i x_j$$