TD 2 : Séparation, Connexité, Connexité par arcs

Exercice 1. Soit (X, d) une espace métrique.

1. Montrer les assertions suivantes sont équivalentes :
   — L'espace (X, d) est séparable.
   — X a une base dénombrable d'ouverts.
2. En déduire que (A, d_A) est séparable si (E, d) l'est.

NB : On montre que le résultat de la question 2 n'est plus vrai pour un espace topologique général dans l'exercice 11.

Exercice 2. Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés ; $\mathscr{L}_c(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. On munit $\mathscr{L}_c(E, F)$ de la norme définit comme suite :

$$||u|| = \sup_{||x||_E=1} \{||u(x)||_F\}$$

Montrer que $\mathscr{L}_c(E \times E, F)$ et $\mathscr{L}_c(E, \mathscr{L}_c(E, F))$ sont en bijection isométrique.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé réel, et f une forme linéaire non nulle. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 4. Pour cet exercice vous pouvez utiliser la propriété suivante de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie.

1. Montrer que toute suite réelle croissante majorée converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et $E = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E est fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $u_n \to +\infty$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable.
3. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de boules ouvertes.

Exercice 6.

1. Soit (X, d) un espace connexe. Montrer que X^2 muni de la distance produit $\delta((x, y), (x', y')) = \max(d(x, y), d(x', y'))$ est connexe (utiliser le fait que les fibres $\{x\} \times X$ et $X \times \{x\}$ sont homéomorphes à X).
2. Montrer que le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe.
3. Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique.

1. les boules ouvertes de (X, d) sont-elles nécéssairement connexes ? Même question quand l'espace lui-même est connexe.

On suppose maintenant que toutes les boules ouvertes sont connexes. Soit A une partie connexe.

2. Montrer que l'ensemble
$$A_\varepsilon = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\}$$
est connexe pour tout ε strictement positif.

On suppose maintenant que (X, d) est non borné et connexe.

3. Montrer que les sphères de X ne sont pas vides.

Exercice 8. (Les groupes linéaires)
On muni $M_n(\mathbb{C})$ de la norme suivante :
$$||(a_{ij})_{1<i,j<n}|| := \max\{|a_{ij}|\}$$

1. Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Qu'en est-il du cas denombrable ?
2. Montrer que le groupe $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
3. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.
4. Montrer que $SO_2(R)$ est connexe.

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel normé réel et F un sous-espace de E.

1. Si F est de codimension au moins 2, montrer que $E - F$ est connexe.
2. Si F est de codimension 1, montrer que $E - F$ a deux composantes connexes.

Exercice 10. Soit
$$E = \{(x, sin(\frac{1}{x}), x \in [0, 1])$$
. Soit X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

1. Determiner X.
2. Montrer que X est connexe.
3. Montrer que X n'est pas connexe par arcs

Exercice 11. (**)(Le plan de Sorgenfrey) Soit $\mathscr{B}$ une famille de rectangles semi-ouverts dans le plan $\mathbb{R}^2$ de la forme $[a, b[\times[c, d[$ et soit τ la topologie engendré par $\mathscr{B}$.
1.Montrer que $(\mathbb{R}^2, \tau)$ est séparable.
2. Monter que la topologie induite sur la droite $D = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$ est discrète. En déduire que que (D, τ_D) n'est pas séparable.
3. Est-ce qu'il existe une métrique sur le plan $\mathbb{R}^2$ qui donne la topologie τ ?