
TD 3 : Connexité, connexité par arcs, complétude, v2

Exercice 1. (Les groupes linéaires)
On muni $M_n(\mathbb{C})$ de la norme suivante :

$$||(a_{ij})_{1<i,j<n}|| := \max\{|a_{ij}|\}$$

1. Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Qu'en est-il du cas denombrable ?
2. Montrer que le groupe $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Indication : pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, considérer $\det(zA + (1 - z)B)$.
3. Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes. Indication : trouver des familles "paramètrables par arcs" qui engendrent $GL_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $SO_2(R)$ est connexe.

Exercice 2. Soit

$$E = \{(x, sin(\frac{1}{x}), x \in [0, 1])$$

. Soit X l'adhérence de E dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

1. Determiner X.
2. Montrer que X est connexe.
3. Montrer que X n'est pas connexe par arcs et n'est pas non plus localement connexe.

Exercice 3. On veut montrer le théorème suivant : dans un e.v.n, tout ouvert connexe U est connexe par lignes brisées, c'est-à dire que pour tout $x, y \in U$ il existe une fonction continue et affine par morceaux $f : [0, 1] \to U$ avec $f(0) = x$ et $f(1) = y$. En particulier U est connexe par arcs.

1. Considérer la relation d'équivalence suivante : on dit $x \sim y$ quand x et y peuvent être reliés par lignes brisées. Montrer que les classes d'équivalences sont ouvertes, puis qu'elles sont fermées.
2. Conclure.

Exercice 4.

1. Donner une métrique sur $\mathbb{R}$ qui définit bien la topologie usuelle, mais pour laquelle $\mathbb{R}$ n'est pas complet.
2. Soit X un espace muni de deux distances équivalentes d_1 et d_2. Montrer que si X est complet pour l'une des distances, il est complet pour l'autre.
3. Trouver une application f d'un espace complet (X, d) dans lui-même vérifiant $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tout couple de l'espace, mais telle que f n'a pas de point fixe.

4. Trouver une application contractante sans point fixe.

Exercice 5. Soit ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme.

1. Montrer que (ℓ^∞, d) est complet.
2. Soit ℓ^1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suite sommables. Montrer que ℓ^1 s'injecte dans ℓ^∞. L'injection est-elle continue ?
3. Montrer que ℓ^1 n'est pas fermé dans ℓ^∞. Quelle est sa fermeture ?

Exercice 6. On considère l'espace E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (qui est de Banach) et F le sous-espace constitué des fonctions lipschitziennes.

1. Le sous-espace induit $(F, \|\cdot\|)$ est-il complet ? Et la partie formée des fonctions 1-Lipschitziennes ?
2. Montrer F devient un Banach s'il est muni de la norme $N(f) = \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|) + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y}(\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|})$.

Exercice 7.

1. Soit $f : E \to E$ avec (E,d) un Banach. Montrer que s'il existe $r \geq 1$ tel que f^r est contractante, alors f admet un unique point fixe.
2. Soit $X = (\mathscr{C}^0([0,1]), ||\cdot||_\infty)$.
   On considère l'opérateur
   $$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)dt$$
   Montrer que T est contractant sur X à partir du rang 2.
3. En déduire qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f'(x) = f(x-x^2)$ et $f(0) = 1$.

Exercice 8. Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement si il vérifie la propriété suivante, dite des fermés emboîtés : si une suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion est telle que $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, alors $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton.

Exercice 9. On considère $\mathbb{C}$ muni du module et $E = C^0([0,1],\mathbb{C})$ muni de la norme du suprémum associée, notée $\|\cdot\|_\infty$. D'après le cours, E est un espace de Banach.

1. Montrer que $F = \{\gamma \in E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}$ est fermé dans E.
2. Montrer que l'application $H : F \to E$ définie par
   $$\begin{aligned} H\gamma(t) =& 1/3\gamma(3t) && \text{si } 0 \leq t < 1/3 \\ =& 1/3 + e^{i\pi/3}/3\gamma(6(t-1/3)) && \text{si } 1/3 \leq t < 1/2 \\ =& (1+e^{i\pi/3})/3 + e^{-i\pi/3}/3\gamma(6(t-1/2)) && \text{si } 1/2 \leq t < 2/3 \\ =& 2/3 + 1/3\gamma(3(t-2/3)) && \text{si } 2/3 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$
   est à image dans F et contractante.
3. Montrer que si $\gamma_0 \in F$ et $\gamma_n = H^n\gamma_0$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite $(\gamma_n)_n$ converge. Caractériser sa limite. Dessiner quelques termes de cette suite pour le choix de γ_0 égale à l'inclusion $[0,1] \to \mathbb{C}$.