TD 5 : Topologie Générale et Compacité

Exercice 1.

1. Soit (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers l. Monter que $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup l$ est un compact.
2. On considère l'espace métrique $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x,y) = \sum 2^{-n}|x_n - y_n|$. Nous avons déja vu que la convergence d'une suite d'éléments de C est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée (on peut même vérifier que cette distance induit la topologie produit). Montrer que C est compact par extraction diagonale.

Exercice 2. Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow X$ une application.

1. Si f est telle que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x \neq y$, montrer que f admet un unique point fixe dans X. Indication : considérer $x \mapsto d(f(x), x)$.
2. (*) Si f préserve la distance, i.e. $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$, montrer que f est un homéomorphisme. *Indication : montrer que si x est un point de X et $f^{n(k)}(x)$ a une limite, alors $f^{n(k+1)-n(k)}(x)$ converge vers x.*
3. (*) Si f est continue et vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$, montrer que f est une isométrie bijective. Indication : on pourra, similairement à ci-dessus, montrer que tout couple de points peut être approché par ses itérées par f pour inverser l'inégalité et se ramener au 2).

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(a,y) = d(a,F)$.
2. Soient $K \subset E$ un compact et $F \subset E$ un fermé. Montrer que $K + F$ est fermé. Est-ce encore vrai si K est seulement supposée fermée ?
3. Soient $K, K' \subset E$ des compacts. Montrer que $K + K'$ est compact.

Exercice 4. (Connexité et compacité) Dans un espace topologique E,

1. Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes non vides est non-vide.
2. Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes $(K_i)_{i\geq 1}$ est connexe. Indication : pour U et V deux ouverts disjoints de E, supposons que $\bigcap_{i\geq 1} K_i \subset U \cup V$. Considérer alors la suite $K_i \setminus (U \cup V)$.
3. L'affirmation est-elle vraie si on remplace compact par fermé ?

Exercice 5.

1. Montre que l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéormorphe à S^1.
2. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ a la topologie triviale.

Exercice 6. (Topologie Quotient) Soit X un espace topologique. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\mathscr{R}$ l'ensemble des classe d'quivalence.
On note par $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/\mathscr{R}$ l'application qui á un élement de X associe sa classe d'équivalence. On dit que $U \subset X$ est un ouvert si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

1. Montrer qu'on définit ainsi une topologie sur $X/\mathscr{R}$.
2. Le saturé d'un sous ensemble A de X est l'ensemble des points de X en relation avec un élément de A. Montrer que π est une application ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de X est ouvert.
3. Montrer que si la projection π est ouverte et que le graphe de $\mathscr{R}$ est fermé, alors $X/\mathscr{R}$ est separé.
4. Soit Z un espace topologique. Montrer qu'une application $f : Y \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \longrightarrow Z$ est continue.
5. Soit $f : X \longrightarrow Z$ une application continue tel que si $x\mathscr{R}y$ alors $f(x) = f(y)$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\bar{f} : X/\mathscr{R} \longrightarrow Z$ tel que
$$\bar{f} \circ \pi = f$$
6. Montrer que la propriété ci-dessus caractérise la topologie quotient.
7. Soit $A \subset X$. On appelle écrasement de X sur A l'espace $X/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation définit par : $x\mathscr{R}y$ pour tout x, y dans A. Décrire la sphère S^2 comme l'écrasement d'un espace sur un sous espace convenable.

Exercice 7. (Somme disjointe et recollement le long d'une application) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques indexées par I. On définit
$$X := \bigsqcup_i X_i = \{(x, i) | x \in X_i\}$$
la somme disjointe des X_i. On définit les applications suivantes : $\phi_i : x \in X_i \mapsto (x, i) \in X$

On appelle topologie somme disjointe sur X la topologie la plus fine pour laquelle les ϕ sont continues.

1. Décrire les ouvert X. Si les X_i sont separés, que peut-ont dire X ?
2. Si Z est un espace topologique, montrer que pour toute famille d'applications continues $f_i : X_i \longrightarrow Z$, il existe une unique aplication $f : X \longrightarrow Z$ tel que
$$f \circ \phi_i = f_i$$
3. Soit X et Y deux espaces topologiques $A \subset X$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application continue. On appelle recollement de X à Y le long de f l'espace $X \cup_f Y := X \bigsqcup Y/\mathscr{R}_f$ où $\mathscr{R}$ est la relation d' équivalence définit pour laquelle x et $f(x)$ sont en relation.
Montrer que la sphére S^2 est obtenue par recollement de deux sous espaces convenable.