

## CORRIGÉ TD 7 : BAIRE &amp; AUTRES

**EXERCICE 1.**

1. Pour  $x \in X$ ,  $\{x\}$  est fermé (les singletons sont toujours fermés dans un e.m. ou dans un e.t. séparé), et d'intérieur vide puisque  $x$  n'est pas isolé. Donc  $X = \cup_{x \in X} \{x\}$  est une union dénombrable de fermés d'intérieurs vides, donc d'intérieur vide. Absurde.
2. L'hypothèse s'écrit  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |f(nx)| \leq \varepsilon$ . C'est à dire  $\forall \varepsilon > 0, X = \cup_{N \in \mathbb{N}} A_n$ , où  $A_n = \{x \in \mathbb{R}_+^* : \forall n \geq N, |f(nx)| \leq \varepsilon\}$ . Mais  $A_n$  est fermé. Donc par contraposée du théorème de Baire, un des  $A_n$  est d'intérieur non vide. C'est à dire qu'il existe  $a < b$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que pour  $x \in (a, b)$  et  $n \geq N$ ,  $|f(nx)| \leq \varepsilon$ .

Mais pour  $y > a \max(N, 1/(b-a)) = K$ , on peut écrire  $y = nx$  avec  $n \geq N$  et  $x \in (a, b)$ . (prendre  $n = \lfloor y/a \rfloor$ ). On a bien  $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \forall y > K, |f(y)| \leq \varepsilon$  i.e. la convergence en l'infini.

**EXERCICE 2.**

1. L'ensemble  $\sup\{|f(u) - f(v)|; |u - x| < h, |v - x| < h\}$  est décroissant quand  $h \rightarrow 0$ . Donc son supremum aussi l'est également. Donc la limite  $h \rightarrow 0$  est en fait un inf, bien défini  $\omega(f, x) = \inf\{\sup\{|f(u) - f(v)|; |u - x| < h, |v - x| < h\}, h \in H\}$ .
2. C'est une réécriture de la définition de continuité.
3. L'idée est la suivante : par définition,  $x \in C_a$  si il existe  $h > 0$  tel que sur  $B(x, h)$  on ait une certaine propriété. Mais alors pour  $y \in B(x, h/2)$ , il existe  $h' = h/2$  tel que pour  $B(y, h') \subset B(x, h)$ , donc la propriété est toujours vérifiée sur  $B(y, h')$ . Donc  $y$  est également dans  $C_a$  pour  $y \in B(x, h/2)$ . Montrant l'ouverture de  $C_a$ .  
Enfin, dire que l'oscillation est nulle c'est équivalent à dire qu'elle est plus petite que tous les  $1/n$ , d'où  $C = \bigcap_{n>0} C_{\frac{1}{n}}$ .
4. Si  $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ , avec  $U_n$  ouvert dense de  $\mathbb{R}$ , alors  $\emptyset = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \setminus \{q\})$ , et  $U_n \setminus \{q\}$  est toujours un ouvert dense de  $\mathbb{R}$ . Donc  $\emptyset$  est dense dans  $\mathbb{R}$  par Baire, absurde.
5. La question 3 a montré que l'ensemble des points de continuité est une intersection d'ouvert dense et la question 5 a montré que  $\mathbb{Q}$  ne peut être un tel ensemble.

**EXERCICE 3.**

1. On a deux méthodes pour montrer que l'application linéaire  $(F, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty); f \mapsto f'$  entre deux Banachs est continue :
  - Le théorème du graphe fermé : Si  $(f_n, f'_n) \rightarrow (f, g)$  dans  $(F, \|\cdot\|_\infty) \times (E, \|\cdot\|_\infty)$ , alors on a en particulier convergence simple de  $f_n$  vers  $f$  et convergence uniforme de  $f'_n$  vers  $g$ . Un théorème classique<sup>1</sup> nous dit qu'alors on a convergence uniforme de  $f_n$  vers  $f \in \mathcal{C}^1$  de dérivée  $g$ . D'où  $g = f'$  et donc le graphe de  $f \mapsto f'$  est fermé.

1. que l'on peut retrouver en intégrant, et qui est également montré plus tard pour un cadre plus générale dans la partie calcul diff du cours par le théorème des accroissements finis

- Par Banach-Steinhaus : la fonctionnelle dérivation  $T : F \rightarrow E$ ,  $Tf = f'$  s'écrit comme limite simple des fonctionnelles  $T_n : F \rightarrow E$ ,  $(T_n f)(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$ . Celles ci sont linéaires continues  $(F, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ . Donc  $T$  l'est également par Banach-Steinhaus.
- 2. On a  $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$  par définition et  $\|\cdot\|_1 \leq (1+k)\|\cdot\|_\infty$ , où  $k$  est la norme d'opérateur de la dérivation, finie d'après la question précédente.
- 3. Pour que cette partie de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  soit relativement compacte en norme  $\|\cdot\|_\infty$  il faut vérifier les hypothèses du théorème d'Ascoli. C'est le cas, les fonctions dans cette boule sont bornées par 1 (d'où la relative compacité point par point) et 1-Lipschitziennes (d'où l'équicontinuité).
- 4. Cette boule est fermée pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et compacte pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$  donc pour la norme  $\|\cdot\|_1$  par équivalence. Donc l'espace  $(F, \|\cdot\|_1)$  a sa boule unité fermée qui est compacte donc est de dimension finie par Riesz.

**EXERCICE 4.** On met sur  $F_1, F_2, F$  la norme de  $E$ , qui en fait des Banach puisqu'ils sont des sev fermés dans le Banach  $E$ .

L'application somme  $F_1 \times F_2 \rightarrow F_1 + F_2$  est linéaire, continue ( $\|x + y\| \leq 2 \sup(\|x\|, \|y\|)$ ) et surjective, et va d'un Banach dans un Banach. Donc par théorème de Banach-Schauder, elle est ouverte. Donc l'image de  $B_{F_1 \times F_2}(0, 1)$  contient une petite boule  $B_{F_1 + F_2}(0, \varepsilon)$ .

Soit  $z \in F_1 + F_2$ . On peut écrire  $z = \frac{2\|z\|}{\varepsilon} z'$ , où  $z' = \frac{\varepsilon}{2\|z\|} z \in B_{F_1 + F_2}(0, \varepsilon)$ . Donc  $z'$  s'écrit  $x' + y'$  avec  $\|x'\|, \|y'\| < 1$ . D'où, en remultipliant, l'écriture  $z = x + y$  avec  $\|x\|, \|y\| \leq 2/\varepsilon \|z\|$ .

**EXERCICE 5.**

1. Soit  $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}[x]$  muni de la topologie discrète, qui envoie  $x$  sur le polynôme qui coïncide avec  $f$  au voisinage de  $x$ . C'est bien uniquement défini car si deux polynômes coïncident sur un voisinage, ils sont égaux. En plus, par définition  $\phi$  est localement constante. Donc par connexité de  $J$  elle est constante.
2.  $F_n = (f^{(n)})^{-1}(0)$  fermé par continuité de  $f^{(n)}$ .
3. L'ensemble des points polynomiaux est ouvert par définition, vu que c'est l'ensemble des points tels qu'il se passe blabla au voisinage du point. Donc son complémentaire  $Z$  est fermé. Maintenant soit  $a$  point isolé de  $Z$ , càd il existe  $\varepsilon > 0$  tel que tous les points de  $]a - \varepsilon, a[ \cup ]a, a + \varepsilon[$  soient polynomiaux. Donc par la question 1, on a un polynôme  $P_1$  qui coïncide avec  $f$  sur  $]a - \varepsilon, a[$  et  $P_2$  sur  $]a, a + \varepsilon[$ .  $P_1$  et  $P_2$  ont des dérivées en  $a$ , qui coïncident avec celles de  $f$  par  $\mathcal{C}^\infty$ té de  $P_1, P_2$  et  $f$ . Donc  $P_1$  et  $P_2$  partagent un développement de Taylor en  $a$ , donc sont égaux ( $P_1 = P_2 = P$ ).  $f$  coïncide avec  $P$  sur  $]a - \varepsilon, a[ \cup ]a, a + \varepsilon[$ , donc en  $a$  également par continuité, et  $a$  est polynomial, absurde.
4. Par hypothèse principale de l'exo  $\cup F_n = I$ . Donc  $\cup Z_n = Z$ . On voudrait appliquer Baire dans l'espace  $Z$  qui n'est pas complet. Il est fermé dans  $I$  qui est un intervalle ouvert. Donc on va travailler dans  $\bar{Z}$ . Mais  $\bar{Z} \setminus Z$  contient au plus deux points qui sont les extrémités de  $I$ . On a donc

$$\bar{Z} = \bigcup_n Z_n \cup (\text{éventuellement}) \{\inf I\} \cup \{\sup I\}$$

On a une dénombrable union de fermés qui n'est pas d'intérieur vide, donc en contraposant le théorème de Baire dans  $\bar{Z}$  (qui est complet puisque fermé de  $\mathbb{R}$ ), l'un des fermés est d'intérieur non vide dans  $\bar{Z}$ . Ca ne peut être un des deux singletons, donc un des  $Z_n$  est d'intérieur non vide dans  $\bar{Z}$ , ce qui dit bien qu'il existe  $U$  intervalle ouvert tq  $\emptyset \neq Z \cap U \subset Z_{n_0}$ .

5. Pour  $x \in Z \cap U$ , on a par définition  $f^{(n_0)}(x) = 0$ . Comme  $Z \cap U$  n'est pas un intervalle, on ne peut pas dire immédiatement que les dérivées supérieures sont également nulles. Mais par induction si on a montré que  $f^{(n)} = 0$  sur  $Z \cap U$ , alors pour  $x \in Z \cap U$ , comme  $Z$  n'a pas de points isolés, on peut trouver deux suites  $(x_k)_k, (y_k)_k$ , dans  $Z \cap U$ , qui convergent vers  $x$ , et telles que  $x_k \neq y_k$ . On a alors  $f^{(n+1)}(x) = \lim_k \frac{f^{(n)}(x_k) - f^{(n)}(y_k)}{x_k - y_k} = \lim_k 0 = 0$ .
6. Pour  $x \in (I - Z) \cap U$ . On regarde la composante connexe (forcément ouverte)  $]a, b[$  de  $x$  dans l'ouvert  $(I - Z) \cap U$ . Si ni  $a$  ni  $b$  n'appartiennent à  $Z \cap U$ , alors soit  $]a, b[ = U$ , et  $Z \cap U$  est en fait vide, absurde, soit on a  $]a, b[$  ou  $]a, b]$  inclus dans  $(I - Z) \cap U$ , niant la définition de  $]a, b[$ , absurde. Donc soit  $a$  soit  $b$  est dans  $Z \cap U$ . Pour la suite disons que c'est  $a$ , la preuve est la même.
- Par la question 1,  $f$  coïncide avec un polynôme  $P$  sur  $]a, b[$ . Mais  $P^{(n)}(a) = F^{(n)}(a)$  par  $\mathcal{C}^\infty$ té de  $P$  et  $F$ . Et vu que  $a \in Z \cap U \subset Z_{n_0}$ , alors  $F^{(n)}(a) = 0$  pour tout  $n \geq n_0$ . Donc  $P$  est de degré  $< n_0$ .
7. Ceci montre qu'en fait  $f^{(n_0)} = 0$  sur  $U \setminus Z$ , et on avait déjà  $f^{(n_0)} = 0$  sur  $U \cap Z$ . Donc en fait  $f^{(n_0)} = 0$  sur  $U$  et  $f$  est un polynôme sur  $U$ , absurde puisque  $Z \cap U \neq \emptyset$ . Donc  $Z$  était vide. On conclut en réappliquant la question 1 à  $I$ .

### EXERCICE 6.

1. Dans cette question on améliore un peu la contraposée du lemme qui implique Banach Steinhaus (certains auteurs disent d'ailleurs que c'est ça Banach-Steinhaus). On suppose que  $T_i$  n'est pas bornée dans  $\mathcal{L}_c(E, F)$ . On peut écrire.

$$\{x \in X, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : \|T_n(x)\| > m\}$$

Par continuité de  $T_n$ ,  $\{x \in X : \|T_n(x)\| > m\}$  est ouvert, donc l'union est ouverte. Prouvons maintenant que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : \|T_n(x)\| > m\}$  est dense. Sinon, on aurait  $a \in E, r > 0$  tels que pour tous  $x \in B(a, r), n \geq 1, \|T_n(x)\| \leq m$ . Mais alors on contrôle uniformément les  $T_n$  sur une même petite boule! on peut alors montrer que  $T_n$  est bornée dans  $\mathcal{L}_c(E, F)$ . Plus précisément si  $\|y\| = 1, y = \frac{1}{r}(a + ry) - \frac{1}{r}a$

$$\|T_n(y)\| = \left\| \frac{1}{r}T_n(a + ry) - \frac{1}{r}T_n(a) \right\| \leq \frac{2m}{r}.$$

Donc la norme des  $T_n$  est bornée par la constante  $\frac{2m}{r}$ , absurde.

Donc  $\{x \in X, \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty\}$  est bien une intersection d'ouverts denses, et si l'espace est de Baire, est donc dense.

2. On écrit

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks} ds e^{ikt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-s)} ds. \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) D_n(t-s) ds. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la  $n$ -ème somme partielle de la série de Fourier est la convolution avec le  $n$ -ème noyau de Dirichlet (ultra classique). Mais maintenant on peut prendre des  $f$  continus

périodiques qui approximent de mieux en mieux  $\operatorname{sgn}(D_n)$  (oui oui,  $D_n$  est bien réel, c'est en fait une somme de cosinus) tout en gardant  $\|f\| \leq 1$ . Ça permet de montrer que

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_{2\pi}} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t_0 - s)| ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(s)| ds$$

3. On considère pour tout  $n$  l'application linéaire continue  $T_n : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto S_n(t_0)$ . On a alors que la norme d'opérateur de  $T_n$  est au moins  $\int_0^{2\pi} |D_n(s)| ds$  pour tout  $n$ . Mais  $\int_0^{2\pi} |D_n(s)| ds$  tend vers l'infini<sup>2</sup>. Donc par la question 1<sup>3</sup>, il existe un  $G_\delta$  dense de fonctions  $f$  où  $(T_n(f))_n = (S_n(t_0))_n$  diverge.

---

2. Cette intégrale diverge à vitesse  $\operatorname{ct} \log(n)$ . On peut obtenir ça assez rapidement de l'égalité  $D_n(s) = \sin((n + 1/2)t) / \sin(t/2)$ , en découpant en morceaux. Tapez "Dirichlet kernel" sur google.

3. On a besoin de la complétude de  $\mathcal{C}_{2\pi}$  pour ça, qui se voit facilement par le fait qu'on peut identifier  $\mathcal{C}_{2\pi}$  au sous-espace (fermé) de  $C^0([0, 2\pi])$  des fonctions  $f$  qui vérifient  $f(0) = f(2\pi)$