École Normale Supérieure de Lyon **Année 2017–2018**

Département de Mathématiques **Topologie et calcul différentiel**

TD 8. Différentielles, difféomorphismes, accroissements finis (version 2)

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit f une fonction $E \to F$ différentiable. Quelle est la nature de Df ? de $Df(a)$? de $Df(a).h$?
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.
3. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $x \mapsto \langle x, L(x) \rangle$ est différentiable et calculer la différentielle.

Exercice 2. *Calculs de différentielles*

Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles :

1. $\theta : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto tr(MA^{-1}) \quad \text{pour } M \text{ fixée.} \end{cases}$ (Rappeler pourquoi $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.)
2. $\xi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto tr(A^p). \end{cases}$
3. $\psi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A). \end{cases}$
   (a) Première méthode : commencer par prouver que, pour $A, B \in M_n(\mathbb{R}), \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} = tr\,(A^\intercal B)$, puis utiliser la formule de Laplace : $\forall i \in [|1, n|], det(A) = \sum_j A_{i,j} \mathrm{Com}(A)_{i,j}$, où $Com(A)$ est la matrice des cofacteurs de A.
   (b) Seconde méthode : calculer les dérivées directionnelles du déterminant en A inversible en faisant apparaître un polynôme caractéristique. Utiliser la densité des matrices inversibles (rappeler pourquoi c'est le cas)

Exercice 3. *Normes*

1. Une norme sur E considérée comme une application de E dans $\mathbb{R}$ peut-elle être différentiable en 0 ?
2. Soit $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ la norme p sur $\mathbb{R}^n$. Pour $p = 1, 2, \infty$, déterminer les points de différentiabilité de N_p. *Indication : regarder le dessin des boules et faire le lien.*
3. Montrer que la norme sur ℓ^1 n'admet pas toutes ses dérivées partielles en les suites qui contiennent un 0. Calculer les dérivées partielles en les suites qui évitent 0. Montrer par l'absurde qu'en ces points elle n'est tout de même pas différentiable.

Exercice 4. *(contre-)exemples*

1. Soient $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ et $g(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$. f et g se prolongent-elles en $(0, 0)$ par continuité ? Y admettent-elles des dérivées directionnelles ? Y sont-elles différentiables ?

2. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées directionnelles en 0 mais qui n'est même pas continue en 0.
3. Montrer que la norme sur ℓ^1 admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions, et que pour $x \in \ell^1$ l'application $L(x)$ qui à $u \in \ell^1$ associe la dérivée de la norme en x dans la direction u, est linéaire continue. *Indication :* il faudra utiliser un résultat de calcul intégral.

Exercice 5. *L'inversion conforme*
Soit $(V, <,>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. On définit l'application :

$$J : \begin{cases} V \setminus \{0\} & \to V \setminus \{0\} \\ x & \mapsto \dfrac{x}{< x, x >} \end{cases}$$

1. Montrer que J est bijective et trouver l'ensemble de ses points fixes.
2. Montrer que J est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout x, $DJ(x)$ est un multiple d'une application orthogonale. (On dit que J est une application *conforme*).

Exercice 6. *Fonctions homogènes*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable et homogène de degré k, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, f(tx) = t^k f(x).$$

1. Calculer $Df(x) \cdot x$.
2. Montrer que $Df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est homogène de degré $k - 1$.

Exercice 7. *Gradients*
Soit H un espace de Hilbert réel, et soit $f : H \to \mathbb{R}$ différentiable. $Df(x)$ est une application linéaire continue de H dans $\mathbb{R}$, donc une forme linéaire continue. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un vecteur de H, noté $\nabla f(x)$, tel que :

$$Df(x) : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \langle \nabla f(x), h \rangle. \end{array}$$

Le vecteur $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.

1. Comment se traduit sur ∇f le fait que f est $\mathcal{C}^1$?
2. Trouver une formule pour le gradient d'une composée $H \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour la dérivée d'une composée $\mathbb{R} \to H \to \mathbb{R}$. Et pour $H \to H \to \mathbb{R}$ (en admettant l'existence d'adjoints dans H) ?
3. Justifier que le gradient, s'il est non nul, est la direction de la plus grande pente (c'est à dire que pour les chemins $\mathcal{C}^1$ $\gamma : [-1, 1] \to H$ tels que $\|\gamma'\| = 1$ et $\gamma(0) = a$, on a $(f \circ \gamma)'(0)$ maximal si et seulement si $\gamma'(0)$ est dans le sens et la direction de $\nabla f(a)$).
4. Pour $H = \mathbb{R}^n$, donner les coordonnées de ce vecteur dans la base canonique pour les applications suivantes. Trouver les points critiques et donner une représentation graphique.
   (a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
   (b) $g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - x_2^2$

(c) $h(x_1, x_2) = x_1^2 + e^{-x_2^2}$

5. Différencier puis calculer le gradient de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Vect}(a)$ par $f(x) = \log(\|a \wedge x\|^2) e^{-\langle b,x \rangle}$, avec $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ fixés.

Exercice 8. *Application des accroissements finis*

Soit g une application différentiable de $E \to E$, E – espace de Banach, telle que $||Dg|| \leq k$ pour $0 < k < 1$. Montrer que $f = Id + g$ est injective, puis que l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'une partie bornée B est bornée.

Exercice 9. *Évaluation*

Soit E un espace vectoriel et $U \subset K \subset E$ avec U ouvert et K un convexe compact. On note $\mathcal{C}^1(K)$ l'ensemble des fonctions $K \to \mathbb{R}$ que l'on peut prolonger à une fonction $\mathcal{C}^1$ sur E. Ces précautions rendent la norme $\|f\| = \sup_K |f| + \sup_K \|df\|_{\mathcal{L}_C(E,\mathbb{R})}$ bien définie, qui fait de $\mathcal{C}^1(K)$ un espace de Banach.

Différencier l'application d'évaluation $\mathcal{C}^1(K) \times U \to \mathbb{R}, (f, x) \mapsto f(x)$.

Exercice 10. *Prolongement $\mathcal{C}^1$ en dimension ≥ 2*

Soit E un espace de Banach de dimension supérieure ou égale à 2.

1. Soit f une fonction définie sur l'ensemble $K := \{x : 0 < ||x|| < R\}$ qui y est différentiable (à valeurs dans n'importe quel espace de Banach F), avec $||Df(x))|| \leq k$. Montrer que f est k-lipschitzienne.
2. En s'inspirant de la preuve du théorème de prolongement vu en cours, montrer que si f est une fonction définie sur un voisinage épointé de 0, qui est différentiable, et dont la limite de la différentielle en 0 existe dans $L(E, F)$ et vaut L, alors f se prolonge par continuité en 0, y est différentiable de différentielle égale à L.

Exercice 11. *Cas d'égalité*

On se place dans les hypothèses du théorème des accroissements finis pour une application $f : [a, b] \to F$ et une application $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, c'est à dire on suppose que f et g sont dérivables à droite sur $]a, b[$, continues sur $[a, b]$, avec $\|f'_d\| \leq g'_d$ sur $]a, b[$.

On suppose de plus $||f(b) - f(a)|| = g(b) - g(a)$.

1. Montrer qu'alors, pour tous x, y on a aussi $||f(y) - f(x)|| = g(y) - g(x)$.
2. Si F est un espace de Hilbert avec sa norme, montrer qu'alors $f([a, b])$ est contenu dans une droite affine.
3. Est-ce toujours vrai sans l'hypothèse Hilbert ? Par exemple dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$?