Mécanique analytique

camille.eloy@ens-lyon.fr

Motivations

Connaissances en physique fondamentale (en gros) :

- Mécanique et loi de Newton (PFD),
- Électromagnétisme et éq. de Maxwell (+ modèle standard).

Inconvénients de ces formulations :

- elles sont différentes,
- comportement sous changement de coordonnées. Pour le PFD

cartésien : $m\ddot{x}_i = F_i$

cylindrique : $\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho \\ m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = F_\theta \end{cases}$ → forme des équations propre à un choix de coordonnées.

⇒ pas <u>covariante</u> (explicitement).

- pas de méthode systématique d'étude des quantités conservées.
- quantification ?

Ce qu'on va voir :

- Il existe une formulation commune aux lois de Newton, à l'E.M. et à toutes les interactions fondamentales ; elle est covariante.
- Lien étroit entre quantités conservées et symétries (Noether).
- Méthode canonique de quantification.

Bibliographie

- Notes et exercices de S. Lacroix (portail des études),
- Landau, Lifschitz, Mécanique,
- Goldstein, Classical Mechanics

À l'agrégation

- 2010 C - Hamiltonien et pb de Kepler
- 2016 C - Très complet.

Chapitre 1

Principe variationnel et mécanique Lagrangienne

1- Notations

Problème général : on cherche à extrémaliser une quantité $S[q]$, appelée action, dépendant d'une fonction $q : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,
$$t \longmapsto q(t)$$

décrite par n fonctions $q_i : [a,b] \to \mathbb{R}$.

t est le paramètre ; les q_i sont les coordonnées généralisées.

L'action a la forme :

$$S[q] = \int_a^b dt\, \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t),$$

L'action a la forme :

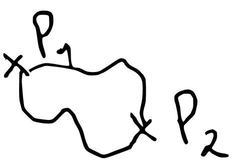
$$S[q] = \int_a^b dt\, \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t),$$

où $\mathcal{L}$ est un Lagrangien, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q, \dot{q}, t) \longmapsto \mathcal{L}(q, \dot{q}, t).$$

L'action est une fonctionnelle : elle dépend d'une fonction.

<u>Exemples</u> : • chemin minimal entre deux points P_1 et P_2 du plan.



En coordonnées cartésiennes (x,y), longueur infinitésimale d'une courbe est $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

donc longueur de la courbe :

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

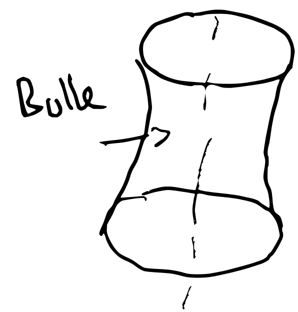
d'où une action : $S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

ici : $q \to y$; $t \to x$; $\mathcal{L}\left(y, \frac{dy}{dx}, x\right) = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

• Principe de Fermat : le trajet suivi par la lumière est une valeur stationnaire du chemin optique.

À 2d : $S[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; n(x,y) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

indice du milieu.



• Bulle de savon entre deux anneaux coaxiaux :

énergie de surface : $E = \gamma A$ $\left(\begin{array}{l}\gamma : \text{tension sup.} \\ A : \text{aire}\end{array}\right)$

→ minimisation de A.

(cf 2016C).

2- Variation et équations d'Euler-Lagrange

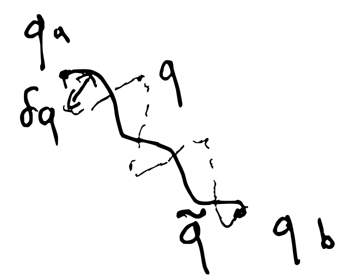
On considère l'action :

$$S[q] = \int_a^b \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt .$$

On cherche une fonction $\tilde{q}$ telle que S est localement extremale en $\tilde{q}$.

avec $\begin{cases} \tilde{q}(a) = q_a , \\ \tilde{q}(b) = q_b . \end{cases}$ (conditions initiale et finale)

$\rightarrow$ on veut $\tilde{q}$ un point stationnaire de S.



Pour une trajectoire q voisine, la variation

$$\delta S = S[q] - S[\tilde{q}]$$

doit être nulle au premier ordre en $\delta q = q - \tilde{q}$.

or $$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \Big[\mathcal{L}\big(\tilde{q}(t) + \delta q(t), \dot{\tilde{q}}(t) + \delta \dot{q}(t), t\big) - \mathcal{L}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\big) \Big]$$

$$\underset{\text{au premier ordre en } \delta q}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\big)\, \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\big)\, \delta \dot{q}_i(t) \Big]$$

or $$\delta \dot{q}_i = \dot{q}_i - \dot{\tilde{q}}_i = \frac{d}{dt}\left(q_i - \tilde{q}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\delta q_i\right)$$

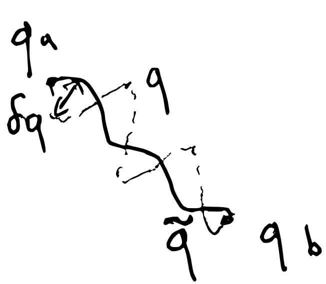
donc $$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \sum_{i=1}^{n} \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\big)\, \delta q_i(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\big(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t\big) \frac{d}{dt}\big(\delta q_i(t)\big) \Big]$$

$$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\, \delta q_i(t) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\, \frac{d}{dt}(\delta q_i(t)) \right]$$

$$\overset{\mathrm{IPP}}{=} \int_a^b dt \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right) \right] \delta q_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t)\, \delta q_i(t) \right]_{t=a}^{t=b} .$$



Par définition, $\begin{cases} \tilde{q}(a) = q(a) = q_a \\ \tilde{q}(b) = q(b) = q_b \end{cases}$

donc $\delta q_i(a) = \delta q_i(b) = 0$.

donc finalement :

$$\delta S[\tilde{q}] = \int_a^b dt \sum_{i=1}^{n} \delta q_i(t) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right) \right].$$

Stationnarité de S en $\tilde{q}$ $\Leftrightarrow$ $\delta S[\tilde{q}] = 0$ (au premier ordre en δq) $\forall \delta q$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) = 0.}$$

souvent simplifié en : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$, $i \in [\![1, n]\!]$

Ce sont les équations d'Euler-Lagrange.

Exemples : • minimisation de la longueur d'une courbe,

on avait $\mathcal{L}(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1+\dot{y}^2}$.

Euler-Lagrange : $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$

donc $\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right) = 0$

donc $\dot{y}^2 = \frac{c^2}{1-c^2}$, c une constante

donc $y = Ax + B$, A, B constantes

donc le chemin le plus court entre deux points dans le plan est la ligne droite.

- Principe de Fermat :

E-L $\Rightarrow$ l'équation des rayons lumineux $\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \vec{\nabla} n$.

- Bulle de savon : caténoïde.

3- Mécanique Lagrangienne

On cherche maintenant à exprimer le PFD comme un principe variationnel.

Considérons un point matériel de position $\vec{x}$, de masse m, soumis à une force $\vec{F}$ dérivant d'un potentiel $V(\vec{x},t)$ ne dépendant pas des vitesses.

PFD : $$m\ddot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}(t),t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t),t).$$

PFD : $m\ddot{x}_i(t) = F_i(\vec{x}(t),t) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}(\vec{x}(t),t)$.

Considérons le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x},t).$$

Alors : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$; $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i$

Donc Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \iff m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \text{ (PFD)}.$$

Le PFD est équivalent à un principe variationnel pour l'action

$$\boxed{S[\vec{x}] = \int_a^b dt\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2(t) - V(\vec{x}(t),t)\right)}.$$

De manière générale, pour un système soumis à des forces conservatives, on peut définir le Lagrangien :

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V,}$$

avec T l'énergie cinétique du système et V son énergie potentielle.

<u>Exemple</u> : pour N particules de position $\vec{x}^{(a)}$ et masses $m^{(a)}$, interagissant par un $V(\vec{x}^{(a)}, t)$,

$$\mathcal{L}(\vec{x}^{(a)}, \dot{\vec{x}}^{(a)}, t) = \sum_b \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^{(b)\,2} - V(\vec{x}^{(a)}, t).$$

<u>Remarques</u> : • E.M. et tout le modèle standard admettent une formulation Lagrangienne. Pour E.M. : $S = \int dt\, d^3x\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, avec $F = F(\vec{E}, \vec{B})$.

• Il existe des formulations pour les systèmes non-conservatifs (cf. exercices). Par exemple en considérant un potentiel "généralisé" qui dépend des vitesses.

C'est le cas pour une particule chargée dans un champ E.M. :

$V = q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$, avec
q : charge
$\vec{v}$: vitesse
$\Phi, \vec{A}$: potentiels scalaire et vecteur.

(V donne Lorentz par E.L.).

4 - Propriétés des équations d'Euler-Lagrange

4-1 - Covariance sous changement de coordonnées

On considère un changement de coordonnées inversible :

$$q \mapsto q' = f(q,t),$$

d'inverse $q' \mapsto q = g(q',t)$. Pour les vitesses :

$$\dot{q} \to \dot{q}' = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

et $\dot{q}' \mapsto \dot{q} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}$.

$$q' \mapsto q = g(q', t) \quad , \quad \dot{q}' \mapsto \dot{q} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial \dot{q}'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t} .$$

De même, la transformation de toute grandeur scalaire $\mathcal{G}$ est donnée par :

$$\mathcal{G}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{G}(q, \dot{q}, t)$$

donc

$$\mathcal{G}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{G}\left(g(q', t), \sum_i \frac{\partial g}{\partial \dot{q}'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial g}{\partial t}, t\right) .$$

Or $\mathcal{L}$ est une fonction scalaire, donc :

$$S'[q'] = \int_a^b dt \, \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \int_a^b dt \, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = S[q]$$

L'extrémalisation de S' par rapport à q' est strictement équivalente à celle de S par rapport à q.

Les équations d'Euler-Lagrange sont covariantes :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}'_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q'_i} = 0.}$$

Le système ne dépend pas de la manière dont on le paramètre.

/!\ $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ne sont pas les mêmes fonctions. On a montré une covariance, et non une invariance (symétrie) du système.

<u>Exemple</u> : particule massive dans un potentiel V

en cartésien : $q_1 = x, q_2 = y$

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, t)$$

en cylindrique : $q_1 = \rho, \; q_2 = \theta$

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \dot{\rho}, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - V'(\rho, \theta, t).$$

4-2- Non-unicité du Lagrangien

Considérons :
$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt},$$

avec F une fonction de (q,t). Alors :

$$\bar{S}[q] = \int_a^b dt \left(\mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \frac{dF}{dt}(q,\dot{q},t) \right)$$
$$= S[q] + \underbrace{F(q(b),b) - F(q(a),a)}_{\text{constante, car conditions initiale et finale fixe lors de la variation.}}$$

Donc $\bar{S}[q]$ et $S[q]$ sont extremales pour les mêmes $\tilde{q}$,

et les équations d'Euler-Lagrange sont les mêmes.

5 - Optimisation sous contraintes

Contrainte : réduction du nombre de degrés de liberté du système, par exemple par des données imposées (aire, longueur, ...).

On en distingue plusieurs types :

- contraintes holonomes, qui peuvent être écrites comme une équation algébrique sur les coordonnées généralisées,
- contraintes non holonomes, les autres.

<u>Exemple</u> : mouvement d'un point matériel de position (x, y) sur un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. Donc contrainte :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

qui peut se traduire par : $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Donc holonome.

Par contre, si mvt peut se faire dans le disque : $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, non-holonome.