Rappels cours 1

- Fonctionnelles dérivant d'un Lagrangien :
  - Action $S[q] = \int dt\, \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$,
  - Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$,
  - Paramètre t,
  - Coordonnées généralisées q_i, $i \in [\![1, n]\!]$ et vitesses $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$.

- Équations d'Euler-Lagrange :

$$S[q] \text{ extremale} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

(en absence de contrainte)

- Méthode de résolution des problèmes variationnels :
  - mettre le problème sous forme variationnelle,
  - identifier le paramètre, les coordonnées généralisées et le Lagrangien,
  - écrire les équations d'Euler-Lagrange,
  - les résoudre.

5 - Optimisation sous contraintes

Contrainte : réduction du nombre de degrés de liberté du système, ou de leur domaine de définition, par exemple par des données imposées (aire, longueur, ...).

On en distingue plusieurs types :

- contraintes holonomes, qui peuvent être écrites comme une équation algébrique sur les coordonnées généralisées,
- contraintes non holonomes, les autres.

Exemple : mouvement d'un point matériel de position (x, y) sur un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R. Donc contrainte :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

qui peut se traduire par : $f(x,y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Donc holonome.

Par contre, si mvt peut se faire dans le disque : $x^2 + y^2 \leq R^2$, non-holonome.

En présence de telles contraintes (ici holonomes), les q_i ne sont pas indépendants, donc δq_i non-plus. Or :

$$\delta S[q] = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) \delta q_i \, dt ,$$

et en l'absence de contrainte, on a utilisé $\delta S = 0 \Leftrightarrow$ Euler-Lagrange. Ce n'est plus possible en présence de contraintes.

Pour décrire l'optimisation contrainte : multiplicateurs de Lagrange.

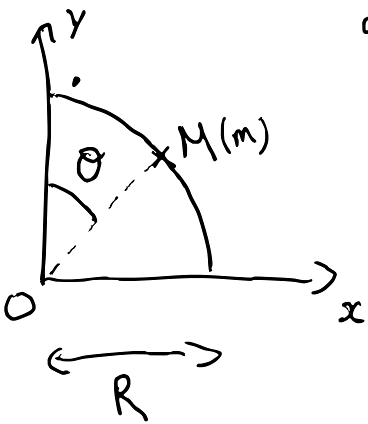
Pour m contraintes holonomes : $g_k(q,t) = 0$, $k \in [\![1, m]\!]$

On considère le Lagrangien :

$$\bar{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t ; \lambda_k) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \sum_k \lambda_k g_k(q, t)$$

En considérant les λ_k comme des coordonnées généralisées, les équations d'E-L- pour λ_k donnent la contrainte g_k.

Celles sur q_i donnent les équations sous contraintes.



Exemple : On considère un objet M ponctuel, de masse m, se déplaçant à la surface d'un cylindre, sous l'effet de la pesanteur (pas de frottement). Le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, paramétré par les coordonnées polaires (r, θ). On note R le rayon du cylindre.

Contrainte : $f(r) = r - R = 0$.

On considère donc le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t ; \lambda) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mg\, r \cos(\theta) + \lambda (r - R).$$

D'où :

$\mathcal{E}\mathcal{L}/\lambda$: $r = R$,

$\mathcal{E}\mathcal{L}/r$: $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos(\theta) - \lambda = 0$,

$\mathcal{E}\mathcal{L}/\theta$: $mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = mgr\sin(\theta)$.

$\rightarrow \lambda$ joue le rôle de réaction du support.

Chapitre 2
Symétries et lois de conservation

1 - Symétrie d'un système Lagrangien

Considérons un système de Lagrangien $\mathcal{L}(q,\dot q,t)$, dont la dynamique est donnée par E-L-, notée : $\mathcal{E}\mathcal{L}(q,\dot q,\ddot q,t)=0$

On considère une transfo. inversible $q \mapsto q' = f(q,t)$.

Sous cette transfo,

$$\mathcal{L}'(q',\dot q',t) = \mathcal{L}(q,\dot q,t) \qquad (1)$$

ce qui donne la covariance :

$$\mathcal{E}\mathcal{L}'(q',\dot q',\ddot q',t)=0 \iff \mathcal{E}\mathcal{L}(q,\dot q,\ddot q,t)=0.$$

On définit une symétrie du système comme une transfo. telle que les éq. d'E-L pour $\mathcal{L}'$ sur q' sont les mêmes que celles pour $\mathcal{L}$ sur q (et non équivalence), i.e. les fonctions $\mathcal{E}\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}\mathcal{L}'$ sont les mêmes.

On a vu dans le chap. 1 qu'une condition suffisante est:

$$\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) + \frac{dG}{dt}.$$

Elle est en fait nécessaire. Et avec la covariance (1) :

$$\boxed{\mathcal{L}(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dG}{dt}(q, \dot{q}, t).} \quad (2)$$

Si cette cond. est vérifiée, la transfo. est une symétrie de $\mathcal{L}$.

2- Symétries continues et infinitésimales

Famille de transfo. : $q \mapsto q^{(\alpha)} = f(q,t;\alpha)$,

qui dépend de α de manière lisse et t.q. pour $\alpha = 0$, $q^{(0)} = q$.

C'est une symétrie continue du Lagrangien si c'est une symétrie de $\mathcal{L}$ pour toute valeur de α, i.e. avec (2) ssi $\exists\, \mathcal{G}$ t.q.

$$\mathcal{L}(q^{(\alpha)}, \dot{q}^{(\alpha)}, t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \frac{d\mathcal{G}}{dt}(q,\dot{q},t;\alpha).$$

Avec $q^{(0)} = q$, $\mathcal{G}(q,\dot{q},t;0) = 0$.

Dans le cas particulier d'une transfo. infinitésimale. $\alpha = \varepsilon + o(\varepsilon)$, on se restreint à l'ordre 1 en ε :

- $$q^{(\alpha)} = f(q,t;\varepsilon + o(\varepsilon))$$
$$= f(q,t;0) + \varepsilon g(q,t) \quad ; \quad g(q,t) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(q,t;0)$$
$$= q + \delta q, \quad \delta q = \varepsilon g(q,t).$$

- $$G(q,t;\alpha) = \varepsilon F^1(q,t).$$

La condition de symétrie infinitésimale est donc :

$$\boxed{\begin{gathered} \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \varepsilon \frac{dF^1}{dt}(q,\dot{q},t) \\ \Leftrightarrow \quad \delta\mathcal{L} = \varepsilon \frac{dF^1}{dt}. \end{gathered}}$$

<u>Exemples</u> : - oscillateur harmonique 2d

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{k}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

$\mathcal{L}$ est invariant sous les rotations :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)} = \cos(\alpha)\,x + \sin(\alpha)\,y, \\ y^{(\alpha)} = -\sin(\alpha)\,x + \cos(\alpha)\,y. \end{cases}$$

Pour $\alpha = \varepsilon \ll 1$

$$x^{(\alpha)} = x + \varepsilon y$$

$$\delta x = x^{(\alpha)} - x = \varepsilon y$$

Version infinitésimale : $\begin{cases} \delta x = \varepsilon y, \\ \delta y = -\varepsilon x. \end{cases}$

. chute libre : $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$

Translation : $z^{(\alpha)} = z + \alpha$

Alors $\mathcal{L}(z^{(\alpha)}, \dot{z}^{(\alpha)}, t) = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz - mg\alpha$

$$= \mathcal{L}(z, \dot{z}, t) + \frac{d}{dt}\left(-mg\alpha t\right)$$

Donc <u>symétrie</u>. Infinitésimale : $\delta z = \varepsilon$.

3- Théorème de Noether

Existence de sym. infinitésimale $\Rightarrow$ lois de conservation (si les eq. du mvt sont vérifiées).

3-1- Transformation des coordonnées

Pour $q' = q^{(\alpha)} = q + \delta q$, avec $\delta q = \varepsilon g(q,t)$.

Alors la condition $\delta \mathcal{L} = \varepsilon \dfrac{d\mathcal{F}}{dt}$ prend la forme :

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \varepsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt},$$

et comme pour E-L :

$$\sum_i \left[\delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \right] = \varepsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

$$\sum_i \left[\delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\right] = \varepsilon \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Si les éq. du mvt sont vérifiées :

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i(q,t) - \mathcal{F} \right] = 0$$

D'où la quantité conservée :

$$\boxed{Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} g_i - \mathcal{F}\,.}$$

$\rightarrow$ charge de Noether.

Remarque : c'est une version simplifiée, pour une transfo. à un seul paramètre.
Dans le cas général, il y a autant de charges conservées que paramètre de la transfo.

Exemples : • Translation spatiale. Système de deux part. à une dimension interagissant $V(|q_1 - q_2|)$:

Pour $\delta q_i = \varepsilon$: $\dot{q}_i' = \dot{q}_i$, $q_1' - q_2' = q_1 - q_2$.

Donc $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - V(|q_1 - q_2|)$

est invariant.

La charge conservée est : $Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2$

$\rightarrow$ quantité de mvt totale.

• Oscillateur harmonique et rotation :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \; ; \quad \begin{cases} \delta x = \varepsilon y \, , \\ \delta y = -\varepsilon x \, . \end{cases}$$

donc $$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}(-x) = m\dot{x}y - m\dot{y}x$$

$$Q = m(\vec{v} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{e}_z$$

→ moment cinétique selon l'axe de rotation.

• Chute libre :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z} - mgz \; ; \quad \delta z = \varepsilon \; ; \quad \delta \mathcal{L} = -\varepsilon \frac{d(mgt)}{dt}$$

donc $$Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \times 1 - (-mgt) = m\dot{z} + mgt.$$

3-2- Translation temporelle

Translation infinitésimale : $t \mapsto t' = t + \delta t$; (q_i invariants)

Si c'est une symétrie :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t + \delta t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = 0$$

(on peut toujours se ramener à $F = 0$ pour ce cas).

donc $\delta t \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, pas de dépendance explicite en t.

Pour identifier la quantité conservée, partons :

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

donc $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \iff \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = 0$

$$\iff \frac{d\mathcal{L}}{dt} - \sum_i \left[\dot{q}_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \right] = 0$$

donc si les éq. sont vérifiées :

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = 0$$

Quantité conservée : $\boxed{\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}}$ → Hamiltonien.

Exemple : Particule dans un potentiel $V(q)$.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + V(q) \longrightarrow \text{énergie totale}.$$

Chapitre 3
Mécanique Hamiltonien

On considère une système décrit par $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.

1- Moments conjugués et Hamiltonien

. On définit les moments conjugués p_i associés q_i par :

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}.$$

Dans le formalisme Hamiltonien, les variables sont (q, p) (et non $(q, \dot{q})$).

Pour faire le chgt de variable, on se limite au cas où

$p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$ est inversible.

Chgt de variable par transformée de Legendre du Lagrangien :

$$\boxed{\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L},}$$

Hamiltonien

en prenant garde à tout exprimer en (q, p, t) :

$$\mathcal{H}(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(q,p,t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q,p,t), t).$$

Exemples : • particule dans un potentiel $V(q,t)$ $\quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$

alors $\mathcal{H} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q,t) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + V(q,t).$

• particule chargée (charge e) dans un champ e.m. :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^2 - e\left(\Phi(\vec{q},t) - \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q},t)\right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^{\,2} - e\left(\Phi(\vec{q},t) - \dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q},t)\right)$$

donc $p_i = m\dot{q}_i + eA_i$.

donc $\mathcal{H} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}$

$$= \sum_i \left(m\dot{q}_i + eA_i\right)\dot{q}_i - \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^{\,2} + e\Phi(\vec{q},t) - e\dot{\vec{q}} \cdot \vec{A}(\vec{q},t)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{q}}^{\,2} + e\Phi(\vec{q},t)$$

donc $\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} + e\Phi}$.

2- Équations de Hamilton

Déterminons des éq. du mvt, à partir des équations d'Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j(q,p,t) - \mathcal{L}\left(q, \dot{q}(q,p,t), t\right)\right)$$

$$= \dot{q}_i(q,p,t) + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}(q,p,t)$$

$$- \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}(q,p,t) \times \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\left(q, \dot{q}(q,p,t)\right)}_{p_j}$$

donc $\boxed{\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dfrac{dq_i}{dt}}$.

$\cdot \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j(q,p,t) - \mathcal{L}(q,\dot{q}(q,p,t),t)\right)$

$= \sum_j p_j \dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \sum_j \dfrac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}(q,p,t) \underbrace{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(q,\dot{q}(q,p,t),t)}_{p_j}$

$= -\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$

et avec Euler-Lagrange : $-\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\dfrac{d}{dt} p_i$

donc $\boxed{\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dfrac{dp_i}{dt}}$.

D'où éq. de Hamilton :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}}$$

(équivalentes à E-L-).

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}}$$

Exemple : particule dans un potentiel $V(\vec{q},t)$, $\mathcal{H} = \dfrac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{q},t)$

donc
$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{p_i}{m} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i} = F_i \end{cases}$$

$\Rightarrow$ PFD.

Remarque : éq. de Hamilton dérive d'un principe variationnel pour :

$$S[q,p] = \int (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H})\, dt.$$

Bilan et comparaison avec la formulation Lagrangienne

Formulation	Lagrangienne	Hamiltonienne
variables	$q, \dot{q}, t$	q, p, t
Fonction Fonda.	$\mathcal{L}$	$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$
Dynamique	$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$	$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$
Pour N particules dans IR3	3N équations du second ordre	6N équations, du premier ordre.