Rappel cours 2

- Optimisation sous contrainte : pour un système de Lagrangien $\mathcal{L}$, soumis aux contraintes holonomes $g_k(q,t)=0$, on considère le Lagrangien $$\bar{\mathcal{L}}(q,\dot q,t;\lambda_k)=\mathcal{L}(q,\dot q,t)+\sum_k \lambda_k g_k(q,t).$$

- Transfo infinitésimale : $q_i \to q_i+\delta q_i = q_i+\varepsilon g_i + o(\varepsilon)$.

- Condition de symétrie :
$$\delta\mathcal{L}=\mathcal{L}(q+\delta q,\dot q+\delta\dot q,t)-\mathcal{L}(q,\dot q,t)=\varepsilon\frac{d\Gamma}{dt}(q,\dot q,t)+o(\varepsilon).$$

- Théorème de Noether : symétrie infinitésimale $\Rightarrow$ quantité conservée
$$Q=\sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}g_i-\Gamma.$$

- Mécanique Hamiltonienne :

moments conjugués : $p_i=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_i}$

Hamiltonien : $\mathcal{H}=\mathcal{H}(q,p)=\sum p_i\dot q_i-\mathcal{L}$

équations de Hamilton : $\dot q_i=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}$; $\dot p_i=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}$.

3- Crochet de Poisson

A une observable ; $A = A(q, p, t)$.

donc :
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial A}{\partial p_i}$$

$$\underset{\text{eq. Hamilton}}{=} \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right)$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\},}$$

avec le crochet de Poisson :
$$\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

$$\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

<u>Propriétés</u> : • antisymétrique : $\{f,g\} = -\{g,f\}$,

• bilinéaire,

• règle de Leibniz :

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g,$$

• identité de Jacobi :

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0.$$

<u>Remarque</u> : propriétés analogues au commutateur en MQ.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\}$$

donc en particulier, $\displaystyle \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$

$\Rightarrow$ le Hamiltonien est conservé ssi pas de dépendance explicite en t.

Pour un problème complet : 2040C.

<u>Remarque</u> : $\{p_i, p_j\} = 0$; $\{q_i, q_j\} = 0$; $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$ (canoniques)

$\{f(p,q), g(p,q)\}$ à calculer avec les crochets canoniques (et pas la déf).

Ce qu'on aurait pu aborder :
- transfo. canonique,
- structure des groupes de symétrie,
- charge conservée $\Rightarrow$ sym. infinit.
(recip. Noether).

Relativité restreinte

Bibliographie

- BFR, Mécanique 1,
- Langlois, Introduction à la relativité,
- Jackson, Classical Electrodynamics.

À l'agrégation

- 2017 C (quelques questions),
- 2003 A (cinématique, Maxwell),
- 1996 C (cinématique et dynamique),
- LP.

Chapitre 1

De la relativité galiléenne à la relativité restreinte

1 - Relativité galiléenne et électromagnétisme

XVIII^e : mécanique newtonienne, basée sur relativité galiléenne :

. la donnée de référentiels galiléens (inertiels, dans lesquels un objet pseudo-isolé est en MRU),

. la transformée de Galilée, permettant le passage d'un réf. galiléen $\mathcal{R}$ à un autre $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}\, t, \\ t' = t. \end{cases}$$

Ces transfos. vérifient le principe de relativité : laissent les lois de la physique (PFD) inchangées. $\Rightarrow$ Pas de mouvement absolu.

XIX^e : électromag. + éq. de Maxwell, qui prédisent notamment la vitesse de la lumière dans le vide $c = 2{,}99792458 \times 10^8\ m.s^{-1}$!
Or aucun référentiel n'est précisé pour l'établissement de ces équations, et on peut vérifier qu'elles sont pas invariantes sous la transformée de Galilée.

Deux de vue possibles :

1 - existence d'un réf. privilégié, absolu, où les lois de l'électromag. sont vérifiées, on le nomme l'éther.

=> les éq. de Maxwell violent de le principe de relativité, et permettent de mettre en évidence un mvt absolu :
dans tout réf. inertiel $\mathcal{R}'$, de vitesse $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_e}$ par rapport à l'éther, la vitesse de la lum. dans le vide est : $\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}_e}$.

2- Les équations de Maxwell sont valables dans tous les réf. inertiels. Le principe de relativité est préservé, mais il faut revoir la mécanique newtonienne.

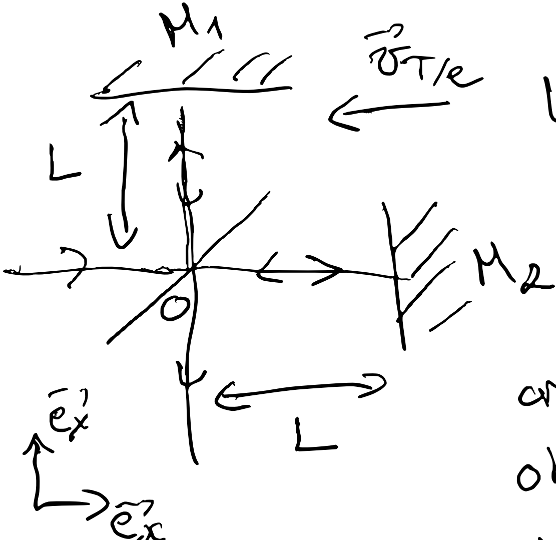
→ trancher par l'expérience.

2- Expérience de Michelson et Morley

1887, puis répétée plusieurs fois.

Terre se déplace à environ 30 $km\,s^{-1}$ au soleil, et qu'il y a peu de chance que l'éther soit lié à la Terre, on devrait pouvoir mesurer le mouvement de la Terre par rapport à l'éther.

Interféromètre (dit "de Michelson") :



Si la Terre est en mvt dans l'éther, la vitesse de la lumière n'est pas la m̂ dans les deux bras de l'interf.

En faisant tourner l'appareil de $\pi/2$, on inverse le rôle des bras, et on devrait observer un déplacement du système d'interférences.

On suppose $\vec{v}_{T/e}$ dans la même direction que OM_2.

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v}_{T/e} \quad ; \quad \vec{v}_{T/e} = -v\,\vec{e}_x$$

• Bras OM_2 : $\vec{c}\,' = \pm c'\,\vec{e}_x$
$\vec{c} = \pm c\,\vec{e}_x$ $\Rightarrow$ $c'^2 = (\pm c + v)^2$

donc temps de parcours OM_2 :

$$t_{//} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1-(v/c)^2}$$

$$\simeq \frac{2L}{c}\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + O(v^4/c^4)\right)$$

• Bras OM_1 : $\vec{c}\,' = \pm c' \vec{e_x}$, et $\vec{c} = \vec{c}\,' + \vec{v}_{T/e}$

donc $c^2 = c'^2 + v^2$

donc $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$

$$t_\perp = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} \simeq \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + O(v^4/c^4)\right)$$

En sortie de l'interféromètre :

$$\boxed{\Delta t = t_{//} - t_\perp \simeq \frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + O(v^4/c^4).}$$

Avec les données de 1887, Michelson et Morley pouvaient espérer un déplacement de 0,4 frange après permutation des bras, avec une précision de 0,02 frange. Mais ils n'ont mesuré aucun déplacement.

3 - Vers une nouvelle relativité restreinte

Bcp d'autre expérience : dont Fizeau (cf. Langlois 2.4.3)
Bertozzi ...

⇒ conclusion : pas possible de mettre en évidence le mvt absolu, et remise en cause de l'existence de l'éther.

⇒ remise en cause de relat. galiléenne, de la transfo. de Galilée, et du PFD.

Chapitre 2 :

Principe de relativité restreinte et cinématique relativiste

1- Principe de relativité restreinte

Postulats : 1- Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel inertiel.

2- Les équations de Maxwell sont des lois de la physique.

Remarque : ce premier postulat est un cadre vide, il faut préciser les lois de la physique, et les transfos. entre réf. inertiels.

Exemple : méca. newtonienne => relativité galiléenne.

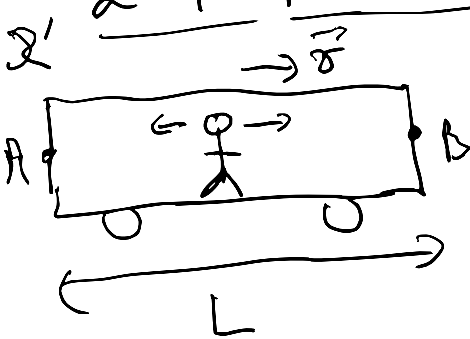
Corollaire : invariance de la vitesse de la lumière dans les réfs inertiels.

2 - Conséquences cinématiques

D'abord avec des expériences de pensée.

On note $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre (supposé inertiel) et $\mathcal{R}'$ réf. attaché à un train de vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}'$ inertiel. $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont synchronisés en $t = t' = 0$.

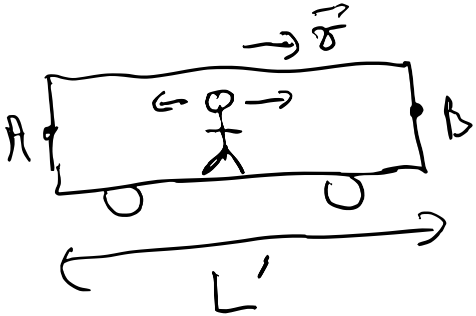
2-1- Perte de simultanéité absolue



un observateur au milieu du train, dans $\mathcal{R}'$, envoie en même temps des faisceaux lumineux vers l'avant et l'arrière du train.

Question : temps d'arrivée des signaux à l'avant et l'arrière.

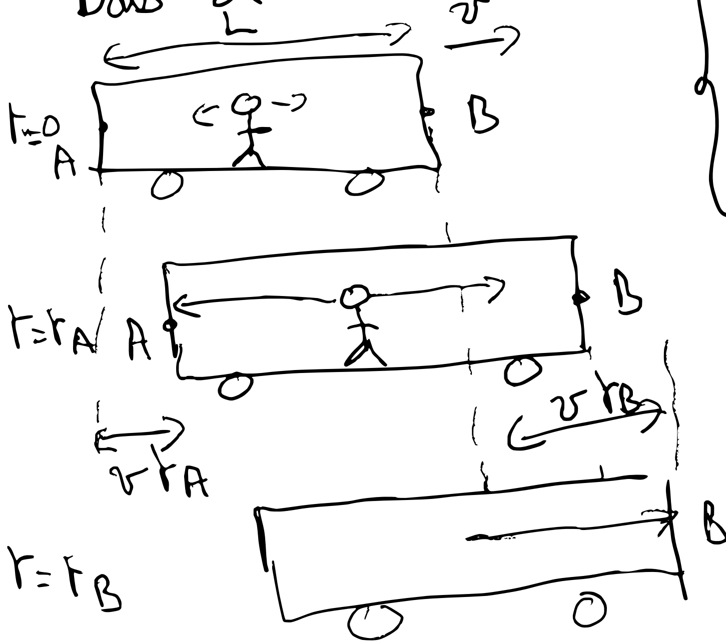
Dans $\mathcal{R}'$:



$$ct'_A = ct'_B = L'/2$$

donc $t'_A = t'_B$, les arrivées des rayons sont simultanées. $\Delta t' = 0$.

Dans $\mathcal{R}$:



$$\begin{cases} ct_A = \dfrac{L}{2} - v t_A, \\ ct_B = \dfrac{L}{2} + v t_B. \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} t_A = \dfrac{L}{2(c+v)}, \\ t_B = \dfrac{L}{2(c-v)}. \end{cases}$$

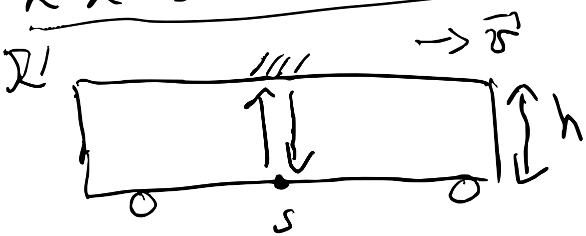
Les évènements ne sont pas simultanés dans $\mathcal{R}$:

$$\Delta t = Lv/(c^2 - v^2) \neq 0.$$

<u>Plus de notion absolue de simultanéité.</u>

$\Delta t \to 0$ pour $v \ll c$.

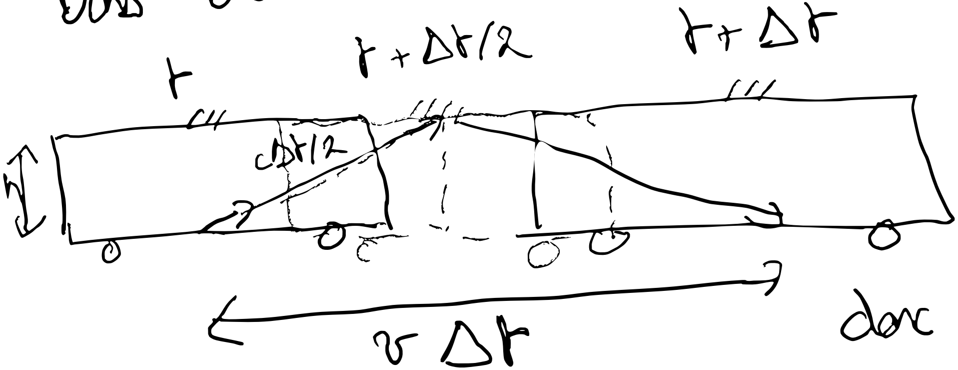
2-2- Dilatation du temps



Temps mis par la lumière pour ce trajet ?

Dans $\mathcal{R}'$: $\Delta t' = 2h/c$.

Dans $\mathcal{R}$: $\vec{v}$



$$\frac{c^2 \Delta t^2}{4} = h^2 + \frac{v^2 \Delta t^2}{4}$$

donc $\Delta t = \dfrac{2h}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

$$= \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

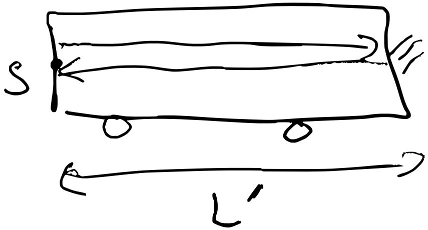
$\Delta t' = 2h/c$

donc $\underline{\Delta t = \gamma \Delta t'}$, $\underline{\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$.

$\gamma \geq 1$, vu du $\mathcal{R}$; l'horloge dans $\mathcal{R}'$ paraît ralentie.

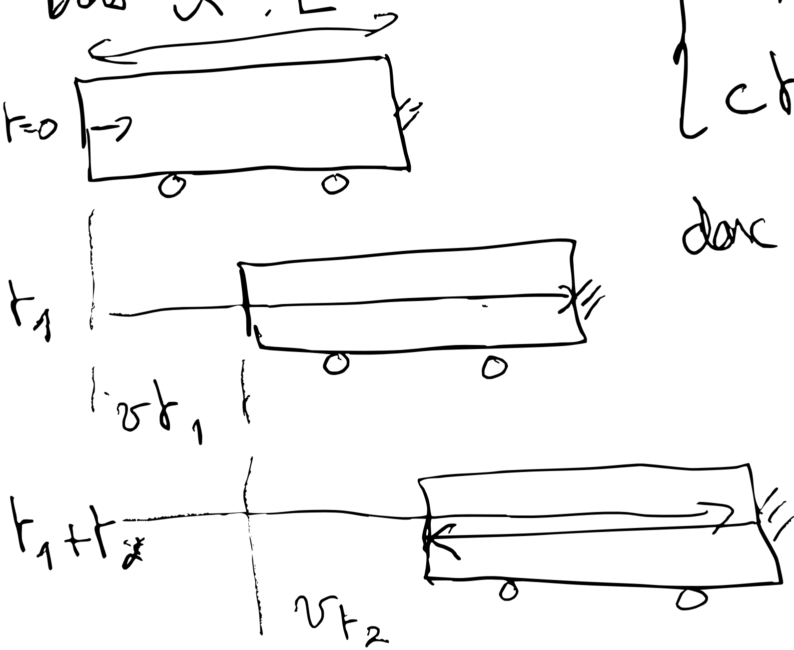
2-3- Contraction des longueurs

Dans $\mathcal{R}'$



$$\Delta t' = 2L'/c .$$

Dans $\mathcal{R}$: L



$$\begin{cases} ct_1 = L + vt_1 \\ ct_2 = L - vt_2 \end{cases}$$

donc $$\begin{cases} t_1 = \dfrac{L}{c-v} , \\ t_2 = \dfrac{L}{c+v} , \end{cases}$$

et $$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c}\gamma^2 .$$

Avec : $\Delta t = \gamma \Delta t'$, donc : $\left(\Delta t = \frac{2L}{c} \gamma^2, \Delta t' = 2L'/c \right)$

$$\boxed{L = \frac{L'}{\gamma}}.$$

$\gamma > 1$, dans $\mathcal{R}$ le train paraît plus court que dans $\mathcal{R}'$!