Séances de TD le matin du vendredi 12/02.

En deux groupes ($2 \times \simeq 10$), une séance de deux heures chacun.

Rappels cours 3

- Crochet de Poisson : $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$,

tel que $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\}$.

- Postulats de la relativité restreinte :

 1 - Les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel inertiel.

 2 - Les équations de Maxwell sont des lois de la physique.

3 - Invariant et transformations de Lorentz

Dans un référentiel inertiel muni d'un repère local $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ et d'une horloge donnant, on définit un évènement par la donnée d'une position $\vec{r} = (x, y, z)$ et d'un temps t.

C'est un vecteur de $\mathbb{R}^4$: $X^\mu = (ct, x, y, z)$, $\mu \in [\![1, 4]\!]$.

On peut montrer que les postulats (couplés à l'homogénéité de l'espace et du temps), impliquent l'invariance de l'intervalle d'espace-temps entre deux évènements $(ct_i, \vec{r_i})$, donné par son carré :

$$\boxed{\Delta s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\vec{r_2} - \vec{r_1})^2 .}$$

(Démo : sec. 2-1 de Langlois, ou annexe BFR).

$\Rightarrow$ permet de définir les transfos. entre référentiels inertiels, ce sont celles telles que $\underline{\Delta s' = \Delta s}$.

En particulier, si $\mathcal{R}$ inertiel et $\mathcal{R}'$ en translation uniforme selon $\vec{v_e} = v_e \vec{e_x}$ par rapport à $\mathcal{R}$, et si (Ox) et (Ox') coïncident et si les horloges sont synchronisées initialement ($t=0 \Rightarrow t'=0$), un événement (ct, x, y, z) de $\mathcal{R}$ est décrit dans $\mathcal{R}'$ par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \beta = v_e/c \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

C'est une transformation spéciale (boost) de Lorentz.
→ elle remplace la transformation de Galilée.

Explicitement :

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta\gamma x, \\ x' = -\beta\gamma ct + \gamma x, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases}$$

En plus de ces transformations, les différentes rotations et translations préservent aussi Δs.

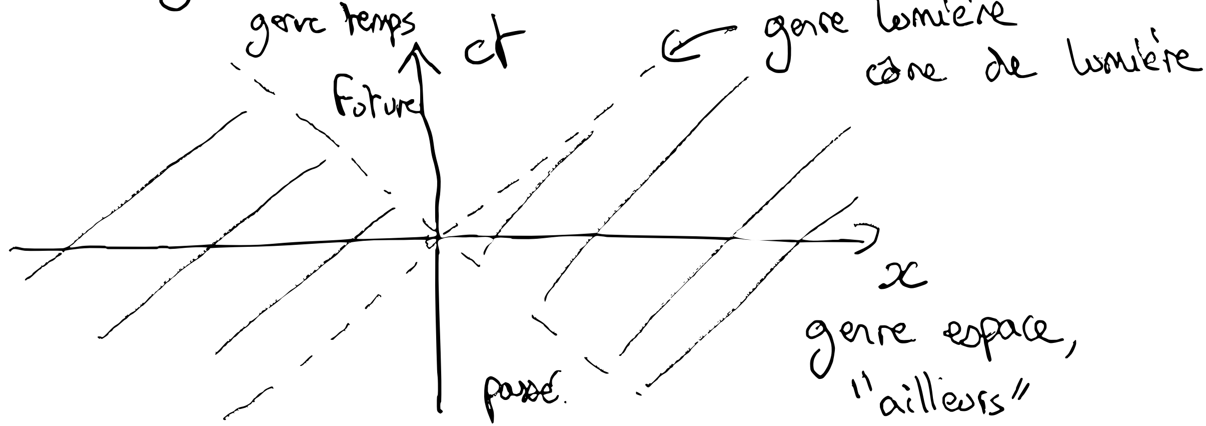
Trois catégories de couples d'événements :

- Si $\Delta s^2 > 0$, alors $c^2 \Delta t^2 > \Delta \vec{r}^{\,2}$ donc on peut relier les deux événements par un signal physique. L'intervalle est dit de <u>genre temps</u>.

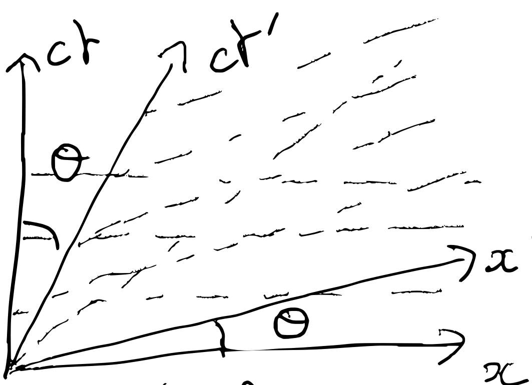
- Si $\Delta s^2 < 0$, on ne peut pas relier les événements avec un signal physique. → <u>genre espace</u>.

- Si $\Delta s^2 = 0$, seul un signal lumineux peut relier les événements. → genre lumière.

Représentation graphique en prenant $(0,0,0,0)$ et $(c\Delta t, \Delta\vec{r})$.



On peut aussi utiliser les diagrammes d'espace-temps pour représenter $\mathcal{R}'$ (boosté selon $\vec{e}_x$) dans $\mathcal{R}$.



$\tan(\theta) = \beta$

dans $\mathcal{R}'$, l'axe $\vec{e}_{x'}$ est le lieu des $\cancel{x'=0}$ → $t'=0$

or avec le boost, $ct' = \gamma ct - \beta\gamma x$

donc $\vec{e}_{x'}$ tq : $ct = \beta x$

Idem pour ct' : $x = ct\beta$.

4- Retour sur les conséquences cinématiques

4-1- Perte de simultanéité absolue

Considérons $(ct, \vec{r}_1)$ et $(ct, \vec{r}_2)$ dans $\mathcal{R}$ (simultanés dans $\mathcal{R}$).

Dans $\mathcal{R}'$:
$$\begin{cases} ct'_i = \gamma ct - \beta\gamma x_i , \\ x'_i = -\beta\gamma ct + \gamma x_i , \\ y'_i = y_i , \\ z'_i = z_i . \end{cases}$$

Donc : $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\beta\gamma (x_2 - x_1)$.

$\rightarrow$ La simultanéité est relative au réf. inertiel d'observation.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\beta\gamma\,(x_2 - x_1).$$

En particulier, il existe des réfs. inertiels où M_1 est antérieur à M_2, et où M_2 est antérieur à M_1.

<u>Causalité</u> ? Ici $\Delta s^2 = -\Delta \vec{r}^{\,2}$ (calcul dans $\mathcal{R}$), donc intervalle est de genre espace.

Les deux évènements ne sont pas reliés causalement !

Pour un intervalle de genre temps, le signe de Δt est préservé par les transfos. de Lorentz.

4-2- Dilatation du temps

Deux évènements dans $\mathcal{R}'$, au m̂ endroit à des instants différents (tic et tac d'une horloge immobile dans $\mathcal{R}'$) : $\Delta t' \neq 0$, $\Delta \vec{r}' = \vec{0}$.

Dans $\mathcal{R}$: $\Delta t = \gamma \Delta t' + \beta \gamma \Delta x'$

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

La période dans $\mathcal{R}$ paraît plus longue que celle dans $\mathcal{R}'$, où l'horloge est au repos.

/!\ Le raisonnement n'est pas symétrique, car $\mathcal{R}'$ est le seul réf où $\Delta \vec{r}' = \vec{0}$.

Confirmation expérimentale : Frisch et Smith (1963)

Sélection muons de vitesse v donnée à une altitude h, et mesure du nb de muons $N(h)$ en $z=h$ et $N(0)$ en $z=0$. Temps de demi-vie propre $\tau_0 = 2{,}2 \times 10^{-6}\,s$,

donc $N(0) = N(h)\, e^{-\Delta t/\tau_0}$, avec $\Delta t = h/v$.

Prédiction : mesure $\simeq 30$ muons par heure.

Mais ils mesurent $\simeq 410$ muons par heure.

En fait $v/c \simeq 0{,}995$, donc particules ultra-relativistes.

Temps de demi-vie dans le réf. terrestre : $\tau_0 \times \gamma$.

Avec la correction, la prédiction donne $\simeq 420$ muons par heure.

Expérience déjà faite en 1940 par Rossi et Hall (mais moins précise).

4-3- Contraction des longueurs

Pour mesurer la longueur d'un objet, il faut connaître la position de ces extrémités à un instant donné.

Soit une règle de longueur $\Delta x' = L'$ dans $\mathcal{R}'$.

Alors dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} c\Delta t = c\gamma \Delta t' + \beta\gamma \Delta x', \\ \Delta x = \gamma \Delta x' + c\beta\gamma \Delta t'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c\Delta t = c\gamma\, \Delta t' + \beta\gamma\, \Delta x', \\ \Delta x = \gamma\, \Delta x' + c\beta\gamma\, \Delta t'. \end{cases}$$

On mesure à $\Delta t = 0$, donc $\Delta t' = -\frac{\beta \Delta x'}{c}$.

alors : $\Delta x = +\gamma\, \Delta x' - \beta^2 \gamma\, \Delta x'$

$$= \gamma\, \Delta x' (1 - \beta^2) \quad , \text{ or } \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

donc $\Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\gamma}$.

et $\begin{cases} \Delta y' = \Delta y, \\ \Delta z' = \Delta z. \end{cases}$

donc $\boxed{L = \dfrac{L'}{\gamma}}$.

Il y a contraction des longueurs dans le sens du mouvement.

4-4- Loi de composition des vitesses

On considère dans $\mathcal{R}$ une particule de vitesse $\vec{w} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Dans $\mathcal{R}'$, boosté selon $\vec{v_e} = v_e \vec{e_x}$ dans $\mathcal{R}$:

$$
\left\{
\begin{aligned}
w'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c\, dt)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c} dx\right)} \\
&= \frac{w_x - v_e}{1 - \frac{v_e w_x}{c^2}}, \\
w'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta/c\, dx)} = \frac{1}{\gamma} \frac{w_y}{1 - \frac{v_e w_x}{c^2}}, \\
w'_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{w_y}{(1 - v_e w_x/c^2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour une transformation d'axe quelconque ; $\parallel$ et $\perp$ par rapport à $\vec{v_e}$

$$\boxed{\vec{w}'_{\parallel} = \frac{\vec{w}_{\parallel} - \vec{v_e}}{1 - \frac{\vec{v_e}\cdot\vec{w}}{c^2}} \; ; \; \vec{w}'_{\perp} = \frac{\vec{w}_{\perp}}{\gamma\left(1 - \frac{\vec{v_e}\cdot\vec{w}}{c^2}\right)}}.$$

Partie $\perp$ affectée !

Invariance de c :

$$|\vec{w}'|^2 = |\vec{w}'_{\perp}|^2 + |\vec{w}'_{\parallel}|^2$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v_e}\cdot\vec{w}}{c^2}\right)^2}\left[\frac{|\vec{w}_{\perp}|^2}{\gamma^2} + |\vec{w}_{\parallel}|^2 + |\vec{v_e}|^2 - 2\vec{v_e}\cdot\vec{w}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v_e}\cdot\vec{w}}{c^2}\right)^2}\left[\frac{|\vec{w}|^2}{\gamma^2} + |\vec{w}_{\parallel}|^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + |\vec{v_e}|^2 - 2\vec{v_e}\cdot\vec{w}\right]$$

$$|\vec{w}|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} \left[\frac{|\vec{w}|^2}{\gamma^2} + |\vec{w}_{/\!/}|^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + |\vec{v}_e|^2 - 2\,\vec{v}_e \cdot \vec{w} \right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} \left[|\vec{w}|^2 (1 - \beta^2) + \underbrace{|\vec{w}_{/\!/}|^2 \beta^2}_{\frac{|\vec{w}_{/\!/}|^2 \, \vec{v}_e^{\,2}}{c^2}} + |\vec{v}_e|^2 - 2\,\vec{v}_e \cdot \vec{w} \right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} \left[|\vec{w}|^2 (1 - \beta^2) + \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{v}_e}{c}\right)^2 + |\vec{v}_e|^2 - 2\,\vec{v}_e \cdot \vec{w} \right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} \left[|\vec{w}|^2 (1 - \beta^2) + \left(c - \frac{\vec{v}_e \cdot \vec{w}}{c}\right)^2 - c^2 + |\vec{v}_e|^2 \right]$$

$$|\vec{w}'|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v_e} \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} \left[|\vec{w}|^2 (1-\beta^2) + \left(c - \frac{\vec{v_e} \cdot \vec{w}}{c} \right)^2 - c^2 + |\vec{v_e}|^2 \right]$$

$$\boxed{|\vec{w}'|^2 = c^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\vec{v_e} \cdot \vec{w}}{c^2}\right)^2} (1-\beta^2)(|\vec{w}|^2 - c^2).}$$

Donc si $|\vec{w}|^2 = c^2$, $|\vec{w}'|^2 = c^2$.

Donc compatible avec l'invariance de c.

et si $|\vec{w}| < c$, $|\vec{w}'| < c$.

4-5- Effet Doppler relativiste

Effet Doppler : changement apparent de la fréq. d'un phénomène ondulatoire dû au mouvement relatif de la source et de l'observateur.

Description galiléenne : si période T_0, source à vitesse $\vec{v}$ et position $\vec{r}$ par rapport à un observateur dans $\mathcal{R}$,

période apparente dans $\mathcal{R}$:
$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}|} \right).$$

Description relativiste :
$$T = \gamma T_0 \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{r}|} \right),$$

avec la dilatation du temps.

$\longrightarrow$ il y a un effet transverse.

Relativité restreinte

Dynamique relativiste

1- Grandeurs dynamiques relativistes

1-1- Temps propre

Considérons une particule de masse m, de position ($\vec{r}$) en mouvement dans $\mathcal{R}$.

Pour un mvt infinitésimale entre t et t+dt, la particule décrit un intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = c\,dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2\left(c^2 - \vec{v}(t)^2\right),$$

où $\vec{v}(t)$ est la vitesse instantanée de la particule.

$$ds^2 = c\,dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2\left(c^2 - \vec{v}(t)^2\right)$$

On définit le temps propre de la particule par :

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2/\gamma(t)^2 \,,$$

où $\gamma(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2}}$ est le facteur de Lorentz instantané de la particule.