TD déplacé du 12/02 au 09/02, même horaire.

Rappels cours 4

- Postulats ⇒ invariance de l'intervalle d'espace-temps entre deux évènements :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t - \Delta \vec{r}^2 .$$

- Transformations entre réf. inertiels : Lorentz, boost $\vec{e}_x$: $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e & -\beta_e\gamma_e & 0 & 0 \\ -\beta_e\gamma_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_e = v_e / c , \\ \gamma_e^2 = \dfrac{1}{1-\beta_e^2} . \end{array} \right.$$

- Perte de simultanéité, dilatation du temps, contraction des longueurs, ...

Relativité restreinte

Dynamique relativiste

1- Grandeurs dynamiques relativistes

1-1- Temps propre

Considérons une particule de masse m, de position $(\vec{r})$ en mouvement dans $\mathcal{R}$.

Pour un mvt infinitésimale entre t et $t+dt$, la particule décrit un intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = c\,dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2\left(c^2 - \vec{v}(t)^2\right),$$

où $\vec{v}(t)$ est la vitesse instantanée de la particule.

$$ds^2 = c\,dt^2 - d\vec{r}^{\,2} = dt^2\left(c^2 - \vec{v}(t)^2\right)$$

On définit le temps propre de la particule par :

$$d\tau^2 = ds^2/c^2 = dt^2/\gamma(\vec{v})^2 \,,$$

où $\gamma(\vec{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2/c^2}}$ est le facteur de Lorentz instantané de la particule. τ s'écoule dans le même sens que t :

$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma(\vec{v})}}.$$

Par définition, τ est un invariant de Lorentz.

Interprétation : on peut introduire à chaque instant le référentiel $\mathcal{R}_0$ où la particule est au repos (le référentiel propre de la particule). $\mathcal{R}_0$ est approximable à chaque instant à un réf. inertiel.

particule immobile, $ds^2 = c^2 dt_0^2$.

Ainsi $\tau = t_0$, donc τ = temps dans le ref. propre.

On peut passer de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}_0$ par une transfo. de Lorentz selon $\vec{v}$.

1-2- Quadrivecteur vitesse

$(\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2)$

Événement : $X^\mu = (ct, \vec{r}) \in \mathbb{R}^4$, $\mu \in [\![1,4]\!]$

de norme $X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu = X^{0\,2} - \vec{X}\cdot\vec{X}$, ie norme de Minkowski, pour métrique $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Quadrivecteur vitesse :

$$\boxed{U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}} \,. \qquad d\tau = \frac{dt}{\gamma(\vec{v})}$$

En composantes :

$$U^\mu = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right) = \gamma(\vec{v})\left(c, \vec{v}(t)\right).$$

D'où la norme : (au sens de Minkowski)

$$\boxed{U^\mu \eta_{\mu\nu} U^\nu = U^2 = \gamma(\vec{v})^2 \left(c^2 - \vec{v}^{\,2}\right) = c^2 .}$$

Norme invariante de Lorentz pour tout quadrivecteur.

Comme τ est un invariant, U^μ se comporte comme X^μ sous les transfos de Lorentz $\rightarrow$ d'où loi de compo. des vitesses.

1-3 - Quadrivecteur énergie - impulsion

Notion naturelle de l'impulsion :

$$\boxed{P^\mu = m\, U^\mu},$$

c'est un quadrivecteur, car m est un invariant de Lorentz.

Composantes :
- $p^i = m\,\gamma(\vec{v})\, v^i = p^i \Rightarrow \vec{p} = \gamma(\vec{v})\, m\vec{v}$.
- $p^0 = \gamma(\vec{v})\, m c \qquad \gamma(\vec{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\underset{v \ll c}{\simeq} mc\left(1 + \frac{\vec{v}^2}{2c^2}\right)$$

d'où $cP^0 \underset{v \ll c}{\simeq} mc^2 + \dfrac{1}{2} m\vec{v}^2$.

$$cp^0 \underset{v \ll c}{\simeq} mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m\vec{v}^2}_{\text{énergie cinétique newtonienne}},$$

On interprète p^0 comme E/c, avec E énergie de la particule.

$$p^\mu = \Big(E/c\,,\ \overbrace{\gamma(\vec{v})\, m\vec{v}}^{\vec{p}}\Big).$$

Contrairement au cas non-relativiste, l'énergie de la part. est non nulle au repos :

$$E(\vec{v}=\vec{0}) = mc^2, \text{ énergie de masse.}$$

Énergie cinétique relativiste : $T(\vec{v}) = E(\vec{v}) - E(\vec{0})$
$= (\gamma - 1)mc^2.$

Comme $U^2 = c^2$, $(*)$

$$p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grâce à } (*)}}{=} m^2 c^2$$

donc $\boxed{E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4 .}$ (1)

En relativité restreinte, masse et énergie cinétique sont interchangeables!

<u>Remarque</u> : $E = \gamma(\vec{v}) m c^2$; et $\vec{p} = \gamma(\vec{v}) m \vec{v}$

donc $E \vec{v} = \vec{p} c^2$

Donc si $|\vec{v}| = c \Rightarrow E = |\vec{p}| c \underset{(1)}{\Rightarrow} m = 0.$

donc seule les part. de $m = 0$ peuvent se déplacer à $v = c$.

Pour les particules de masse nulle, $p^2 = 0$ (genre lumière)

et on définit $\boxed{p^\mu = (\hbar\omega/c, \hbar\vec{k})}$,

avec ω la pulsation du photon et $\vec{k}$ son vecteur d'onde.

Dans ce formalisme : le lien entre symétries et lois de conservation est préservé. Notamment, invariance par translations spatiales et temporelles, conservation de p^μ.

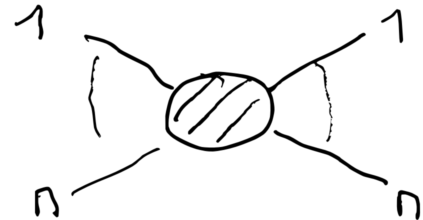
2- Collisions de particules

Collisions très brèves, syst. isolé est une bonne approximation.

On peut utiliser la conservation de pp, et "ignorer" les détails de l'interaction.

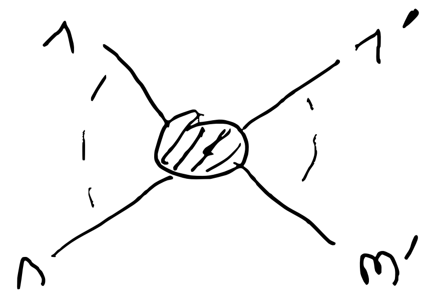
Collision élastique :

nombre et nature des particules conservés.



Collision inélastique:

nombre et nature pas conservés



2-1- Collision élastique - Effet Compton

Diffusion de photons sur des électrons :

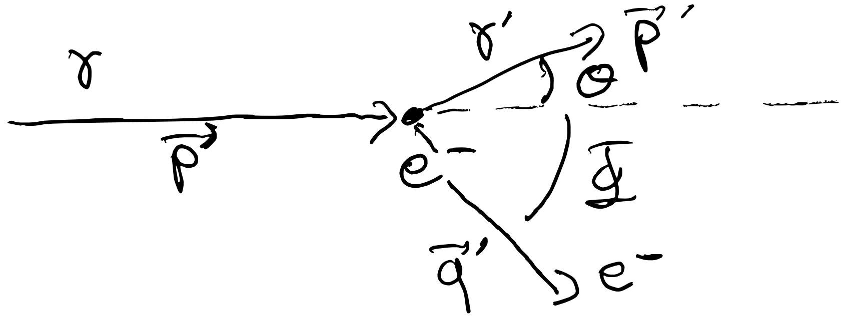
$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-.$$

Réf. du laboratoire : réf où e^- initial est au repos.

On note P_γ, P_e, P_γ', P_e' quadri impulsions avant et après collisions : Dans le réf. du labo :

$$P_\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} ; \quad P_e^{\mu} = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$P_\gamma'^{\mu} = \begin{pmatrix} E_\gamma'/c \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix} ; \quad P_e'^{\mu} = \begin{pmatrix} E_e'/c \\ \vec{q}\,' \end{pmatrix}.$$



Conservation de l'énergie-impulsion :

$$P_\gamma^\mu + P_e^\mu = P_\gamma'^\mu + P_e'^\mu$$

Donc
$$P_e'^2 = (P_e + P_\gamma - P_\gamma')^2$$
$$= P_e^2 + P_\gamma^2 + P_\gamma'^2 + 2P_e \cdot (P_\gamma - P_\gamma') - 2P_\gamma \cdot P_\gamma'$$

avec $X \cdot Y = X^0 Y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ (prod. scalaire Minkowski)

$$P_e'^2 = (P_e + P_\gamma - P_\gamma')^2$$
$$= P_e^2 + P_\gamma^2 + P_\gamma'^2 + 2P_e \cdot (P_\gamma - P_\gamma') - 2P_\gamma \cdot P_\gamma' \quad (2)$$

avec $X \cdot Y = X^0 Y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ (prod. scalaire Minkowski)

Normalisation : $P_e^2 = P_e'^2 = m_e^2 c^2$
$P_\gamma^2 = P_\gamma'^2 = 0$.

Donc (2) $\Rightarrow$ $P_e \cdot (P_\gamma - P_\gamma') = P_\gamma \cdot P_\gamma'$

$$\Rightarrow \quad m_e c \left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma'}{c} \right) = \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p}\,'$$

$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, donc $E_\gamma = |\vec{p}|c$

$$(2) \Rightarrow \quad m_e c\left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{E_\gamma'}{c}\right) = \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p}\,'$$

$E^2 = \vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4$, donc $E_\gamma = |\vec{p}|c$

$$\Rightarrow \quad m_e c\left(|\vec{p}| - |\vec{p}\,'|\right) = |\vec{p}||\vec{p}\,'|\left(1 - \cos(\theta)\right)$$

donc $$\frac{1}{|\vec{p}\,'|} - \frac{1}{|\vec{p}|} = \frac{2}{m_e c}\sin^2(\theta/2).$$

$|\vec{p}| = \hbar|\vec{k}| = \frac{h}{\lambda}$ donc $\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2(\theta/2).}$

Relation prédite et vérifiée expérimentalement par A. Compton en 1923 (Nobel 1927). (rayons X sur une cible de graphite)

2-2- Collisions inélastiques - Énergie de seuil

Collisions entre a_1 et a_2, dans ref. du laboratoire R où a_2 est au repos. On cherche à savoir si la réaction :

$$a_1 + a_2 \longrightarrow b_1 + b_2 + \cdots$$

est possible, et à quelle condition sur E_{a_1}.

Dans R, conservation de l'énergie :

$$E_{a_1} + m_{a_2} c^2 = \sum_i E_{b_i}$$

$$= \sum_i \sqrt{\vec{p}_{b_i}^{\,2} c^2 + m_{b_i}^2 c^4}$$

$$E_{a_1} + m_{a_2} c^2 > \left(\sum_i m_{b_i}\right) c^2$$

$$E_{a_1} + m_{a_2} c^2 > \left(\sum_i m_{b_i}\right) c^2$$

inégalité stricte, car les $\vec{p}_{bi}$ ne peuvent pas être nulles $\mathcal{R}$, où $\vec{p}_{init} \neq \vec{0}$. Les b_i ont forcément une énergie de recul.

On se place donc dans le réf. du centre de masse $\mathcal{R}^*$, (il existe et est inertiel)

où $\sum_i \vec{p}_{bi}^{\,*} = \vec{0}$.

Dans ce réf. $\mathcal{R}^*$ et après collision : impulsion totale

$$p^*_{fin} = \left(E^*/c, \vec{0}\right), \quad \text{avec } E^* \geq \sum_i m_{bi} c^2$$

inégalité non stricte.

$$p^{*\mu}_{fin} = \left(E^*/c, \vec{0}\right), \quad \text{avec } E^* \geqslant \sum_i m_{bi} c^2$$

inégalité non stricte.

Le même quadrivecteur, cette initialement et dans $\mathcal{R}$, a pour expression :

$$p^\mu_{init} = \left(\frac{E_{a_1}}{c} + m_{a_2} c, \ \vec{p}_{a_1}\right)$$

Conservation énergie-impulsion : $p^\mu_{init} = p^\mu_{fin}$ (dans $\mathcal{R}$)

et invariance de la norme : $p^{*2}_{fin} = p^2_{fin}$

donc $p^2_{init} = p^{*2}_{fin}$

donc $\left(\frac{E_{a_1}}{c} + m_{a_2} c\right)^2 - \vec{p}_{a_1}^{\,2} = \frac{E^{*2}}{c^2} \geqslant \left(\sum_i m_{bi}\right)^2 c^2$

$$\left(\frac{E_{a_1}}{c}+m_{a_2}c\right)^2-\vec{p}_{a_1}^{\,2}=\frac{E^{*2}}{c^2}\geqslant\left(\sum_i m_{b_i}\right)^2c^2$$

donc : $$\frac{E_{a_1}^2}{c^2}-\vec{p}_{a_1}^{\,2}+m_{a_2}^2c^2+2E_{a_1}m_{a_2}\geqslant\left(\sum_i m_{b_i}\right)^2c^2$$

$$E_{a_1}^2=|\vec{p}_{a_1}|^2c^2+m_{a_1}^2c^4$$

donc $$(m_{a_1}^2+m_{a_2}^2)c^2+2E_{a_1}m_{a_2}\geqslant\left(\sum_i m_{b_i}\right)^2c^2$$

donc $$\boxed{E_{a_1}\geqslant\underbrace{\frac{\left(\sum_i m_{b_i}\right)^2-(m_{a_1}^2+m_{a_2}^2)}{2m_{a_2}}c^2}_{\text{Énergie de seuil.}}}$$

3- Relation fondamentale de la dynamique

→ décrire un pfd relativiste

Solution la plus simple : généraliser à une relation quadrivectorielle.

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu ,$$

avec la quadri-force $\mathcal{F}^\mu$. Il reste à établir la relation entre $\mathcal{F}^\mu$ et la tri-force habituelle $\vec{f}$.

→ On se base sur la force de Lorentz, bien définie en RR :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) , \quad \vec{p} = \gamma(\vec{v})\, m\vec{v} .$$

La composante spatiale du pfd relativiste donne alors :

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\mathcal{F}}$$
$$= \gamma \vec{f} \Rightarrow \text{donc } \mathcal{F}^i = \gamma f^i.$$

Pour la composante temporelle :

$$\mathcal{F}^0 = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \gamma mc \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^4 m}{c} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Par ailleurs : $\vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \cdot \vec{v}$

$$= \gamma^3 m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

donc $\mathcal{F}^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{\beta}.$

Finalement : $$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu \quad , \quad \mathcal{F}^\mu = \left(\gamma \vec{f}\cdot\vec{\beta}, \gamma \vec{f}\right).}$$

<u>Remarque</u> : composante temporelle, $\frac{dE}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$, donc thm de la puissance cinétique, d'où l'interprétation de E en énergie.

$\mathcal{F}^\mu$ se transforme comme X^μ sous Lorentz, donc lois de transfos analogues à U^μ. En particulier, $\vec{f}$ n'est pas invariante par chgt de réf inertiel.

$\Rightarrow$ 3ième loi de Newton plus valable.

4 - Mouvement relativiste d'une particule chargée

4-1- Champ électrique constant

pfd : $\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E}$, initialement $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$.

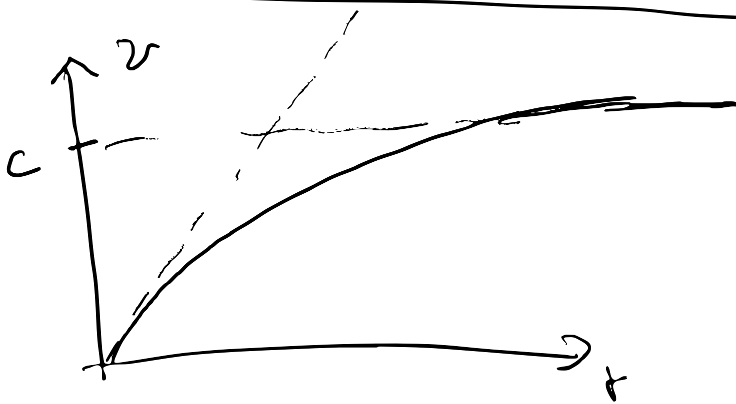
alors $\vec{p} = \gamma m \vec{v} = q\vec{E}t$ (3)

pour $\vec{E} = E\vec{e_x}$, $\vec{v} = v\vec{e_x}$,

(3) $\Rightarrow \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = qEt$

$$\Rightarrow \boxed{v = c\,\frac{\frac{qE}{mc}\,t}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2}}}.$$

$$\boxed{v = c\,\frac{\frac{qE}{mc}\,t}{\sqrt{1+\left(\frac{qE}{mc}\right)^2 t^2}}}\,.$$



c comme vitesse limite.

Expérience de Bertozzi en 1964.

4-2- Champ magnétique constant

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} \quad , \qquad \vec{B} = B\,\vec{e_z}.$$

Énergie cinétique : $\frac{dE}{dt} = 0$, car Lorentz ne travaille pas

$E = \gamma m c^2$, donc $E = \text{cste} \Rightarrow |\vec{v}| = \text{cste}$.

donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

donc $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qB}{\gamma m}\ \vec{v} \wedge \vec{e_z}}$

→ hélice d'axe $\vec{e_z}$, pulsation cyclotron $\boxed{\omega_c = \frac{qB}{\gamma m}}$.

Si $\vec{v} \perp \vec{B}$, le mvt est plan dans le plan orthogonal à $\vec{B}$, et c'est un cercle de rayon $R = v/\omega_c$.

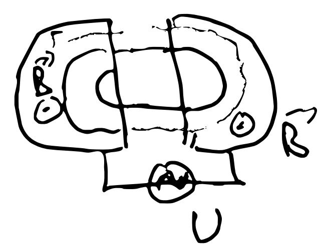
4-3- Accélérateurs de particules

- Accélérateur linéaire : nécessite de grandes distances et tensions

SLAC à Stanford, 3 km, $E_c = 50$ GeV ($1 eV \simeq 1,6 \times 10^{-19}$ J)
↳ pour e^-.

- Cyclotron :

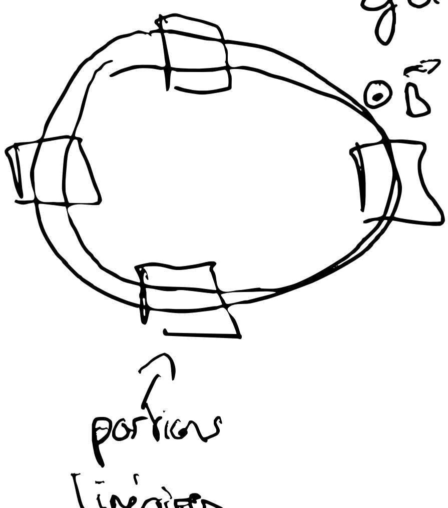
champ mag. est constant dans les D, et accélération entre les D, avec U alternative, pour avoir toujours accélération.



Synchro-cyclotron si on prend en compte dépendance en γ dans ω_c pour fréquence de U.

Cyclotron : ~ 20 MeV ; Synchrocyclotron $\simeq 700$ MeV (ions lourds).

- Synchrotron : enceinte torique, où électroaimants assurent guidage circulaire



accélérations dans portions linéaires avec $\vec{E}$ constant.

$\vec{B}$ variable pour rayon de courbure de la trajectoire constant.

LHC $\simeq 7$ TeV (proton).