Les Aventure du Binôme 9

Receuil de leçons d'agrégation de Physique-Chimie

Ha les crocrocro les crocrocro les crocodiles, sur les bords du Nil ils sont partis n'en parlons plus !

3 avril 1856
Jacques Offenbach

Yohann Faure
Agrégé de Physique-Chime
perso.ens-lyon.fr/yohann.faure

Aurélien Goerlinger
Agrégé de Physique-Chimie
aurelien.goerlinger@ens-lyon.fr

Avant-propos

Bonjour à toi, jeune agrégatif·ve !

Le livre que tu as sous les yeux est le fruit d'une année de collaboration entre deux couillons qui n'ont eu l'agrégation que par pur miracle et intervention du Saint Gayvallet. De ce fait, il est fort probable que ce livre contienne, non seulement des coquilles, mais également des erreurs, des absurdités, des remarques douteuses, des plaisanteries sans queue ni tête, *etc.* Cependant, nous y avons mis du notre, et avons mis une part de nous même dans ce livre. Nous espérons qu'il pourra t'aider dans ta quête, et te permettra de faire de bonnes leçons et montages.

Nous tenons également à rappeler le contexte dans lequel ces leçons ont été écrites, à savoir la session 2020. Les titres des leçons de Physique des sessions postérieures à 2019 ne seront plus données en avance, et donc bien que ce livre couvre les titres de la session 2019 et propose des leçons sur des thèmes peu voire pas abordés parmi les-dits titres, il ne constitue pas une liste exhaustive des leçons qui peuvent tomber le jour de votre oral. De même, les titres des leçons de Chimie et des montages de Physique ne correspondront pas forcément aux titres que vous aurez à travailler pour votre session. Un autre point important à retenir est que les leçons présentées dans ce livre ne sont PAS faites pour tenir 40 minutes : certaines vous permettront de tenir 40 minutes seulement, d'autres seront bien trop longues.

La réalisation de ce livre n'aurait pas été possible sans l'accès aux leçons des années précédentes, et de nos camarades agrégatifs·ves de la promo 2019-2020. Nous tenons à remercier tout particulièrement Camille Normand, Corentin Pacary, Clémentine Rouvière, Cléments de la Salle et Colleaux, Vincent Martos et Benjamin Blancon.

Nous remercions également toute l'équipe enseignante, les équipes techniques de Physique et de Chimie, et les secrétaires du département Sciences de la Matière, sans qui la prépa agreg ne tournerait pas.

Quand à toi camarade agreg', nous te souhaitons de la chance, de la force et de bonnes viénoiseries en agreg blanches !

Garde le courage, tu vas y arriver !

Du fait du caractère collaboratif de cet ouvrage, nous ne sommes pas en mesure de lui donner un caractère libre de droit. En effet les images sont soumises au copyright de leur auteur, et bien que nous ayons fait de notre mieux pour que toutes les images utilisées soient libres de droits, certaines ne sont pas diffusables librement. Ainsi pour toute image il est demandé au lecteur de vérifier leur origine, et le cas échéant de demander l'autorisation pour toute utilisation. Les textes sont, pour leur part, grandement personnels, et sont laissés libres de reproduction, diffusion et modification. Toute personne souhaitant revendiquer son droit de paternité sur un des textes que nous aurions prélevé est priée de le faire en indiquant spécifiquement les passages concernés.

Table des matières

I LECONS DE PHYSIQUE 5

II LECONS DE CHIMIE 739

III MONTAGES DE PHYSIQUE 1019

Première partie

Leçons de Physique

1 Contact entre deux solides. Frottements. Tribologie. 9

2 Gravitation 21

3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre 35

4 Précession dans les domaines macroscopique et microscopique 47

5 Lois de conservation en dynamique 57

6 Cinématique relativiste 69

7 Dynamique relativiste 83

8 Notion de viscosité d'un Fluide 95

9 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide 111

10 Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides 125

11 Gaz réels, gaz parfait 141

12 Premier principe de la thermodynamique 155

13 Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé 167

14 Machines thermiques réelles 179

15 Transitions de phases 195

16 Facteur de Boltzmann 207

17 Rayonnement d'équilibre thermique, corps noir 221

18 Phénomènes de transport 233

19 Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs et radiatifs 247

20 Conversion de puissance électromécanique 267

21 Induction électromagnétique 283

22 Rétroaction et oscillations 297

23 Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal, étude spectrale 315

24 Ondes progressives, ondes stationnaires 327

25 Ondes acoustiques 341

26 Propagation avec dispersion 355

27 Propagation guidée des ondes 371

28 Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques 383

29 Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs 401

30 Rayonnement dipolaire électrique 415

31 Présentation de l'optique géométrique, principe de Fermat 429

32 Microscopies optiques 443

33 Interférences à deux ondes en optique 457

34 Interférométrie à division d'amplitude 469

35 Diffraction de Fraunhofer 483

36 Diffraction par des structures périodiques 493

37 Absorption et émission de la lumière 505

38 Aspect corpusculaire du rayonnement 517

39 Aspects ondulatoires de la matière, notion de fonction d'onde 527

40 Confinement d'une particule et quantification de l'énergie 543

41 Effet tunnel 559

42 Fusion, fission 573

43 Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux 591

44 Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques 601

45 Paramagnétisme, ferromagnétisme 615

46 Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques 629

47 Mécanismes de la conduction électrique dans les solides 643

48 Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique 655

49 Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités 669

A Électrocinétique 687

B Élasticité et déformations 695

C Moments magnétiques, notion de spin 705

D Hystérésis dans différents domaines de la physique 711

E Amplificateur opérationnel, modèles et usages 717

F Faisceaux gaussiens 725

G Régimes transitoires en électronique 733

LP 1

Contact entre deux solides. Frottements. Tribologie.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Livres de prépa* **quelconque**
- ✍ **Pérez et Androetti**
- ✍ *BUP 822-1 (03/2000)*

Prérequis

- ➢ mécanique du point
- ➢ base de mécanique du solide

Expériences

- ☕ Plan incliné
- ☕ De Vinci
- ☕ Stick Slip
- ☕ Sommerfeld
- ☕ Effet rétro

1 Contact entre deux solides . . . 10
1.1 Approche microscopique . . . 10
1.2 Approche macroscopique . . . 10
1.3 Actions mécaniques des forces de contact . . . 11
1.4 Cinématique . . . 12
2 Histoire de l'étude tribologique : lois phénoménologiques . . . 13
2.1 De Vinci . . . 13
2.2 Amontons-Coulomb . . . 13
2.3 Illustration expérimentale : le plan incliné . . . 15
2.4 Aspect énergétique . . . 15
3 Conséquences expérimentales . . . 16
3.1 Stick-Slip . . . 16
3.2 Effet Rétro . . . 18
3.3 Frottement en rotation . . . 20

Introduction

Intro sur Coulomb

✍ 🕒 2mn

Plan incliné avec divers matériaux, et on montre que le comportement est différent. On n'entre pas dans les détails.

Les frottements solides sont un phénomène complexe et varié, qu'il es convenu de traiter tôt dans la carrière d'un scientifique. Cette leçon au niveau 2eme année de prépa vise à discuter des lois de Coulomb par un point de vue micro et historique.

1 Contact entre deux solides

1.1 Approche microscopique

Quand on regarde une surface, on peut avoir l'impression qu'elle est lisse. Cependant, une surface présentera toujours des aspérités au niveau microscopique. Ainsi, quand 2 solides sont en contact, les rugosités les plus hautes des surfaces des 2 solides vont entrer en contact. Ainsi, la surface de contact entre les deux solides sera plus petite que la surface de contact apparente. Notons que ces aspérités peuvent s'enchevêtrer mais à cause des répulsions électrostatiques, elles ne peuvent pas se pénétrer.

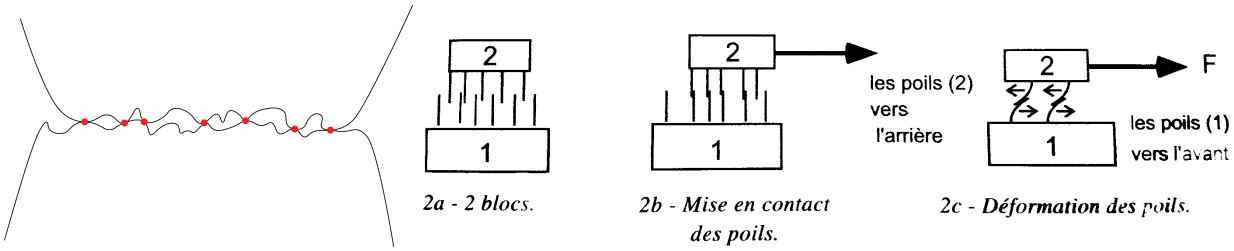


FIGURE 1.1 – À gauche : contact entre deux solides au niveau microscopique, la surface de contact effective est représentée en rouge. À droite : modèle de la brosse.

Un modèle intéressant pour expliquer les frottements à l'échelle microscopique est le modèle de la brosse. Dans ce modèle, les aspérités microscopiques sont modélisées par des poils élastiques. Lorsqu'on fait glisser un solide sur un autre, les poils sont d'abord mis en contact puis ils se déforment élastiquement. Si le mouvement continu, le contact entre les poils finit par se rompre et les poils vont se mettre à vibrer, ce qui dissipe de l'énergie. Avec ce modèle, on peut déjà intuitivement connaître la direction de la force de frottement en regardant la direction de déformation des poils.

L'aspect microscopique permet de comprendre d'où viennent les frottements mais il n'est pas pratique pour traiter des problèmes à l'échelle macroscopique. Il nous faut donc une nouvelle approche à cette échelle.

1.2 Approche macroscopique

On peut modéliser le contact entre deux solides au niveau macroscopique selon trois géométries :

- surfacique, comme par exemple un pavé sur un plan
- linéique, comme par exemple un cylindre sur un plan
- ponctuelle, comme par exemple une sphère sur un plan

Les contacts linéiques et ponctuels ne sont que des approximations : en réalité, il existe toujours une surface de contact puisque les aspérités sont en contact surfaciques, et les solides se déforment toujours légèrement.

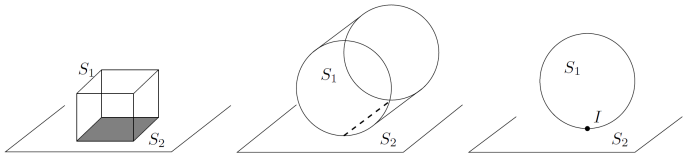


FIGURE 1.2 – Les différentes géométries de contact : surfacique (à gauche), linéique (au centre) et ponctuelle (à droite).

On appelle **plan tangent** Π le plan tangent à $(S1)$ et $(S2)$ au point de contact entre les solides (en supposant, comme c'est le cas ici, que les surfaces sont régulières).

Du contact naissent les actions mécaniques.

1.3 Actions mécaniques des forces de contact

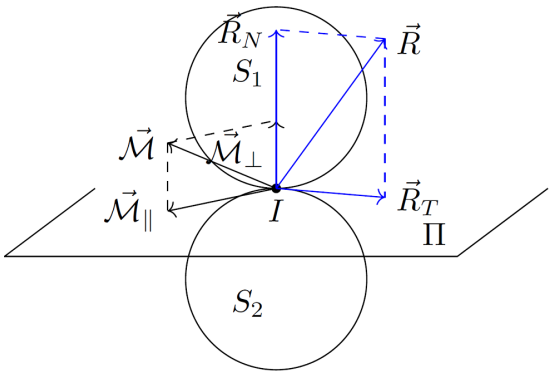


FIGURE 1.3 – Actions mécaniques de contact entre 2 solides.

Le contact entre les deux solides va créér une résultante de force $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ et de moment $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_\parallel} + \overrightarrow{\mathcal{M}_\perp}$. On appelle $\overrightarrow{\mathcal{M}_\parallel}$ *moment de roulement* (comme pour une roue) et $\overrightarrow{\mathcal{M}_\perp}$ *moment de pivotement* (comme pour une toupie).

Dans le cadre de l'approximation du contact ponctuel, $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{R}$ s'applique en I. Cette approximation a ses limites, notamment dans l'exemple de la toupie qui ne tourne pas indéfiniment parce que $\overrightarrow{\mathcal{M}_\perp} \neq \overrightarrow{0}$. On se placera néanmoins dans ce cadre pour le reste de la leçon.

On a décrit les actions causées par le contact, mais qu'en est-il du mouvement des solides en contact ?

1.4 Cinématique

Deux solides en contact peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre. En notant $\mathcal{R}$ le référentiel dans lequel ce mouvement est décrit, il est possible de définir la vitesse de glissement de $(S1)$ par rapport à $(S2)$ comme étant :

$$\overrightarrow{v_{gl}}(S1/S2) = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(I_1) - \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(I_2) \tag{1.1}$$

où I_1 et I_2 sont les points appartenant au solide 1 et au solide 2 respectivement et qui coïncident avec le point I à l'instant t. Ainsi, I_2 peut avoir une vitesse nulle même si I peut changer d'endroit au cours du temps. Si $\overrightarrow{v_{gl}} \neq \overrightarrow{0}$ alors il n'y a pas de glissement entre les solides.

Prenons l'exemple d'une roue se déplaçant sur le sol. La vitesse de glissement vaut alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_{gl}} &= \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(I_1) - \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(I_2) = [\overrightarrow{v_{\mathcal{R}1}}(I_1) + \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(G)] + \overrightarrow{0} \\ &= \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{GI} + \dot{x}_G \overrightarrow{u_x} = (-\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}) \wedge (-R\overrightarrow{u_y}) + \dot{x}_G \overrightarrow{u_x} \quad = (\dot{x}_G - R\dot{\theta})\overrightarrow{u_x} \end{aligned} \tag{1.2}$$

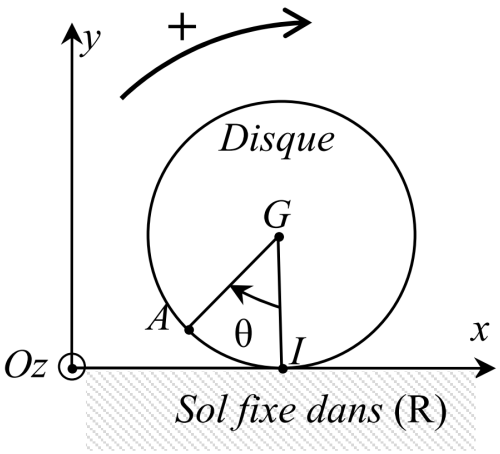


FIGURE 1.4 – Roue se déplaçant sur le sol.

On distingue 3 cas dans cette situation :

- **À l'équilibre :** on a 2 inconnues, $\overrightarrow{R_T}$ et $\overrightarrow{R_N}$, et 3 équations avec le théorème du centre d'inertie (TCI) et le TMC ;
- **Sans glissement :** on a 4 inconnues, $\overrightarrow{R_T}$, $\overrightarrow{R_N}$, $\dot{x}_G$ et $\dot{\theta}$ et on a 4 équations avec le TCI, le TMC et la relation $\overrightarrow{v_{gl}} = \overrightarrow{0} \iff \dot{x}_G = R\dot{\theta}$;
- **Avec glissement :** on a toujours 4 inconnues mais plus que 3 relations car $\overrightarrow{v_{gl}} \neq \overrightarrow{0}$.

Dans les deux premiers cas, on a autant voire plus d'équations que d'inconnues. Cependant, dans le cas avec glissement, **il manque une équation pour fermer le problème**.

On obtient cette équation supplémentaire grâce à des lois phénoménologiques.

2 Histoire de l'étude tribologique : lois phénoménologiques

Etymologie : "tribos" = frottement et "logos" = la science, l'étude.

Nous venons d'étudier la formulation cinématique des actions de contacts, mais nous avons encore des inconnes dans cette formulation. Il nous faut une loi reliant la réaction normale à la réaction tangentielle ! Les lois utilisées traditionnellement sont des lois empiriques.

2.1 De Vinci

C'est de Vinci qui le premier au 14ème siècle, au début de la renaissance italienne, a fait les premières observations expérimentales de tribologie.

Expérience de De Vinci

✍ wikipedia ⏲ 3mn

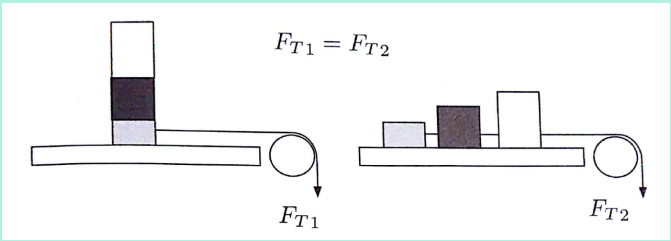


FIGURE 1.5 – Schéma expérimental de l'expérience de De Vinci.

Les observations :

- Les masses ne se déplacent qu'à partir d'une certaine force F_T appliquée sur la corde.
- Dans les deux situations, F_T est identique. Ainsi, F_T est indépendante de la surface de contact.
- F_T est proportionnelle à la charge normale (ici, l'opposé du poids).
- Une fois le mouvement initié, la force nécessaire à entretenir le mouvement est inférieure à la force nécessaire pour l'initier.

2.2 Amontons-Coulomb

Deux siècles plus tard Amontons puis Coulomb ont formulé des lois du frottement, toujours à partir d'expériences de glissement de patins sur un plan. Nous allons les revérifier en en ayant la connaissance !

observations de A–C :

Il existe deux coefficients $f_d < f_s$ tels que :

- En partant du repos, $v_g = 0$, il faut atteindre $R_T = f_s R_N$ pour mettre le patin en mouvement. Avant mise en mouvement on a $R_T < f_s R_N$.
- Une fois le patin en mouvement on a $R_T = f_d R_N$. Alors on a $\overrightarrow{R_T} \parallel \overrightarrow{v_g}$ en sens opposé.
- Les coefficient f_s et f_d, coef de frottement statique et dynamique ne dépendent que des matériaux en contact. On a typiquement $0.05 \leq f_d \leq f_s \leq 1$.

Une remarque intéressante à faire est celle sur la lubrification. Lubrifier ou graisser un support c'est insérer des petites molécules très rondes qui vont rouler sur elles-mêmes comme des billes, comme de l'eau par exemple.

Type de contact	f_d	f_s
acier-acier sec	0,6	0,4
acier-acier graissé	0,1	0,05
pneu-chaussée sèche	1	0,7
pneu-chaussée humide	0,7	0,3
bois-bois	0,5	0,3
bois-métal	0,6	0,1
téflon-acier	0,04	0,04

FIGURE 1.6 – Quelques valeurs de coef de friction, *Taillet, Dictionnaire de la Physique.*

L'introduction de ces coefficients permet de définir le concept de Cône de Frottement. En effet si on trace $\overrightarrow{R}$ on voit qu'il est la somme de R_N et R_T, donc il fait un angle ϕ avec $\overrightarrow{R_N}$ qui est donné par $\tan\phi = \dfrac{R_N}{R_T}$. Cela permet de définir le cône critique de frottement, qui est le cône dans lequel doit être inclus $\overrightarrow{R}$ pour que l'objet soit statique.

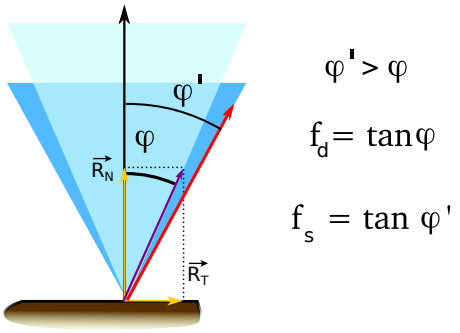


FIGURE 1.7 – Le cône de frottement.

2.3 Illustration expérimentale : le plan incliné

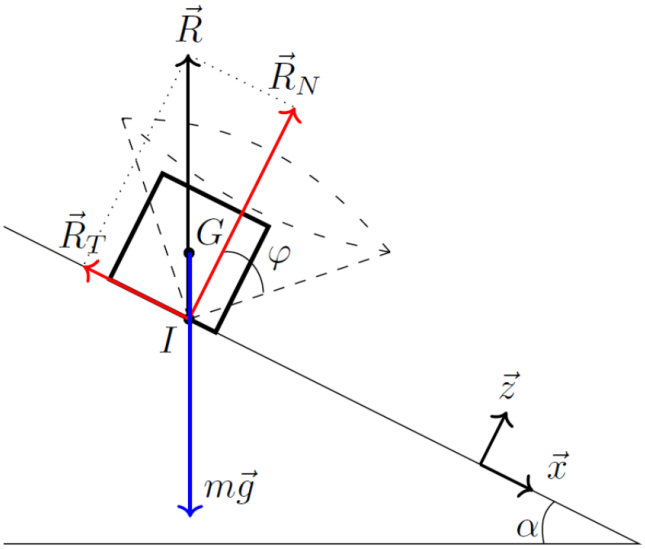


FIGURE 1.8 – Schéma du montage du plan incliné en situation de non glissement. Le point I est le projeté du point G.

Pour tester les lois d'AC on fait le montage ci-dessus. Sur ce montage on voit tracé les point G et I. G est le centre de gravité du patin, et I le projeté de ce dernier sur le plan incliné. On retrouve un cône de frottement. Ici les équations donnent que $\overrightarrow{R} = -m\overrightarrow{g}$, d'où $R_N = mg\cos\alpha$ et $R_T = mg\sin\alpha$.

Plan incliné

✍ ⏲ 5mn

Matériel : masses en bois avec surface au choix P82 ; plan incliné P82.

On observe l'angle minimal de mise en mouvement de trois patins de surfaces différentes pour montrer l'influence de la nature des surfaces sur f_s : les patins ont des angles de mise en mouvement différents.

On remarque l'indépendance en masse, et l'indépendance en surface.

Avec le patin qui accroche le plus, on refait l'expérience en inclinant jusqu'à la mise en mouvement, puis on réduit l'angle tout en gardant le mouvement pour visualiser $f_d < f_s$.

Quantitatif : Moyenne de différentes expériences pour remonter à un f_s "tabulé".

Quantitatif : Régression linéaire sur la masse avec un newton-mètre pour remonter à un f_s "tabulé".

2.4 Aspect énergétique

D'un point de vue énergétique, on s'attend à ce que la puissance totale des actions de contact soit négative, à savoir que l'on dépense de l'énergie. En effet les actions de contact sont purement des pertes énergétiques.

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact au point $I = I_1 = I_2$ à l'instant t. La puissance reçue par S_1 est $P_1 = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v(I_1)}$, celle de S_2 est $P_2 = -\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v(I_2)}$ d'après la seconde loi de Newton (R vs -R). Ainsi la puissance totale des forces est donc $\mathcal{P} = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{v_{gl}}$.

Ainsi

$$\mathcal{P} = -R_T v_{gl} \leq 0$$

car R_T et v_{gl} sont opposés.

Ainsi, la puissance totale des forces de frottement est nulle s'il n'y a pas de frottement, ou s'il n'y a pas de glissement. On peut donc bien avoir une force de frottement non nulle sans avoir de dissipation d'énergie par frottement.

Passons maintenant à l'application de ces lois.

3 Conséquences expérimentales

3.1 Stick-Slip

Expérience de Sommerfeld

L'expérience prend une minute. On place une règle en appui sur ses doigts. On essaye d'exercer une force égale à droite et à gauche pour rapprocher les deux doigts. Les doigts collent et glissent à tour de rôle pour enfin se rejoindre au centre de la règle. Cette expérience est plutôt marrante et permet de montrer qualitativement comment une variation de la réaction normale exercée par un doigt permet d'être en régime de glissement ou

Stick-Slip

✍ *Les milieux granulaires*, **Andreotti** 3 min

Matériel :

- masse en bois avec surface au choix P82
- dépoli P128.8 ou assimilé
- moteur P95.22/2 avec le cylindre fait pour l'occasion
- un ressort **bien choisi**
- un bout de ficelle
- savoir faire des noeuds

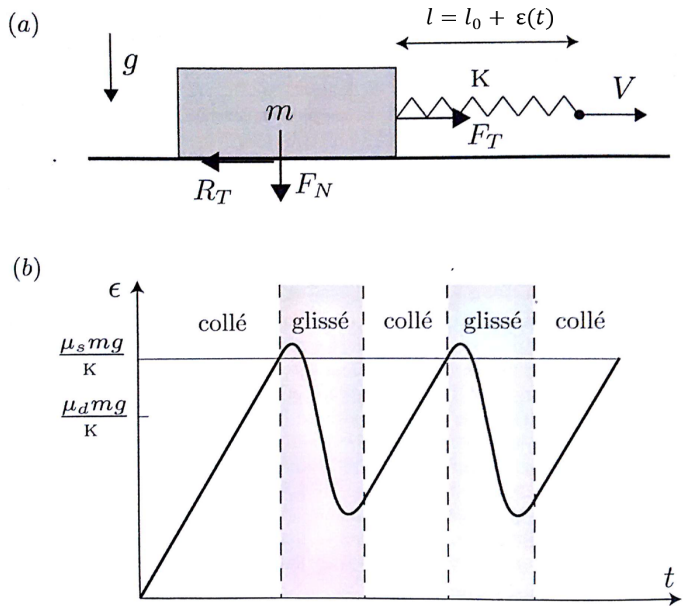


FIGURE 1.9 – (a) Schéma de la situation. (b) Allure de $\varepsilon(t)$.

Un patin de masse m est accrochée à un ressort de raideur K, lui-même relié par un fil à un moteur qui tourne à vitesse constante $\overrightarrow{V}$. On appelle F_T la tension du ressort, R_T la force de friction et $F_N = mg$ la force normale, avec g la constante de pesanteur. Pour des vitesses suffisamment faibles, on observe une succession de deux régimes :

- un où le ressort s'étire sans que le mobile ne bouge (phase *stick*) ;
- un où le mobile est en mouvement et le ressort se recontracte (phase *slip*).

3.1.1 Phase *stick*

À $t = 0$, le ressort est au repos ($\varepsilon = 0$) et le patin est en $x = 0$, immobile. On commence à tirer l'extrémité du ressort : l'allongement du ressort est alors $\varepsilon(t) = Vt$ donc $\dot{\varepsilon}(t) = V$. Le PFD donne alors $F_T = R_T$ et $F_N = mg$. Or $F_T = K\varepsilon = KVt$, et d'après les lois d'Amontons-Coulomb le patin ne bouge pas tant que $R_T \leq f_s F_N$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{On reste dans la phase } \textit{stick} &\Leftrightarrow R_T \leq f_s F_N \iff F_T \leq f_s F_N \\ &\Leftrightarrow KVt \leq f_s mg \\ &\Leftrightarrow t \leq t_1 = \frac{f_s mg}{KV} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \leq \varepsilon(t_1) = Vt_1 = \frac{f_s mg}{K} \end{aligned} \tag{1.3}$$

3.1.2 Phase *slip*

Dès que $t = t_1$, on sort de la phase *stick*. Le patin est alors mis en mouvement à la vitesse ${}_dotx$ et on a $R_T = f_d mg$. Ainsi, $\varepsilon(t) = Vt - x$ d'où $\dot{\varepsilon} = V - \dot{x}$ Un nouveau PFD donne alors

$$m\ddot{x} = K\varepsilon - f_d mg \iff \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = f_d g \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \tag{1.4}$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\varepsilon(t > t_1) = L\cos(\omega_0(t - t_1) + \phi) + \frac{f_d mg}{K}$. On peut ensuite utiliser les conditions initiales :

- $\varepsilon(t1) = \dfrac{f_s mg}{K} \iff L\cos\phi = (f_s - f_d)\dfrac{mg}{K} = \dfrac{\Delta f mg}{K}$
- $\dot{\varepsilon}(t1) = V \iff L\sin(\phi) = -\dfrac{V}{\omega_0}$

Finalement, on obtient

$$\varepsilon(t > t_1) = L\cos(\omega_0(t-t_1)+\phi)+\frac{f_d mg}{K} \qquad \text{avec} \qquad L^2 = \left(\frac{\Delta f mg}{K}\right)^2 + \left(\frac{V}{\omega_0}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad \phi = -\arctan\left(\frac{VK}{\Delta f mg\omega_0}\right) \tag{1.5}$$

3.1.3 Diagramme de phase

Des calculs fastidieux (cf annexe) permettent d'obtenir le diagramme de phase $(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, avec $\dot{\varepsilon}(t > t_1) = -L\omega_0 \sin(\omega_0(t-t1)+\phi)$. on obtient une ellipse de centre C d'abscisse $\dfrac{f_d mg}{K}$ et d'ordonnée nulle, parcourue dans le sens horaire, avec comme demi grand-axe horizontal L et comme demi petit-axe vertical $L\omega_0$. On a $\varepsilon(t_1)$ au point B qui vaut $\dfrac{f_s mg}{K}$ et on trouve par symétrie $\varepsilon(t_2) = (2f_d - f_s)\dfrac{mg}{K}$.

Le mouvement résultant est donc une succession d'étapes "collées" où le patin est à l'arrêt et où le ressort s'allonge, et d'étapes "glissées" où le patin avance. C'est un phénomène non linéaire (oscillation avec forçage constant dans le temps), et l'oscillation est non harmonique ! La non linéarité provient de la non linéarité de la loi de Coulomb. Conséquences : violon, grincement des portes, crissement des craies, modèle simplifié pour les tremblements de terre (dérive lente des continents)...

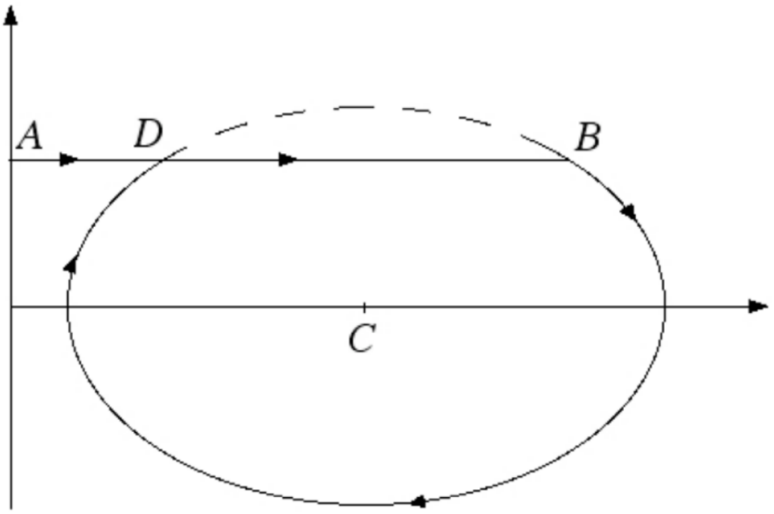


FIGURE 1.10 – Diagramme de phase de l'oscillateur stick-slip. On est dans la phase *stick* entre D et B.

3.2 Effet Rétro

Au billard, booling, football, tennis, autres, il existe une technique très particulière de lancé qui revient à donner une rotation en sens inverse à la balle. La balle avance en glissant sur une surface, et elle a un roulement qui augmente la vitesse de glissement réelle. Lorsque le glissement cesse, l'objet est en roulement pur.

On prend une balle de rayon r, et on se place pour calculer cet effet dans le référentiel terrestre, de tel sorte que

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{v}(G) = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{R} = -R_T\overrightarrow{u_x} + R_N\overrightarrow{u_y}$$

On prend $\omega(t=0) = \omega_0 > 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0 > 0$, de façon à ce que le solide tourne dans un sens qui s'oppose au mouvement. Le mouvement se déroule donc en deux phases, une phase de glissement et une phase roulement (ou d'arrêt).

3.2.1 Première phase

Phase de glissement à $v_g = \dot{x} + r\omega$.

On applique le PFD, $\begin{cases} R_N = mg \\ m\ddot{x} = -R_T \end{cases}$, on applique le TMC dans le référenciel du barycentre, $J\dot{\omega} = -R_T r$.

On a glissement donc $R_T = fR_N$. On insère dans le TMC et le PFD, et on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\omega} &= -\dfrac{fmgr}{J} \\ \ddot{x} &= -fg \end{cases}$$

On cherche dont t_1 tel que $v_g(t_1) = 0$. On trouve

$$t_1 = \frac{v_o + r\omega_0}{fg(1 + \dfrac{mr^2}{J})}$$

On en déduit

$$\dot{x}(t_1) = v_0 - \frac{v_0 + r\omega_0}{1 + \dfrac{mr^2}{J}}$$

La balle s'arrête et revient en arrière ssi cette valeur est négative.

3.2.2 Deuxième phase

On distingue deux cas :

- $\omega_0 > \dfrac{v_0 mg}{J}$ donc $\dot{x}(t_1) < 0$: **le solide revient** (exemple : cerceau) ;
- $\omega_0 < \dfrac{v_0 mg}{J}$ donc $\dot{x}(t_1) > 0$: **le solide ne revient pas** (exemple : bowling).

Montrer l'effet rétro

✍ 🕒 20s

Avec l'objet de ton choix.

Possibilités : cerceau, effaceur, autre objet qui roule.

3.3 Frottement en rotation

https://fr.wikipedia.org/wiki/Résistance_au_pivotement

Conclusion

Sujet complexe, se joue au niveau microscopique, simplification heureuse avec les lois de Coulomb en première approximation, à l'échelle macroscopique. Permet de traiter les frottements solides dans de nombreux cas (porte, craie, violon, freinage sur différentes chaussées, etc.). Les frottements peuvent être dissipatifs, mais sont aussi nécessaires au mouvement :

–Une roue utilise les frottements pour avancer sans que ceux-ci ne dissipent d'énergie

–Lors de la marche, les frottements fournissent l'accélération, mais pas l'énergie qui, elle, est fournie par la puissance des forces intérieures (muscles).

La tribologie est la science qui étudie les systèmes matériels en contact : nous avons fait de la tribologie dans cette leçon !

Ouvertures possibles :

- Fonctionnement de l'ABS : revenir dans le cône de frottement statique en débloquant les roues.

- Frottement de pivotement et résistance au roulement. Conséquence : la position d'équilibre d'un appareil comme un voltmètre analogique n'est pas exactement définie par l'égalité du couple électromagnétique et du couple de rappel du ressort, il y a une plage d'équilibre qu'il faut donc réduire au maximum pour limiter l'incertitude.

- L'adhésion influe très peu sur le frottement, mais il y a tout de même une force proportionnelle à la surface de contact apparente A qui s'ajoute : $RT = fRN + \kappa A$.

- On peut aussi citer la conclusion du livre d'Andreotti qui apporte pas mal de précisions :

Les lois du frottement solide, bien que vérifiant en première approximation les lois de Coulomb, sont en réalité plus complexes. Tout d'abord, la proportionnalité entre la force de frottement et la charge normale n'est plus vérifiée pour de très fortes charges et/ou des matériaux très mous. Dans ce cas, la force de friction sature vers une constante. Ce phénomène, bien connu des pilotes de F1, provient du fait que la rugosité des surfaces est alors totalement écrasée. L'aire réelle de contact est donc égale à l'aire apparente et ne dépend plus de la charge. L'autre approximation concerne l'hypothèse des coefficients de friction f_s et f_d constants. Des phénomènes comme le vieillissement statique (augmentation de f_s avec l'âge mais diminution avec polissage) ou l'affaiblissement cinétique (diminution de f_d avec la vitesse de glissement) sont observés.

LP 2

Gravitation

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Physique tout en un PCSI* **Salamito**
- ✍ *Physique tout en un PC* **Sanz**
- ✍ *Mécanique PCSI-MPSI* **Brasselet** — Force de marée
- ✍ *Mécanique du point* **BFR** — Problème à deux corps
- ✍ *BUP 858 : De Kepler à Newton* — Approche historique

Prérequis

- ➢ Mécanique du point (PFD, TMC)
- ➢ Forces conservatives, forces centrales
- ➢ Electrostatique
- ➢ Ref non galiléen (si marée)
- ➢ Repères tournants

Expériences

- Faire tomber n'importe quoi (une pomme pour le style peut être ?)
- simulations

1 La force gravitationnelle . . . 22
1.1 Les travaux de Newton . . . 22
1.2 Analogie avec l'électrostatique . . . 23
1.3 Champ gravitationnel pour une distribution continue de masse . . . 23
2 Trajectoire : problème à deux corps . . . 26
2.1 Position du problème : réduction canonique . . . 26
2.2 Planéité de la trajectoire . . . 28
2.3 Deuxième loi de Kepler . . . 28
2.4 Approche énergétique. . . . 29
2.5 Trajectoire : première Loi de Kepler . . . 30
2.6 3eme loi de Kepler . . . 31
3 Force de marée . . . 31
3.1 Terme de marée . . . 31
3.2 Limite de Roche . . . 32
4 Balance de Eötvös . . . 33

Introduction

L'Univers est régi par 4 forces fondamentales : la force électrostatique, vue dans une leçon précédente, les forces d'interaction nucléaire forte et faible, ainsi que la gravitation. Parmi ces 4 forces, la gravitation semble être la plus facile à observer puisque nous la subissons chaque seconde de notre vie, que ce soit en ayant le Soleil venir nous réveiller chaque jour, en sortant péniblement du lit ou en faisant tomber notre mug préféré au petit-déjeuner.

Cette leçon a pour objectif de comprendre cette interaction en la mettant en équation.

Lien vers `Kepler.ggb` : https://www.geogebra.org/m/mmyeu93d

1 La force gravitationnelle

1.1 Les travaux de Newton

"Il fallait être Newton pour apercevoir que la lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas."
Paul Valéry

La légende raconte que Newton a commencé à formaliser la force de gravitation après s'être assoupi au pied d'un pommier et avoir vu une pomme tomber. En réalité, il a réutilisé notamment les travaux de Kepler et de ses lois ainsi que de Huygens sur la force centrifuge pour énoncer en 1686 la loi suivante :

> Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de la distance les séparant.

Mathématiquement, cette loi se traduit par poser une force exercée par un corps de masse M sur un corps de masse m de la forme

$$\overrightarrow{F_{M/m}} = -\overrightarrow{F_{m/M}} = -\mathcal{G}\frac{mM}{||\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_m}||^2}\overrightarrow{u_{M\to m}} \tag{2.1}$$

avec $\mathcal{G} = 6.674\,08 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ est la constante universelle de gravitation et $\overrightarrow{u_{M\to m}}$ est le vecteur unitaire dirigé de M vers m.

Champ de pesanteur

Depuis le lycée, on introduit le poids, *i.e.* la force gravitationnelle exercée par un astre de masse M sur un objet de masse m à sa surface, comme une force de la forme $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$. On fait le lien avec la forme générale de la force gravitationnelle en posant

$$\overrightarrow{g} = -\mathcal{G}\frac{M}{r^2}\overrightarrow{u}$$

avec r la distance de l'objet au centre de l'astre attracteur et $\overrightarrow{u}$ le vecteur unitaire dirigé du centre de l'astre vers l'objet. Le vecteur $\overrightarrow{g}$, appelé *champ de pesanteur*, est alors dirigé de l'objet vers le centre de l'astre.

Ordre de grandeur : Pour un objet à la surface de la Terre ($r = 6371$ km, $M = 5.9736 \cdot 10^{24}$ kg), on trouve $g = 9.82\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Notons que g n'est pas uniforme car la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

Pour le Soleil, $r = 696342$ km et $M = 1,9891 \cdot 10^{30}$ kg, on trouve $g = g = 273.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, soit 28 fois plus que pour la Terre ! !

On peut remarquer que la force gravitationnelle entre 2 masses est de la même forme que la force électrostatique de Coulomb entre 2 charges. Dès lors, il est possible d'obtenir des propriétés sur le force gravitationnelle par analogie à celles que l'on connaît pour la force électrostatique.

1.2 Analogie avec l'électrostatique

1.2.1 Définition du champ gravitationnel

En électrostatique, on avait $\overrightarrow{F_{q_1/q_2}} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right\|^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}} = q_2\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r_2})$ où on introduit le champ électrostatique $\overrightarrow{E_1}$ au point $\overrightarrow{r_2}$ créé par la charge q_1 située en $\overrightarrow{r_1}$ en posant

$$\overrightarrow{E_1}(\overrightarrow{r_2}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right\|^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}$$

Par analogie, on peut définir le champ gravitationnel $\overrightarrow{G_1}$ au point $\overrightarrow{r_2}$ créé par une masse m_1 située en $\overrightarrow{r_1}$ comme étant :

$$\overrightarrow{G_1}(\overrightarrow{r_2}) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{\left\|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right\|^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}$$

On retrouve $\overrightarrow{F_{m_1/m_2}} = m_2\overrightarrow{G_1}(\overrightarrow{r_2}) = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{\left\|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}\right\|^2}\overrightarrow{u_{1\to 2}}$

En réalité, on n'a jamais des masses ponctuelles. Comment calculer $\overrightarrow{G}$ pour des masses non ponctuelles ?

1.3 Champ gravitationnel pour une distribution continue de masse

Dans le cas où on traite des distributions continues de masse, on peut essayer de calculer le champ gravitationnel de la distribution. Pour cela, on commence par étudier un ensemble de masse ponctuelles $\mathcal{D} = P_n; (m_n, \overrightarrow{r_n})$. La force gravitationnelle et donc le champ gravitationnel créé par cet ensemble est la somme des contributions de chaque masse ponctuelle. Ainsi, $\mathcal{D}$ crée au point $\overrightarrow{r'}$ un champ gravitationnel

$$\overrightarrow{G_\mathcal{D}} = \sum_n \overrightarrow{G_{P_n}}(\overrightarrow{r'}) = -\mathcal{G}\sum_n \frac{m_n}{\left\|\overrightarrow{r_n} - \overrightarrow{r'}\right\|^3}(\overrightarrow{r'} - \overrightarrow{r_n})$$

Si on considère que $\mathcal{D}$ est maintenant une distribution continue définie par une masse volumique $\rho(\overrightarrow{r'})$, on peut passer à la limite continue dans l'expression précédente pour obtenir :

$$\overrightarrow{G_\mathcal{D}} = -\mathcal{G}\iiint_V \mathrm{d}\overrightarrow{r'}^3 \frac{\rho(\overrightarrow{r'})}{\left\|\overrightarrow{r'} - \overrightarrow{r}\right\|^3}(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}) \tag{2.2}$$

Cependant, cette formulation n'est pas très pratique à utiliser. Il existe néanmoins un autre moyen pour les calculer dans certaines conditions : le théorème de Gauss.

1.3.1 Théorème de Gauss

Par analogie avec l'électrostatique, on peut définir un théorème de Gauss gravitationnel. **Il est valide parce que $\left\|\vec{G}\right\|$ varie peu lorsqu'on est suffisamment loin de la distribution de masse (dépendance en $1/r^2$).**

Soit une surface Σ fermée, orientée vers l'extérieur (par convention) et délimitant un volume V. Alors le flux de $\vec{G}$ à travers Σ est donné par :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \tag{2.3}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant normal à la surface dS et M_int est la masse contenue dans le volume V.

Comme pour l'électrostatique, ce théorème nécessite de connaître les symétries de $\vec{G}$ pour être utilisable. Pour cela, on utilise le principe de Curie :

Toute transformation laissant invariante les causes laisse aussi invariante les effets.

Il en résulte alors que si une distribution de masse présente des invariances, le champ gravitationnel créé par cette distribution aura les mêmes propriétés d'invariance. En outre, on peut démontrer mathématiquement que si un point M de l'espace appartient à un plan de symétrie (Π) d'une distribution de masse alors le champ gravitationnel créé par cette distribution au point M est inclus dans (Π).

	Électrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \mathrm{F \cdot m^{-1}}$	$-\mathcal{G} = -6,67 \times 10^{-11} \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Équations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de GAUSS	$\iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{int}}/\varepsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\mathrm{int}}$
Équation de POISSON	$\Delta V = -\rho/\varepsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

Passons à quelques applications rapides.

1.3.2 Application 1 : Distribution sphérique

Prenons une distribution sphérique uniforme $\mathcal{D}$ de rayon R de masse volumique ρ, de centre O (comme par exemple une étoile ou une planète). Les symétries de ce problème nous permettent de poser $\vec{G}(\vec{r}) = G(r)\vec{u_r}$ pour un point P à la position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ par rapport à O, avec $\vec{u_r}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.

On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre O. On distingue alors 2 cas :

- **Cas où** $P \in \mathcal{D}$

$$\begin{cases} \iint_\Sigma \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ \iint_\Sigma \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S = G(r)4\pi r^2 \\ M_{int} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{cases}$$

On trouve alors $G(r < R) = -\dfrac{4}{3}\pi\rho r\mathcal{G}$, ce qui donne pour le champ gravitationnel

$$\overrightarrow{G}(P \in \mathcal{D}) = -\frac{4}{3}\pi\rho r\mathcal{G}\overrightarrow{u_r} \tag{2.4}$$

- **Cas où** $P \notin \mathcal{D}$

$$\begin{cases} \iint_\Sigma \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ \iint_\Sigma \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{n} \mathrm{d}S = G(r)4\pi r^2 \\ M_{int} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho = M_{tot} \end{cases}$$

On trouve alors $G(r > R) = -\dfrac{4}{3}\pi\rho\dfrac{R^3}{r^2}\mathcal{G}$, ce qui donne pour le champ gravitationnel

$$\overrightarrow{G}(P \notin \mathcal{D}) = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}\mathcal{G}\overrightarrow{u_r} = -\mathcal{G}\frac{M_{tot}}{r^2}\overrightarrow{u_r} \tag{2.5}$$

Le champ gravitationnel créé par une distribution sphérique $\mathcal{D}$ en un point $P \notin \mathcal{D}$ est **rigoureusement identique** au champ gravitationnel créé en M si la distribution $\mathcal{D}$ était ponctuelle.

Encore une autre application un peu plus complexe.

1.3.3 Application 2 : le mer de Lindenbrok

Dans l'oeuvre de Jules Vernes *Voyage au centre de la Terre*, les protagonistes arrivent dans une cavité sous la terre dans laquelle se trouve un lac qui est décrit comme extrêmement plat (tandis qu'un lac à la surface de la Terre est légèrement courbé selon la courbure de la Terre). Nous allons vérifier cet observation romanesque.

Modélisation :

- Terre = boule homogène centrée en O, de rayon R, de densité massique uniforme ρ
- cavité = cavité sphérique centrée en O', de rayon R'

Toutes les équations de gravitation sont linéaire donc on peut appliquer le principe de superposition :

$$\begin{aligned} \{\text{Terre + Cavité}\} &= \{\text{Terre sans cavité}\} - \{\text{Boule centrée en } O', \text{ de rayon } R'\} \\ &= \{\text{Boule homogène centrée en } O, \text{ de rayon } R, \text{ de densité } \rho\} \\ &\quad + \{\text{Boule homogène centrée en } O', \text{ de rayon } R', \text{ de densité } -\rho\} \end{aligned}$$

On peut donc séparer le système {Terre + cavité} en 2 sous-systèmes qui sont tous les 2 des distributions sphériques. On utilise le résultat obtenu précédemment pour obtenir les champs gravitationnels créés par chaque sous-système, à savoir

$$\overrightarrow{G_+}(P) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\overrightarrow{OP} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{G_-}(P) = -\frac{4}{3}\pi(-\rho)\mathcal{G}\overrightarrow{O'P}$$

En sommant les 2 contributions, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}(P) &= \overrightarrow{G_+}(P) + \overrightarrow{G_-}(P) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\overrightarrow{OP} + \frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\overrightarrow{O'P} \\ &= -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\overrightarrow{OO'}\end{aligned} \tag{2.6}$$

On obtient bien un champ gravitationnel uniforme dans la cavité, donc le lac serait effectivement plat.

Passons maintenant à des exemples plus concrets.

2 Trajectoire : problème à deux corps

Le premier problème à étudier lorsque l'on parle de gravitation est e problème à deux corps, et nous restreindrons notre étude à celui-ci pour cette section. Il s'agit en effet du niveau de complexité maximal qui soit analytiquement soluble.

BFR p.94, on peut passer certaine étapes, on peut notamment ne prendre que les résultats et dire qu'on fera le reste en TD.

2.1 Position du problème : réduction canonique

On va s'intéresser à un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2, tels que le système est pseudo-isolé.

La seule force qui s'applique sur un point matériel est la force d'attraction gravitationnelle de l'autre :

$$\overrightarrow{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}} \tag{2.7}$$

où G est la constante universelle de gravitation ($6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m\,kg^{-3}\,s^{-2}}$), et $r_{12} = \|\overrightarrow{r_{12}}\| = \left\|\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right\|$

On a supposé pour écrire ces équations que les deux corps possédaient une symétrie sphérique. Le champ alors créé est le même que celui d'un point de même masse.

Le système est supposé pseudo-isolé donc il y a conservation de la quantité de mouvement.

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{cste} \tag{2.8}$$

Or par définition du barycentre : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$. Donc en dérivant par rapport au temps, et en utilisant la loi de conservation : $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$, le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \tag{2.9}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \tag{2.10}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{M_1M_2} \tag{2.11}$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\overrightarrow{r}$, on lui applique donc le PFD.

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_1}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{12} \tag{2.12}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_2}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12} \tag{2.13}$$

$$m_2m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{F}_{21} \qquad \text{par multiplication et différence} \tag{2.14}$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ qui est la masse réduite du système.

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{\nabla}U \tag{2.15}$$

On étudie donc une masse μ fictive soumise à un potentiel $U = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$. On pourra alors en déduire toute la physique du système par une homothétie.

Le problème se réduit donc à l'étude d'un corps mobile de masse μ soumis à un champs de force centrale, de centre G, de force $\overrightarrow{F}_{12} = -G\dfrac{m_1m_2}{{r_{12}}^2}\dfrac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}}$.

Point ordre de grandeurs :

Force Terre-Soleil (3.5×10^{22} N),
Terre-Jupiter (1.9×10^{18} N),
Jupiter-Soleil (4.2×10^{23} N),
Terre-Lune (2×10^{20} N).
Terre-Humain à la surface (1×10^{3} N)

L'approximation que l'on a fait de système pseudo-isolé n'est pas valable pour le soleil, qui subit plus l'attraction de Jupiter, mais représente une bonne approximation pour les planètes pour lesquelles l'influence du Soleil est prépondérante. Dans le cas des planètes ou des satellites, où l'objet sous influence a une masse faible devant l'astre qui produit le champ de gravité, l'astre peut être considéré comme immobile et la particule fictive est l'objet.

Simulation

✍ Wolfram ⏲ 2mn

Montrer le fichier Wolfram et expliquer le fait que les deux masses orbitent autour de G, et que finalement on a une force centrale.

2.2 Planéité de la trajectoire

Pour montrer la planéité de la trajectoire, soit on invoque le théorème des forces centrales, soit on redémontre. Si on reprend le problème plus haut, qu'on considère l'objet positionné en M de masse μ dans un champs de force centrale $\overrightarrow{F}$, on peut définir le moment cinétique du système et appliquer le TMC :

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{GM} \wedge \mu \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

En effet la force est orientée le long de $\overrightarrow{GM}$, donc le produit vectoriel est nul. Ainsi $\overrightarrow{L}$ est une constante. Le mouvement étant toujours orthogonal à $\overrightarrow{L}$, il est contenu dans un plan !

2.3 Deuxième loi de Kepler

On peut de plus déterminer la valeur du moment cinétique dans une base appropriée. Pour cela on va poser le référentiel tournant. Il s'agit de se placer dans un repère adapté à l'étude des problèmes à force centrale, donc plan : les coordonnées polaires. On veut déterminer le rayon r de la trajectoire en fonction de l'angle polaire θ.

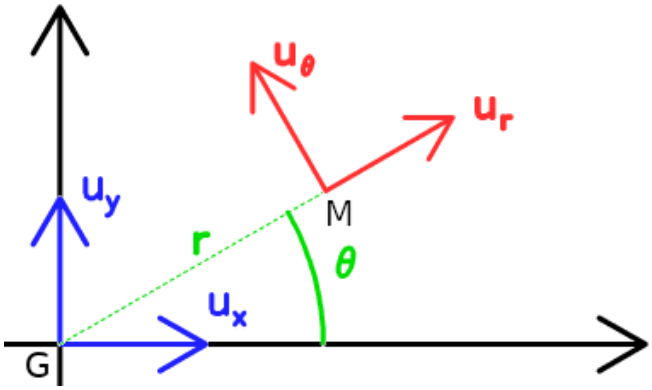


FIGURE 2.1 – Les coordonnées polaires. Ce sont des coordonées cylindriques à $z = 0$.

Dans ce repère on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Ainsi on peut calculer la valeur de $\overrightarrow{L}$ qui est constante, et elle vaut

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \mu \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \mu r^2 \dot{\theta} \overrightarrow{u_z}$$

On pose $C = r^2\dot{\theta}$, que l'on nomme la constante des aires. On a de plus que l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{r}$ vaut $\mathrm{d}A = \dfrac{\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}\mathrm{d}t}{2}$. D'où

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\left\|\overrightarrow{L}\right\|}{2\mu} = \frac{C}{2}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : Le rayon issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux (loi des aires).

BFR p.115

2.4 Approche énergétique.

On a un système sans dissipation donc l'énergie mécanique est conservée :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{2.16}$$

Or on peut écrire :

$$\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} \tag{2.17}$$
$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \tag{2.18}$$
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} \tag{2.19}$$

On obtient donc une énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{2.20}$$
$$E_{p,eff} = \mu\frac{\mathcal{C}^2}{2r^2} - G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{2.21}$$

Intérêt ? On s'est maintenant ramené à un problème à une dimension, de variable r. On s'intéresse à une masse sur un rail, soumise au potentiel $E_{p,eff}$. Faire le tracé, et schématiser les trajectoires, Sanz, slides.pdf.

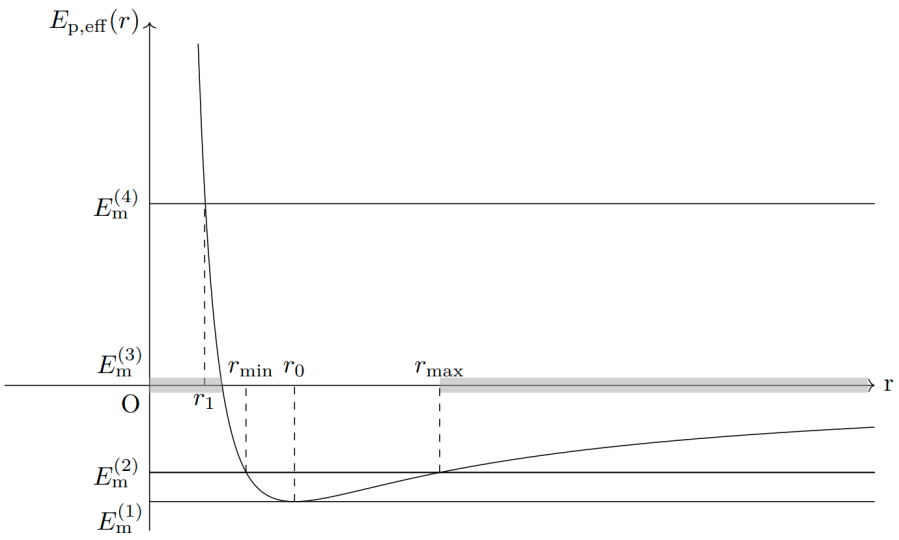


FIGURE 2.2 – Potentiel.

On distingue alors plusieurs cas de trajectoires :

- Cas 1 : L'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie mécanique est négative et égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective : la trajectoire est circulaire de rayon r0.

- Cas 2 : L'énergie cinétique radiale s'annule en rmin et en rmax et l'énergie mécanique est négative : la trajectoire est bornée, contenue dans [rmin ; rmax].
- Cas 3 : L'énergie mécanique est nulle et le système arrive à l'infini avec une énergie cinétique nulle : la trajectoire est minorée mais non bornée.
- Cas 4 : L'énergie mécanique est positive et la particule fictive arrive à l'infini avec une énergie cinétique non nulle : la trajectoire est minorée par r1 et non bornée. On définit alors les états liés (cas 1 et 2) correspondant à des trajectoires bornées et les états de diffusion (cas 3 et 4) correspondant à des trajectoires non bornées.

Maintenant que nous avons une idée des trajectoires grâce à notre analyse physique, nous pouvons mener le calcul et déterminer leur expression analytique en intégrant les équations du mouvement.

2.5 Trajectoire : première Loi de Kepler

✍ Mécanique PCSI, MPSI (Brasselet) p.232, Mécanique Tome I (Landau) p. 68

Nous allons obtenir l'équation de la trajectoire par la méthode du vecteur excentricité qui a l'avantage de n'être ni laborieuse comme les méthodes de Binet, ni "sortie du chapeau" comme la méthode du vecteur de Laplace-Runge-Lenz.

Partons de la deuxième loi de Newton appliquée à la masse fictive dans R_G galiléen (v désigne la vitesse de la particule fictive dans R_G) :

$$\mu \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{C}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} \tag{2.22}$$

On intègre, ce qui donne

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathcal{G}M}{C}(\overrightarrow{u_\theta} + \overrightarrow{e}) \tag{2.23}$$

où la constante d'intégration $\overrightarrow{e}$ est nommée vecteur excentricité, et $M = m_1 + m_2$.

En projettant sur $\overrightarrow{e_\theta}$ et en utilisant $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_\theta} = r\dot{\theta} = C/r$, on obtient : (on a forcément $\overrightarrow{e}$ dans le plan, et on met l'origine de θ quand $\overrightarrow{u_{theta}} \parallel \overrightarrow{e}$)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} \tag{2.24}$$

où $p = \dfrac{C^2}{\mathcal{G}M}$ est le paramètre, et e l'excentricité. On a le demi grand axe, $a = C/e$, et le demi petit axe, $b = \sqrt{Cp/e} = \sqrt{ap}$. On reconnait l'équation d'une conique, et on peut relier les coniques à l'énergie potentielle via :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2}{\mathcal{G}^2 M m_1 m_2}E_m} \tag{2.25}$$

On a les résultats suivants :

• e peut s'annuler pour une valeur négative de Em : on retrouve donc la trajectoire circulaire.

• Si $E_m < 0$ alors $e < 1$, ce qui signifie que la trajectoire est une ellipse dont G est l'un des foyers. On retrouve que la trajectoire est bornée, et mieux qu'elle est fermée, ce qui n'était pas donné a priori. En réalité, cela vient du fait que le champ gravitationnel varie comme $1/r^2$. (on parle de champ newtonien).

On retrouve la 1ere loi de Kepler : les astres font des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.

Vérification expérimentale : ✍ Brasselet p.238

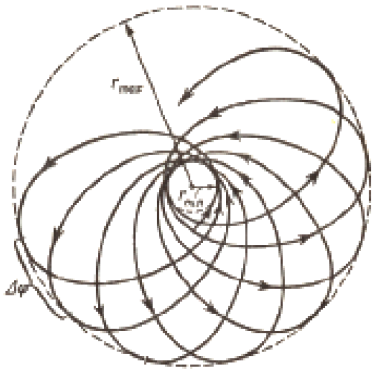


FIGURE 2.3 – Un mouvement à force centrale non newtonien.

2.6 3eme loi de Kepler

Troisième loi de Kepler (énoncé historique) : le rapport du carré de la période T sur le cube du demi grand-axe a de l'ellipse est une constante pour les planètes du système solaire.

$$\frac{a^3}{T^2} = cst$$

Par analyse dimentionnelle $\frac{a^3}{T^2}$ α $\mathcal{G}M$

Analytiquement, l'aire balayée en une période T vaut $A(T) = ab\pi = \frac{LT}{2\mu}$, et $p = b^2/a = \frac{L^2}{\mathcal{G}\mu^2 M}$, d'où

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

Intéressons nous à une application classique des effets de gravitation à plus de 2 corps : les marrées.

3 Force de marée

3.1 Terme de marée

Brasselet, p163

On se place dans $\mathcal{R}_C$ galiléen. On note T le centre de la Terre. On a par ailleurs $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \overrightarrow{0}$.

• Le PFD appliqué à la Terre dans $\mathcal{R}_C$ galiléen donne :

$$M_T \overrightarrow{a}(T)\big|_{\mathcal{R}_C} = \sum_i M_T \overrightarrow{G_i}(T) \tag{2.26}$$

où $G_i = \dfrac{\mathcal{G}M_i}{D_i}$ le champ créé par l'astre i en T.

•Le PFD appliqué à un point P de la surface terrestre dans $\mathcal{R}_G$ non galiléen donne

$$m\overrightarrow{a}(P)\big|_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + \sum_i m\overrightarrow{G_i}(P) + \overrightarrow{F_{ie}} \tag{2.27}$$

Or$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a}\big|_{\mathcal{R}_C} = \sum_i m\overrightarrow{G_i}(T)$, ce qui donne

$$m\overrightarrow{a}(P)\big|_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + \sum_i m\left(\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\right) \tag{2.28}$$

Le terme $m\sum_i \left(\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\right)$ est appelé **terme de marée**.

OdG : influence de divers astres i

$$\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T) \lesssim M_i\mathcal{G}\left(\frac{1}{(D_i-d)^2} - \frac{1}{D_i^2}\right) \simeq \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3} \tag{2.29}$$

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
Masse M_i (kg)	$2\cdot10^{30}$	$7\cdot10^{22}$	$5\cdot10^{24}$	$6\cdot10^{23}$	$2\cdot10^{27}$
Distance D_i (m)	$1\cdot10^{11}$	$4\cdot10^{8}$	$5\cdot10^{10}$	$6\cdot10^{10}$	$6\cdot10^{11}$
Terme de marée $\lvert\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\rvert$ (m.s^{-2})	$5\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-11}$	$2\cdot10^{-12}$	$8\cdot10^{-12}$

FIGURE 2.4 – OdG de termes de marée pour différents astres

⇒ On ne considère que l'influence de la Lune et du Soleil.

• On a $G_T \simeq 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ qui apparaît également dans le PFD, donc pour l'étude du mouvement d'un corps au voisinage de la Terre la force de marée est complètement négligeable.

On observe cependant des marées océaniques. Comment est-ce possible si le terme de marée est négligeable ? En réalité, les marées océaniques sont bel et bien négligeables à l'échelle de la Terre mais pas à l'échelle humaine !

Cependant, il est possible que le terme de marée ne soit plus du tout négligeable devant le champ de gravité d'un astre.

↓

3.2 Limite de Roche

Lorsque la distance entre deux astres diminue, on peut déterminer la distance critique à partir de laquelle, la force de marée deviendra égale en norme à la force gravitationnelle (cf schéma). A partir de cette limite, il ne peut y avoir existence de l'astre et il se fragmente.

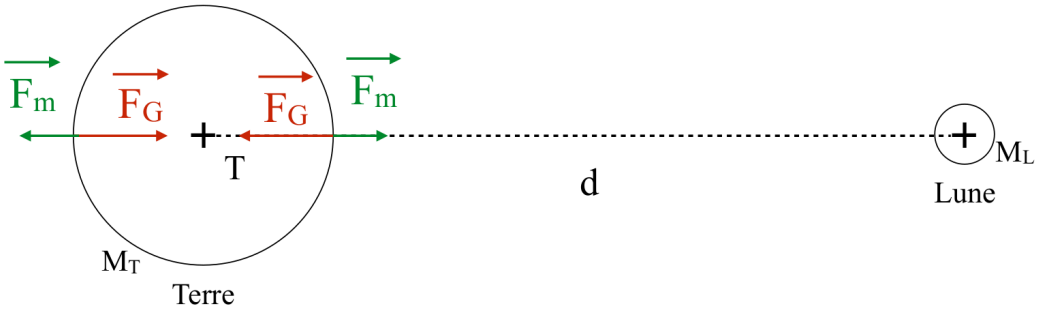


FIGURE 2.5 – Force de marée vs force gravitationnelle.

Calculons la distance minimale nécessaire entre une astre T et un astre i pour que T ne soit pas désintégré. Pour cela, prenons un point P à la surface de l'astre T tel que T, P et O_i soient alignés. Il faut :

$$\begin{aligned} \text{terme de marée} &\leq \left\| \overrightarrow{G_T}(P) \right\| \\ \frac{2\mathcal{G}M_i R_T}{D_i^3} &\leq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \\ D_i &\geq R_T \left(\frac{2M_i}{M_T} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Pour que la Lune ne détruise pas la Terre, il faut $D_{T-L} \geq 2 \times 10^6$ m

4 Balance de Eötvös

https://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_experiment

http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/maree-deformation.xml

http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Roche.xml

Conclusion

Dans ce cours nous avons exprimé la force de gravitation, l'énergie potentielle ainsi que le champ associés. Nous avons résolu les équations du mouvement dans le cas d'un système soumis à un seul champ de gravitation, puis le cas des marées statiques. Nous pourrions néanmoins nous intéresser à des interactions à N corps (par simulation informatique).

LP 3

Caractère non galiléen du référentiel terrestre

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Livre de prépa 2eme année* **quelconque**
- ✍ *La physique par la pratique* **Portelli**

Prérequis

- ➢ Mécanique Newtonienne
- ➢ Changement de référentiels
- ➢ Mécanique des fluids (vents géostrophiques)
- ➢ Champ gravitationnel

Expériences

☕

1 Le référentiel terrestre . . . 36
1.1 À la recherche d'un référentiel galiléen . . . 36
1.2 Dynamique dans le référentiel terrestre . . . 37
2 Conséquences de la rotation . . . 37
2.1 Centrifuge . . . 38
2.2 Coriolis . . . 39
2.3 L'usure des rails de train . . . 42
3 Translation elliptique . . . 42
3.1 Terme de marée . . . 42
3.2 Limite de Roche . . . 43

Introduction

Le référentiel terrestre est le premier choix de référentiel que nous faisons lorsqu'on étudie un phénomène sur Terre. On y applique notamment les lois de Newton, qui sont censées être applicables à la condition que le référentiel d'étude soit galiléen. Cependant, on sait bien que le référentiel terrestre n'est pas galiléen de par le fait qu'il soit lié à la surface de la Terre et que la Terre tourne sur elle-même. Dans cette leçon on va donc essayer de trouver un référentiel galiléen auquel comparer le référentiel terrestre.

Remarque : Le premier principe de la dynamique, c'est l'existence d'un référentiel galiléen.

1 Le référentiel terrestre

On a basé tout notre bordel sur les réf galiléens, est-ce que ça existe ? On va chercher.

1.1 À la recherche d'un référentiel galiléen

Définitions : On définit un référentiel comme trois axes spatiaux, un point de référence, et une horloge. En pratique l'horloge c'est que pour la relativité, mais bon.

- Ref terrestre $\mathcal{R}_T$

  On prend l'origine au centre de la terre, et les axes passent par deux villes sur l'équateur et par l'axe nord-sud. Il tourne sur lui-même et autour du soleil, et ça on le sait, essayons de se débarrasser de cette rotation. $\tau_{terre} \simeq$1 jour.

- Ref géocentrique $\mathcal{R}_G$

  On prend l'origine au centre de la terre, et on pointe les axes vers trois astres extrêmement lointains, tellement lointains qu'ils ont une parallaxe nulle. Ca tourne toujours autour du soleil. Mais c'est déjà mieux, $\tau_{gc} \simeq 400$ jours.

- Ref Copernic $\mathcal{R}_C$

  On prend les mêmes axes, mais on les fixe au centre de masse du système solaire. C'est pas mal, $\tau \simeq$250 millions d'années.

- Ref de la galaxie

  On prend le centre de masse de la galaxie et on fixe les axes vers des astres lointains.

On s'arrêtera au ref de copernic parce que pour ce que l'on fait, le temps caractéristique est supérieur à toute forme de vie...

Notre mécanique sera valable si $\tau_{exp} \ll \tau_{ref}$. On a alors une pseudo translation rectiligne uniforme.

Conclusion : Il s'avère donc impossible de mettre en évidence un référentiel rigoureusement galiléen.

Cependant, il n'est pas nécessaire de jeter toute la mécanique que vous avez étudié jusqu'à maintenant en considérant les référentiels comme galiléens. En effet, si on vous l'a présenté c'est que l'approximation de référentiel galiléen décrit bien la réalité et que ce n'est pas une hypothèse aberrante.

Si on regarde le pendule de Foucault, on s'aperçoit qu'au début de l'expérience, le pendule oscille bien dans un seul plan, le référentiel terrestre peut donc être considéré galiléen, ce n'est qu'au bout de quelques minutes que la rotation du plan d'oscillation est clairement visible. La durée de l'expérience joue un rôle essentiel dans la galiléanité du référentiel d'étude.

1.2 Dynamique dans le référentiel terrestre

Soient deux référentiels $\mathcal{R}$ de centre O et $\mathcal{R}'$ de centre O'. $\mathcal{R}'$ a un mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$, translation et rotation, à la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}$.

Loi de composition des vitesses et des accélérations, fait sur transparent sans le détail de calcul. Il faut tout de même savoir les refaire, et faire attentions aux différentes dérivées.

$$\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}(M) + \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(O') + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{3.1}$$

$$\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M) + \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(O') + 2\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M} \tag{3.2}$$

Le PFD appliqué à une particule de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen s'exprime donc :

$$m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M) = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \tag{3.3}$$

Le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}'$ non-galiléen s'exprime donc :

$$m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}}(M) = m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} \tag{3.4}$$

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}}(O') - m\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) - m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}}$$

Deux pseudo-forces apparaissent dans R' : la force d'inertie d'entraînement et la force de Coriolis. En particulier, le premier terme dans la force d'inertie d'entraînement est lié à la translation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ tandis que les 2 autres termes sont liés à la rotation de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Déterminer le caractère galiléen d'un référentiel c'est évaluer l'importance de ces termes dans le PFD. Si elles sont négligeables, on est en bonne approximation du caractère galiléen.

Remarque : Le terme en $\dfrac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}$ est nommé *terme d'Euler*, et on va très peu y toucher. C'est celui qui nous plaque au siège quand on appuie sur l'accélérateur en plein virage.

On va étudier les effets de ces forces dans différents exemples, pour évaluer la limite de galiléanité du ref terrestre.

2 Conséquences de la rotation

On a vu que la rotation de la Terre fait apparaître deux pseudo-forces lorsqu'on étudie le mouvement d'un objet dans le référentiel terrestre : la force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge) et la force de Coriolis. Intéressons-nous aux effets qu'ont ces forces dans certaines situations.

2.1 Centrifuge

2.1.1 Bourrelet équatorial

cf *Principles of Geophysics*, Sleep, Fujita *et al.*, p 521

En quelques mots, les roches de la Terre sont soumises aux termes non galiléen, et le terme d'inertie d'entraînement les pousse vers l'extérieur, d'autant plus fort qu'on est proche de l'équateur. Ainsi la terre est un sphéroïde, pas une sphère. Les écarts sont de l'ordre de 20km entre le rayon équatorial et le rayon polaire.

2.1.2 Non uniformité du champ de pesanteur

Soit un corps de masse m, situé au point P au voisinage de la surface terrestre. Le PFD dans $\mathcal{R}_T$ non galiléen :

$$m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}_T}} = \overrightarrow{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} \tag{3.5}$$

où $\overrightarrow{F}$ est la résultante des forces autres que celle d'attraction gravitationnelle terrestre $m\overrightarrow{G_T}(P)$, et avec les forces d'inertie d'entraînement

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{ie}} &= -m\overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP}) \\ \overrightarrow{F_{ic}} &= -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}_T}} \end{cases}$$

où T est le centre de la Terre. L'équation du mouvement de P dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est donc

$$m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}_T}} = \overrightarrow{F} + m\left(\overrightarrow{G_T}(P) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP})\right) - 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}_T}} \tag{3.6}$$

Le poids d'un corps est la résultante de l'attraction gravitationnelle terrestre et de la force (centrifuge) d'inertie d'entraînement due à la rotation propre de la Terre :

$$\overrightarrow{P} = m\left(\overrightarrow{G_T}(P) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP})\right)$$

On définit alors le *le champ de pesanteur* comme le rapport du poids sur la masse :

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{G_T}(P) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{TP}) = \overrightarrow{G_T}(P) + \Omega^2\overrightarrow{HP}$$

où H est le projeté orthogonal de P sur l'axe de rotation de la Terre.

Bien que $\overrightarrow{G_T}$ soit dirigé vers le centre de la Terre (Terre $\simeq$ sphère), ce n'est pas le cas du terme centrifuge (qui fuit l'axe de rotation). **Le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ n'est donc pas dirigé, de manière générale, vers le centre de la Terre.** Pourtant, on définit bien la *verticale en un lieu donné de la surface terrestre* avec ce champ, par exemple avec un fil à plomb.

Ordre de grandeur de $\overrightarrow{g}$

- L'accélération centrifuge dépend de la latitude et elle est maximale à l'équateur :

$$R_T\Omega^2 \simeq 6.4 \cdot 10^6 \times \left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2 \simeq 3 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

- Aux pôles : $\|\overrightarrow{g}\| \simeq 9.83\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- A l'équateur : $\|\overrightarrow{g}\| \simeq 9.78\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- Angle entre la verticale et la direction au centre de la Terre $\leq 0.1°$

$\Rightarrow$ Nous pouvons négliger l'effet du terme centrifuge et considérer que $\overrightarrow{g}$ est radial, de norme $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ avec une approximation inférieure à 0.5 %.

Lorsqu'on est à une altitude h au-dessus de la surface de la Terre, on a

$$g(h) \simeq \mathcal{G}\frac{M_T}{(R_T+h)^2} \simeq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}\left(1 - 2\frac{2h}{R_T}\right)$$

donc la variation relative vaut :

$$\left|\frac{g(h)-g(0)}{g(0)}\right| \simeq 2\frac{h}{R_T}$$

Pour considérer g constant avec cette même approximation de 0.5 %, il faudrait être à une altitude inférieure à $h \simeq 16$ km. Au dessus de cette altitude, le terme centrifuge est trop grand pour que cette approximation de 0.5 % soit encore valide.

2.2 Coriolis

2.2.1 Déviation vers l'Est

Une manifestation remarquable du caractère non galiléen de $\mathcal{R}_T$ est ladite "déviation vers l'Est". Voyons tout de suite de quoi il s'agit !

Rappel : expliquer avec les mains comme suit. Un objet lâché d'une certaine hauteur par l'expérimentateur a une vitesse lattérale qui est celle de rotation de la terre. $v = r_1\dot{\theta}$. En tombant il garde cette vitesse (Translation Rectiligne Uniforme) mais le rayon diminue, donc il se décale plus vite que le sol sous lui. Ainsi il décale vers l'est.

Un objet (une balle par exemple) est lâché d'une hauteur h au point A. Si $\mathcal{R}_T$ est supposé galiléen, il rencontre le sol à la verticale de A, mais des mesures précises mettent en évidence un décalage vers l'Est du point de chute. Cela ne peut être expliqué qu'en tenant compte de la force de Coriolis. En effet $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$ est orienté vers l'est pour une chute vers le centre de la terre.

Historiquement, cette expérience réalisée par Reich en 1831, a fourni la première preuve expérimentale de la rotation de la Terre.

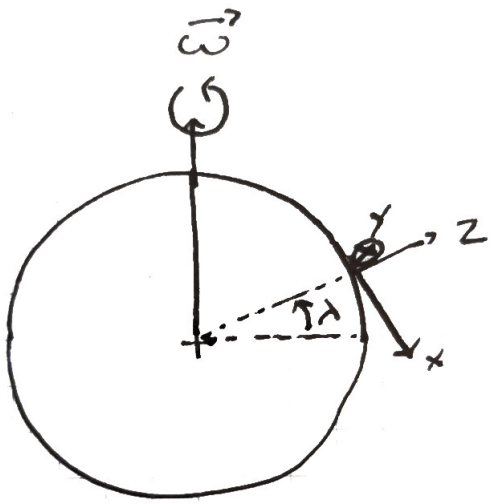
OdG

$L_{xp} = V \times T$, or $L_{corio} = a_c \times T^2 = \Omega v T^2$, donc $L_{corio}/L_{xp} = \Omega T = T/T_{rot}$.

Le caractère non galiléen n'apparaît donc de façon notable que si la durée du phénomène est de l'ordre de la journée.

Le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour l'étude de phénomènes se produisant au voisinage de la surface terrestre et dont la durée est très inférieure à la journée. Il faut se placer à des échelles de temps comparable à 24 heures pour observer l'effet

Faisons le calcul précis, à l'aide des notations suivantes :



Hypothèses : Système de masse m dans $\mathcal{R}_T$ non galiléen, lâché à une hauteur $h \ll 10$ km de façon à garder g constant. On considère alors une chute de quelques dizaines de secondes seulement.

Résolution :

On applique le principe fondamental de la dynamique

$$m\overrightarrow{a} = n\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_{ic}} \tag{3.7}$$

Or on a

$$\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v} = -2m \begin{pmatrix} -\Omega\cos\lambda \\ 0 \\ \Omega\sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\sin\lambda\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\Omega\left(\sin\lambda\dot{x} + \cos\lambda\dot{z}\right) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\cos\lambda\dot{y} \end{cases} \tag{3.9}$$

Or on a qu'en ordre de grandeur, $\ddot{x} \sim \dfrac{\Delta x}{T^2}$, et idem en y et en z. Par conséquent

$$\begin{cases} \Delta x \sim \Omega T \Delta y & \ll \Delta y \text{ car } \Omega \times T \ll 1 \\ \Delta y \sim \Omega T \Delta z & \ll \Delta z, g \\ \Delta z \sim g \end{cases} \tag{3.10}$$

On a donc

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\sin\lambda\dot{y} \\ \ddot{y} = -2\Omega\cos\lambda\dot{z} \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \tag{3.11}$$

Et la résolution donne ensuite :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\Omega^2 \cos\lambda \sin\lambda g t^4}{6} \\ y(t) = \dfrac{\Omega \cos\lambda g t^3}{3} \\ z(t) = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \tag{3.12}$$

Ainsi dans le plan horizontal, la déviation principale est vers l'Est, tandis que la déviation vers le Sud est négligeable. Pour une expérience de quelques secondes, on obtient typiquement des ordre de grandeur de type :

$$\begin{cases} x(T) \sim 1\,\text{cm} \\ y(T) \sim 1\,\mu\text{m} \end{cases} \tag{3.13}$$

2.2.2 Pendule de Foucault

Vidéo stylée https://youtu.be/b14l3-A8iUQ

Petit gif https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/Foucault-anim.gif

Petit cours https://youtu.be/qGK2r4qWwQI

Cette expérience, réalisée par Léon Foucault, consiste simplement à laisser osciller un pendule, lâché sans vitesse initiale. Son installation en mars 1851 d'un pendule de 67 mètres au Panthéon permit aux Parisiens de "venir voir tourner la Terre" (d'après les propres mots de Foucault).

Si $\mathcal{R}_T$ était galiléen, le pendule devrait osciller dans un plan vertical constant déterminé par sa position initiale. Or s'il oscille suffisamment longtemps, une rotation lente du plan des oscillations est constatée. C'est la force de Coriolis qui dévie en permanence le pendule vers la droite de l'hémisphère nord, ce qui entraîne une rotation du plan des oscillations dans le sens horaire. Dans l'hémisphère sud la rotation s'effectue dans l'autre sens ! À l'équateur, le pendule n'est pas dévié.

En reprenant l'équation précédente, on a pour des mouvements horizontaux :

$$\overrightarrow{F}_{ic,horiz} = -2m\Omega \sin(\lambda)\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{v}$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_de_Foucault#Mise_en_équation

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -2m\Omega \sin\lambda \dot{y} \\ \ddot{y} &= 2m\Omega \sin\lambda \dot{x} \end{cases}$$

$$\dot{\overrightarrow{v}} = -2\Omega \sin\lambda \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

Donc on a bien rotation de l'axe d'oscillation du pendule, à la vitesse angulaire Ω, et donc à la période $T = \frac{2\pi}{\Omega \sin\lambda}$. Elle dépend de la latitude λ.

2.2.3 Mouvements atmosphériques

✍ Brasselet p.182

Anticyclones et dépressions

On considère l'atmosphère à l'équilibre selon la verticale, son poids étant compensé par une pression diminuant avec l'altitude. Mais dans le plan horizontal, les couches d'air peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres : la composante horizontale de la force de Coriolis joue un rôle majeur dans la circulation atmosphérique. Elle est à l'origine de la formations des tourbillons d'anticyclones et de dépressions. Sur toute la Terre, l'air a tendance à se déplacer des zones de haute pression (anticyclones) vers les zones de basse pression (dépressions). Dans l'hémisphère nord, la force de Coriolis dévie ces courants d'air vers la droite, si bien qu'un tourbillon se forme autour d'une dépression dans le sens trigonométrique (la force de Coriolis centrifuge s'oppose aux forces de pression centripètes). Dans l'hémisphère sud, c'est l'inverse : les anticyclones tournent dans le sens trigo et les dépressions dans le sens horaire.

https://www.windfinder.com/

2.3 L'usure des rails de train

Prenons un train qui roule sur ses rails, du nord vers le sud, à la vitesse v. Il subit son poids et la réaction des rails, et la force de Coriolis. Par conséquent les rails compensent la force de coriolis en effectuant une force opposée.

$$\overrightarrow{R} = -m\overrightarrow{g} + 2m\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

Ainsi le rail de l'ouest pousse plus fort que le rail de l'est, et s'use plus vite !

http://uel.unisciel.fr/physique/meca/meca_ch08/co/chapitre7_07.html

3 Translation elliptique

Le référentiel $\mathcal{R}_G$ est en translation elliptique par rapport à $\mathcal{R}_C$, avec les caractéristiques suivantes :

- excentricité $\simeq 0.017$
- aphélie = 152 millions de km
- périhélie = 147 millions de km

Ainsi, puisqu'on est en translation, $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_g/\mathcal{R}_C}} = \overrightarrow{0}$ donc on n'a pas de force de Coriolis.

On étudie maintenant le mouvement d'un point à la surface de la Terre dans le référentiel de Copernic supposé galiléen.

3.1 Terme de marée

Brasselet, p163

On se place dans $\mathcal{R}_C$ galiléen. On note T le centre de la Terre. On a par ailleurs $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \overrightarrow{0}$.

• Le PFD appliqué à la Terre dans $\mathcal{R}_C$ galiléen donne :

$$M_T \overrightarrow{a}(T)_{\mathcal{R}_C} = \sum_i M_T \overrightarrow{G_i}(T) \tag{3.14}$$

où $G_i = \frac{\mathcal{G}M_i}{D_i}$ le champ créé par l'astre i en T.

•Le PFD appliqué à un point P de la surface terrestre dans $\mathcal{R}_G$ non galiléen donne

$$m\overrightarrow{a}(P)_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + \sum_i m\overrightarrow{G_i}(P) + \overrightarrow{F_{ie}} \tag{3.15}$$

Or $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_C} = \sum_i m\overrightarrow{G_i}(T)$, ce qui donne

$$m\overrightarrow{a}(P)_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + \sum_i m\left(\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\right) \tag{3.16}$$

Le terme $m\sum_i \left(\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\right)$ est appelé **terme de marée**.

OdG : influence de divers astres i

$$\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T) \lesssim M_i\mathcal{G}\left(\frac{1}{(D_i-d)^2} - \frac{1}{D_i^2}\right) \simeq \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3} \tag{3.17}$$

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
Masse M_i (kg)	$2\cdot10^{30}$	$7\cdot10^{22}$	$5\cdot10^{24}$	$6\cdot10^{23}$	$2\cdot10^{27}$
Distance D_i (m)	$1\cdot10^{11}$	$4\cdot10^{8}$	$5\cdot10^{10}$	$6\cdot10^{10}$	$6\cdot10^{11}$
Terme de marée $\lvert\overrightarrow{G_i}(P) - \overrightarrow{G_i}(T)\rvert$ (m.s^{-2})	$5\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-11}$	$2\cdot10^{-12}$	$8\cdot10^{-12}$

FIGURE 3.1 – OdG de termes de marée pour différents astres

⇒ On ne considère que l'influence de la Lune et du Soleil.

• On a $G_T \simeq 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ qui apparaît également dans le PFD, donc pour l'étude du mouvement d'un corps au voisinage de la Terre la force de marée est complètement négligeable.

On observe cependant des marées océaniques. Comment est-ce possible si le terme de marée est négligeable ? En réalité, les marées océaniques sont bel et bien négligeables à l'échelle de la Terre mais pas à l'échelle humaine !

Cependant, il est possible que le terme de marée ne soit plus du tout négligeable devant le champ de gravité d'un astre.

3.2 Limite de Roche

Lorsque la distance entre deux astres diminue, on peut déterminer la distance critique à partir de laquelle, la force de marée deviendra égale en norme à la force gravitationnelle (cf schéma). A partir de cette limite, il ne peut y avoir existence de l'astre et il se fragmente.

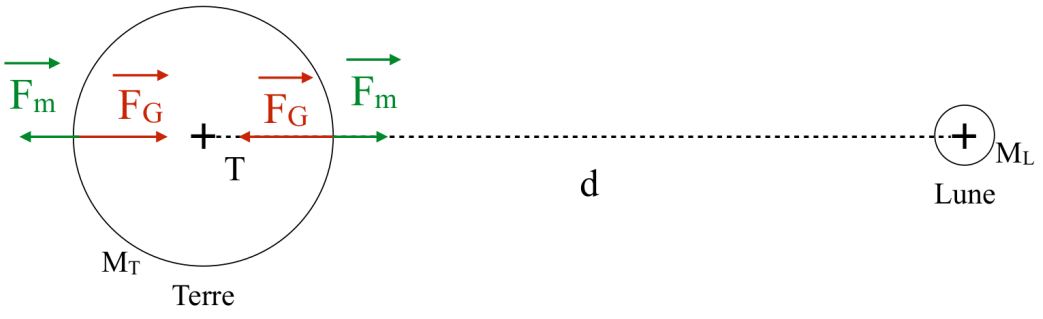


FIGURE 3.2 – Force de marée vs force gravitationnelle.

Calculons la distance minimale nécessaire entre une astre T et un astre i pour que T ne soit pas désintégré. Pour cela, prenons un point P à la surface de l'astre T tel que T, P et O_i soient alignés. Il faut :

$$\begin{aligned} \text{terme de marée} &\leq \left\| \overrightarrow{G_T}(P) \right\| \\ \frac{2\mathcal{G}M_i R_T}{D_i^3} &\leq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \\ D_i &\geq R_T \left(\frac{2M_i}{M_T} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Pour que la Lune ne détruise pas la Terre, il faut $D_{T-L} \geq 2 \times 10^6$ m

Commentaires à la suite de l'oral blanc du 20 mai 2020

- Passer quelques minutes en début de leçon à définir ce qu'est un référentiel, ce que veut dire galiléen. Un référentiel c'est 3 axes spatiaux + une horloge (en relativité) et le premier principe de Newton postule **l'existence** d'un référentiel galiléen tel qu'un système isolé ou pseudo-isolé était soit immobile, soit en translation rectiligne uniforme.
- Quelle est la différence entre la masse inertielle est la masse pesante ? C'est important de le savoir pour cette leçon quand on écrit le poids comme somme d'un terme gravitationnel (donc masse pesante) et d'un terme centrifuge (masse inertielle). Actuellement, on n'a pas mis en évidence de différence entre ces 2 masses avec la précision permise apr la technologie actuelle. Parmi les expériences comparant ces masses, on cite la balance d'Eötvös qui compare Coriolis et la gravité, ou toute autre expérience mettant en jeu des effets inertiels.
- Pour juger de la galiléanité d'un référentiel, on peut penser un gyroscope.
- L'idée générale de cette leçon est de mesurer les écarts entre les observations expérimentales et le modèle du référentiel galiléen pour construire un référentiel galiléen virtuel.
- Dans l'inertie d'entraînement , on a le terme d'Euler avec $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}}{\mathrm{d}t}$. Ce terme intervient par exemple quand on étudie la précession du gyroscope ou le fait d'appuyer sur la pédale en voiture dans un virage et de ce retrouver cloué au siège par exemple.
- Le terme de Coriolis et le terme d'Euler sont associés à la loi de conservation du moment cinétique.
- La non verticalité de $\overrightarrow{g}$ a une conséquence notamment en architecture : les piliers sont dans la direction de $\overrightarrow{g}$ (on utilise un fil à plomb) et non pas vers le centre de la Terre.
- Quelle différence entre le mouvement du pendule de Foucault, dévié par Coriolis, et celui d'une chute libre ; également déviée par Coriolis ? Le mouvement du pendule est tangent à la Terre donc la déviation par Coriolis dépend de l'hémisphère alors que le mouvement de chute libre est normal à la surface de la Terre donc Coriolis déviera toujours le mouvement vers l'Est, peu importe où on est. Autrement dit, la Terre tourne alors que le plan du pendule ne tourne pas dans le référentiel héliocentrique alors que pour la chute libre c'est le sol qui prend du retard par rapport à l'objet en chute libre (même vitesse angulaire mais altitude différente et $v = h\omega$)

  $\Rightarrow$ voir https://www.youtube.com/watch?v=KiJ9xr8_GSI
- En plus de la déviation vers l'Est, il y a aussi une déviation vers le Sud mais qui est bien plus faible (terme d'ordre 2) et très difficile à voir expérimentalement.
- Décrire le mouvement des particules dans l'atmosphère : en régime transitoire, les particules vont selon le gradient de pression et en régime établi il a équilibre entre le gradient de pression et Coriolis. Les particules forment un vortex avec des orbites constants (vorticité nulle). Les lignes de courants suivent les isobares et la règle de Buys-Ballot dit alors que dans l'hémisphère nord, les vents géostrophiques se déplacent avec les zones de forte pression sur la droite.
- L'utilisation de WindFinder pour visualiser ça est très très bien.
- L'expérience du lavabo est censée montrer que le sens de rotation du vorext dépend de l'hémisphère. Cependant, on ne le voit pas en pratique car c'est un faible effet, notamment devant les effets convectifs.
- Quand on regarde le système Terre-Lune, qu'on suppose isolé (c'est pas vraiment le cas), on a conservation du moment cinétique total

  $$L = l_{\text{spin Terre}} + L_{\text{orbital}}$$

  Notons qu'on a négligé la rotation de la Lune. On a un couplage spin-orbite entre la Terre et la Lune via les forces de marées. Le spin de la Terre est alors convertit en énergie orbitale : la Terre tourne moins vite et la Lune s'éloigne de la Terre.
- Les conditions pour juger de la galiléanité d'un référentiel repose sur des échelles de temps (temps de l'expérience $\ll$ 1 jour pour Coriolis par exemple) mais également sur des échelles de taille et de vitesse (Coriolis dépend de la vitesse v').
- Quelle serait la conséquence de la non-existence d'un référentiel galiléen ? L'espace serait non euclidien.

LP 4

Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

Niveau : L2-L3

Bibliographie

- ✍ *Mécanique* **Pérez**
- ✍ *Physique atomique* **Cagnac**

angles d'Euler, précession classique
Larmor

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Théorème du moment cinétique
- ➢ Matrice d'inertie
- ➢ Electromagnétisme de base
- ➢ Portance d'une aile (si on fait le boomerang)

Expériences

- ☕ le gyroscope
- ☕ la toupie ?

1 Positionnement théorique . . . 48
1.1 Angles d'Euler . . . 48
1.2 L'intérêt pratique des angles d'Euler . . . 49
1.3 Approximation gyroscopique . . . 50
2 Domaine macroscopique . . . 50
2.1 Mise en équation de la toupie . . . 50
2.2 Précession de la toupie . . . 51
2.3 Gyroscope . . . 52
2.4 Le cas du boomerang . . . 53
2.5 Ordres de grandeur . . . 53
3 Domaine microscopique . . . 54
3.1 Moment magnétique et moment cinétique . . . 54
3.2 Action d'un champ magnétique . . . 55
3.3 Principe de la Résonance Magnétique Nucléaire . . . 55
3.4 Usages de la RMN . . . 56

Introduction

1 Positionnement théorique

1.1 Angles d'Euler

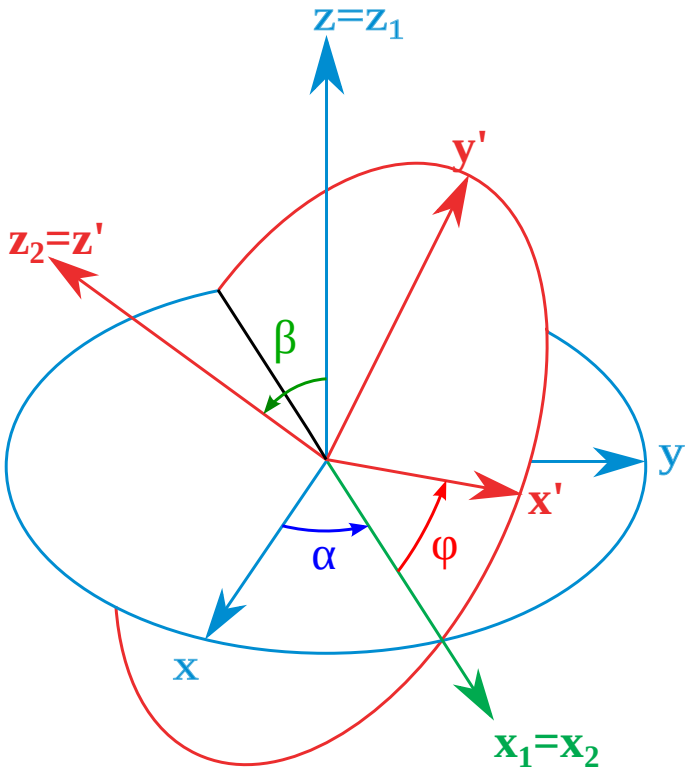


FIGURE 4.1 – Les angles d'Euler

Partons d'un référentiel $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z)$. A partir de ce référentiel, on effectue 3 rotations l'une après l'autre :

- la *précession* : rotation d'angle α autour de l'axe $\mathcal{O}z$. On obtient alors le référentiel $\mathcal{R}_1 = (\mathcal{O}, x_1, y_1, z_1)$ où les axes z_1 et z sont confondus ;
- la *nutation* : rotation d'angle β autour de l'axe $\mathcal{O}x_1$. On obtient alors le référentiel $\mathcal{R}_2 = (\mathcal{O}, x_2, y_2, z_2)$ où les axes x_2 et x_1 sont confondus ;
- la *rotation propre* : rotation d'angle φ autour de l'axe $\mathcal{O}z_2$. On obtient alors le référentiel $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}, x', y', z')$ où les axes z' et z_2 sont confondus.

Le vecteur rotation de $\mathcal{R}'$ vaut alors $\overrightarrow{\omega} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_z} + \dot{\beta}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z_2}}$.

On veut obtenir les expressions de $\overrightarrow{\omega}$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Pour cela, on écrit les projections des nouveaux vecteurs de base sur le référentiel précédent.

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x_1}} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_x} + \sin(\alpha)\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{y_1}} = -\sin(\alpha)\overrightarrow{e_x} + \cos(\alpha)\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{z_1}} = \overrightarrow{e_z} \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x_2}} = \overrightarrow{e_{x_1}} \\ \overrightarrow{e_{y_2}} = \cos(\beta)\overrightarrow{e_{y_1}} + \sin(\beta)\overrightarrow{e_{z_1}} \\ \overrightarrow{e_{z_2}} = -\sin(\beta)\overrightarrow{e_{y_1}} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_{z_1}} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x'}} = \cos(\varphi)\overrightarrow{e_{x_2}} + \sin(\varphi)\overrightarrow{e_{y_2}} \\ \overrightarrow{e_{y'}} = -\sin(\varphi)\overrightarrow{e_{x_2}} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_{y_2}} \\ \overrightarrow{e_{z'}} = \overrightarrow{e_{z_2}} \end{cases} \tag{4.3}$$

On peut donc exprimer $\overrightarrow{e_{x_1}}$ et $\overrightarrow{e_z}$ dans $\mathcal{R}$ et donc obtenir l'expression de $\overrightarrow{\omega}$ dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\cos(\alpha) + \dot{\varphi}\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \dot{\beta}\sin(\alpha) - \dot{\varphi}\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} + \dot{\varphi}\cos(\beta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \tag{4.4}$$

Si on veut l'expression de $\overrightarrow{\omega}$ dans $\mathcal{R}'$, il faut cependant réaliser les projections inverses :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x_2}} = \cos(\varphi)\overrightarrow{e_{x'}} - \sin(\varphi)\overrightarrow{e_{y'}} \\ \overrightarrow{e_{y_2}} = \sin(\varphi)\overrightarrow{e_{x'}} + \cos(\varphi)\overrightarrow{e_{y'}} \\ \overrightarrow{e_{z_2}} = \overrightarrow{e_{z'}} \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{x_1}} = \overrightarrow{e_{x_2}} \\ \overrightarrow{e_{y_1}} = \cos(\beta)\overrightarrow{e_{y_2}} - \sin(\beta)\overrightarrow{e_{z_2}} \\ \overrightarrow{e_{z_1}} = \sin(\beta)\overrightarrow{e_{y_2}} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_{z_2}} \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_x} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_{x_1}} - \sin(\alpha)\overrightarrow{e_{y_1}} \\ \overrightarrow{e_y} = \sin(\alpha)\overrightarrow{e_{x_1}} + \cos(\alpha)\overrightarrow{e_{y_1}} \\ \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_{z_1}} \end{cases} \tag{4.7}$$

On peut donc exprimer $\overrightarrow{e_{x_1}}$ et $\overrightarrow{e_z}$ dans $\mathcal{R}$ et donc obtenir l'expression de $\overrightarrow{\omega}$ dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\cos(\varphi) + \dot{\alpha}\sin(\beta)\sin(\varphi) \\ -\dot{\beta}\sin(\varphi) + \dot{\alpha}\sin(\beta)\cos(\varphi) \\ \dot{\varphi} + \dot{\alpha}\cos(\beta) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \tag{4.8}$$

On va voir en quoi les angles d'Euler nous seront utile dans l'étude d'un solide en rotation.

1.2 L'intérêt pratique des angles d'Euler

Les angles d'Euler, introduit ici de manière théorique, sont très pratiques pour repérer les rotations d'objets particuliers dans l'espace. La plupart des cas que l'on étudiera sont en effet des cas à symétrie de révolution (exacte ou approchée), comme des toupies, des gyroscopes ou des planètes. Dans ces situations là, il a été vu que la matrice d'inertie $\mathcal{I}$ est diagonalisable dans toute base comportant l'axe de symétrie du solide.

Ainsi en pratique on pose les angles d'Euler pour suivre l'axe de symétrie du solide. On aura alors toujours superposition de cet axe à l'axe z', et rotation de x' et y' avec le solide, d'où le nom *rotation propre* pour φ, et les axes x', y' et z' forment à eux trois une base orthonormée directe dans laquelle le solide est en rotation pure autour de z'.

Le moment cinétique devient, dans $\mathcal{R}'$:

$$\overrightarrow{L} = \mathcal{I}\overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \overrightarrow{\omega}_{\mathcal{R}'} \tag{4.9}$$

En préparation, trouver l'expression de tenseur I et la dériver.

1.3 Approximation gyroscopique

L'approximation gyroscopique revient à considérer que la rotation du solide autour de son axe de révolution est très grande devant le autres, *i.e.*

$$|\dot{\varphi}| \gg |\dot{\alpha}|, \ |\dot{\varphi}| \gg |\dot{\beta}|$$

Du fait que $\overrightarrow{\omega} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_z} + \dot{\beta}\overrightarrow{e_{x_1}} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z'}}$, en faisant l'approximation gyroscopique on a $\overrightarrow{\omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z'}}$, et finalement :

$$\overrightarrow{L} = \mathcal{I}\overrightarrow{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} = I_3\dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z'}} \tag{4.10}$$

Meilleure approche

Une autre approche pour retrouver l'approximation gyroscopique est de considérer une comparaison entre les moments cinétiques sur les trois axes de $\mathcal{R}'$, et d'imposer la condition $L_{z'} \gg L_{x'}, L_{y'}$. On aboutit au même résultat si les L sont similaires, mais la comparaison des vitesses est expérimentalement plus simple.

2 Domaine macroscopique

Maintenant que nous avons posé le cadre de l'étude, nous allons nous intéresser aux applications les plus traditionnelles de ce formalisme et de l'approximation gyroscopique.

2.1 Mise en équation de la toupie

On appelle *toupie* un solide de révolution avec une pointe, qui peut donc tenir "debout" sur une surface. Lorsqu'elle tourne suffisamment vite, la toupie se maintient en équilibre.

mouvement d'une toupie

On fait tourner une toupie et on constate l'existence d'un mouvement de précession de son axe de rotation.

Nous allons expliquer ce mouvement à l'aide des équations que nous venons de poser.

On note C le centre d'inertie de la toupie, et on applique le TMC au point O, pointe de la toupie reposant sur le sol. On note $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\ell}$. Alors on a :

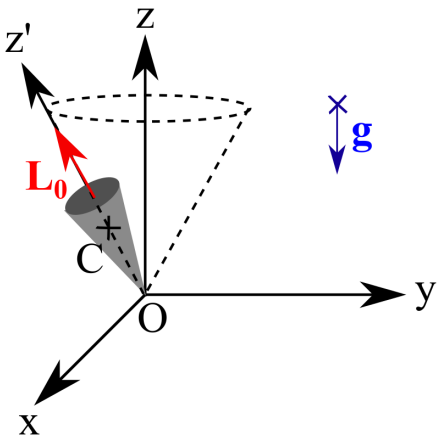


FIGURE 4.2 – Schéma de la toupie.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\ell} \wedge m\overrightarrow{g} \tag{4.11}$$

Or $\overrightarrow{\ell}$ est parallèle à $\overrightarrow{L_O}$, donc on a, par un habile produit scalaire avec $\overrightarrow{L_O}$:

$$\overrightarrow{L_O} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = 0 \tag{4.12}$$

D'où la fatidique équation de conservation du moment cinétique :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}^2}{\mathrm{d}t} = 0, \ i.e. \ ||\overrightarrow{L_O}|| = \text{constante}. \tag{4.13}$$

Une opération similaire avec $\overrightarrow{e_z}$ donne

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O} \cdot \overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = 0, \ i.e. \ \overrightarrow{L_O} \cdot \overrightarrow{e_z} = L_{0z} = \text{constante}. \tag{4.14}$$

Ainsi le moment cinétique, et donc $\overrightarrow{e_{z'}}$, décrivent un cône de sommet O, de demi-angle β_0.

2.2 Précession de la toupie

Étant donné que $\overrightarrow{\ell}$ est colinéaire à $\overrightarrow{L_O}$, on peut écrire

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\omega_p} \wedge \overrightarrow{L_O} \tag{4.15}$$

avec $\overrightarrow{\omega_p} = -\dfrac{m\overrightarrow{g}\ell}{L_O}$, vecteur rotation de précession.

Pour calculer la vitesse de précession de la toupie, on applique l'approximation gyroscopique. L'approximation semble justifiée à première vue, puisque la toupie tourne très vite sur elle même, et précesse lentement, comme la petite manip d'avant vous l'a montré. On a alors $L_O \simeq I_3\dot{\varphi}$.

Ainsi on trouve que $\overrightarrow{L_O}$ tourne autour de $\overrightarrow{e_z}$ dans $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire $\omega_p = \dfrac{mg\ell}{I_3\dot{\varphi}}$.

Il est bon de se poser la question de la validité des approximations faites *a posteriori*. Pour ce faire, évaluons l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire de précession par rapport à la vitesse de rotation propre. On a :

- $\ell \simeq 5$ cm
- $R \simeq 3$ cm
- $\dot{\varphi} \simeq 50 \times 2\pi$ rad s^{-1}
- $m \simeq 100$ g

Avec comme approximation que $I_3 \simeq mR^2$, on a $\omega_p \simeq 2$ rad s^{-1} On vérifie bien l'hypothèse à postériori !

Nous allons maintenant regarder une toupie très particulière, le gyroscope.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Gyroscope_precession.gif

2.3 Gyroscope

Un gyroscope, c'est un solide de révolution parfait, avec en plus un plan de symétrie orthogonal à son axe de symétrie, tournant à grande vitesse autour de son axe et suspendu par son centre de masse C de façon parfaite. Autrement dit, c'est une roue. On cherche généralement à maximiser son moment d'inertie I_3 et sa vitesse de rotation propre.

Présentation du gyroscope

Les observations à faire sur le gyroscope :

- en l'absence de couple extérieur il garde sa direction de rotation, ce qui le rend utile pour, par exemple, guider des bateaux.
- en présence d'un couple extérieur (petite masse sur le côté), il a une réaction tout à fait contre-intuitive mais très calculable : si on essaye de changer β, son axe de rotation va tourner selon un axe perpendiculaire à la direction de la force appliquée et à l'axe de rotation, il va précesser. Cette propriété peut servir à stabiliser un bateau, si le gyroscope est assez conséquent.

On va maintenant tacher de comprendre par le calcul la réaction à un couple extérieur $\overrightarrow{\Gamma}$, comme par exemple le déséquilibrage du gyroscope par une masse. Pour ce faire, refaisons un théorème du moment cinétique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Gamma} \tag{4.16}$$

De plus on a par application de la dérivation en référentiel tournant :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega_p} \wedge \overrightarrow{L_O} \tag{4.17}$$

Or on sait que $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = 0$, donc $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\omega_p} \wedge \overrightarrow{L_O}$. On a directement ce que l'on souhaite.

On trouve ainsi qu'il y a apparition d'une précession, exactement comme attendu ! Lorsqu'on veut faire tourner une roue de vélo, on la penche.

Roue de vélo

Si cela est possible, on peut illustrer cela par la manip de la roue de vélo que l'on fait tourner et que l'on suspend par son axe. Sinon on peut montrer cette vidéo :

https://youtu.be/8H98BgRzpOM

2.4 Le cas du boomerang

remarque

Cette partie qualitative peut être raccourcie selon les besoins de l'exposé

Un boomerang est en fait deux ailes d'avions collés l'une à l'autre, du point de vue de sa forme. Ainsi si on le lance et le fait tourner à une grande vitesse, chaque pale subit une portance proportionelle à la vitesse de l'air au carré.

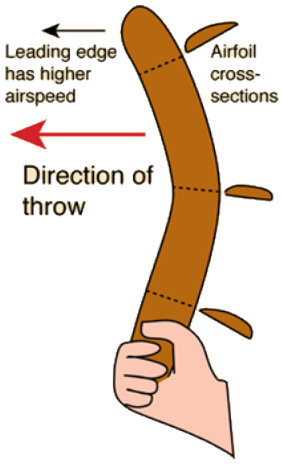


FIGURE 4.3 – Schéma de la forme du boomerang.

Cependant, la vitesse de la pale avant est nettement plus grande que celle de la pale arrière du boomerang, par conséquent il s'établit une différence de force entre l'avant et l'arrière, c'est à dire un couple. Or on l'a vu juste avant, un couple sur un objet tournant se traduit par une précession. Ainsi, le boomerang lancé à la verticale va tourner, et revenir sur ses pas !

Cependant, l'étude plus poussée du boomerang sort définitivement du cadre de la leçon puisque la résultante des effets hydrodynamiques ne s'applique pas au centre de masse du boomerang.

2.5 Ordres de grandeur

- la précession des équinoxe a été découverte en -150
- période de précession de la terre : 26 000 ans
- nutation de la terre : 23°26'12.555", variant de + ou - 9.2" avec une période de 18.6 ans.
- 26 000 ans par rapport à un jour ça fait 10 000 000. 2 secondes par rapport à 50 tours / seconde ça fait 100.

3 Domaine microscopique

3.1 Moment magnétique et moment cinétique

Considérons le modèle atomique de Bohr, avec un électron tournant autour d'un noyau atomique. C'est un modèle empirique qui permet de s'affranchir de l'étude précise en mécanique quantique du système, et qui (par chance ou presque) mène aux mêmes résultats.

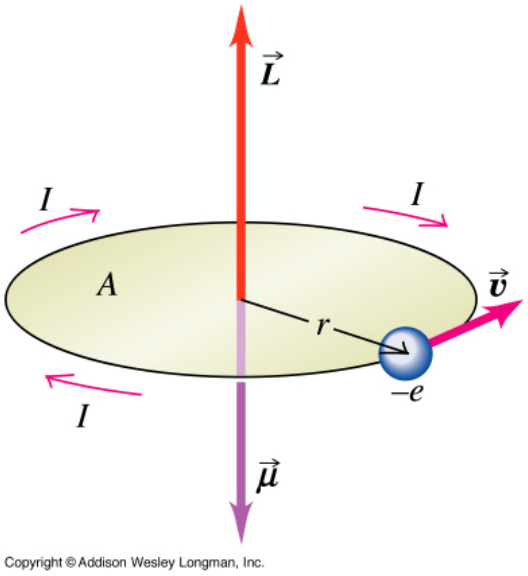


FIGURE 4.4 – Modèle de Bohr

L'électron possède un moment cinétique

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge m_e \overrightarrow{v} = mvr\overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire normale à la surface délimitée par le mouvement de l'électron.

Il possède également un moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$ définit par $\overrightarrow{\mu} = iA\overrightarrow{n}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mu} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\pi r^2 \overrightarrow{n} \\ &= \frac{-e}{T}\pi r^2 \overrightarrow{n} \qquad \text{où} \qquad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{est la période de rotation} \\ &= -\frac{evr}{2}\overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{4.18}$$

On obtient donc finalement :

$$\overrightarrow{\mu} = \gamma \overrightarrow{L} \qquad \text{où} \qquad \gamma = -\frac{e}{2m_e} \simeq -8.8 \times 10^{10}\,\mathrm{C\,kg^{-1}} \quad \text{le rapport gyromagnétique.} \tag{4.19}$$

Comme indiqué précédemment, ce résultat trouvé avec un modèle classique, le modèle de Bohr, reste valide dans la théorie quantique. Il faut tout de même noter la principale faiblesse du modèle : un électron qui tourne, ça rayonne, et donc ça perd de l'énergie, et donc ça s'effondre sur le noyau.

Cette colinéarité va avoir d'importantes conséquences, comme on va le voir dans la partie suivante.

3.2 Action d'un champ magnétique

On considère un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ uniforme dans lequel on plonge l'atome à 1 électron étudié précédemment. Puisque l'électron possède un moment magnétique $\overrightarrow{\mu}$, il va subir un moment $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B_0}$.

En appliquant le TMC à l'électron dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B_0} \\ &= \gamma \overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B_0} \\ &= \overrightarrow{\omega_0} \wedge \overrightarrow{L} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\omega_0} = -\gamma \overrightarrow{B_0} \end{aligned} \tag{4.20}$$

On retrouve alors à équation similaire à celle obtenue dans le domaine macroscopique où $\overrightarrow{B_0}$ est l'analogue de la pesanteur $\overrightarrow{g}$. On en déduit que $\overrightarrow{L}$ a un mouvement de précession autour de la direction du champ $\overrightarrow{B_0}$ à la vitesse angulaire ω_0. On appelle ω_0 la pulsation de LARMOR. De plus, $\overrightarrow{\omega_0}$ et $\overrightarrow{B_0}$ ont la même direction puisque γ est négatif. La rotation s'effectue donc dans le sens autour de $\overrightarrow{B_0}$. Ainsi, un champ magnétique n'oriente pas mais fait tourner l'axe de rotation de l'électron autour du noyau.

Ordres de grandeur :

- Champ magnétique terrestre : $B \simeq 10^{-4}$ T $\Rightarrow \omega_0 = |\gamma| B = \dfrac{e}{2m_e} B \simeq 8.8 \cdot 10^6$ rad·s^{-1}
- En laboratoire : $B \simeq 1$ T $\Rightarrow \omega_0 \simeq 8.8 \cdot 10^{10}$ rad·s^{-1}

3.3 Principe de la Résonance Magnétique Nucléaire

On considère maintenant un second champ magnétique faible $\overrightarrow{B_1}$, perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$ et en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de $\overrightarrow{B_0}$.

Le TMC appliqué à l'électron toujours dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ donne cette fois

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}} &= \overrightarrow{\mu} \wedge (\overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_1}) \\ &= \gamma \overrightarrow{L} \wedge (\overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_1}) \\ &= (\overrightarrow{\omega_0} + \overrightarrow{\omega_1}) \wedge \overrightarrow{L} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{\omega_1} = -\gamma \overrightarrow{B_1} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Plaçons-nous maintenant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ tournant à la vitesse ω autour de l'axe donné par $\overrightarrow{B_0}$. La formule de dérivation en base mobile donne :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\mu} \\ \text{donc} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}'} &= \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}} - \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\mu} \\ &= (\overrightarrow{\omega_0} + \overrightarrow{\omega_1} - \overrightarrow{\omega}) \wedge \overrightarrow{\mu} \\ &= (\overrightarrow{\omega_1} - \delta\overrightarrow{\omega}) \wedge \overrightarrow{\mu} \qquad \text{avec} \qquad \delta\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega} - \overrightarrow{\omega_0} \end{aligned} \tag{4.22}$$

On distingue alors 2 cas :

- $\overrightarrow{\omega_0}$ et $\overrightarrow{\omega}$ sont très différents. Alors $|\delta\overrightarrow{\omega}| \gg |\overrightarrow{\omega_1}|$ car $\overrightarrow{B_1}$ est un champ faible. On obtient alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}'} \simeq -\delta\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\mu}$$

  Le moment magnétique précesse autour de $\overrightarrow{B_0}$.

- On est proche de la résonance : $|\delta\overrightarrow{\omega}| \simeq 0$. On obtient alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathcal{R}'} \simeq \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\mu}$$

  Le champ $\overrightarrow{B_1}$ provoque la précession autour de son axe.

Le second cas est particulièrement intéressant. En effet, l'observation de ces mouvements de précession permet de déduire la pulsation de Larmor ω_0 qui dépend du rapport gyromagnétique γ.

3.4 Usages de la RMN

Tout l'intérêt du phénomène de la RMN réside dans le fait que le rapport gyromagnétique d'un électron dépend grandement du noyau autour duquel il "orbite", ainsi que de son environnement chimique. On peut ainsi, en mesurant les fréquences de résonance d'un échantillon, remonter soit à sa composition en certains isotopes d'un noyau, soit à son environnement chimique.

Le premier exemple est l'application de la RMN à l'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM). On injecte à un patient un certain isotope d'une substance qui se fixe dans des zones d'intérêt, ce qui permet (à l'aide de champs non homogènes et de physique nettement plus velue) de faire une image détaillée d'une zone d'intérêt.

La deuxième exemple est l'application de la RMN du proton à la détermination de l'environnement chimique des protons présents dans un échantillon, et donc à la détermination des espèce chimiques présentes. En effet l'environnement chimique a tendance à modifier le champs B_0 ressenti par les protons, et donc à changer légèrement sa pulsation de Larmor. La mesure des différentes pulsations de Larmor pour les protons d'un échantillon permet de remonter à sa composition chimique [1].

Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment décrire le mouvement d'un solide en rotation et notamment comment établir l'équation de sa précession. On a également montré qu'il était possible d'observer un tel comportement à des échelles microscopiques avec l'exemple de l'électron et son application en RMN, que nous pourrions détailler dans le cadre d'une autre leçon.

Cette leçon se repose principalement sur l'approximation gyroscopique. Cependant, l'utilisation de cette approximation masque l'existence de comportements plus complexes comme par exemple la nutation, qu'il serait intéressant d'étudier.

1. On laisse l'explication détaillée de l'interprétation d'un spectre RMN de côté, sauf si on a vraiment du temps à combler

LP 5

Lois de conservation en dynamique

Niveau : L3

Bibliographie

✍ *Symétrie en mathématique, physique et chimie (chap 45 et 47)* **Sivardière**	Base de la leçon
✍ *Physique tout-en-un PCSI* **Salamito**	Théorèmes de base
✍ *Principes variationnels et Dynamique*	Pour aller plus loin
✍ *Mécanique du point* **BFR**	Problème à 2 corps
✍ *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-Scale Circulation* **Geoffrey**	Approche avec la mécanique des fluides

Prérequis

- ➢ Mécanique du point (PFD, TEC, TMC) et gravitation
- ➢ Systèmes de coordonnées et calcul vectoriel
- ➢ Thermodynamique classique
- ➢ Bases d'hydrodynamiques : Bernoulli, lignes de courant

Expériences

- ☕ Conservation du moment cinétique : chaise + poids

1 Lois fondamentales et invariances . . . 58
1.1 Invariances spatiales . . . 58
1.2 Invariance temporelle . . . 59
2 Problème à deux corps . . . 60
2.1 Conservation de la quantité de mouvement . . . 60
2.2 Conservation du moment cinétique . . . 61
2.3 Conservation de l'énergie . . . 61
2.4 Runge-Lenz . . . 63
3 Mécanique des Fluides . . . 63
3.1 Conservation masse . . . 64
3.2 Bernoulli (conservation de l'énergie) . . . 65
3.3 Conservation de la vorticité potentielle . . . 66
4 Formalisme lagrangien . . . 66
4.1 Lagrangien . . . 66
4.2 Le Lagrangien de la mécanique classique . . . 67
4.3 Théorème de Noether . . . 67

Introduction

Les cours précédents nous on permis de décrire la dynamique des points matériels. On a ainsi pu revoir la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique qui donne l'accélération d'un point de masse m soumis à un ensemble de forces. On a aussi étudié le cas de la rotation en introduisant le théorème du moment cinétique, ainsi que le théorème de l'énergie cinétique pour étudier les variations d'énergie.

L'utilisation de ces lois requiert une connaissance des forces qui agissent sur le système et peuvent donner lieu à des calculs lourd, on a cependant aussi vu que dans de nombreux cas, on avait conservation de certaines quantités comme la quantité de mouvement ou de l'énergie mécanique, et que cette conservation nous permettait de simplifier les problèmes. Le but de cette leçon est de montrer que ces conservations sont liées à des principes plus généraux, et que ces principes ne se limitent pas à la mécanique classique.

1 Lois fondamentales et invariances

Dans cette partie, on repart des postulats de la mécanique newtonienne, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} \tag{5.1}$$

On suppose dans toute cette partie que les forces dérivent d'un potentiel : $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, où $U(x, y, z, t)$ est le potentiel dans lequel évolue le système.

On va alors considérer des *invariances* : Ce sont des transformations qui laissent le système et sa dynamique inchangés. On va tout de suite prendre un exemple.

1.1 Invariances spatiales

1.1.1 Invariance par translation

On dit que le problème est *invariant par translation selon une direction* x lorsque la position x_0 n'a pas d'influence sur la dynamique d'un système. Cela implique que le potentiel U ne dépendent pas de x. Ainsi, on projetant le PFD sur l'axe x, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{5.2}$$

on a donc **conservation de la quantité de mouvement selon** x.

Application : la balle lancée

On considère le skateboard sans frottement, la terre plate et infinie donc on a invariance par translation selon x, on pourrait faire l'expérience 10 m à coté, on obtiendrait les mêmes résultats. On a donc conservation de la quantité de mouvement. Si on considère la balle de 10 kg et l'ensemble {skateboard + personne} de 80kg. La balle a une vitesse initiale de 2 m/s, et par conservation de la quantité de mouvement $m_b v_b = (m_b + m_h + m_s)v_f$ donc on trouve une vitesse finale de 0.22 m/s.

Invariance par translation ⇒ Conservation de la quantité de mouvement

Quid des rotations ?

1.1.2 Invariance par rotation

Cette fois, on écrit le potentiel en coordonnées sphériques : $U(r,\theta,\phi,t)$. L'invariance par rotation permet de simplifier l'écriture de U pour avoir $U(r,t)$. Ainsi, la force s'appliquant sur le système s'écrit $\overrightarrow{F} = F_r\overrightarrow{e_r}$. Le TMC donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = r\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \tag{5.3}$$

Le moment cinétique est donc conservé.

Application : la gravitation

On verra ça dans la seconde partie.

Invariance par rotation ⇒ Conservation du moment cinétique

On a vu les invariances spatiales, il reste à étudier l'invariance temporelle.

1.2 Invariance temporelle

On considère maintenant un potentiel indépendant du temps : $U(x,y,z$. On repart du PFD pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} &= \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla}U \\
\frac{\mathrm{d}m\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v} &= -\overrightarrow{\nabla}U\cdot\overrightarrow{v} \\
\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= -\overrightarrow{\nabla}U\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v} = \mathcal{P}_F \qquad \text{TEC} \\
E_c(t_2) - E_c(t_1) &= -\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{\nabla}U\cdot\overrightarrow{v}\mathrm{d}t \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\overrightarrow{\nabla}U\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{r} \qquad \text{car} \qquad \mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}U\cdot\overrightarrow{v}\mathrm{d}t \\
&= -\int_{U_1}^{U_2}\mathrm{d}U
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donc on obtient :

$$E_c(t_2) + U(t_2) = E_c(t_1) + U(t_1) \iff E_m(t_2) = E_m(t_1) \tag{5.5}$$

On obtient donc la conservation de l'énergie mécanique car U est le potentiel dont dérive les forces s'appliquant sur le système et donc U est l'énergie potentielle du système. Les forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps sont dites *conservatives* car elles conservant l'énergie mécanique. le système est alors dit *conservatif*.

Invariance temporelle ⇒ Conservation de l'énergie mécanique

Passons maintenant à un exemple d'application de ces principes avec la gravitation.

2 Problème à deux corps

On va s'intéresser à un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2, tels que le système est pseudo-isolé.

La seule force qui s'applique sur un point matériel est la force d'attraction gravitationnelle de l'autre :

$$\overrightarrow{F}_{12} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}} \tag{5.6}$$

où $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation ($6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m\,kg^{-3}\,s^{-2}}$), et $r_{12} = \|\overrightarrow{r_{12}}\| = \left\|\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right\|$

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

La force dérive d'un potentiel $U = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ qui ne dépend que de la différence $\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. On a donc une invariance par toute translation, qui se traduit par une **conservation de la quantité de mouvement** (prévisible vu que le système est pseudo-isolé). On a donc :

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{cste} \tag{5.7}$$

Or par définition du barycentre : $(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$. Donc en dérivant par rapport au temps, et en utilisant la loi de conservation : $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$, le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \tag{5.8}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{r} \tag{5.9}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{M_1M_2} \tag{5.10}$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\overrightarrow{r}$, on lui applique donc le PFD.

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_1}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{12} \tag{5.11}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_2}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12} \tag{5.12}$$

$$m_2 m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1+m_2)\overrightarrow{F}_{21} \qquad \text{par multiplication et différence} \tag{5.13}$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une **masse fictive** $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ qui est la masse réduite du système.

On étudie donc une masse fictive $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ soumise au potentiel $U(r) = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$. On peut en déduire toute la physique du système.

On a posé le problème dans un référentiel galiléen, avec un potentiel $U(r)$. on peut donc continuer avec les quantités conservées.

2.2 Conservation du moment cinétique

On a invariance par rotation, donc on a **conservation du moment cinétique** :

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v} \tag{5.14}$$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{L}$ est constant, sa direction l'est aussi. Or $\overrightarrow{L}$ est normal à la fois à $\overrightarrow{r}$ et à $\overrightarrow{v}$ donc au mouvement. Ainsi, le mouvement est plan.

De plus, $\left\|\overrightarrow{L}\right\| = \mu r^2 \dot{\theta}$ est constante. Cependant, le point balaye une aire $\mathrm{d}A = \dfrac{\|\overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v}\|\,\mathrm{d}t}{2}$ pendant $\mathrm{d}t$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\left\|\overrightarrow{L}\right\|}{2\mu} = cste = \frac{\mathcal{C}}{2} \tag{5.15}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : le rayon Terre-Soleil balaie des aires égales pendant des temps égaux.

Il reste à exploiter l'invariance temporelle

2.3 Conservation de l'énergie

le potentiel est indépendant du temps donc on a **conservation de l'énergie mécanique** :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} \tag{5.16}$$

Or on peut écrire :

$$\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} \tag{5.17}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \tag{5.18}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} \tag{5.19}$$

On obtient donc une énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \tag{5.20}$$

$$E_{p,eff} = \mu\frac{\mathcal{C}^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} \tag{5.21}$$

Intérêt ? On s'est maintenant ramené à un problème à une dimension, de variable r. On s'intéresse à une masse sur un rail, soumise au potentiel $E_{p,eff}$. Faire le tracé, et schématiser les trajectoires, ✍ Sanz.

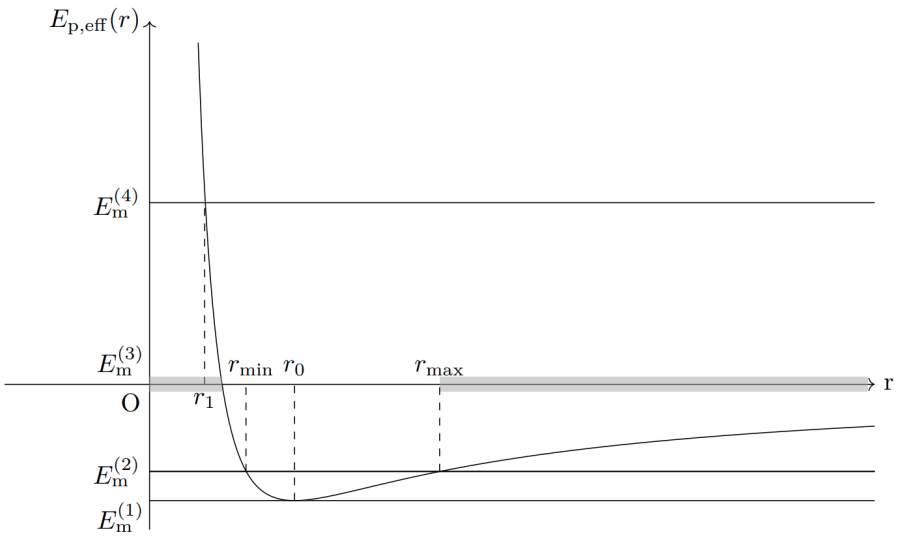


FIGURE 5.1 – Potentiel.

On distingue alors plusieurs cas de trajectoires :

- Cas 1 : L'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie mécanique est négative et égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective : la trajectoire est circulaire de rayon r0.
- Cas 2 : L'énergie cinétique radiale s'annule en r_{min} et en r_{max} et l'énergie mécanique est négative : la trajectoire est bornée, contenue dans $[r_{min}\,;\,r_{max}]$.
- Cas 3 : L'énergie mécanique est nulle et le système arrive à l'infini avec une énergie cinétique nulle : la trajectoire est minorée mais non bornée.
- Cas 4 : L'énergie mécanique est positive et la particule fictive arrive à l'infini avec une énergie cinétique non nulle : la trajectoire est minorée par r1 et non bornée. On définit alors les états liés (cas 1 et 2) correspondant à des trajectoires bornées et les états de diffusion (cas 3 et 4) correspondant à des trajectoires non bornées.

On peut ainsi déterminer si les trajectoires seront bornées (états liés) ou si on a un état de diffusion, mais pour avoir l'allure de la trajectoire, il faudrait intégrer cette équation ce qui peut être fastidieux.

On a une information supplémentaire sur le problème : le potentiel est en 1/r

2.4 Runge-Lenz

La symétrie [1] associée est bizarre.

On appelle *vecteur de Laplace-Runge-Lenz* le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L} - \mathcal{G}m_1m_2\overrightarrow{e_r}$. On le dérive par rapport au temps pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{R}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{L} + \overrightarrow{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ &= -\mathcal{G}\frac{1}{\mu}\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} \wedge \mu r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} \\ &= \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned} \tag{5.22}$$

Le vecteur de Runge-Lenz est bien une **quantité conservée**. Pourquoi utiliser ce vecteur ? Il permet d'obtenir rapidement l'expression de la trajectoire. on choisit le grand axe comme axe de référence pour les angles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{r} = Rr\cos\theta &= (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L}) \cdot r\overrightarrow{e_r} - \mathcal{G}m_1m_2r \\ &= r\dot{\theta}Lr - \mathcal{G}m_1m_2r \\ &= \mu\mathcal{C}^2 - \mathcal{G}m_1m_2r\end{aligned} \tag{5.23}$$

On peut alors écrire l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos(\theta)} \qquad \text{avec} \qquad r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}m_1m_2} \qquad \text{et} \qquad e = \frac{R}{\mathcal{G}m_1m_2} \tag{5.24}$$

On peut le tracer pour différents cas :

- $e = 0$: cercle de rayon r_0
- $e < 1$: ellipse
- $e = 1$: parabole
- $e > 1$: hyperbole

On peut d'ailleurs montrer que $E_m = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{2p}(e^2 - 1)$. Pour $E_m < 0$, la trajectoire est non seulement bornée mais srtout elle est **fermée** ! (OdG : cf Salamito p767).

3 Mécanique des Fluides

✍ Leçon de 2017.

On se place dans le cadre des fluides parfaits. Un fluide parfait incompressible obéit aux équations d'Euler de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ces deux équations formant les équations de base des fluides non dissipatifs, ainsi qu'à une version du premier principe de la thermodynamique, ces deux aspects (mécanique des fluides et thermodynamique) étant intimement liés.

On va prouver les équations là dessous :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho\overrightarrow{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} = -\frac{\overrightarrow{\nabla}P}{\rho} + \overrightarrow{f}$$

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace-Runge-Lenz_vector#Conservation_and_symmetry

3.1 Conservation masse

$\delta V = \delta x \delta y \delta z$, avec un fluide de masse volumique ρ, de vitesse $\overrightarrow{v} = \sum v_i \overrightarrow{e_i}$.

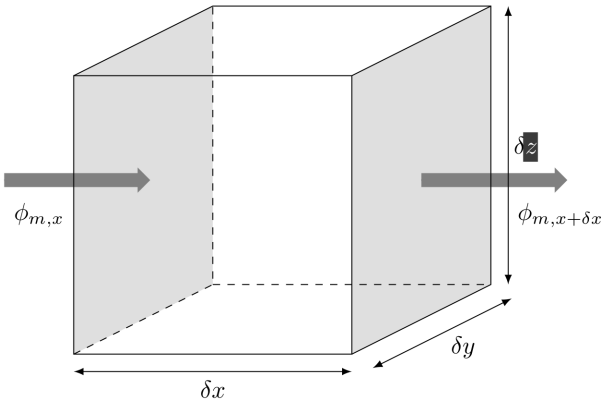


FIGURE 5.2 – Conservation de la masse

On fait un bilan de flux de matière ϕ_m :

$$\delta\phi_{m,x} = \phi_{m,x}(x,y,z,t) - \phi_{m,x+\delta x}(x+\delta x,y,z,t)$$

Or on a $\phi_{m,x}(x,y,z,t) = \delta y \delta z[\rho v_x]$. Attention considérer $[\rho v_x]$ comme une fonction à part entière. D'où

$$\delta\phi_{m,x} = \delta y \delta z \delta(-\rho v_x) = -\delta V \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}$$

Idem selon les autres axes :

$$\delta\phi_{m,i} = -\delta V \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}$$

Or on a $\dfrac{\partial \delta m}{\partial t} = \delta\phi_m$, et $\delta m = \rho \delta V$, d'où

$$\frac{\partial \delta m}{\partial t} = \delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\delta V \left(\sum_{i=x,y,z} \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right)$$

Et finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v}) = 0$$

Soit encore avec $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = O$$

Interprétation : Écoulement stationnaire

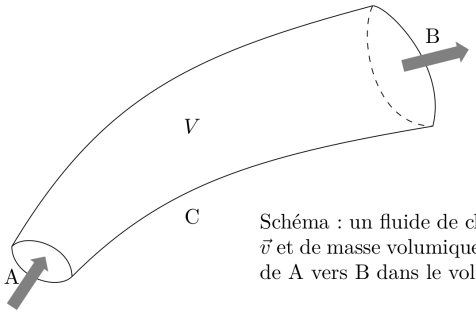


Schéma : un fluide de champ de vitesse $\vec{v}$ et de masse volumique ρ, se déplaçant de A vers B dans le volume V

On a Green Ostrogradski qui donne la conservation du débit massique $Q_m = \rho S v$ dans un tuyau de lignes de courant. On peut y voir une analogie aux tubes de courant : $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ – $\mathrm{C\,s^{-1}}$

Cette conservation du débit massique permet une première compréhension des vents qui existent en altitude et à certaines latitutes : les courant-jets. Il s'agit de forts courants d'air en altitude (vers 10 km) et où les vents dépassent les 100 $\mathrm{km\,h^{-1}}$. La forme qu'ils prennent et leur étendue spatiale dépend des dépressions en anti-cyclones proches. Grossièrement, la conservation du débit massique appliquée à un courant-jet nous fait assimiler la surface à la différence de pression entre dépression et anti-cyclone. Ainsi, une différence de pression plus grande va rendre plus dense et accélérer le courant-jet [2].

3.2 Bernoulli (conservation de l'énergie)

À l'instar de la mécanique du point et du solide, il est courant de s'intéresser au bilan énergétique en mécanique des fluides, et encore plus dans la météorologie et l'océanographie.

On reprend le schéma préccédent, A et B dans un champs de force potentiel qu'on appelle $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ (oui c'est le poids). L'énergie volumique $\epsilon = \epsilon_c + \epsilon_p + \mu + \pi \mathrm{d}t$ est la somme d'un terme cinétique, potentiel, interne et de puissance volumique algébrique reçue.

$$\epsilon_i = \epsilon_{c,i} + \epsilon_{p,i} + \mu_i + \pi_i \mathrm{d}t \qquad i = A \text{ ou } B$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\rho_i \overrightarrow{v_i}^2 + \rho_i g z_i + P_i + \mu_i + \pi_i \mathrm{d}t$$

On écrit l'enthalpie (volant, comme Alladin) : $h := \mu + P$

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\rho_i \overrightarrow{v_i}^2 + \rho_i g z_i + h_i + \pi_i \mathrm{d}t$$

On se place en régime stationnaire, ce qui impose que l'énergie volumique en A est la même que celle en B car on a une invariance temporelle [3]. On fait la différence et on tombe sur la relation générale de Bernoulli.

$$\frac{1}{2}\rho \overrightarrow{v}^2 + \rho g z + h + \pi \mathrm{d}t = cst$$

Fluide parfait sans puissance

$$\frac{1}{2}\rho \overrightarrow{v}^2 + \rho g z = cst$$

Plus que 4 inconnues, on peut s'en sortir ! !

2. https://www.bbc.com/weather/feeds/16578747
3. CF partie 1.

Il est courant de voir la relation de Bernoulli écrite avec la pression à la place de l'enthalpie ; il faut pour cela supposer que l'énergie interne volumique du fluide ne varie pas.

Il faut donc encore diminuer le nombre d'inconnue et/ou ajouter des équations pour résoudre le système d'équation. Si on se place dans le cas incompressible, souvent pris en compte avec la relation de Bernoulli, la seconde équation est alors la conservation du débit volumique et une inconnue a été supprimé. Mais cela reste un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour le résoudre, on va alors chercher une position où les grandeurs sont connues, par exemple à une ouverture sur l'extérieur où la pression est assimilée à la pression atmosphérique et la vitesse du fluide, nul. Il va donc s'agir de remonter de proche en proche jusqu'à déterminer les grandeurs là où on le désire. Un autre point intéressant est de constater qu'à altitude constante, et pour un rétrécissement de la section, la vitesse du fluide augmente par conservation du débit volumique et que la pression diminue. Ce qui peut être contre-intuitif : il n'aurait pas été forcément absurde de considérer qu'une vitesse de fluide plus élevée implique un pression plus grande 3 . En tout cas, la relation de Bernoulli découle d'un conservation de l'énergie, telle qu'on en croise souvent en mécanique du point et du solide.

3.3 Conservation de la vorticité potentielle

Voir leçon de 2017, ou wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon_potentiel.

Important : ce n'est pas la vorticité qui est conservée, mais le produit de la vorticité avec la température.

4 Formalisme lagrangien

Un formalisme plus puissant pour mettre en évidence le lien entre symétries et quantités conservées est le formalisme Lagrangien.

4.1 Lagrangien

Considérons un système dynamique repéré par des paramètres de position q_i (aussi appelés coordonnées généralisées). Au cours du temps, ces paramètres varient, leur taux de variation étant $\dot{q}_i = \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$. L'ensemble des paramètres φ_i du système est constitué des q_i, des $\dot{q}_i$ et du temps t. Dans un grand nombre de situations, il est possible de définir une fonction $\mathcal{L}[\varphi_i]$ telle que, si on pose :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

(la dérivée partielle étant calculée comme si les paramètres étaient indépendants entre eux), alors les équation du mouvement sont données par :

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \tag{5.25}$$

Formellement on constate que ces équations s'obtiennent par application du principe de moindre action (ou principe d'action extrémale), qui s'écrit :

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_i} = 0 \tag{5.26}$$

avec l'Action $\mathcal{S}[\varphi_i] = \int \mathcal{L}[\varphi_i(s)]\,\mathrm{d}^n s$.

Les équations du mouvement obtenues sont alors équivalentes aux équation d'Euler-Lagrange issues du principe précédent. Un système dynamique dont les équations du mouvement peuvent s'obtenir à partir d'un lagrangien est un système dynamique lagrangien. C'est le cas de la version classique du modèle standard (physique des particules), des Lois du mouvement de Newton, des équations de la relativité générale, et de problèmes purement mathématiques comme les équation des géodésiques.

4.2 Le Lagrangien de la mécanique classique

Le lagrangien de la mécanique classique est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, considérées comme des fonctionnelles.

$$\mathcal{L} = T - V = E_c - E_p \tag{5.27}$$

Les coordonnées sont alors les $q_{ij} = x_i, y_i, z_i$ de chaque particule dans le système, et leurs dérivées.

On retrouve

$$L(\overrightarrow{x}, \dot{\overrightarrow{x}}, t) \;=\; E_c - E_p \;=\; \frac{1}{2}\, m\, \overrightarrow{v}^2 \;-\; V(\overrightarrow{x}) \;=\; \frac{1}{2}\, m\, \dot{\overrightarrow{x}}^2 \;-\; V(\overrightarrow{x})$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \;-\; \frac{\partial L}{\partial x_i} \;=\; 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} \;=\; -\,\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \;=\; \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}\, m\, \dot{\overrightarrow{x}}^2\right) \;=\; m\,\dot{x}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) \;=\; m\,\ddot{x}_i$$

$$m\,\ddot{x}_i \;+\; \frac{\partial V}{\partial x_i} \;=\; 0$$

Soit finalement le PFD :

$$m\,\ddot{\overrightarrow{x}} = -\overrightarrow{\nabla} V$$

4.3 Théorème de Noether

Théorème de Noether : À toute transformation infinitésimale qui laisse le Lagrangien d'un système invariant à une dérivée temporelle totale près correspond une grandeur physique conservée.

Démonstration

Soit un Lagrangien $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ qui dépend de N [[coordonnées généralisées]] $q_i = q_i(t)$, avec $i = 1, ..., N$. Selon le [[principe de moindre action]], l'action $S = \int L dt$ est stationnaire sur une trajectoire physique. Ceci mène directement aux [[équations d'Euler-Lagrange]] :

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Aussi, sous une transformation infinitésimale des coordonnées $q_i \to q_i' = q_i + \alpha.\delta q_i$, si le Lagrangien est invariant à une dérivée temporelle totale près (c.-à-d. : $L \to L' = L + \alpha.\delta L = L + \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q_i, t)$, pour une fonction quelconque $F(q_i, t)$ qui ne dépend que des coordonnées généralisées et du temps), alors les équations du mouvement sont inchangées. Sous cette hypothèse, en calculant le Lagrangien au premier ordre du développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha.\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\alpha.\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\alpha.\delta \dot{q}_i && (5.28)\\
&= \frac{\partial L}{\partial q_i}\alpha.\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha.\delta q_i && (5.29)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\alpha.\delta q_i\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\alpha.\delta q_i. && (5.30)
\end{aligned}$$

Notons que le deuxième terme de la seconde ligne n'est autre que l'un des termes obtenable via la règle de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\cdot \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q_i\right) \tag{5.31}$$

Nous avons donc simplement remplacé $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\delta q_i$ par les autres termes de la règle en tenant compte du facteur α.

Enfin, dans notre dernier ligne, le deuxième terme est nul car il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange pour q_i. Ainsi, par comparaison avec l'hypothèse de départ, on a :

$$F(q_i, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\delta q_i.$$

On définit la quantité conservée du système :

$$C(q_i, t) = F(q_i, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\delta q_i = 0$$

car $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(q_i, t) = 0$.

LP 6

Cinématique relativiste

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Cours de Samtleben* Le dieu
- ✍ *Introduction à la relativité* **Langlois**
- ✍ *Relativité restreinte* **Simon**
- ✍ *Mécanique I* **BFR**
- ✍ *Relativité et invariance* **Pérez**

Prérequis

- ➢ Maxwell
- ➢ Relativité Galiléenne
- ➢ Mécanique
- ➢ Notations tensorielles
- ➢ Doppler classique
- ➢ Optique

Expériences

☕

1 Nécessité de la relativité restreinte . . . 70
1.1 Relativité galiléenne . . . 70
1.2 Electromagnétisme et translation . . . 70
1.3 Expériences déterminantes . . . 71
2 Fondements de la relativité restreinte . . . 74
2.1 Postulats et définitions . . . 74
2.2 Transformation de Lorentz . . . 74
2.3 Composition des vitesses . . . 75
3 Conséquences . . . 75
3.1 Invariant relativiste . . . 75
3.2 Perte de simultanéité . . . 77
3.3 Dilatation des durées . . . 77
3.4 Effet Doppler relativiste . . . 78
3.5 Contraction des longueurs : paradoxe du train . . . 79
4 Annexe : Transformation galiléenne sur les équations de Maxwell . . . 81

Introduction

A la fin du 19e siècle, la physique était presque résolue, il ne restait que quelques problèmes à traiter à la marge. L'un d'eux est le mode de propagation de la lumière dans le vide qui restait inexpliqué. De plus, à l'époque, c'est la mécanique de Newton qui est reine, il faut donc trouver comment concilier l'électromagnétisme de Maxwell qui fait apparaître une vitesse c absolue et cette mécanique de Newton qui nous dit que la vitesse dépend du référentiel. On va commencer par étudier les limites de la mécanique classique.

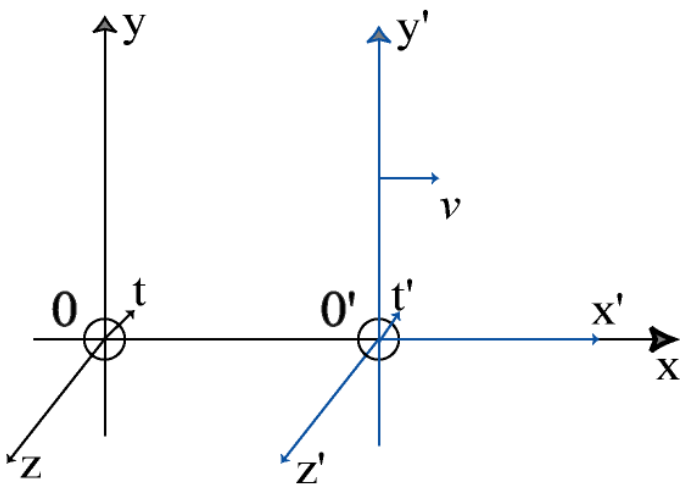
1 Nécessité de la relativité restreinte

1.1 Relativité galiléenne

Tout d'abord définissons la relativité de l'époque. C'est une relativité de l'espace, pas du temps. Le temps est le même pour tous les observateurs.

évenement = un couple (x, y, z, t).

Transfo de galilée = On passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ par une translation à vitesse uniforme, ici selon x. (On peut poser un temps t', mais il sera défini par une translation pure, de telle sorte que $\Delta t = \Delta t'$.)



$$t' = t \tag{6.1}$$
$$x' = x - vt \tag{6.2}$$
$$y' = y \tag{6.3}$$
$$z' = z \tag{6.4}$$

Sous une telle transfo, on peut écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$ indéférement, il est invariant. Cependant les équations de l'électromagnétisme ne sont pas Galilée-invariantes.

1.2 Electromagnétisme et translation

Pour un petit calcul détaillé voir 4.

Les équations de Maxwell sont définies dans n'importe quel référentiel galiléen, et donnent le calcul suivant.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{6.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{6.6}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{6.7}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{6.9}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{6.10}$$

On fait apparaître une vitesse absolue, indépendante du référentiel choisi, qui est $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Dès lors, deux cas sont possibles :

- il existe un référentiel privilégié telles que les équations de Maxwell sont exactes uniquement dans ce référentiel. Dans ce référentiel, la vitesse de propagation des phénomènes électromagnétiques est bien égale à c (la transformation de Galilée est alors respectée, mais le principe de relativité galiléenne est abandonné)

- les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels galiléens sans distinctions, et la vitesse c reste la même dans tous les référentiels. (la transformation de Galilée ne fonctionne donc plus, mais le principe de relativité est toujours valable.)

Pour choisir, on fait appel à Michelson et Morley !

Tananana nanana Morleeeey !

1.3 Expériences déterminantes

1.3.1 Expérience de Michelson

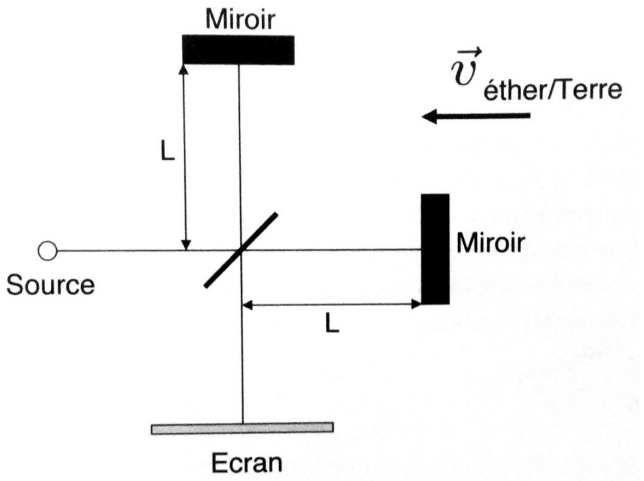


Figure 6.1 – Interféromètre de Michel.

https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment

Les physiciens du 19eme siècle ont tout d'abord songé à la première hypothèse, à savoir l'existence d'un référentiel privilégié, nommé éther ($\mathcal{R}_e$). L'éther aurait été le milieu de propagation de l'électromagnétisme, ce qui colle encore plus avec le savoir de l'époque : une onde a forcément un milieu.

But : prouver que l'éther n'existe pas. Si on parvient à invalider l'hypothèse d'inexistence de l'éther, on prouve que l'éther existe.

Le but de cette expérience était de détecter par des moyens optiques d'interférométrie le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. Une première hypothèse, facile à admettre et à considérer, consiste à dire que l'éther n'est pas lié à la Terre. Ainsi, si la vitesse de la lumière vaut c dans l'éther, elle vaut dans le référentiel Terrestre :

$$\overrightarrow{c}_{lum/Terre} = \overrightarrow{c}_{lum/Ether} - \overrightarrow{c}_{Terre/Ether} \tag{6.11}$$

On construit l'appareil de telle sorte que les miroirs M1 et M2 soient à égale distance, L, de la lame séparatrice.

Alors, si la Terre est immobile par rapport à l'éther, les deux trajets dans les deux directions perpendiculaires sont égaux (même distance parcourue, même durée de trajet).

Si, en revanche, la Terre est en mouvement par rapport à l'éther, à la vitesse v dans une direction (vers M1 par exemple), alors les deux trajets ne sont pas faits à la même vitesse, et le temps nécessaire n'est pas le même dans les deux directions :

• un aller et retour dans le sens de la marche de la Terre (vers M1) nécessite un temps $t_1 = \dfrac{L}{c-v} + \dfrac{L}{c+v} = \dfrac{2L \cdot c}{c^2 - v^2}$ soit, en négligeant les termes de second ordre : $\dfrac{2L}{c}\left(1 + \dfrac{v^2}{c^2}\right)$.

• un aller-retour perpendiculairement à la marche de la Terre (vers M2) nécessite un temps $t_2 = \dfrac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ ou, dans la même approximation, $\dfrac{2L}{c}\left(1 + \dfrac{v^2}{2c^2}\right)$.

La différence de temps de parcours entre les deux trajets est alors :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\frac{v^2}{c^3} \tag{6.12}$$

On pose $\Delta\delta = c \cdot \Delta t$, et on calcule l'ordre d'interférence Δp par définition, et compte tenu de la vitesse orbitale de la Terre sur son orbite 30 km/s : $\Delta p = \dfrac{\Delta\delta}{\lambda} = \dfrac{c \cdot \Delta t}{\lambda}$, ou encore

$$\Delta p = \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}\beta^2 \tag{6.13}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 10^{-4} \tag{6.14}$$

Par exemple, dans le domaine visible pour la longueur d'onde $\lambda = 500$ nm $= 5 \times 10^{-7}$ m et pour un bras L = 10 mètres,

$$\Delta p = \frac{10}{5 \times 10^{-7}} \times 10^{-8} = 0.2 \text{ frange} \tag{6.15}$$

ce qui serait très visible et donc parfaitement observable. Or, l'expérience de Michelson-Morley n'a jamais permis une telle mesure : le résultat était toujours négatif.

Enfin, comme on ne sait pas a priori quelle est la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, ni même si l'on n'est pas, par hasard, dans un endroit et à un moment où sa vitesse est nulle, il faut refaire l'expérience dans plusieurs directions, et avec plusieurs mois d'écart pour profiter du fait que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther est modifiée.

1.3.2 Expérience de Fizeau

Pas utile à présenter mais intéressant à connaître...

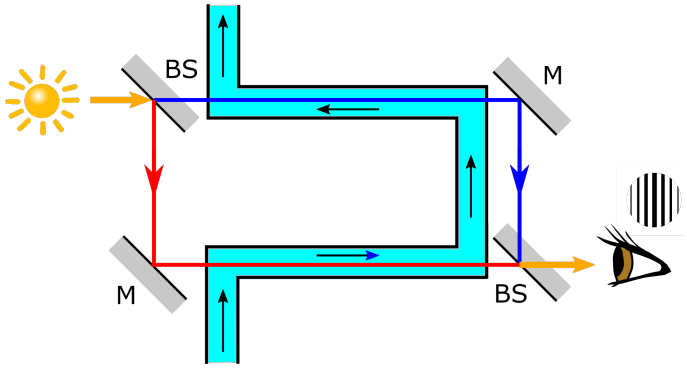


Figure 6.2 – L'expérience de Fizeau (en simplifié).

https://en.wikipedia.org/wiki/Fizeau_experiment

Même idée, l'éther est porté par l'eau, ce qui modifie la vitesse dans les deux bras et donne des franges d'interférence si on se démerde bien.

On a donc besoin de la relativité restreinte. On va maintenant voir quels sont ses principes et conséquences.

2 Fondements de la relativité restreinte

2.1 Postulats et définitions

La relativité restreinte repose sur 2 postulats fondamentaux :

- Les lois de la physique sont identiques dans tous les **référentiels inertiels** (c'est une généralisation de la première loi de Newton donc ce n'est pas contre-intuitif). Cela signifie que les relations traduisant des lois physiques (équations d'Alembert, de Maxwell, ...) ont la même structure dans des référentiels inertiels différents.
- La vitesse de la lumière est identique dans tous les **référentiels inertiels** (c'est contre-intuitif).

Cette leçon porte sur l'étude *cinématique*, donc on va surtout s'intéresser au second postulat.

Pour cela, quelques définitions :

- **Référentiel :** comme en mécanique classique, c'est une origine à laquelle on associe trois axes. La différence avec la mécanique classique réside dans le fait qu'on lui associe une horloge qui mesure le *temps propre* dans ce référentiel :
$$\mathcal{R}_{classique} = (\mathcal{O}, x, y, z) \rightarrow \mathcal{R}_{relat} = (\mathcal{O}, x, y, z, t) \tag{6.16}$$
- **Espace-temps :** espace à 4 dimensions (3 spatiales + 1 temporelle) dans lequel on décrit les évènements
- **Évènement :** point (x, y, z, t) de l'espace-temps

2.2 Transformation de Lorentz

On appelle *transformation de Lorentz* ou *boost de Lorentz* selon l'axe x la transformation permettant de passer d'un référentiel galiléen $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z, t)$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', x', y', z', t')$ en translation rectiligne uniforme selon l'axe x par rapport $\mathcal{R}$ tout en satisfaisant **l'invariance de la vitesse de la lumière**. Cette transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

en introduisant le *facteur de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{6.18}$$

On peut également écrire cette transformation directement :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{6.19}$$

Remarquons que dans le cas où $v \ll c$, on a $\gamma \simeq 1$ et $\beta \ll 1$. On retrouve alors la transformation de Galilée

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{6.20}$$

2.3 Composition des vitesses

En différentiant les formules de transformation de Lorentz, on obtient

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' &= \gamma(\mathrm{d}t - v\dfrac{\mathrm{d}x)}{c^2} \\ \mathrm{d}x' &= \gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' &= \mathrm{d}z \end{cases} \tag{6.21}$$

On obtient alors les vitesses dans $\mathcal{R}'$, *i.e.* la loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \end{aligned} \tag{6.22}$$

Remarquons de nouveau que dans le cas où $v \ll c$, on retrouve alors la loi classique d'addition des vitesses en mécanique Newtonienne.

Quelles sont les conséquences de la relativité restreinte ?

3 Conséquences

3.1 Invariant relativiste

Soient 2 évènements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit *le carré de l'intervalle d'espace-temps* $(\Delta s)^2$ par :

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{6.23}$$

On écrit également $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$.

Appliquons la transformation de Lorentz à cette quantité :

$$\begin{aligned}(\Delta s')^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= (\gamma c\Delta t - \gamma\beta\Delta x)^2 - (\gamma x - \gamma\beta c\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2(c\Delta t)^2 - 2\gamma^2\beta c\Delta t\Delta x + \gamma^2\beta^2(\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x)^2 + 2\gamma^2\beta c\Delta t\Delta x - \gamma^2\beta^2(c\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2[1-\beta^2](c\Delta t)^2 - \gamma^2[1-\beta^2](\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - z^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (\Delta s)^2\end{aligned} \tag{6.24}$$

La quantité $(\Delta s)^2$ est donc un *invariant relativiste*, c'est-à-dire que $(\Delta s)^2$ est invariant par transformation de Lorentz.

On peut lister plusieurs cas :

- $(\Delta s)^2 < 0$: l'intervalle espace-temps est dit *de genre espace*, on ne peut relier les évènements par un signal physique. Il n'existe pas de relation de cause à effet pour de tels évènements.
- $(\Delta s)^2 > 0$: l'intervalle espace-temps est dit *de genre temps*, on peut relier les évènements par un signal physique. On peut également définir plusieurs zones de l'espace-temps :
  - la zone où $\Delta t < 0$ désigne le passé ;
  - la zone où $\Delta t > 0$ désigne le futur
- $(\Delta s)^2 = 0$: c'est le *cône de lumière*, qui sépare les 2 zones indiquées ci-dessus.

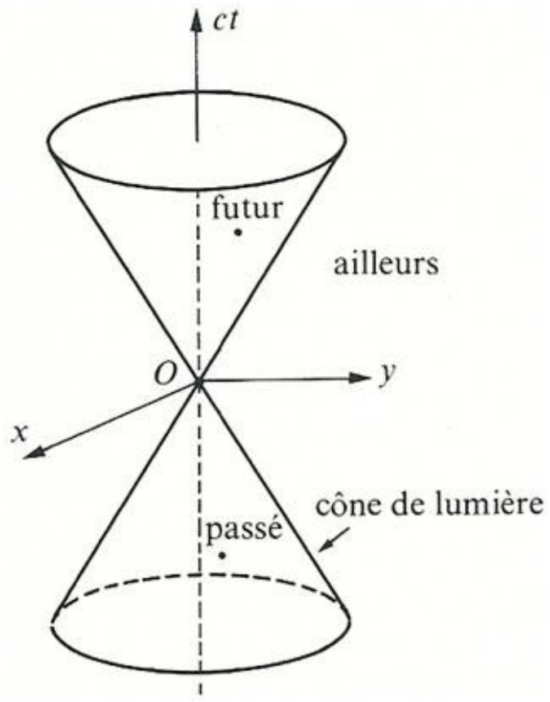


FIGURE 6.3 – Cône de lumière.

Par convention, on préfère manipuler non pas $(\Delta s)^2$ mais une quantité homogène à un temps, appelée *temps propre* et notée τ. On définit ce temps par la relation

$$(c\Delta\tau)^2 = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{6.25}$$

On peut également définir le *temps propre infinitésimal* pour des intervalles **de genre temps** (*i.e.* $\mathrm{d}s^2 > 0$) par :

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2}$$

3.2 Perte de simultanéité

La notion de simultanéité est un notion très intuitive. Il est ainsi difficile de concevoir que 2 évènements simultanés pour un observateur A ne le soit pas pour un observateur B. Pourtant, on a vu qu'en relativité restreinte, la notion de temps dépendait du référentiel est donc n'était plus absolue. La notion de simultanéité a-t-elle donc encore un sens ?

On considère un train de longueur L, se déplaçant à vitesse v constante. Un observateur situé au centre du train émet deux photons en même temps : le premier photon vers l'avant et le deuxième photon vers l'arrière. On note A l'évènement d'arrivée du premier photon au bout du train et B celui du deuxième photon. Ces évènements peuvent être décrits dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train ou dans $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre supposé inertiel (donc celui du train l'est aussi).

- dans $\mathcal{R}'$: le train est immobile, chaque photon parcourt la moitié du train en se déplaçant à la vitesse c. Alors
$$t'_A = \frac{L/2}{c} = t'_B$$
Les deux évènements sont alors simultanés.
- dans $\mathcal{R}$: le train bouge et les photons doivent parcourir des distances différentes, toujours à la vitesse c car c est absolue. Alors
$$\begin{cases} t_A = \dfrac{L/2 + vt_A}{c} \Rightarrow t_A = \dfrac{L/2}{c-v} \\ t_B = \dfrac{L/2 - vt_B}{c} \Rightarrow t_B = \dfrac{L/2}{c+v} \end{cases}$$
On voit alors que $t_A \neq t_B$: les évènements ne sont pas simultanés, le photon atteindra l'arrière du train avant que l'autre photon atteigne l'avant du train. On remarque que
$$t_A - t_B = \frac{\beta\gamma^2}{c} L$$

3.3 Dilatation des durées

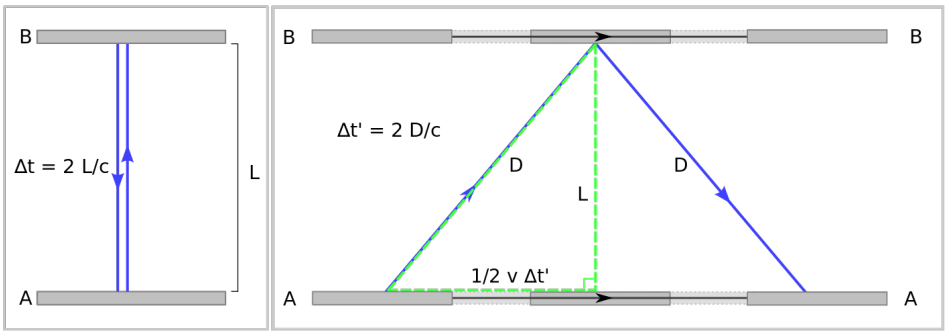


FIGURE 6.4 – Schéma de la situation.

Prenons un exemple bête et simple. On prend deux émetteurs-récepteurs immobiles dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'un est en A, l'autre en B, séparés d'une distance L. Un aller retour d'information lumineuse entre les deux prend un temps de $\Delta t = \dfrac{2L}{c}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Supposons maintenant que les deux émetteurs soient dans une fusée à vitesse v. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est donc en translation rectiligne uniforme à vitesse $-v$ dans $\mathcal{R}$. On observe le même évènement depuis $\mathcal{R}'$.

En regardant la fusée, on voit l'information lumineuse faire une distance $D = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2 + L^2}$ supérieure à L. Or dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ la vitesse de la lumière est c, donc le temps de l'aller retour mesuré dans $\mathcal{R}'$ est $\Delta t' = \dfrac{2D}{c}$. On peut ainsi calculer $\Delta t'$ en fonction de Δt :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t \tag{6.26}$$

Ainsi depuis le sol on voit un temps plus grand, la durée s'est dilatée. De mon point de vue, ma montre va plus vite que celle de l'astronaute, et du point de vue de l'astronaute, c'est l'inverse !

Parler de la durée de vie des muons ? Les muons ont une demie vie de 2.2μs. Plus rapide que la lumière ? NON, dilatation des durées.

3.4 Effet Doppler relativiste

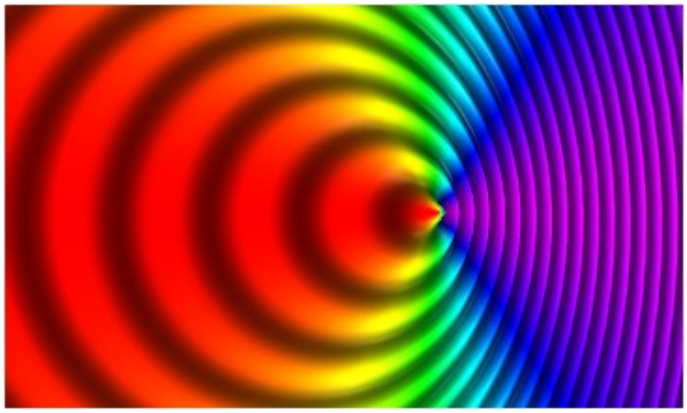


FIGURE 6.5 – Effet Doppler à $0.7c$ vers la droite.

On voit tout de suite, si on pense un peu à l'effet Doppler, que quelquechose de pas net se trame ici !

Supposons que l'observateur et la source s'éloignent l'un de l'autre à une vitesse relative de v, (v est négative si l'observateur et la source se déplacent l'un vers l'autre). Analysons ce problème depuis le référentiel de la source en supposant qu'un front d'onde arrive à l'observateur.

Le prochain front d'onde est donc à la distance $\lambda = c/f_s$ de lui (où λ est la longueur d'onde, f_s est la fréquence de l'onde au moment de son émission et c la vitesse de la lumière). Puisque le front d'onde se déplace à la vitesse c et que l'observateur se déplace à la vitesse v, la durée (telle que mesurée dans le référentiel de la source) entre les crêtes à l'arrivée est donnée par :

$$t = \frac{\lambda}{c - v} = \frac{c}{(c - v) f_s} = \frac{1}{(1 - \beta) f_s}$$

où $\beta = v/c$ est la vitesse de l'observateur en fonction de la vitesse de la lumière.

À cause de la dilatation du temps, l'observateur va mesurer cette durée comme étant : $t_o = \frac{t}{\gamma}$ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ est le facteur de Lorentz.

La fréquence observée correspondante est $f_o = \frac{1}{t_o} = \gamma(1 - \beta) f_s = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\, f_s$.

Le rapport $\frac{f_s}{f_o} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ est appelé *facteur de Doppler* de la source relative à l'observateur. Les longueurs d'onde correspondantes sont données par $\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = \frac{f_s}{f_o} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ et le décalage vers le rouge, qui a lieu dans le cas où l'observateur et la source s'éloignent l'un de l'autre, $z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{f_s - f_o}{f_o}$ peut être écrit comme $z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$.

Lorsque la vitesse n'est pas relativiste ($v \ll c$), ce décalage vers le rouge vaut environ $z \simeq \beta = \frac{v}{c}$, ce qui correspond à l'effet Doppler ordinaire.

3.5 Contraction des longueurs : paradoxe du train

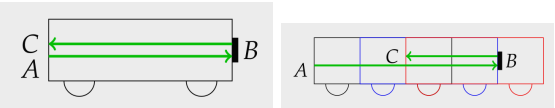


FIGURE 6.6 – I like trains.

Le paradoxe du train est une expérience de pensée destinée à illustrer des effets paradoxaux de la relativité restreinte : non-pertinence des notions de simultanéité et d'antériorité absolues et contraction des longueurs.

On prend un train qui roule à une vitesse v dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit par la présence d'une horloge dans le train un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. On met un émetteur et un miroir d'un bout à l'autre du train, et on définit 3 évènements :

- A : émission d'un rayon
- B : Réflexion
- C : détection

On mesure la longueur du train par mesure de temps. Dans $\mathcal{R}'$ on a $2L' = c\Delta t'$ et dans $\mathcal{R}$ on a :

$$\begin{cases} AB & L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \\ BC & L + v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \end{cases} \tag{6.27}$$

D'où $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\gamma^2$, et finalement :

$$L' = \gamma L \tag{6.28}$$

Ainsi, il y a contraction des longueurs : un objet en mouvement paraît contracté ($L \leq L'$).

Là aussi, si deux objets vont dans des directions opposées, il sont chacun contractés l'un par rapport à l'autre.

morale de l'histoire : le train rentre et ne rentre pas, ça dépend du point de vue.

Conclusion

Ouverture : relativité générale into pétage de cul just like the simulations

Commentaires (oral blanc du 11 mars 2020)

- Parler des expériences de pensé avant la transformation de Lorentz ?
- L'invariant relativiste c'est un peu comme une distance dans l'espace temps. Il indique ce qui peut se passer ou non (selon son signe) si par exemple on émet un photon en (x_1, y_1, z_1, t_1) et qu'on veut savoir ce qui se passe en (x_2, y_2, z_2, t_2).
- Fizeau n'est pas très utile, mais si on veut en parler il faut en parler correctement.
- L'expérience de Michelson et Morley n'a rien mesuré et c'est comme ça qu'on a déduit l'absence de l'éther. L'expérience de Fizeau a mesuré c et montre que la transfo de Galilée n'est pas bonne et que la transfo de Lorentz est la bonne.
- Expérience de Kennedy–Thorndike = expérience de Michelson et Mortley mais avec 2 bras de longueurs différentes.
- Apparemment, on n'est pas obligé de postuler que c ne dépende pas du référentiel pour trouver la transfo de Lorentz. On pourrait aussi le faire en partant de l'équivalence de 2 référentiels inertiels et avec des hypothèses d'isotropie, d'homogénéité et, de symétries et d'invariances. Voir Levy-leblond (aeticle quand même velu) ou bien David Mermin(*American Journal of Physics*) qui retrouvent les lois de compositiion des vitesses relativistes sans passer par invariance de c.
- On pourrait montrer qu'un objet ne dépasse jamais c peut importante dans quel référentiel on se place (par exemple un objet allant à la vitesse $0.75c$ dans un référentiel allant également à $0.75c$ par rapport à l'observateur ne va quand même pas plus vite que c...
- Il faut bien expliquer la partie 'non-causalité' quand on n'est pas dans le cône de lumière (calculs ?)
- Il faudrait peut-être montrer que la transfo de Lorentz conserve bien c et que c'est isotrope (donc montrer que la transfo de Lorentz est compatible avec Michelson et Morley).
- Relier la contraction des longueurs avec la dilatation des durées ?

4 Annexe : Transformation galiléenne sur les équations de Maxwell

✍ https://physics.stackexchange.com/questions/378861/what-does-a-galilean-transformation-of-maxwells-equations-look-like

Consider two frames of reference S and S', and suppose that S' moves with speed $\mathbf{v}$ with respect to S. Coordinates in S and S' are related by a Galileian transformation :

$$\begin{cases} t' = t \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \end{cases} \tag{6.29}$$

To find how the fields transform, we note that a Lorentz transformation reduces to a Galileian transformation in the limit $c \to \infty$. In fact, under a Lorentz transformation the fields transform like :

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \dfrac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) - (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \end{cases} \tag{6.30}$$

Taking the limit $c \to \infty$ so that $\gamma \to 1$, we obtain the Galileian transformations of the fields :

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{cases} \tag{6.31}$$

We can then invert the transformation by sending $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}' \end{cases} \tag{6.32}$$

By the same reasoning, can obtain the Galileian transformation of the sources :

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}' + \rho'\mathbf{v} \\ \rho = \rho' \end{cases} \tag{6.33}$$

We know that the fields and sources satisfy Maxwell's equations in S :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{6.34}$$

Replacing the fields and sources in S with those in S' we obtain :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \rho'/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = -\dfrac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0\left(\mathbf{J}' + \rho'\mathbf{v} + \epsilon_0 \dfrac{\partial(\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}')}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{6.35}$$

As a last step, we need to replace derivatives in S with derivatives in S'. We have :

$$\begin{cases} \nabla = \nabla' \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v} \cdot \nabla \end{cases} \tag{6.36}$$

Substituting and removing the primes and using vector calculus, we obtain :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \rho \mathbf{v} + \epsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \end{cases} \tag{6.37}$$

In a vacuum, we can take the curl of the fourth equation to obtain :

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{B} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \tag{6.38}$$

Substituting a wave solution of the form

$$\mathbf{B} \sim \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \tag{6.39}$$

We obtain an equation for ω, which we can solve to obtain :

$$\omega = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \pm c|\mathbf{k}| \tag{6.40}$$

Therefore the speed of propagation is the group velocity :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\mathbf{v} \pm c\ \hat{\mathbf{k}} \tag{6.41}$$

which gives you the expected $c \pm v$ with an appropriate choice of $\mathbf{v}$ and $\mathbf{k}$.

LP 7

Dynamique relativiste

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Cours de Samtleben*
- ✍ *Introduction à la relativité* **Langlois**
- ✍ *Relativité restreinte* **Simon**
- ✍ *Mécanique I* **BFR**
- ✍ *Relativité et invariance* **Pérez**

Le dieu

Prérequis

- ➢ Cinématique relativiste
- ➢ Quadrivecteurs, calcul tensorielle, covariance et contravariance
- ➢ Maxwell
- ➢ Mécanique classique

Expériences

- Je voulais bien essayer de faire un accélérateur de particules avec mon four à micro-ondes mais ça n'a pas marché...

1 Vers un PFD Relativiste . . . 84
1.1 Rappels : Pourquoi on cherche un PFD ? . . . 84
1.2 Rappel : Transformation de Lorentz . . . 84
1.3 Pseudonorme et métrique . . . 85
1.4 Quadrivecteur impulsion-énergie . . . 85
1.5 Interprétation physique . . . 86
1.6 Cas du photon . . . 87
1.7 Quadrivecteur force et PFD relativiste . . . 87
2 Collisions de particules . . . 87
2.1 Collision élastique : l'effet Compton . . . 88
2.2 Collision inélastique . . . 88
3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique . . . 90
3.1 Champ électrique uniforme et constant . . . 90
3.2 Champ magnétique uniforme et constant . . . 91
3.3 Accélérateurs de particules . . . 92
3.4 L'oscillateur harmonique . . . 92
4 Phénomènes relativistes . . . 94
4.1 Effet Cherenkov . . . 94
4.2 Retour sur Doppler . . . 94

Introduction

Dans le cours précédent sur la cinématique relativiste, nous avons vu que la transformation de Lorentz était adaptée pour changer d'un référentiel galiléen à un autre en relativité restreinte. Maintenant, on va essayer de prendre en compte les forces pour trouver les lois fondamentales de la dynamique relativiste, en particulier une nouvelle formulation du principe fondamentale de la dynamique et du théorème de l'énergie cinétique. Elles doivent satisfaire deux conditions :

- être invariantes par transformation de Lorentz
- redonner les lois de la mécanique classique donc le cas $v \ll c$

Comment exprimer les lois fondamentales de la dynamique relativiste ? Comment permettent elles d'interpréter le mouvement de particules chargées dans un champ électrique et magnétique et les collisions entre particules ?

1 Vers un PFD Relativiste

1.1 Rappels : Pourquoi on cherche un PFD ?

Dans le cadre de la mécanique classique, on peut décrire le mouvement dynamique d'un objet à l'aide du PFD. On veut faire pareil en relat afin de pouvoir calculer comment bougent les particules rapides, et afin d'évaluer les écarts à la théorie classique.

On rappelle la notion de temps propre : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$.

On note $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \dfrac{v}{c}$.

β	0.01	0.1	0.5	0.99	0.9999
γ	1.0001	1.005	1.15	7.09	70.7

TABLE 7.1 – Variation de γ avec β.

On rappelle la définition du quadrivecteur position : $x^\mu = (ct, x, y, z)$

On rappelle la définition du quadrivecteur vitesse : $u^\mu = \dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = (\gamma c, \gamma\overrightarrow{v})$

1.2 Rappel : Transformation de Lorentz

On appelle *transformation de Lorentz* ou *boost de Lorentz* selon l'axe x la transformation permettant de passer d'un référentiel galiléen $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z, t)$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', x', y', z', t')$ en translation rectiligne uniforme selon l'axe x par rapport $\mathcal{R}$ tout en satisfaisant **l'invariance de la vitesse de la lumière**. Cette transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

en introduisant le *facteur de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7.2}$$

On peut également écrire cette transformation directement :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{7.3}$$

Remarquons que dans le cas où $v \ll c$, on a $\gamma \simeq 1$ et $\beta \ll 1$. On retrouve alors la transformation de Galilée

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{7.4}$$

1.3 Pseudonorme et métrique

On nomme un vecteur x_{mu}, on signifie l'existence d'un produit scalaire via norme de Minkovsky comme suit : $x^\mu = \eta^\mu{}_\nu x_\nu$. On nomme pseudonorme d'un vecteur la quantité

$$\|x\|_{mink} = x^\mu x_\mu \tag{7.5}$$

1.4 Quadrivecteur impulsion-énergie

Pour définir un bon PFD, il nous faut une impulsion, puisque le *vrai* PFD c'est

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \tag{7.6}$$

On va donc poser :

$$p^\mu = mu^\mu = (m\gamma c, m\gamma \overrightarrow{v}) \tag{7.7}$$

Si on analyse un peu cette chose on a bien une impulsion classique du côté spatial lorsque la vitesse est faible. Du côté temporel, on a :

$$p^0 = mc\gamma = mc\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{7.8}$$

Un DL à l'orde 1 donne

$$p^0 c = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.9}$$

Bam, énergie, et on nomme le premier terme *énergie de masse*, c'est l'énergie d'une particule au repos.

Monument de la physique :

$$\mathcal{E}_0 = mc^2 \tag{7.10}$$

C'est l'équation la plus célèbre de la physique, qui exprime le fait que la masse de la particule constitue en soit une partie de son énergie totale. C'est un réservoir d'énergie potentielle : si une particule de masse m au repos est annihilée, on récupère (sous forme de chaleur par exemple) l'énergie $\mathcal{E}_0$. Cette énergie ne varie pas (c'est un invariant relativiste) et en mécanique classique on l'ignore tout simplement car elle ne joue aucun rôle dans la description des phénomènes étudiés.

On définit l'énergie d'une particule $\mathcal{E}$ par la partie temporelle de son quadrivecteur impulsion. Pour une particule de masse m on a :

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2 \tag{7.11}$$

Calculons la pseudo-norme de p :

$$p^\mu p_\mu = m^2c^2 = {\mathcal{E}_0}^2 \tag{7.12}$$

Ainsi lors d'un changement de référentiel inertiel, la pseudonorme du quadrivecteur impulsion est conservée, ce qui est cool ! La quantité conservée est l'énergie de masse, pas l'énergie, ni l'impulsion. On peut d'ailleurs calculer l'énergie comme suit :

$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2c^2 \tag{7.13}$$

$$\mathcal{E}^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \tag{7.14}$$

1.5 Interprétation physique

On a déterminé une expression pour l'impulsion et l'énergie en progressant par « prolongement » mais cela relève globalement d'une bonne dose d'intuition et de la volonté de conserver une forme connue pour les lois de la physique. Ces expressions ne sont valables que si elles rendent compte de la réalité et sont corroborées par l'expérience.

Poussons encore l'analyse de la partie spatiale de l'impulsion. En mécanique classique, la proportionnalité entre l'impulsion et la vitesse est l'inertie de l'objet. Elle représente la difficulté à lui transmettre de la vitesse et elle correspond à la masse de celui-ci. Si on procède de même en mécanique relativiste, alors l'inertie n'est pas simplement la masse, mais γm.

Remarque

Un certain nombre d'auteurs (dont Feynman) parlent de *masse relativiste* pour désigner le terme γm et on lit souvent que *la masse d'un objet relativiste augmente avec sa vitesse*. Cette dernière idée induit en erreur. La masse est une quantité qu'on définit par rapport à la quantité d'énergie qu'elle peut libérer lors d'une annihilation (au repos). Einstein considérait qu'il s'agissait d'une mauvaise idée que de parler de *masse relativiste* et qu'il valait mieux se contenter de désigner m comme la masse associée à l'énergie de la particule au repos.

Quand $v \to c$ alors $\gamma \to +\infty$ et l'inertie de l'objet devient infinie. Cela signifie qu'il devient impossible pour un opérateur de communiquer à la particule une vitesse supérieure à celle qu'elle a déjà.

Il est impossible pour une particule massive d'atteindre la vitesse de la lumière dans le vide.

1.6 Cas du photon

Le photon se déplace à la vitesse de la lumière, ainsi il ne peut avoir une masse que de 0.

Le photon a une masse nulle.

On trouve alors

$$\mathcal{E} = |\overrightarrow{p}|c = \hbar c|\overrightarrow{k}| \tag{7.15}$$

Et finalement, pour un photon se propageant en direction $\overrightarrow{e}$:

$$p^\mu = \frac{h\nu}{C}(1, \overrightarrow{e}) \tag{7.16}$$

1.7 Quadrivecteur force et PFD relativiste

On veut $\dfrac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = F^\mu$. Cela donne

$$\begin{aligned} F &= (\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}/c}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}\tau}) \\ &= (\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}) \end{aligned} \tag{7.17}$$

$$F = \gamma(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{f}) \tag{7.18}$$

On remarque aussi que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}$.

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{f} \qquad \overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v} \tag{7.19}$$

Cependant l'accéleration et la force ne sont plus collinéaires, puisque

$$\overrightarrow{f} = \gamma m \overrightarrow{a} + m\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{v} \tag{7.20}$$

2 Collisions de particules

✍ *Langlois*

On dit que deux particules entrent en collision lorsqu'elles subissent une variation de vitesse dans une zone quasi ponctuelle de l'espace et du temps. La collision est dite élastique si le nombre et la nature des particules sont conservés.

Hypothèse : Pendant la durée très brève d'un choc, le système pourra être considéré comme isolé. On a donc conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion.

2.1 Collision élastique : l'effet Compton

✍ *Langlois p65*

Le formalise relativiste permet de traiter de la même façon les particules massives et les particules de masse nulle puisqu'on a vu dans la première partie qu'on peut définir une quadri-impulsion que la particule ait une masse ou non.

On considère la réaction $\gamma + e^-_{\text{immobile}} \longrightarrow \gamma + e^-_{\text{mobile}}$, avec l'électron initialement au repos dans le référentiel du laboratoire. On note P_1 le quadri-vecteur énergie impulsion du photon avant la collision, P_{e0} celui de l'électron avant la collision, P_2 celui du photon après la collision et P_e celui de l'électron après la collision.

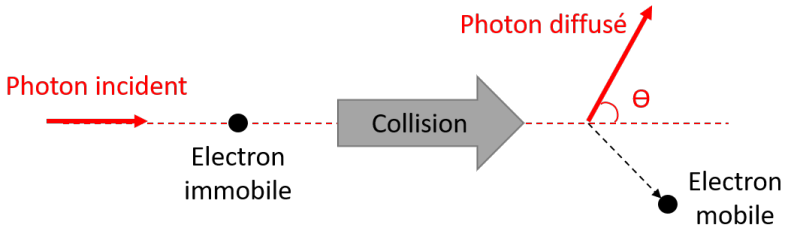


FIGURE 7.1 – Diffusion d'un photon par un électron initialement immobile.

La conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion donne alors

$$P_1 + P_{e0} = P_2 + P_e \tag{7.21}$$

$$\begin{cases} p_1 c + m_e c^2 = p_2 c + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \\ \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{p_2} + \overrightarrow{p_e} \end{cases} \iff \overrightarrow{p_e} = \overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2} \iff \begin{cases} p_e^2 &= (p_1 - p_2)^2 + 2m_e c(p_1 - p_2) \\ p_e^2 &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos(\theta) \end{cases} \tag{7.22}$$

On identifie les deux expressions de p_e^2 pour obtenir

$$\begin{aligned} p_1 p_2 (1 - \cos(\theta)) = m_e c(p_1 - p_2) &\iff \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} = \frac{m_e c}{1 - \cos(\theta)} \\ &\iff \frac{1}{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}} = \frac{m_e c}{1 - \cos(\theta)} \\ &\iff \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1 - \cos(\theta)}{m_e c} \end{aligned} \tag{7.23}$$

Or pour un photon, $p = \dfrac{h}{\lambda}$ donc finalement on obtient une différence de longueur d'onde donnée par :

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(\theta)) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{7.24}$$

Quid des collisions inélastiques ?

2.2 Collision inélastique

✍ *Langlois p73-75*

Les collisions inélastiques rentrent directement dans le cadre de la relativité restreinte qui les rend possibles grâce à l'équivalence masse-énergie.

C'est le principe de la fission nucléaire, où la masse des particules finales est inférieure à la masse des particules initiales, ce qui signifie que le défaut de masse correspond à de l'énergie, en l'occurence l'énergie de liaison des nucléons, suivant la relation $\Delta\mathcal{E} = \Delta mc^2$ qui peut ensuite être récupérée et utilisée pour produire de l'énergie électrique (ODG : l'énergie de liaison moyenne rapportée à un nucléon est de l'ordre de 8 MeV).

À l'inverse, il existe un autre cas de collisions inélastiques pour lequel la somme des masses des particules initiales est inférieure à la somme des masses finales. Une telle collision peut se produire à condition de compenser le déficit de masse par un apport suffisant d'énergie cinétique (liée à la vitesse relative entre particules initiales).

On considère la collision entre 2 protons (observée dans les rayons cosmiques, reproduite de CERN) :

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \overline{p} \tag{7.25}$$

Dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$, on suppose qu'un des protons est immobile et que l'autre a une vitesse associée à une énergie cinétique T. Le quadri-vecteur impulsion dans $\mathcal{R}$ vaut donc :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(mc^2 + T + mc^2) \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

avec m la masse d'un proton (et d'un antiproton).

L'expérimentateur peut uniquement jouer sur l'énergie cinétique T. On la nomme *énergie de seuil* de la réaction et c'est elle qu'il faut évaluer.

Pour cela, on se place dans le référentiel du centre de masse, noté $\mathcal{R}_{CDM}$. C'est le référentiel galiléen pour lequel l'impulsion totale est nulle (donc c'est la cas pour l'impulsion initiale comme finale par conservation de l'impulsion). On note $\mathcal{E}_{CDM}$ l'énergie des particules dans $\mathcal{R}_{CDM}$. Le quadri-vecteur énergie-impulsion dans $\mathcal{R}_{CDM}$ s'écrit alors :

$$P_{CDM} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}_{CDM}}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

L'énergie minimale à fournir est facile à déterminer dans $\mathcal{R}_{CDM}$ et correspond à l'énergie qu'il faut pour former les particules finales et qu'elles soient au repos dans $\mathcal{R}_{CDM}$, on a donc :

$$\mathcal{E} \geq \sum_{\text{k particules finales}} m_k c^2 = 4mc^2 \quad \text{car toutes les masses sont identiques.} \tag{7.28}$$

En utilisant l'invariance de la pseudo-norme du quadri-vecteur impulsion, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{CDM}^2}{c^2} &= -p^2 + \frac{1}{c^2}(mc^2 + T + mc^2)^2 \\ &\Rightarrow -c^2p^2 + (mc^2 + T + mc^2)^2 \geq (4mc^2)^2 \\ -c^2p^2 + (mc^2 + T)^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 + m^2c^4 &\geq (4m)^2c^4 \\ -c^2p^2 + m^2c^4 + c^2p^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 + m^2c^4 &\geq (4m)^2c^4 \\ -c^2p^2 + 2m^4c^4 + p^2c^2 + 2(mc^2 + T)mc^2 &\geq (4m)^2c^4 \end{aligned} \tag{7.29}$$

en ayant utilisé l'invariant énergie-impulsion en passant de la 3ème à la 4ème ligne.

On trouve donc

$$T \geq \frac{(4m)^2 - 4m^2}{2m}c^2 = 6mc^2 \tag{7.30}$$

Application numérique

Avec $m = 1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ et $c = 2.99 \times 10^8\,\text{m s}^{-1}$, on obtient

$$T \geq 5.6\ \text{GeV}$$

Comment faire pour atteindre une telle énergie ?

↓

3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

3.1 Champ électrique uniforme et constant

On considère une particule de masse m et de charge q, initialement immobile dans $\mathcal{R}$ galiléen, soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ uniforme et stationnaire (donc ne crée pas de champs $\overrightarrow{B}$).

La partie spatiale du PFD relativiste donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \overrightarrow{f} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{E} \tag{7.31}$$

On intègre cette équation pour obtenir $\overrightarrow{p} = qt\overrightarrow{E}$, et en projetant selon la direction de $\overrightarrow{E}$ on obtient $p = qtE$.

Or on a vu que $\overrightarrow{p} = \gamma m \overrightarrow{v}$ donc on a

$$\begin{aligned} \gamma m v &= qtE \\ \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= qtE \\ \Rightarrow v &= \frac{\frac{qE}{m}t}{\sqrt{1+\left(\frac{qE}{mc}t\right)^2}} \end{aligned} \tag{7.32}$$

On est dans la limite classique quand la particule n'a pas été accélérée à de trop grandes vitesses, donc quand $t \longrightarrow 0$. On retrouve donc bien le résultat classique $v = \frac{qE}{m}t$.

De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty} v = c$ donc il existe une vitesse limite ! D'ailleurs, Bertozzi a expérimentalement vérifié cette vitesse limite en 1964.

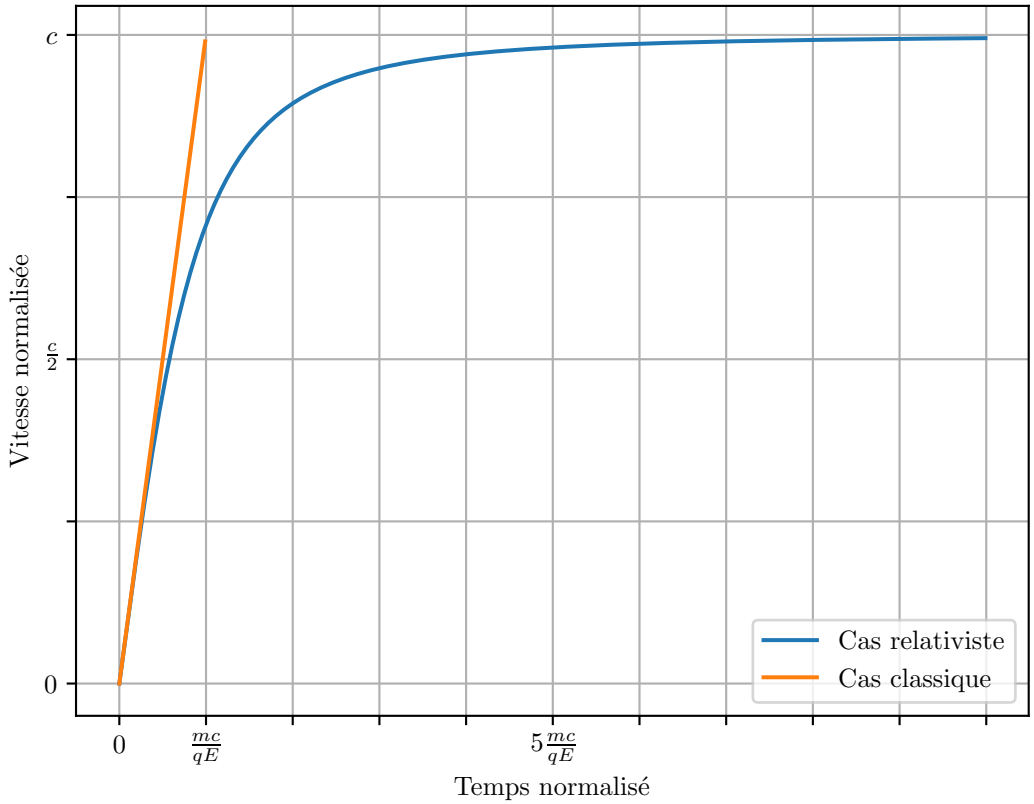


FIGURE 7.2 – Vitesse de la particule chargée en champs électrique uniforme constant en fonction du temps. On remarque l'existence d'une vitesse limite.

3.2 Champ magnétique uniforme et constant

On considère toujours une particule de masse m et de charge q, mais cette fois elle se déplace à la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{R}$ galiléen et est soumis à un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme, stationnaire et orthogonal à la vitesse de la particule.

Puisque la force magnétique est orthogonale à la vitesse, elle ne travaille pas donc la particule est déviée sans être ralentie donc v est constante.

On regarde de nouveau la partie spatiale du PFD relativiste :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B} \Rightarrow \gamma m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} &= q\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \omega_c\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u_B} \qquad \text{avec} \qquad \omega_c &= \frac{qB}{\gamma m} \end{aligned} \tag{7.33}$$

où $\overrightarrow{u_B}$ est le vecteur unitaire ayant le même sens que $\overrightarrow{B}$. On retrouve l'équation du cyclotron mais avec une pulsation relativiste $\omega_c = \dfrac{qB}{\gamma m}$. On remarque d'ailleurs que $\lim\limits_{\gamma\to 1}\omega_c = \dfrac{qB}{m}$: on retrouve la pulsation cyclotron classique !

> *On peut faire un accélérateur de particules en accélérant la particule avec $\overrightarrow{E}$ et on maîtrisant sa trajectoire avec $\overrightarrow{B}$.*

3.3 Accélérateurs de particules

- Cyclotron : on utilise un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme avec un champ $\overrightarrow{E}$ oscillant pour accélérer la particule. Cependant, puisque ω_c dépend de la vitesse, on a un problème de désynchronisation du champ $\overrightarrow{E}$ à des vitesses relativistes.
- Synchro-cyclotron : on ajoute un champ $\overrightarrow{B}$ radial pour compenser γ lorsque l'orbite devient grande à de grandes vitesses, et la fréquence d'oscillation de $\overrightarrow{E}$ est modifiable. Malheureusement, seule une petite partie des particules émises est capturée dans l'orbite stable.
- Synchrotron : la trajectoire est un cercle de rayon R fixe. On accélère la particule avec des champs $\overrightarrow{E}$ constants et stationnaires, et on midifie $\overrightarrow{B}$ pour que la particule reste sur la trajectoire circulaire. C'est le principe utilisé par le LHC.

Ordres de grandeur des énergies atteignables

- basses énergies : de 10 à 100 MeV ;
- moyennes énergies : de 100 à 1000 MeV ;
- hautes énergies : plus de 1 GeV et au delè du TeV (on atteint au LHC les 14 MeV).

3.4 L'oscillateur harmonique

On considère une particule de masse m au repos qui subit une force type ressort. On prendra son origine comme centre du repère.

$$F = -Kx\overrightarrow{e_x} \tag{7.34}$$

Or on a $\overrightarrow{f} = \gamma\overrightarrow{\ddot{x}} + m\overrightarrow{\dot{x}}\dot{\gamma}$ (cf équation 7.20). Le calcul projeté sur $\overrightarrow{e_x}$ donne :

$$\dot{x}\dot{\gamma} = \gamma(\gamma^2 - 1)\ddot{x} \tag{7.35}$$

Ainsi on retrouve tout simplement :

$$-Kx = \gamma^3 m\ddot{x} \tag{7.36}$$

Cette équation est tout à fait cohérente avec le cas classique. La page suivante montre une résolution numérique réalisée à l'aide de l'outil ODEINT (RK4) dans le cas d'une vitesse initiale de $0.9c$.

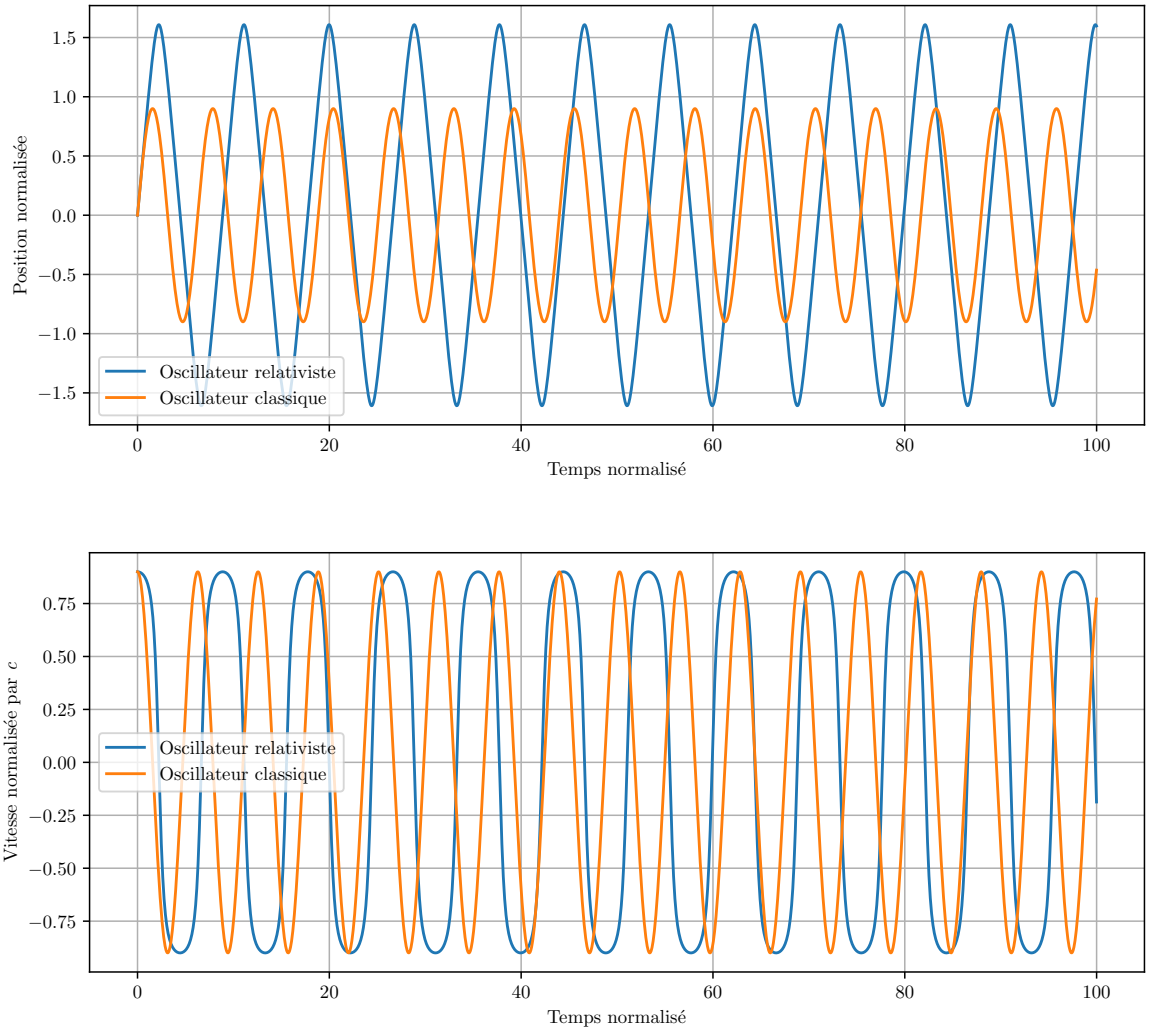


FIGURE 7.3 – Position et vitesse des deux oscillateurs, classiques et quantiques, $v_0 = 0.9c$.

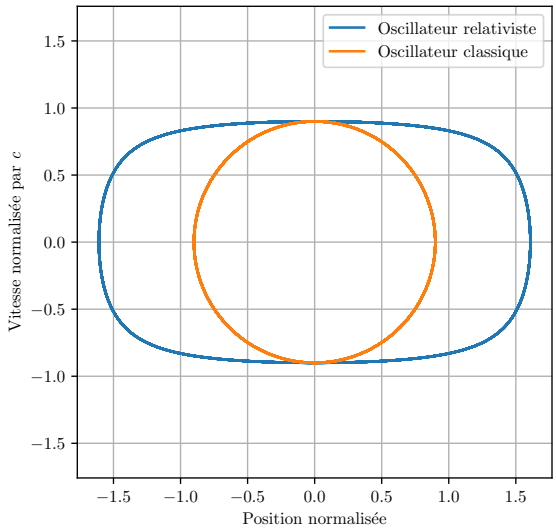


FIGURE 7.4 – Portrait de phase des oscillations, $v_0 = 0.9c$.

4 Phénomènes relativistes

4.1 Effet Cherenkov

On va s'intéresser à l'effet Cherenkov qui est l'analogue du franchissement du mur du son, mais dans le cadre des ondes lumineuses. Autrement dit, il s'agirait de franchir un « mur de lumière ». Dans les milieux diélectriques parfaits et transparents, la vitesse de la lumière est différente de celle du vide :

$$c_0 = \frac{c}{n} \tag{7.37}$$

La quantité n, sans dimension, est l'indice du milieu. Il vaut 1 pour le vide, et il est supérieur à l'unité dans tous les autres milieux. Ainsi, dans certains milieux matériels rien n'interdit à certaines particules chargées (électrons de radioactivité $\beta-$.) de voyager à des vitesses supérieures à c_0 , sans toutefois contredire le principe suprême de la relativité qui impose que cette vitesse soit inférieure à c. C'est en ce sens qu'il peut se produire un « dépassement du mur de lumière ». Lorsque la particule chargée entre dans le milieux avec une vitesse $v > c_0$, il se produit une onde de choc analogue à l'effet qu'on connaît dans le domaine acoustique. La particule perd alors de l'énergie sous la forme d'un rayonnement lumineux.

Pour plus de détails, se référer à la leçon de 2016.

4.2 Retour sur Doppler

Pour plus de détails, se référer à la leçon de 2016.

Conclusion

Principe de relativité qui balai en justifiant ses limites de validité le modèle newtonien. De nouvelles quantités sont conservées, plus complexes, mais tout aussi élégantes.

Remarque, la 3eme loi de newton n'est plus conservée ;) .

LP 8

Notion de viscosité d'un Fluide

Niveau : L2

Commentaires du jury

- 2017 : Il peut être judicieux de présenter le fonctionnement d'un viscosimètre dans cette leçon.
- 2016 : Le jury invite les candidats à réfléchir d'avantage à l'origine des actions de contact mises en jeu entre un fluide et un solide.
- 2015 : Afficher un tableau d'ordres de grandeur de viscosité ne suffit pas en soi pour illustrer la leçon. Tout exemple donné d'écoulement visqueux doit être maîtrisé par le/la candidat(e).
  Jusqu'en 2013, le titre était : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux. Nombre de Reynolds. Exemples simples.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : L'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique n'est pas celui dont les conclusions sont les plus riches. Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu dans un fluide. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les fluides newtoniens : le cas des fluides non newtoniens, s'il peut être brièvement mentionné ou présenté, ne doit pas prendre trop de temps et faire perdre de vue le message principal.
- 2009, 2010 : Il importe de mettre clairement en évidence le caractère diffusif des forces de viscosité. Dans l'illustration expérimentale de l'écoulement de Couette plan, il faut s'assurer que l'on a bien atteint un régime permanent.
- 2008 : La signification physique du nombre de Reynolds est ici centrale.
- 2006 : Les notions d'écoulement tourbillonnaire et d'écoulement turbulent sont souvent mal assimilées. Les conditions d'applications de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2005 : La relation entre la valeur du nombre de Reynolds et la nature de l'écoulement sont mal dégagées. Il y a souvent confusion entre tourbillon et turbulence. Les conditions d'application de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.
- 2001 : Il est souhaitable de présenter un modèle microscopique simple de la viscosité. Il est utile de noter que le nombre de Reynolds s'interprète comme le rapport de deux temps caractéristiques de transport par diffusion et convection. La notion de couche limite peut être évoquée. On peut également présenter des écoulements autour d'obstacles.
- 2000 : L'interprétation microscopique des forces de viscosité est souvent sacrifiée.
- 1999 : La leçon doit permettre de montrer la compétition entre transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvement.

Bibliographie

✍ *Hydrodynamique Physique*, **Guyon, Hulin, Petit**	La base
✍ *Physique tout-en-un PC*, **Sanz**	Fait tout bien
✍ *Hydrodynamique Physique*, **Fermigier**	Plein d'exemples, le Garing de méca Flu
✍ *Mécanique expérimentale des fluides. Tome 2 : Dynamique des fluides réels, turbomachines*, **Comolet**	En complément
✍	
✍	

Prérequis

- ➢ Cinématique des fluides : vitesse eulérienne, accélération
- ➢ Équation de conservation de la masse
- ➢ Diffusion : loi de Fourier, convection
- ➢ Fluide parfait - Équation d'Euler
- ➢ Théorie cinétique des gaz

Expériences

- ☕ Écoulement de Couette
- ☕ Viscosimètre à bille
- ☕ Reversibilité d'un écoulement

1 Notion de viscosité . . . 97
1.1 Modèle phénoménologique . . . 97
1.2 Force volumique de viscosité . . . 98
1.3 La viscosité comme diffusion de la quantité de mouvement . . . 99
1.4 Modèle microscopique de viscosité . . . 99
2 Mise en équation . . . 100
2.1 Équations de Navier-Stokes . . . 100
2.2 Nombre de Reynolds . . . 101
2.3 Couche limite . . . 102
3 Exemples d'écoulements visqueux . . . 102
3.1 Écoulement de Couette plan : aspect énergétique . . . 103
3.2 Réversibilité . . . 103
3.3 Ecoulement de Poiseuille et application aux vaisseaux sanguins . . . 104
3.4 Ecoulement de Couette entre deux cylindres-principe d'un viscosimètre. . . . 105

Introduction

Dans les leçons précédentes, nous avons vu les bases de la mécanique des fluides et notamment les fluides parfaits afin d'aboutir à l'équation d'Euler. Cependant, la viscosité est un phénomène physique que nous rencontrons assez souvent dans notre vie, comme par exemple quand on mange du miel. Comment décrire les fluides en prenant compte de leur viscosité ?

Mettre de l'eau et du glycérol dans 2 tubes à essai différents. observer la différence d'écoulement.

Cette leçon a pour objectif de donner des outils permettant de mieux caractériser un fluide visqueux.

1 Notion de viscosité

1.1 Modèle phénoménologique

✍ Guyon, p90

Écoulement de Couette plan

✍ ⏲ 2 min

Dispositif spécifique (à trouver, en salle de TP physique des chimistes apparemment).On fait bouger le fluide, on observe le déplacement de la ligne de colorant. (préparer une vidéo youtube au cas où)

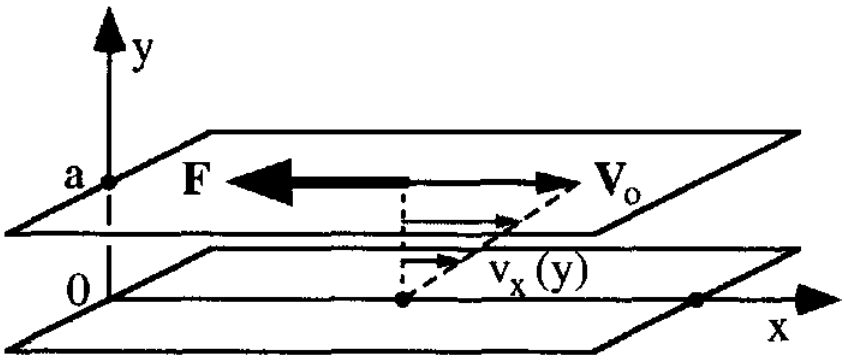


FIGURE 8.1 – Écoulement de Couette plan. Figure tirée de Guyon.

Observations :

- On a adhérence du fluide sur la plaque en bas, et sur la plaque du haut

  ⇒ La nouvelle condition aux limites est que la vitesse du fluide sur la plaque doit être celle de la plaque, et plus seulement pour la composante normale. Le fluide doit être immobile par rapport à la plaque.

- On obtient une ligne droite $e(y,t) = \frac{y}{a} V_0 t \overrightarrow{e_x}$

  ⇒ On a un phénomène linéaire.

- A force constante, on obtient un vitesse constante ⇒ il y a translation rectiligne uniforme donc équilibre des forces $F_{\text{appliquée}} = -F_{\text{fluide}}$

On peut répéter l'expérience pour plusieurs surfaces et épaisseurs, on obtient **phénoménologiquement**, **pour les fluides newtoniens** la force exercée par la plaque sur le fluide :

$$F_x = \eta \frac{V_0}{a} S = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S$$

On a introduit le coefficient de proportionnalité η appelée **viscosité dynamique** et $[\eta] = \frac{[F]}{[S]}[\frac{\partial v_x}{\partial y}] = \text{Pa.s} = \text{PI}$ (Poiseuille). Ce coefficient de viscosité dépend de la nature du fluide, de la température, etc... On donne des valeurs tabulées à 25 °C :

Fluide	Viscosité dynamique η (Pa.s)
Air (à 1 atm et 300 K)	$1.85 \cdot 10^{-5}$
Métaux liquides	$10^{-1} - 10^{-3}$
Eau	10^{-3}
Glycérol	1.412
Miel	10
Verre fondu à 800 K	10
Magma (volcan hawaïen)	400
Glacier alpin	10^{11}
Asthénosphère	10^{18}

TABLE 8.1 – Viscosité dynamique de différents fluides.

On peut généraliser la forme de cette force surfacique : la force surfacique exercée la partie supérieure d'un fluide newtonien sur la partie inférieure est

$$F_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S$$

1.2 Force volumique de viscosité

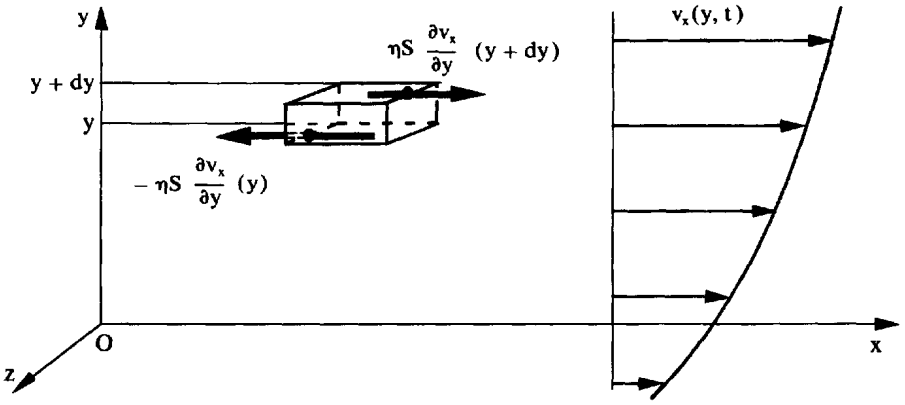


FIGURE 8.2 – Application de la force surfacique de viscosité surfacique sur un parallélépipède. Figure tirée de Guyon.

On a toujours un écoulement incompressible d'un fluide newtonien.

Considérons une tranche de fluide d'épaisseur dy. La force qui s'exerce sur ce fluide vaut

$$F_x = \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}(y + \mathrm{d}y) - \eta S \frac{\partial v_x}{\partial y}(y) = \eta S \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \mathrm{d}y$$

Or le volume de la tranche est $S\mathrm{d}y$, on obtient donc la force volumique s'exerçant sur la tranche :

$$f_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Si on prend en compte un profil de vitesse plus général, on obtient la composante selon x de la force volumique :

$$f_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Ainsi, on admettra que la force volumique de viscosité en 3D s'exprime :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = \eta \Delta \overrightarrow{v}} \tag{8.1}$$

1.3 La viscosité comme diffusion de la quantité de mouvement

Si on applique le PFD sur une particule fluide, on a :

$$\rho \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \eta \Delta \overrightarrow{v} \iff \frac{\mathrm{d}\rho\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta(\rho \overrightarrow{v.})$$

Cette équation est une équation de diffusion, de facteur de diffusion $D = \dfrac{\eta}{\rho}$. La quantité diffusée est la quantité de mouvement du fluide. On fait ainsi apparaitre la *viscosité cinématique* $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$.

Ainsi on peut expliquer la viscosité comme une diffusion de quantité de mouvement. Or on connaît des modèles microscopiques de diffusion, on peut donc trouver des modèles microscopiques de viscosité !

1.4 Modèle microscopique de viscosité

✍ Guyon, Chapitre 2

Commençons par le cas des gaz. On Prend un gaz parfait dont les molécules ont une masse m, avec une densité de n. Leur quantité de mouvement est $mv_x(y)$.

Deux échelles de vitesse apparaissent : la vitesse d'ensemble et l'agitation thermique u.

Notons l le libre parcours moyen des molécules du gaz : les vitesses à considérer dans notre bilan pour le déplacement du gaz deviennent alors $v_x(y-l)$ et $v_x(y+l)$

Le flux "ascendant" de quantité de mouvement diffusée par l'agitation thermique des molécules (vitesse isotrope) pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit alors :

$$\frac{1}{6} nm\bar{u} v_x(y-l)\mathrm{d}t$$

De même, le flux "descendant" s'écrit :

$$-\frac{1}{6} nm\bar{u} v_x(y+l)\mathrm{d}t$$

Le bilan de quantité de mouvement échangé entre le haut et le bas du fluide s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{6} nm\bar{u} v_x(y-l) - \frac{1}{6} nm\bar{u} v_x(y+l) \\ &= \frac{1}{3} nml\bar{u} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

On peut alors définir la viscosité dynamique $\boxed{\eta = \frac{1}{3} nml\bar{u}}$. Comme la vitesse d'agitation thermique est proportionnelle à $\sqrt{T}$ on obtient alors que, pour un gaz, $\eta = \dfrac{nl}{\mathcal{N}_A}\sqrt{\dfrac{TMR}{3}} \propto \sqrt{T}$

Ordre de grandeur :

Pour l'air, à pression atmosphérique et à $T = 298K$, on a $\rho = 1,2kg.m^{-3}, l = 10^{-7}m, \bar{u} = 500m.s^{-1}$ donc $\eta \approx 2.10^{-5}$ Pa.s.

Remarques :

- Avec cette expression, la viscosité η ne dépend que des propriétés du fluide.
- La viscosité traduit un transport de matière à l'échelle microscopique, ce qui correspond bien à un phénomène de diffusion.
- ce résultat est analogue à d'autres phénomènes diffusifs pour les gaz, par exemple la loi de Fourier pour la diffusion de température.
- Ce modèle est valable pour un gaz parfait, il devient notamment faux quand on est à de trop fortes pressions.
- On ne peut pas décrire les liquides de cette façon, car les interactions entre molécules ne peuvent pas être négligées et il faut en plus franchir la barrière énergétique créée par les molécules voisines.

On sait maintenant quantifier la force de viscosité. L'étape suivante est donc de la mettre dans Navier-Stokes

2 Mise en équation

2.1 Équations de Navier-Stokes

✍ Comolet p.43, GHP p.134

Si on refait un bilan des forces qui s'appliquent sur une particule de fluide dans un référentiel galiléen :

- forces volumiques extérieures : $\overrightarrow{f_{\text{autres}}}$
- force volumique de pression : $-\overrightarrow{\nabla P}$
- forces volumiques de viscosité : $\eta\Delta\overrightarrow{v}$

On obtient donc :

$$\rho\frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla}P + \eta\Delta\overrightarrow{v} + \overrightarrow{f_{\text{autres}}} \tag{8.2}$$

On a quatre variables $\overrightarrow{v}, P$ et trois équations[1], il y a nécessité de fermeture, on a l'équation de conservation de la masse : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}.\rho\overrightarrow{v} = 0$. Soit avec l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{v} = 0 \tag{8.3}$$

Ces deux équations sont les équations de Navier-Stokes, écrites pour un fluide newtonien, incompressible, dans un référentiel galiléen.

1. En général ρ et T sont aussi des variables, il faut donc aussi se donner une équation d'état et le type de transformation ($\rho = cste$ et isotherme ici)

2.2 Nombre de Reynolds

✍ GHP p.135 (adimensionnement) et p.74 (interprétation)
On cherche les équations adimensionnées de Navier-Stokes. On prend pour grandeurs adimensionnées :

- $\widetilde{\vec{v}} = \dfrac{\vec{v}}{U}$ où U est la vitesse typique de l'écoulement (à l'infini ici
- $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z} = \dfrac{x, y, z}{L}$ où L est la longueur typique de l'écoulement
- $\widetilde{t} = \dfrac{t}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{L}{U}$
- $\widetilde{P} = \dfrac{P}{P_{dyn}}$ où $P_{dyn} = \rho U^2$ est la pression dynamique (cf relation de Bernoulli), ordre de grandeur de la pression subie par le fluide autre que la pression hydrostatique.

On a donc :

$$\rho\left(\frac{U}{\tau}\frac{\partial\widetilde{\vec{v}}}{\partial\widetilde{t}} + \frac{U^2}{L}(\widetilde{\vec{v}}.\widetilde{\overrightarrow{\text{grad}}})\widetilde{\vec{v}}\right) = -\frac{P_{dyn}}{L}\widetilde{\vec{\nabla}}\widetilde{P} + \eta\frac{U}{L^2}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{v}} \tag{8.4}$$

$$\rho\left(\frac{U^2}{L}\frac{\partial\widetilde{\vec{v}}}{\partial\widetilde{t}} + \frac{U^2}{L}(\widetilde{\vec{v}}.\widetilde{\overrightarrow{\text{grad}}})\widetilde{\vec{v}}\right) = -\rho\frac{U^2}{L}\widetilde{\vec{\nabla}}\widetilde{P} + \eta\frac{U}{L^2}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{v}} \tag{8.5}$$

$$\left(\frac{\partial\widetilde{\vec{v}}}{\partial\widetilde{t}} + (\widetilde{\vec{v}}.\widetilde{\overrightarrow{\text{grad}}})\widetilde{\vec{v}}\right) = -\widetilde{\vec{\nabla}}\widetilde{P} + \frac{\eta}{\rho UL}\widetilde{\Delta}\widetilde{\vec{v}} \tag{8.6}$$

On obtient un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds : $\boxed{Re = \dfrac{\rho UL}{\eta}}$ qui correspond formellement à

$$Re = \frac{\|\text{force d'advection}\|}{\|\text{force de viscosité}\|} = \frac{\|(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\|}{\|\eta\Delta\vec{v}\|}$$

On peut aussi le voir comme un rapport de temps caractéristiques : $Re = \dfrac{\tau_{diff}}{\tau_{adv}} = \dfrac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \dfrac{UL}{\nu}$. Dans tous les cas, le nombre de Reynolds compare l'influence de l'inertie et de la viscosité.

Interprétation :

- $Re \ll 1$ on a un écoulement laminaire, rampant, totalement dominé par la viscosité.
- $Re \gg 1$ On a un écoulement turbulent, dominé par l'inertie, où la viscosité ne joue *presque* aucun rôle.
- Re intermédiaire , on a d'abord apparition de tourbillons mais toujours laminaires. Ensuite on a apparition de turbulence localisée dans le sillage, avec un écoulement toujours laminaire autour.

On peut aussi ajouter que le comportement d'un écoulement est déterminé par un nombre de Reynolds, c'est ce qui permet d'utiliser des maquettes en soufflerie pour modéliser des ailes d'avions. Les écoulements seront les mêmes si les nombres de Reynolds sont les mêmes (en fait, il faut que tous les autres nombres adimensionnés soient identiques, en théorie il faut que les nombres de Mach, Péclet, Péclet thermique soient identiques mais j'imagine que ça dépend aussi de ce qu'on veut étudier).

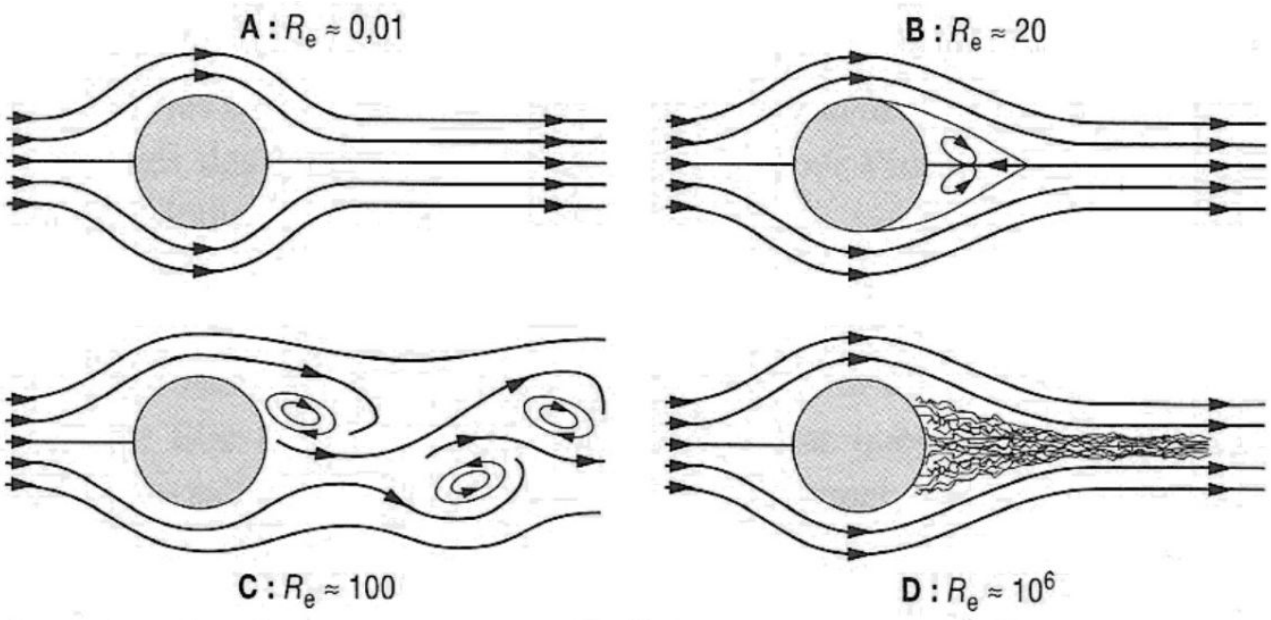


FIGURE 8.3 – Évolution de l'écoulement autour d'une sphère en fonction de Re. Source : http://olivier.granier.free.fr/MOOC/co/rappels-de-cours-meca-fluide-nbre-reynolds.html (libre de partage et d'utilisation)

> *Pour $Re \gg 1$, on a le terme de viscosité qui peut être négligé et on retrouve l'équation d'Euler. Cependant, on sait qu'il y a des frottements, même sur un avion.*

↓

2.3 Couche limite

✍ GHP p.493

Si il y a le temps

On a vu que la viscosité impliquait de nouvelles condition aux limites : la vitesse du fluide par rapport à une surface est nulle. Il existe donc une zone proche de l'objet où la vitesse est faible.

On a une diffusion de la quantité de mouvement sur une distance δ épaisseur de la couche limite : $\delta = \sqrt{\nu\tau}$ et τ est le temps caractéristique de convection par le fluide : $\tau = \frac{x}{U}$. On a donc finalement : $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ et donc finalement :

$$\frac{\delta(x)}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \tag{8.7}$$

Où on a introduit un nombre de Reynolds local. Un ordre de grandeur de l'épaisseur est donc $\delta = \frac{L}{Re}$

Cette couche limite permet de faire la liaison entre le régime à haut Reynolds et la paroi. Elle explique que même pour des écoulements à haute vitesse, les objets produisent une traînée.

3 Exemples d'écoulements visqueux

Pour les exemples, voir le poly TP_Mécaflot.pdf.

3.1 Écoulement de Couette plan : aspect énergétique

On a établi précédemment le profil de vitesse linéaire, à savoir

$$\overrightarrow{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x} = \frac{V_0 y}{a}\overrightarrow{e_x}$$

On a également vu que la viscosité était responsable de la diffusion de quantité de mouvement et est donc un processus dissipatif. On veut alors déterminer la puisssance volumique dissipée par les forces de viscosité dans une particule fluide de longueur L (selon x) et de profondeur a (selon z).

On écrit Navier Stokes projetée sur x en régime stationnaire :

$$0 = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

En régime permanent, l'énergie cinétique de la particule fluide est constante, donc d'après le TEC la somme des puissances intérieures et extérieures est nulle. En notant $\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc}}$ la puissance intérieure dissipé par viscosité, on a :

$$\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc}} + F(y+\mathrm{d}y)v_x(y+_d droity) - F(y)v_x(y) + [P(x) - P(x+L)]a\mathrm{d}yv_x(y) = 0$$

Après calculs, on trouve que :

$$\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc}} + \eta La\frac{\partial}{\partial y}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}y - \eta v_x(y)\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}La\mathrm{d}y = 0$$

On développe la dérivée et on tombe sur

$$\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc}} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 La\mathrm{d}y$$

La puissance volumique dissipée par viscosité est donc

$$\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc,vol}} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2$$

Pour notre écoulement de couette, $\mathcal{P}^{\text{int}}_{\text{visc,vol}} = -\eta\dfrac{V_0^2}{a^2}$

3.2 Réversibilité

Réversibilité dans le glycérol

✍ FLTCD p.411 ⏲ 2mn

Et on fait tourner les serviettes !!

La raison pour laquelle ça marche ?

On considère un écoulement incompressible de Couette cylindrique, c'est-à-dire l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres coaxiaux dont l'un est mis en rotation. En régime permanent, on peut montrer que l'écoulement est régi par l'équation de Stokes :

$$\overrightarrow{0} = \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

Cette équation est linéaire et invariante par renversement du temps. En inversant la vitesse de rotation du cylindre, il est alors possible de retrouver l'état initial du système.

Avec une seringue P104.29*, injecter une petite goutte de glycérol coloré* P75 *dans le dispositif* P106.17 *contenant du glycérol. Il est préférable de mélanger préalablement le colorant avec du glycérol pour avoir une densité équivalente. Mettre en rotation lentement le cylindre intérieur à l'aide de la manivelle, pour observer la tache de colorant se*

répartir dans le système et progressivement disparaître. Tourner le cylindre dans l'autre sens avec le même nombre de tours pour voir la goutte de colorant se reformer et retrouver l'état initial du système.

À la fin de l'expérience, on peut observer que la goutte de colorant n'a pas exactement la même forme qu'à l'état initial. Cela est du à la non-stationnarité de l'écoulement réalisé, ainsi qu'à la diffusion lente du colorant dans le milieu.

3.3 Ecoulement de Poiseuille et application aux vaisseaux sanguins

✍ GHP p.162 et Fermigier p.14 On se place en coordonnées cylindriques, avec z l'axe du cylindre. On considère un écoulement laminaire donc $\overrightarrow{v} = v(r,\theta,x,t)\overrightarrow{e_x}$. L'invariance par rotation selon θ et l'incompressibilité ($\Rightarrow \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ ainsi que le régime stationnairefont que la vitesse ne dépend que de r.

Ainsi, l'accélération particulaire est nulle. On néglige le gradient de pression selon l'axe z ainsi que l'effet de la gravité. Navier Stokes projetée sur x donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)$$

Le terme de gauche ne dépend que de x, celui de droite ne dépend que de r donc ils sont égaux à une constante $-A$.

On intègre pour obtenir la vitesse sous la forme $v(r) = \dfrac{-A}{4\eta}r^2 + B\ln(r) + C$.
En $r = 0$ la vitesse n'est pas infinie donc $B = 0$. On a donc $C = v(r=0) = v_0$
De plus, $v(r = R) = 0$ donc $v_0 = \dfrac{AR^2}{4\eta}$. Finalement, on a un profil de vitesse parabolique :

$$v(r) = \frac{AR^2}{4\eta}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Pour la pression, on a $P = -Ax + B'$. Alors $B' = P(x=0) = P_e$ et $P(x = L) = P_s = -AL + P_e$. Comme $A < 0$, on voit que la pression diminue dans le tube. On introduit alors la perte de charge

$$\frac{4\eta v_0}{R^2} = A = \frac{P_e - P_s}{L}$$

Le débit volumique dans le tube est donné par $\mathcal{D} = \iint \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r = \dfrac{v_0\pi R^2}{2}$ On obtient la **loi de Poiseuille** :

$$\mathcal{D} = \frac{(P_e - P_s)\pi R^4}{8\eta L}$$

On note la dépendance en R^4, et que plus le fluide est visqueux, plus le gradient de rpession doit être grand pour maintenir le débit.

Applications

Pour le coeur, $\mathbf{D} = 8.30 \times 10^{-5}\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$, l'aorte a une rayon $R = 1$ cm et la section cumulée de tous les capillaires est $S = 0.2$ m^2. Le sang a une viscosité moyenne $\eta = 3\cdot 10^{-3}$ Pa.s.

Ainsi, $v_{\text{aorte}} = 0.264$ m/s tandis que $v_{\text{capillaire}} = 4.15\cdot 10^{-4}$ m/s.

Les pertes de charges valent $A_{\text{aorte}} = 42.3$ Pa/m et $A_{\text{capillaire}} = 6.64\cdot 10^4$ Pa/m.

La validité de l'étude est cependant discutable car $Re_{\text{aorte}} = 1760$ donc l'écoulement n'est pas vraiment laminaire, on est en régime transitoire.

3.4 Ecoulement de Couette entre deux cylindres-principe d'un viscosimètre.

✍ GHP p.175 + Sanz pp 338-339
Celui-là me va bien.

Mesure de moment avec une jauge de contrainte

Conclusion

Ouverture : Viscosité est à l'origine de la force de "frottement" qui agit sur les objets. Une étude plus approfondie mène à l'étude de l'aérodynamique (loi de Stokes). On peut aussi parler de la lubrification, de l'instabilité de Kelvin-Helmotz, instabilité de Taylor-Couette.

TP 3

Mécanique des fluides

Bibliographie

✍ [FLTCLD] : M. FRUCHART, P. LIDON, E. THIBIERGE, M. CHAMPION, A. LE DIFFON, *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck (2016)

1 Écoulements rampants

L'écoulement d'un fluide est rampant si les effets inertiels sont négligeables devant les effets de la viscosité. La dynamique du fluide est régie par l'équation de Navier-Stokes qui se simplifie alors en régime stationnaire à l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

avec ρ la masse volumique du fluide et η sa viscosité.

1.1 Expérience de Stokes

✍ [FLTCLD] p.411

On considère un écoulement incompressible de Couette cylindrique, c'est-à-dire l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux cylindres coaxiaux dont l'un est mis en rotation. En régime permanent, on peut montrer que l'écoulement est régi par l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = \eta \Delta \vec{v}$$

Cette équation est linéaire et invariante par renversement du temps. En inversant la vitesse de rotation du cylindre, il est alors possible de retrouver l'état initial du système.

> Avec une seringue P104.29, injecter une petite goutte de glycérol coloré P75 dans le dispositif P106.17 contenant du glycérol. Il est préférable de mélanger préalablement le colorant avec du glycérol pour avoir une densité équivalente.
> Mettre en rotation lentement le cylindre intérieur à l'aide de la manivelle, pour observer la tache de colorant se répartir dans le système et progressivement disparaitre.
> Tourner le cylindre dans l'autre sens avec le même nombre de tours pour voir la goutte de colorant se reformer et retrouver l'état initial du système.

À la fin de l'expérience, on peut observer que la goutte de colorant n'a pas exactement la même forme qu'à l'état initial. Cela est dû à la non-stationnarité de l'écoulement réalisé, ainsi qu'à la diffusion lente du colorant dans le milieu.

1.2 Viscosimètre à bille

✍ [FLTCLD] p.411

1.2.1 Principe

Nous allons étudier la chute d'une bille sphérique de rayon r et de masse volumique ρ_b dans une éprouvette cylindrique de rayon R remplie d'un fluide de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ_f (voir figure 3.1).

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + \vec{\pi} + \vec{F}$$

avec $\vec{\pi}$ la poussée d'Archimède et $\vec{F}$ la force de frottement fluide.

On considère que l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds est petit devant 1, et que le régime stationnaire est atteint. Pour une chute dans un milieu infini, on modélise la force de frottement fluide par la formule de Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$. Dans le cas d'une chute dans une éprouvette, la présence des parois n'est pas totalement négligeable car une recirculation du fluide apparait. Il faut alors ajouter une correction à la formule de Stokes (voir [FLTCLD] p.438), que l'on exprimera :

$$\vec{F} = -6\pi\eta\frac{r}{1-2{,}1\frac{r}{R}}\vec{v}$$

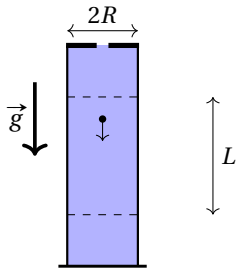


FIGURE 3.1 – Viscosimètre à bille.

Au final, la vitesse de la bille en régime permanent s'exprime :

$$v = \frac{2}{9}\frac{\rho_b - \rho_f}{\eta} r^2 g \left(1 - 2{,}1\frac{r}{R}\right)$$

Si la bille est lâchée avec une vitesse initiale nulle, le régime permanent sera atteint au bout d'un temps :

$$\tau \approx \frac{2}{9}\frac{\rho_b}{\eta} r^2$$

Soit une distance caractéristique d'établissement du régime permanent de l'ordre de $v\tau \approx 1$ cm pour les billes utilisées.

Nous négligeons dans cette approche théorique l'influence du nombre de Reynolds et de la présence du fond du tube sur l'écoulement. Il est possible de les prendre en compte à travers différentes corrections de la formule de Stokes, nous vous conseillons la lecture de [FLTCLD] pour plus de détails.

1.2.2 Mesure de la vitesse de chute

Nous allons mesurer la vitesse de chute de billes en acier ($\rho_b \approx 7830$ kg/m^3) de différents rayons r dans une huile de silicone. Il est préférable d'utiliser une huile de silicone plutôt que du glycérol, car celui-ci s'hydrate rapidement au contact de l'air ambiant, ce qui modifie sa viscosité.

L'éprouvette `P105.44/2` de rayon $R = 3{,}2$ cm est remplie d'une huile Rotitherm M220 de viscosité cinématique $\nu \approx 1000$ mm^2/s et de masse volumique $\rho_f \approx 970$ kg/m^3. Du papier millimétré est collé sur l'éprouvette afin de mesurer des distances verticales.

> Laisser tomber une bille d'acier `P106.37` de rayon $r = 0{,}5$ mm (que l'on mesurera préalablement à l'aide d'un Palmer `P96`) au centre de l'éprouvette `P105.44/2`, et mesurer la vitesse de chute v de la bille à l'aide d'un chronomètre `P96.56`. Afin de négliger l'établissement du régime permanent au début de la chute, et l'effet de la présence de la surface et du fond, on mesure le temps mis par la bille pour parcourir une dizaine de centimètres au milieu de sa chute dans l'éprouvette.
> Recommencer l'expérience avec plusieurs billes de la même taille pour obtenir une statistique raisonnable, puis avec des billes de tailles r différentes (0,75 et 1,0 mm par exemple).
> Représenter la vitesse de chute v en fonction du rayon des billes r, puis réaliser un ajustement de la forme $v = ar^2 - br^3$. Remonter à la valeur de la viscosité dynamique η à l'aide du coefficient a, et la comparer à la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho_f$ tabulée. Le rapport des coefficients b/a doit être proche de $2{,}1/R \approx 66$ m^{-1} pour valider notre modélisation de la correction de la formule de Stokes.

1.3 Écoulement de Poiseuille

✍ [FLTCLD] p.441

1.3.1 Rappel sur l'écoulement de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η dans un cylindre horizontal de diamètre $D = 2R$. On considère que l'écoulement est stationnaire et laminaire. La symétrie cylindrique impose une vitesse du fluide de la forme $\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_x$, avec r la distance à l'axe central. Le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est alors identiquement nul, et l'équation se réduit donc à celle d'un écoulement rampant de la forme :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v}$$

Sa résolution aboutit à un profil parabolique de la vitesse :

$$v(r) = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

Le débit volumique Q_V à travers une section du cylindre est alors donné par la loi de Hagen-Poiseuille :

$$Q_V = -\frac{\pi D^4}{128\eta}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$$

1.3.2 Application au dispositif expérimental

Nous allons réaliser un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique de longueur L reliée à un vase de Mariotte rempli d'eau, comme représenté en figure 3.2.

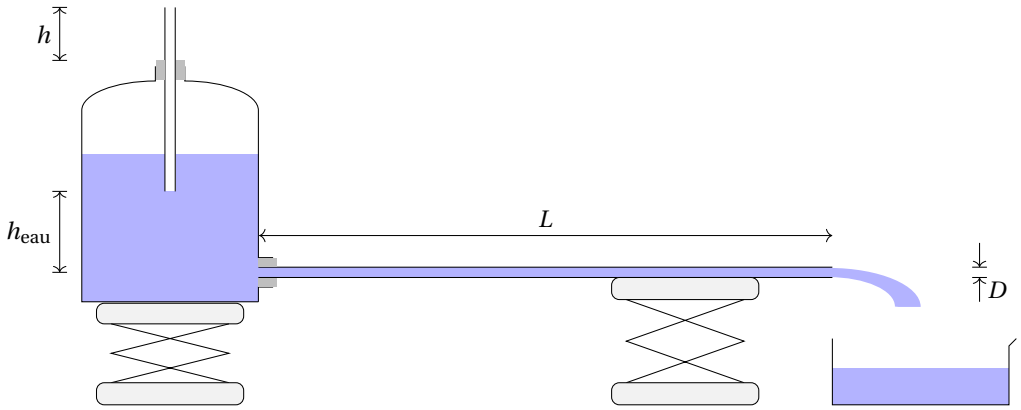


FIGURE 3.2 – Écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique.

Un vase de Mariotte est un récipient fermé à l'intérieur duquel est inséré un tube en contact avec l'air libre. Par continuité de la pression, le bas du tube reste à la pression atmosphérique P_{atm}. Le gradient de pression résultant dans le fluide impose une pression au niveau du trou de vidange en bas du vase :

$$P = P_{\text{atm}} + \rho g h_{\text{eau}}$$

Au cours de la vidange, le niveau de l'eau dans le vase descend, mais la pression au niveau du trou de vidange reste la même tant que le bas du tube reste immergé, c'est l'intérêt du vase de Mariotte. De plus, il est assez simple de modifier la pression au niveau du trou car il suffit de monter ou de descendre le tube vertical.

Pour plus de détails sur le vase de Mariotte, nous vous conseillons la lecture de [FLTCLD] p.429.

Le profil de vitesse du fluide à l'entrée de la conduite n'est pas parabolique mais plutôt uniforme. L'établissement du régime de Poiseuille n'est obtenu qu'à partir d'une certaine distance d'écoulement, dépendant du nombre de Reynolds et du diamètre de la conduite (voir [FLTCLD] pour plus de détails). Nous considérons cependant pour la suite que cette longueur d'établissement est négligeable devant la longueur L de la conduite utilisée, le débit volumique s'exprime alors :

$$Q_V = \frac{\pi D^4}{128\eta}\frac{\rho g h_{\text{eau}}}{L}$$

1.3.3 Vérification de la loi de Poiseuille

Réaliser l'expérience présentée en figure 3.2 en utilisant le vase de Mariotte P105.37, dans lequel on insère au niveau du trou de vidange un capillaire en verre P105.37 de longueur $L = 1{,}36$ m et de diamètre intérieur $D = 2{,}0$ mm grâce à un bouchon troué. Utiliser des supports élévateurs P25 pour maintenir le tube horizontal sur toute sa longueur.
Placer un cristallisoir sur une balance P97 pour recueillir l'eau à la sortie du tube et mesurer le débit. Déposer sur l'extrémité du tube un peu de suie à l'aide d'une allumette afin de la rendre hydrophobe, et d'éviter un « effet théière ».
Remplir d'eau le vase de Mariotte en maintenant fermé l'extrémité de la conduite. Rajouter une tige en verre verticale dans le vase avec un bouchon troué afin de régler la pression hydrostatique.

Il est plus simple de mesurer la hauteur h de la tige qui dépasse du vase (comme indiqué en figure 3.2), plutôt que de mesurer la hauteur d'eau h_{eau} directement.

> Pour différentes hauteurs h, laisse l'eau s'écouler une dizaine de secondes afin d'obtenir un régime permanent. Il est atteint lorsqu'il n'y a plus d'eau dans le tube vertical.
> Mesurer le temps Δt nécessaire pour que s'écoule une masse Δm fixée (20 g par exemple) avec un chronomètre P96.56, puis en déduire le débit volumique $Q_V = \dfrac{\Delta m}{\rho \Delta t}$.
> Tracer le débit volumique Q_V en fonction de h (il n'est pas nécessaire de remonter à h_{eau}). Réaliser une régression affine de la forme $Q_V = a(h + h_0)$, puis remonter à la viscosité η de l'eau à l'aide du coefficient directeur.

La viscosité de l'eau évolue de façon importante avec la température (voir [FLTCLD] p.453 par exemple), mais on peut retenir la valeur tabulée $\eta(20°\text{C}) = 1{,}0.10^{-3}$ Pa.s. Le coefficient h_0 correspond principalement à la différence entre h et h_{eau}, mais il prend également en compte les éventuels effets de tension de surface à la sortie de la conduite.

Remarque : on pourrait également utiliser la balance Kern P97.21 pour réaliser un suivi de la masse d'eau écoulée au cours du temps avec le logiciel Kern.

Il est aussi possible de s'intéresser à l'effet de la longueur d'établissement sur le régime de Poiseuille en recommençant l'expérience pour différentes longueurs de tubes. Une étude est proposée dans [FLTCLD] p.451.

2 Écoulements parfaits à haut nombre de Reynolds

Un écoulement est dit parfait si les effets dus à la viscosité sont négligeables devant les effets inertiels.

2.1 Vidange d'un réservoir

✍ [FLTCLD] p.422

2.1.1 Description

Nous allons étudier la vidange d'un vase de Mariotte rempli d'eau afin de vérifier la loi de Torricelli. Le dispositif expérimental est présenté en figure 3.3.

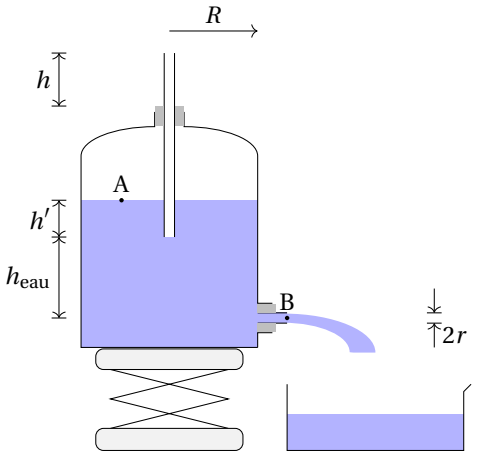


FIGURE 3.3 – Vidange d'un réservoir.

L'expérience est semblable à celle de l'écoulement de Poiseuille précédemment étudié, mais avec une conduite très courte. Le profil de vitesse parabolique n'a alors pas le temps de se développer, ce qui permet de considérer l'écoulement parfait.

En supposant de plus que l'écoulement est incompressible, irrotationnel et stationnaire, on peut appliquer le théorème de Bernoulli entre un point A à la surface de l'eau dans le vase et un point B à la sortie du trou de vidange. On en déduit la relation :

$$P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A = P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B$$

Or la pression au niveau du trou de vidange et celle en bas du tube immergé sont égales à la pression atmosphérique, on en déduit :

$$\begin{cases} P_A = P_{\text{atm}} - \rho g h' \\ P_B = P_{\text{atm}} \end{cases}$$

De plus, comme l'écoulement est incompressible, la conservation du débit impose :

$$v_A S = v_B s$$

avec $S = \pi R^2$ la section du vase et $s = \pi r^2$ celle du trou de vidange.

Au final, on peut donc exprimer la vitesse à la sortie du trou de vidange (attention il y a une erreur dans [FLTCLD]) :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gh_{\text{eau}}}{1-(s/S)^2}}$$

En considérant que $s \ll S$, on retrouve la loi de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2gh_{\text{eau}}}$$

Le débit volumique de vidange dépend donc de la position du tube verticale dans le vase :

$$Q_V = s v_B = s\sqrt{2gh_{\text{eau}}}$$

2.1.2 Vérification de la loi de Torricelli

Le dispositif expérimental est similaire à celui de l'écoulement de Poiseuille, mais avec une conduite très courte en sortie.

> Réaliser l'expérience présentée en figure 3.3 en utilisant le vase de Mariotte `P105.37`, dans lequel on insère au niveau du trou de vidange un tube très court (quelques cm). Placer un cristallisoir sur une balance `P97` pour recueillir l'eau à la sortie du tube et mesurer le débit.
> Mesurer avec précision le rayon R du vase et le rayon r du tube de vidange à l'aide d'un pied à coulisse `P96.41`.

Nous obtenons $R \approx 8{,}4$ cm et $r \approx 2{,}9$ mm.

> Remplir d'eau le vase de Mariotte en maintenant fermé le trou de vidange. Placer une tige en verre verticale dans le vase avec un bouchon troué afin de régler la pression hydrostatique.

Comme précédemment, il est plus simple de mesurer la hauteur h du tube qui dépasse du vase, plutôt que de mesurer la hauteur d'eau h_{eau} directement.

> Pour différentes hauteurs h, laisser l'eau s'écouler quelques secondes afin d'obtenir un régime permanent, puis mesurer le temps Δt nécessaire pour que s'écoule une masse Δm fixée (200 g par exemple), puis en déduire le débit volumique $Q_V = \dfrac{\Delta m}{\rho \Delta t}$.
> Tracer Q_V^2 en fonction de h (il n'est pas nécessaire de remonter à h_{eau}). Réaliser une régression affine de la forme $Q_V^2 = a(h + h_0)$, puis remonter à l'accélération de la pesanteur g à l'aide du coefficient directeur.

L'ajustement affine permet de valider l'hypothèse d'écoulement parfait. Cependant, la valeur de g obtenue est souvent assez différente de la valeur attendue. La différence peut s'expliquer par l'incurvation des lignes de courant à l'entrée du tube de vidange qui provoque des zones de recirculation. Le champ de vitesse n'est alors plus homogène dans le tube. Il est possible de prendre en compte cet effet en modifiant la loi de Torricelli à l'aide d'un coefficient de débit (on se reportera à la lecture de [FLTCLD] p.428 pour plus de détails).

Le coefficient h_0 correspond principalement à la différence entre h et h_{eau}, mais il prend également en compte les effets de tension de surface au bout du tube immergé dans le vase de Mariotte. Une explication plus détaillée est proposée dans [FLTCLD] p.427.

2.2 Écoulement en soufflerie

✍ [FLTCLD] p.454

LP 9

Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Commentaires du jury

- 2017 : La multiplication des expériences illustrant le théorème de Bernoulli n'est pas souhaitable, surtout si celles-ci ne sont pas correctement explicitées.
- 2016 : Les limites de ce modèle sont souvent méconnues.
- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir davantage à l'interprétation de la portance et de l'effet Magnus. Les exemples cités doivent être correctement traités, une présentation superficielle de ceux-ci n'étant pas satisfaisante.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications.
- 2011, 2012, 2013, 2014 : La notion de viscosité peut être supposée acquise.
- 2010 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2009 : Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.
- 2005 : La différence entre écoulement incompressible et fluide incompressible est souvent ignorée, de même qu'entre écoulement parfait et fluide parfait.
- 2003 : L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustration concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.

Niveau : L2 (prépa PC)

Bibliographie

- ✍ *Any livre de prépa*
- ✍ *Hydrodynamique Physique*, **Guyon, Hulin, Petit** Base de tout
- ✍ *Hydrodynamique Physique*, **Fermigier**
- ✍ *Mécanique des fluides*, **Rieutord**
- ✍ *Physique tout-en-un PC*, **Sanz**

Prérequis

- ➢ Navier-Stokes
- ➢ Dérivée particulaire
- ➢ Nombre de Reynolds
- ➢ Couche limite
- ➢ Analogie électrostatique
- ➢ Bilans macroscopiques
- ➢ Identités thermodynamiques
- ➢ Équation de la chaleur

Expériences

- ☕ Effet Coandă
- ☕ Effet Venturi
- ☕ Effet Magnus (la manip de Francis tmtc)

1 Modèle de l'écoulement parfait . . . 113
1.1 Fluide parfait . . . 113
1.2 Écoulement parfait . . . 113
1.3 Domaine de validité . . . 114
1.4 Application : l'effet Coandă . . . 115
2 Théorème de Bernoulli . . . 116
2.1 Écoulement stationnaire . . . 116
2.2 Aspect énergétique . . . 116
2.3 Écoulement potentiel . . . 118
3 Applications . . . 118
3.1 Effet Venturi . . . 118
3.2 Tube de Pitot . . . 119
3.3 Effet Magnus . . . 120
3.4 Théorème de Kelvin . . . 122
3.5 Vidange de Toricelli . . . 122

Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont les équations les plus générales pour décrire le comportement d'un système en mécanique des fluides newtoniens. En considérant des fluides incompressibles, elles se simplifient une première fois mais restent encore impossibles à résoudre analytiquement. Le but de cette leçon est de montrer comment les équations de Navier-Stokes peuvent être à nouveau simplifiées en utilisant une hypothèse forte sur la viscosité du fluide. La résolution des équations pour des écoulements simples nous permettra alors d'expliquer de nombreux phénomènes physiques visibles dans la vie de tous les jours.

Rappels

Incompressible : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ce qui est équivalent à $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

1 Modèle de l'écoulement parfait

1.1 Fluide parfait

Un **fluide parfait** est un fluide pour lequel la viscosité dynamique est strictement nulle. $\eta = 0$. À l'interface avec un solide, cela implique qu'il n'y a aucune pénétration : $\vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{solide} \cdot \vec{n}$, avec $\vec{n}$ la normale à la surface. Si **en plus** on suppose le non glissement on a l'égalité des $\vec{v}^{\parallel}$, ce qui donne :

$$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{solide} \qquad \text{À l'interface.} \tag{9.1}$$

L'hypothèse de fluide parfait est cependant très forte. En pratique seuls les superfluides la vérifient, et dans des conditions de température et de pression très éloignées de l'ambiante. Cette hypothèse est équivalente à une dissipation nulle d'énergie, ou à une diffusion nulle de quantité de mouvement.

1.2 Écoulement parfait

L'hypothèse de l'écoulement parfait est plus faible, et revient à supposer que les forces de frottement fluide sont négligeables par rapport aux autres termes de Navier-Stokes, et particulièrement le terme de convection.

Hypothèses : incompressible, $\vec{g}$ seul.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right) = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g} \tag{9.2}$$

Hypothèses : incompressible, $\vec{g}$ seul, écoulement parfait. On néglige $\eta \Delta \vec{v}$ devant $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v})$. (Ça marche aussi pour les compressible, *à vérifier.*)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\vec{v}) \right) \underset{\text{def}}{=} \rho \frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad \textbf{équation d'Euler.} \tag{9.3}$$

Isentropie de l'écoulement parfait

On effectue un bilan de puissance interne volumique sur un écoulement incompressible parfait avec pression seule ;

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_Q} + q - \frac{P}{V}\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} \tag{9.4}$$

Le premier terme est nul car il n'y a pas de diffusion, le deuxième l'est car pas de chaleur interne. L'incompressibilité rend le troisième nul. On a donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$.
De plus, le premier principe donne $\mathrm{d}U =_P \mathrm{d}V + T\mathrm{d}S$, d'où

$$\mathrm{d}u = -P\frac{\mathrm{d}V}{V} + T\mathrm{d}s = P\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + T\mathrm{d}s \tag{9.5}$$

Or l'incompressibilité donne $\mathrm{d}\rho = 0$, d'où $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$. **L'entropie est conservée pour un écoulement parfait incompressible.**

On a une équation facile, mais est-ce qu'elle est valable partout ?

1.3 Domaine de validité

Pour vérifier la validité de l'hypothèse, il est intéressant de regarder le **nombre de Reynolds** R_e. On pose U une vitesse caractéristique et L une longueur.

$$R_e \underset{\text{def}}{=} \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\rho\dfrac{U^2}{L}}{\eta\dfrac{U}{L^2}} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \tag{9.6}$$

On a ν qui est un coef de diffusion ($\mathrm{m^2\,s^{-1}}$), nommé *viscosité cinématique* du fluide.

Pour que l'équation d'Euler soit valable, il faut un nombre de Reynolds très supérieur à 1. Les écoulements turbulents à $R_e > 2000$ sont un cas particulier d'écoulement parfait. listons des exemples :

- Jet d'eau à la sortie d'un robinet, $U = 1\mathrm{m\,s^{-1}}$, $L = 1\mathrm{cm}$, et la viscosité de l'eau vaut $\nu = 10^{-6}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, Re=$10^4 \gg 1$
- Air autour d'une voiture, $U = 10\mathrm{m\,s^{-1}}$, $L = 1\mathrm{m}$, et la viscosité de l'eau vaut $\nu = 10^{-5}\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, Re=$10^6 \gg 1$

On peut donc appliquer l'équation de Stokes à de nombreux cas de la vie courante.

Une deuxième limite est celle de la **couche limite**, qui est une couche autour d'un solide à l'intérieur de laquelle le fluide à des propriétés particulières. Pour connaitre sont épaisseur δ on remplace L dans la partie diffusion par δ, car c'est un phénomène diffusif. On trouve alors

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{R_e}} \tag{9.7}$$

Dans les exemples précédents, autour de la voiture la couche limite est de 1mm. Elle est très restreinte et peut donc être négligée, cependant, il est bon de garder en tête son existence puisque c'est elle la responsable de la majorité des écarts à l'écoulement parfait,ce que nous allons voir plus tard.

1.4 Application : l'effet Coandă

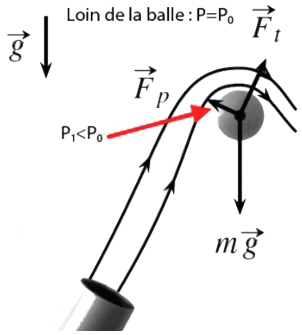


FIGURE 9.1 – Illustration de l'effet en question.

✍ Guyon (ghb) p275 ⏲ 2mn

Faire léviter la baballe.

Considérons une balle de ping-pong volant au-dessus d'un sèche-cheveux. Si on ne met pas d'angle, la position de la balle de ping-pong est stable par compensation de la force exercée par le sèche-cheveux et de la force de pesanteur. Si jamais on introduit maintenant un angle par rapport à la verticale, on peut s'intéresser à la position d'équilibre de la balle de ping-pong.

Si on nomme $\overrightarrow{v} = v(r,z,t)\overrightarrow{e_\theta}$ la vitesse de la balle en coordonnées polaire, et que l'on néglige la force de pesanteur, on a :

$$\rho\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \rho(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla}P \tag{9.8}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}\overrightarrow{e_\theta} + \rho v\frac{1}{r}\frac{\partial v\overrightarrow{e_\theta}}{\partial\theta} = -\frac{\partial P}{\partial r}\overrightarrow{e_r} \tag{9.9}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}\overrightarrow{e_\theta} + \rho\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} = -\frac{\partial P}{\partial r}\overrightarrow{e_r} \tag{9.10}$$

$$\tag{9.11}$$

Par projection sur l'axe $\overrightarrow{e_r}$ on trouve $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\dfrac{v^2}{r} > 0$, ce qui témoigne d'une souspression autour de la balle, et donc d'une force proportionnelle au gradient de P. La balle est aspirée vers le haut, c'est l'effet Coandă. C'est d'ailleurs l'effet qui tend à faciliter le décollage des avions en soulevant leurs ailes.

L'effet Coandă est une application directe de l'équation d'Euler et du modèle de l'écoulement parfait. Pour autant, il n'est pas le seul intérêt de l'équation d'Euler. Dans cette deuxième partie, nous allons nous intéresser à la conséquence la plus importante du modèle de l'écoulement parfait, à savoir le théorème de Bernoulli.

2 Théorème de Bernoulli

Dans cette leçon, on traite le cas d'un fluide **parfait**. On considère de plus que le fluide **incompressible et barotrope soumis à des forces volumiques dérivant d'un potentiel**. Un fluide barotrope est un fluide dont les lignes d'égale pression sont parallèles aux lignes d'égale densité.

L'analyse vectorielle nous apprend que

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{v} \tag{9.12}$$

A l'aide de ce résultat, l'équation d'Euler peut être réécrite

$$\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{P}{\rho}\right) - \overrightarrow{\nabla}\Phi_l \tag{9.13}$$

où les forces volumiques sont sous la forme $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi_l$.

2.1 Écoulement stationnaire

On se place dans le cas où l'écoulement précédent est **stationnaire** ($\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$). On intègre l'équation d'Euler le long d'une **ligne de courant** (AB) :

$$\int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{l}\cdot\left[(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{v} + \overrightarrow{\nabla}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l\right)\right] = 0 \tag{9.14}$$

Puisque qu'une ligne de courant est tangente à la vitesse, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{l}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (produit mixte qui tourne). On obtient

$$\left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l\right]_A^B = 0 \tag{9.15}$$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible, barotrope :

La quantité $\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l$ est constante le long d'une ligne de courant.

Plusieurs remarques :

- En l'absence d'écoulement, on retrouve la loi de la statique des fluides $\overrightarrow{\nabla}P = \overrightarrow{f}$
- Le théorème de Bernoulli est généralisable à toute force extérieure dérivant d'un potentiel, comme ici avec la force de pesanteur.
- On peut généraliser ce théorème à tout l'espace dans le cas d'un écoulement potentiel, traité un peu plus tard dans la leçon.

2.2 Aspect énergétique

On considère un écoulement **parfait, incompressible, stationnaire, homogène**.

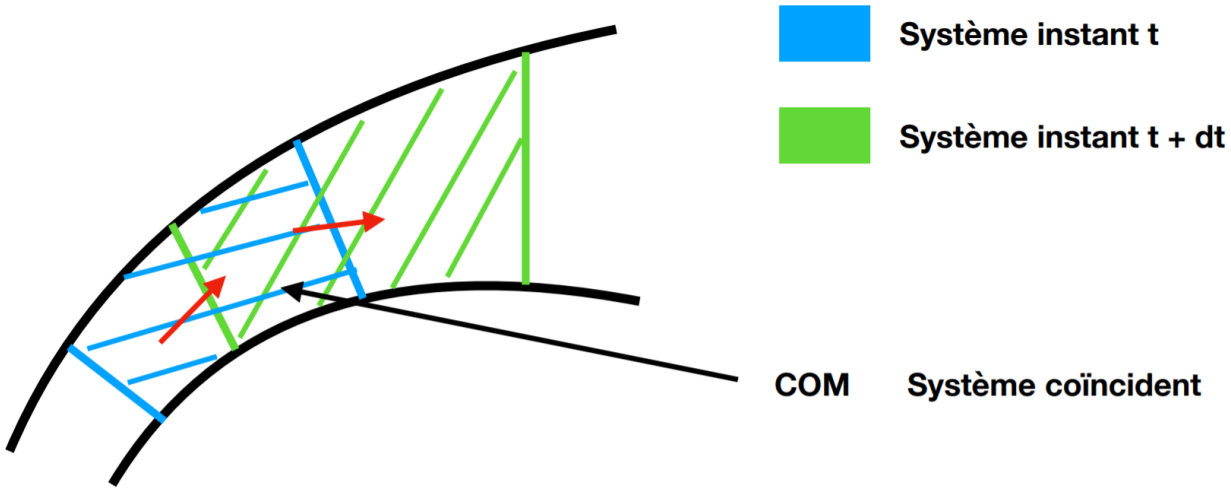


FIGURE 9.2 – On passe d'un système Σ ouvert à un système Σ^* fermé.

On considère un système ouvert Σ où le fluide est dans la zone bleue à l'instant t et dans la zone verte à l'instant $t + \mathrm{d}t$. L'espace commun aux deux zones est noté COM. On définit alors un système fermé Σ^* de la façon suivante :

- à t, Σ^* correspond à la zone bleue ;
- à $t + \mathrm{d}t$, Σ^* correspond à la zone verte.

L'écoulement est stationnaire donc le débit massique $D_m \simeq \rho v S$ (en vrai c'est $\int \rho \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$) est conservé entre t et $t+\mathrm{d}t$. Le bilan d'énergie dans le système Σ^* pendant ces deux instants s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_c^* &= E_c^*(t+\mathrm{d}t) - E_c^*(t) \\ &= \left(E_c^{\mathrm{COM}}(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\delta m v_S^2\right) - \left(E_c^{\mathrm{COM}}(t) + \frac{1}{2}\delta m v_E^2\right) \end{aligned} \tag{9.16}$$

où δm est la variation de masse entrant dans le système COM à l'instant t et y sortant à l'instant $t + \mathrm{d}t$. L'écoulement est stationnaire donc $E_c^{\mathrm{COM}}(t+\mathrm{d}t) = E_c^{\mathrm{COM}}(t)$. De plus, $\delta m = D_m \mathrm{d}t$ donc on obtient

$$\mathrm{d}E_c^* = \frac{1}{2}(v_S^2 - v_E^2) D_m \mathrm{d}t \tag{9.17}$$

Finalement,

$$\frac{1}{2}(v_S^2 - v_E^2) D_m = \frac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{int}}^* + \mathcal{P}_{\mathrm{ext}}^* \qquad \text{d'après le TEC} \tag{9.18}$$

Exprimons alors les puissances externes (on ne prend en compte ici que les forces de pression et la gravité) :

- les forces de pression perpendiculaires à l'écoulement ne travaillent pas, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathrm{ext,pression}}^* &= P_E S_E v_E - P_S S_S v_S \\ &= \rho\left(v_E S_E \frac{P_E}{\rho} - v_S S_S \frac{P_S}{\rho}\right) \\ &= D_m\left(\frac{P_E}{\rho} - \frac{P_S}{\rho}\right) \end{aligned} \tag{9.19}$$

- pour la force de pesanteur,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ext,gravité}}^* = \rho g S(v_E z_E - v_S z_S) = D_m g(z_E - z_S) \tag{9.20}$$

- les termes de dissipation étant négligés, on n'a pas d'échanges de chaleur

Finalement, on obtient

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}}^* = \frac{\mathrm{d}E_c^*}{\mathrm{d}t} - \mathcal{P}_{\mathrm{ext}}^* = D_m\left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right] \tag{9.21}$$

On trouve ici une interprétation énergétique du théorème de Bernoulli : **le théorème de Bernoulli est vérifié si la puissance interne d'un système est conservée et inversement**. Le théorème de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie mécanique. On parle de *pression dynamique* pour désigner le terme $\rho\frac{v^2}{2}$.

exemple : la cavitation

Si dans un écoulement irrotationnel, la vitesse augmente en un point alors la pression en ce point diminue comme le théorème de Bernoulli le démontre. C'est ce qui explique la cavitation. Si les hélices d'un bateau tournent suffisamment vite, alors la pression autour de ces hélices diminue jusqu'à dépasser la pression de vapeur saturante de l'eau : des bulles de vapeur se forment.

2.3 Écoulement potentiel

Si l'écoulement est potentiel, alors la vitesse s'écrit sous la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\Phi$ où Φ est le *potentiel des vitesses*. L'écoulement est donc forcément irrotationnel, *i.e.* $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. L'équation d'Euler s'écrit alors

$$\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l\right) = \overrightarrow{0} \tag{9.22}$$

Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, potentiel, incompressible, barotrope :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi_l = f(t) \text{ où } f(t) \text{ est une fonction du temps.}$$

Cet énoncé est valable dans tout l'écoulement. On retrouve l'aspect énergétique vu précédemment si on se place dans le cas stationnaire.

3 Applications

3.1 Effet Venturi

☕

Effet Venturi

✍ ⏲

L'expérience se trouve dans la collection. Vous pouvez l'alimenter directement via un robinet.

Cette expérience est intéressante car elle permet de mettre en évidence la perte de charges (voir le Jolidon pour plus de détails) par dissipation visqueuse à la sortie de la deuxième partie du tube : on voit apparaître une zone dite d'"eaux mortes" explicable seulement en prenant en compte les limites du modèle de l'écoulement parfait.

On peut également alimenter le système avec un vase de Mariotte qui permet d'avoir un débit d'entrée constant. L'expérience reste quand même compliquée à faire marcher proprement et on sait pas vraiment pourquoi (on adore).

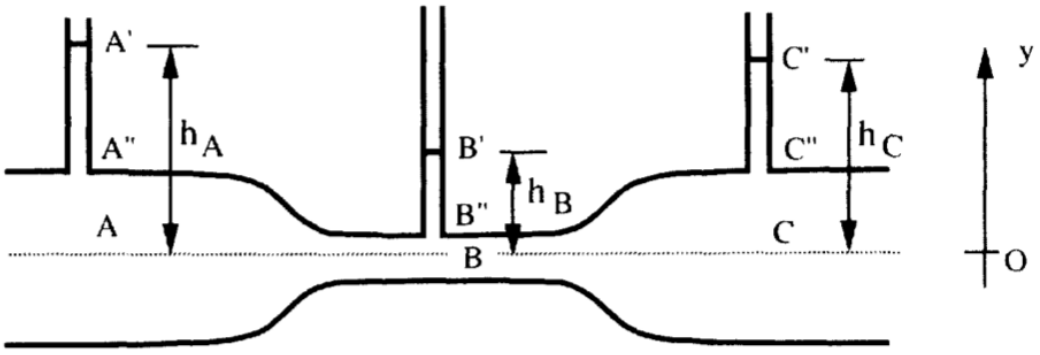


FIGURE 9.3 – Illustration de l'effet Venturi. On observe que $h_A = h_C < h_B$.

On suppose que le fluide est un écoulement **parfait, inompressible, stationnaire**. On applique le théorème de Bernoulli à la ligne de courant passant dans le tube :

$$\frac{v_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} = \frac{v_C^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} \tag{9.23}$$

De plus, la statique des fluides donne :

$$\begin{aligned} P_A &= P_0 + \rho g h_A \\ P_B &= P_0 + \rho g h_B \\ P_C &= P_0 + \rho g h_C \end{aligned} \tag{9.24}$$

On obtient donc

$$\frac{v_A^2}{2} + g h_A = \frac{v_B^2}{2} + g h_B = \frac{v_C^2}{2} + g h_C \tag{9.25}$$

Or on a conservation de la masse donc du débit massique. Puisque $S_B < S_A = S_C$, on en déduit que $v_B > v_A = v_C$. L'équation ci-dessus nous assure donc que $h_B < h_A = h_C$.

Application

On utilise l'effet Venturi en chimie pour la filtration sous Büchner

3.2 Tube de Pitot

✍ Sanz p.361 (venturi) et p.364 (pitot)

Le tube de Pitot est un dispositif utilisant l'effet Venturi pour mesurer des vitesses d'écoulement, par exemple la vitesse de l'air autour d'un avion (et donc la vitesse de l'avion par rapport à l'air).

A position dans le champ de pesanteur constante, on a :

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = cste \tag{9.26}$$

Une augmentation la vitesse provoque donc une diminution de la pression. On peut le voir sur un dispositif tel que : https://youtu.be/pQWnKLIDkNU?t=25. On peut se servir de ce phénomène pour mesurer des pressions, c'est le principe du tube de Pitot qui est utilisé pour mesurer la vitesse des avions.

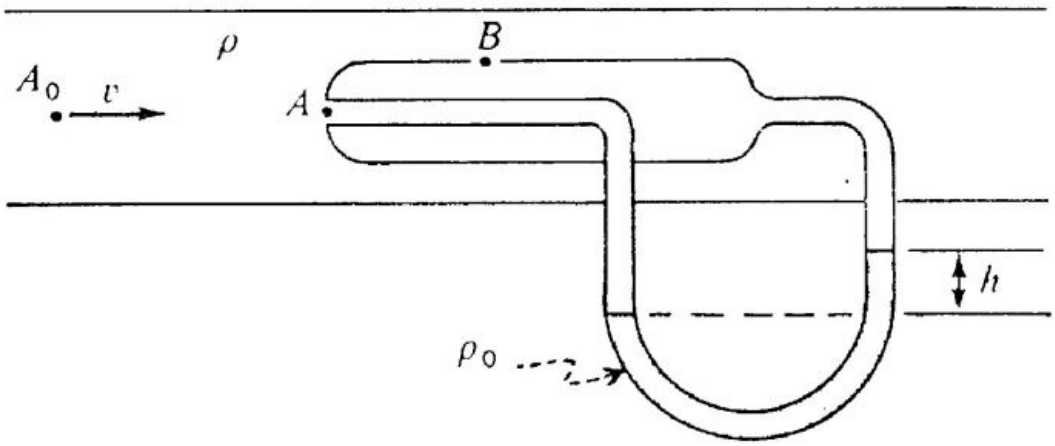


FIGURE 9.4 – Schéma d'un tube de Pitot (source : http://olivier.granier.free.fr/MOOC/res/fig-meca-flu-ex-CCP-4.jpg, libre d'utilisation et de partage)

On prend la ligne de courant de A_0 à A :

$$P_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} = P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} = P_A \qquad \text{car A est un point d'arrêt}$$

De B_0 (au dessus de A_0 au niveau de B) à B :

$$P_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} = P_B + \rho\frac{v_0^2}{2} \qquad \text{soit} \qquad P_B = P_0$$

soit :

$$v_0 = \sqrt{2\frac{P_A - P_B}{\rho}} \tag{9.27}$$

Dans le fluide du manomètre, on a l'équilibre hydrostatique donc $P_A + \rho_0 g z1 = P_B + \rho_0 g z_2$ (ce qui ressemble à Bernoulli). Soit $P_A - P_B = \rho_0 g h$ et donc finalement :

$$v_0 = \sqrt{2gh\frac{\rho}{\rho_0}} \tag{9.28}$$

3.3 Effet Magnus

3.3.1 Écoulement autour d'un cylindre infini

Pour un écoulement potentiel incompressible, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}\Phi$ et $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ ce qui donne $\Delta\Phi = 0$. Le potentiel des vitesses répond donc à une équation de Laplace.

L'unicité de la solution est donc assurée pour un système simplement connexe, et elle est unique à une circulation près pour un système doublement connexe.

Les solutions sont superposables et la solution globale est fixée par les conditions aux limites. Au final, si une solution vérifie les conditions aux limites, c'est la seule à une circulation près.

De part ses symétries, l'écoulement autour d'un cylindre infini se résume à un écoulement 2D autour d'un disque.

On suppose un écoulement stationnaire uniforme à $\overrightarrow{U} = U\overrightarrow{e_x}$ en l'infini.

La symétrie du problème suggère d'utiliser les coordonnées cylindriques. On a ainsi

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \\ v_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} \end{cases} \tag{9.29}$$

Décomposons l'écoulement :

- écoulement parallèle uniforme :
  $\Phi_1 = Ux = Ur\cos\theta$ car $\begin{cases} v_r = U\cos\theta \\ v_\theta = -U\sin\theta \end{cases}$ donc $\overrightarrow{v} = U\overrightarrow{e_x}$.
- écoulement tourbillonaire :
  $\Phi_2 = \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi}$ car $\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$ avec Γ la circulation d'un cercle de centre 0.
- écoulement dipolaire (analogie avec l'électrostatique) :
  $\Phi_3 = \dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{2\pi r^2} = \dfrac{-p\cos\theta}{2\pi r}$ avec p fixé avec les conditions aux limites.

Les solutions sont superposables : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = Ur\cos\theta + \dfrac{\Gamma\theta}{2\pi} + \dfrac{-p\cos\theta}{2\pi r}$ On a donc

$$\begin{cases} v_r &= \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U + \dfrac{p}{2\pi r^2}\right)\cos\theta \\ v_\theta &= \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\left(U - \dfrac{p}{2\pi r^2}\right)\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \tag{9.30}$$

Les conditions aux limites imposent $\begin{cases} v_r(R) = 0 \\ \lim\limits_{r\longrightarrow+\infty} \overrightarrow{v} = U\overrightarrow{e_x} \end{cases}$, donc $p = -2\pi R^2 U$. La deuxième condition est également vérifiée car les termes en $\dfrac{1}{r}$ tendent vers 0 quand $r \longrightarrow +\infty$.

Finalement, on obtient

$$\begin{cases} v_r &= U\left(1 - \left(\dfrac{R}{r}\right)^2\right)\cos\theta \\ v_\theta &= -U\left(1 + \left(\dfrac{R}{r}\right)^2\right)\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \tag{9.31}$$

3.3.2 Force de Magnus

Maintenant que l'expression de la vitesse est établie, on peut calculer les forces exercées par le fluide sur l'obstacle. On définit la *traînée* comme selon $\overrightarrow{e_x}$ et la *portance* selon $\overrightarrow{e_y}$.

Par symétrie, la force de traînée est nulle. Pour le calcul de la portance, on utilise la relation de Bernoulli. On se place en **stationnaire**, ce qui permet d'avoir $P + \dfrac{v^2}{2} = \text{cst}$ dans TOUT le fluide, en particulier autour du cylindre infini.

$$\frac{P(R)}{\rho} + \frac{1}{2}v_\theta^2 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 \tag{9.32}$$

Soit encore

$$P(R) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - \left(-2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi RU}\right)^2\right) \tag{9.33}$$

La portance est donnée par la résultante selon y, donc

$$F_p = -\int_0^{2\pi} p(R) R \sin\theta \mathrm{d}\theta = -\rho U\Gamma \qquad \text{car seul le terme en } \sin^2\theta \text{ est non nul} \tag{9.34}$$

$$\boxed{F_p = -\rho U\Gamma}$$

☕

Effet Magnus

✍ ⏲

L'expérience de Francis !

3.4 Théorème de Kelvin

On considère un écoulement **parfait, incompressible et dont les forces volumiques peuvent s'écrire à l'aide de potentiels**. Imaginons un contour fermé C, dont chaque point se déplace à la vitesse du fluide en ce point ; ce contour bouge au cours du temps. Définissons la circulation Γ autour de ce contour fermé $\mathcal{C}(t)$:

$$\Gamma = \oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{9.35}$$

Le théorème de Kelvin impose que Γ est conservée au cours du temps. Or

$$\oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}(t)} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{9.36}$$

La conservation de la circulation implique la conservation du rotationnel de $\vec{v}$. Ainsi, si un écoulement est irrotationnel à un instant t alors il est irrotationnel pour tous les temps. C'est l'intérêt des écoulements potentiels.

Démonstration du théorème de Kelvin

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\oint_{\mathcal{C}(t)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\right) &= \oint_{\mathcal{C}(t)} \left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}\right] \\
&= \oint_{\mathcal{C}(t)} \left[-\vec{\nabla}\left(\Phi + \frac{P}{\rho}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

3.5 Vidange de Toricelli

✍ Sanz p.363

On fait la vidange d'un tonneau de 50cm de diamètre et de 1m de haut à travers une ouverture de 1cm. On suppose

que $v_A = 0$ Faire un schéma, et sur transparent A condition que les hypothèses soient vérifiées, on a :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B$$
$$v_B^2 - v_A^2 = g(z_A - z_B)$$
$$v_B = \sqrt{2gh}$$

On obtient la même équation que pour la chute libre, ce qui est logique puisque l'on considère la même équation de conservation ($E_c + E_p = Cste$).
On obtient $v_B = 4.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ce qui semble cohérent. https://www.youtube.com/watch?v=9V3-XeDSm0U

Vérification des hypothèses :

- Soumis qu'au poids et référentiel du laboratoire galiléen.
- **Stationnarité :** Conservation de la masse, $v_a S_A = v_B S_B$. On a $s \ll S$ donc $h \simeq Cste$, tant que l'ouverture est petite et le réservoir grand, on peut considérer l'écoulement comme stationnaire, $v_A = 1.7\,\mathrm{mm}$
- **Parfait :** $U = 1\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$, $L = 1\,\mathrm{m}$, $\nu = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ soit $Re = 100$.
- **Incompressible :** A la sortie : $v = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $c_{son} = 1500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ soit $M = 2 \times 10^{-3}$

LP 10

Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

Commentaires du jury

- 2014 : Le lien avec les potentiels thermodynamiques n'est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l'origine microscopique de la tension superficielle. Le jury constate que trop souvent les candidats présentent des schémas où la représentation des interactions remet en cause la stabilité mécanique de l'interface. Le jury apprécie les exposés dans lesquels le/la candidat(e) ne se limite pas à la statique.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides : applications.
- 2013 : Le lien avec les potentiels thermodynamiques n'est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l'origine microscopique de la tension superficielle. Le jury constate que trop souvent les candidats présentent des schémas où la représentation des interactions remet en cause la stabilité mécanique de l'interface.
- 2011, 2012 : Le lien avec les potentiels thermodynamiques n'est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l'origine microscopique du phénomène.
- 2009, 2010 : La force de tension superficielle est très mal décrite et comprise ; cette notion permet pourtant d'interpréter de nombreux résultats de façon simple et concrète. L'étude énergétique de l'interface doit s'appuyer sur une thermodynamique rigoureuse, où les systèmes et transformations étudiés sont définis avec une grande précision.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Gouttes, bulles, perles et ondes*, **De Gennes, Brochart-Wyatt, Quéré** ⟶ La base de la leçon
- ✍ *Thermodynamique*, **DGLR** ⟶ Pour la thermo
- ✍ *Mécanique des fluides*, **Landau** ⟶ Approche très thermodynamique
- ✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit** ⟶ Pour la dynamique
- ✍ Poly de P. Lidon `https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document` ⟶ Très complet
- ✍ *BUP 851*, **Gheusi** ⟶ Pourquoi énergie et pas force

Prérequis

- ➢ Mécanique des fluides
- ➢ Propagation d'une onde, relation de dispersion
- ➢ Bases de thermodynamique

Expériences

- potentiels thermodynamiques
- Navier-Stokes
- Forces intermoléculaires ?
- Hydrostatique

1 Tension de surface . . . 127
1.1 Phénoménologie . . . 127
1.2 Approche énergétique et thermodynamique . . . 128
1.3 Approche microscopique . . . 128
2 Interfaces fluide-fluide . . . 130
2.1 Loi de Laplace . . . 130
2.2 Ondes gravito-capillaires . . . 131
3 Interfaces triples . . . 134
3.1 Positionnement du problème . . . 134
3.2 Mouillage et loi de Young-Dupré . . . 134
3.3 Ascension capillaire et loi de Jurin . . . 136
3.4 Imprégnation capillaire et loi de Washburn . . . 137
4 Interfaces instables . . . 138
4.1 Nucléation homogène . . . 138
4.2 Instabilité de Rayleigh-Plateau . . . 140
4.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor . . . 140

Introduction

Les gerris sont des insectes qui peuvent rester à la surface de l'eau. Pourtant, on pourrait instinctivement penser que la gravité les fasse couler, mais ce n'est pas le cas.

On peut donc se demander si cette équilibre des gerris ne passe pas par une minimisation de l'énergie que nous allons essayer d'expliquer dans cette leçon en regardant de plus près ce qui se passe à une interface faisant intervenir des fluides.

FIGURE 10.1 – Un gerris.

Trombone/punaise dans l'eau

✍ ⏲

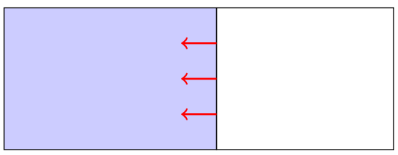
On met un trombone ou une punaise sur l'eau, ça flotte. On rajoute du savon, ça coule. Donc il y a une forme de force qui compense le poids, qui s'affaibli avec le savon.

Si ça ne flotte pas, ne pas hésiter à saler l'eau.

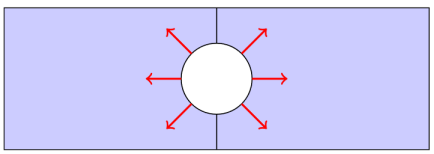
1 Tension de surface

✍ Le poly de Lidon, de Gènes p.13

1.1 Phénoménologie



(a) Sur un cadre contenant une tige mobile, on crée un film de savon. Quand on perce le film d'un côté du rail, ce dernier se déplace vers le film restant.



(b) Sur un cadre contenant un fil formant une boucle, on réalise un film de savon. Quand on perce le film au centre de la boucle, celle-ci s'étire et prend une forme circulaire.

Sinon y'a une vidéo qui fait ça bien : https://youtu.be/DZOB5GVAxJg.

Pour empêcher ce mouvement de la barre métallique, il semble qu'il faille appliquer une force dans le sens opposé. On conçoit que la force à fournir est d'autant plus importante que la tige est longue (L grand). On peut même montrer que cette force croît linéairement avec L de sorte qu'il existe une coefficient γ appelé tension de surface qui lie la force F exercée sur la tige par le fluide et la longueur L :

$$F = \gamma L \tag{10.1}$$

On peut voir γ comme une force linéique, en N/m. En ordre de grandeur, cette tension superficielle est faible, et vaut par exemple à 20°C :

- eau pure : $\gamma = 72$ mN/m
- éthanol : $\gamma = 22$ mN/m

L'eau a une tension de surface exceptionnellement grande, et cette tension diminue avec l'ajout de savon, d'où l'expérience introductive.

1.2 Approche énergétique et thermodynamique

Si on a de la force, on a un travail et une énergie. Ici l'énergie que l'on peut associer à la tension de surface c'est **l'énergie de surface**. Supposons on déplacement $\mathrm{d}x \parallel$ à la force qui entraine l'interface, comme dans les expériences introductives, alors on a, avec A l'aire de l'interface,

$$\delta W = F\mathrm{d}x = \gamma \mathrm{d}A \tag{10.2}$$

La tension de surface devient une énergie surfacique, ce qui est beaucoup plus intuitif ! On peut intégrer cela à l'énergie interne du système {interface, milieu 1, milieu 2}.

$$\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S + \gamma \mathrm{d}A + \mu \mathrm{d}n + ... \tag{10.3}$$

Ainsi on peut donner une nouvelle définition, plus thermodynamique, de la tension de surface :

$$\gamma = \left.\frac{\partial U}{\partial A}\right|_{V,S,n,...} = \left.\frac{\partial F}{\partial A}\right|_{V,T,n,...} = \left.\frac{\partial G}{\partial A}\right|_{P,T,n,...} \tag{10.4}$$

Les deux définitions sont équivalentes, et on peut utiliser l'une et l'autre en fonction du contexte. Si le paramètre de variation est une longueur, on favorisera la définition en force linéique, tandis que si le paramètre de variation est une aire, on préfèrera l'énergie surfacique.

1.3 Approche microscopique

Cette phénoménologie très intéressante manque quand même de fondement scientifique, et d'explication microscopique. Nous allons tacher de détailler cela ici.

Dans une phase homogène, les interactions entre les différentes molécules (forces de Van der Waals, interactions hydrogène...) assurent la cohésion de la matière. Une molécule au milieu de cette phase est en interaction avec des molécules voisines dans toutes les directions de l'espace : son énergie est donc minimale. En revanche, pour une molécule située à l'interface de cette phase avec une autre phase (en haut de la Figure 2, elle a moins d'interactions avec ses molécules voisines tout simplement parce qu'elle en a moins. Son énergie est donc plus importante que les molécules en plein milieu de la phase homogène.

Cette simple comparaison définit la tension de surface γ comme une énergie supplémentaire du fluide due à la présence d'une interface quelconque (la notation sera ajustée suivant l'interface considérée). Les molécules présentes

au niveau de l'interface vont essayer de minimiser les interactions avec l'autre phase, d'où une minimisation de la surface de l'interface elle-même.

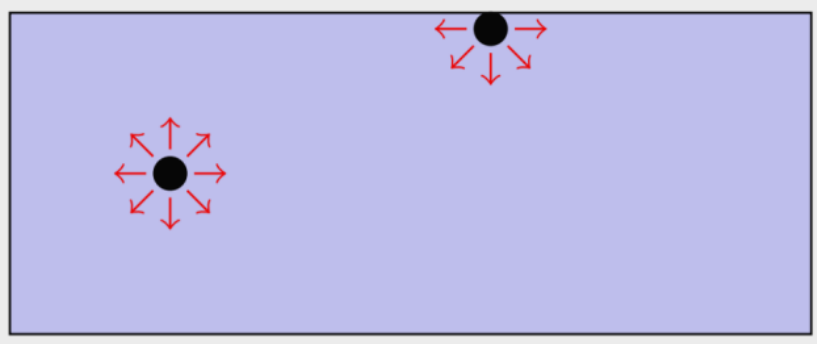


FIGURE 10.2 – La molécule au centre a plus d'interactions avec ses voisines que celle à l'interface.

En terme d'ordre de grandeur, on peut considérer une interface liquide vapeur idéale, qui sera un modèle pour les interface liquide-air. On nomme a la taille d'une molécule, et U l'énergie de cohésion par molécule. Pour amener la molécule à l'interface, on augmente la surface de celle-ci de a^2 (ODG) et on diminue l'énergie de cohésion du système de U.

$$\gamma_{LV} \sim \frac{U}{a^2} \tag{10.5}$$

estimation de l'énergie de cohésion : à l'ébulition on compense l'énergie de cohésion par l'énergie thermique, donc $U \sim k_B T_{eb}$

Estimation de la tension de surface :

$$\gamma_{LV} = \frac{k_B T_{eb}}{a^2} \tag{10.6}$$

- eau : $\gamma_{calc} \sim 0.1$ N/m ($a \sim 2$Å), $\gamma_{tab} = 0.075$ N/m @20°C. MAIS ça dépend de la température... On a vu d'ailleurs qu'une faible quantité de surfactant fait aussi varier celle-ci, donc il faut prendre en compte la pureté de l'eau.
- Pour l'éthanol et l'huile on a une tension de surface plus faible (20 mN/m), du fait de l'absence de liaisons hydrogènes stabilisantes.

remarque : la tension de surface a tendance à diminuer avec la température et l'ajout d'impuretés.

remarque bis : l'ajout de sel dans l'eau augmente la tension de surface, c'est un exemple rare qui est dû au caractère super polaire de l'eau !

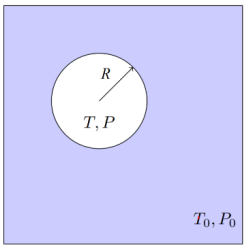
Remarque ter : *Les liaisons ioniques et métalliques donnent une tension de surface encore plus grande, d'où la forme très bubulle du mercure liquide. Il minimise la surface de contact avec l'extérieur, et pour cela, il fait une boule.*

2 Interfaces fluide-fluide

2.1 Loi de Laplace

✍ Poly de P. Lidon, p.7

La tension de surface représente le coût énergétique d'une modification de l'air d'une interface. Ainsi, on va s'intéresser à une interface qui a été courbée. Pour cela, on part de la situation suivante : on considère un système composé d'une bulle sphérique de gaz de rayon r entourée d'un liquide à température T_0 et pression P_0 constantes (donc qui se comporte comme un thermostat et un barostat). Le système {Bulle + Liquide + interface} est considéré comme étant fermé.



Pourquoi pas une bulle cubique ?

La sphère est la forme qui minimise l'aire pour un volume donné. Il s'agit donc de la forme à l'équilibre de la bulle (*idem* pour les gouttes en passant).

On veut connaître la pression dans la bulle de rayon r à l'équilibre. La bulle est est entourée d'un liquide se comportant comme un thermostat et un barostat donc le potentiel thermodynamique adapté à l'étude de l'équilibre de la bulle est l'enthalpie libre du système à l'équilibre

$$G^* = U + P_0V - T_0S \tag{10.7}$$

avec U l'énergie interne de la bulle, V son volume et S son entropie. On peut alors exprimer la différentielle de G^* à partir de celle de U, à savoir $\mathrm{d}U = -P\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S + \gamma\mathrm{d}A$ en notant T la température dans la bulle, P la pression dans la bulle et A son aire :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G^* &= \mathrm{d}U + P_0\mathrm{d}V - T_0\mathrm{d}S \\ &= -P\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S + \gamma\mathrm{d}A + P_0\mathrm{d}V - T_0\mathrm{d}S \\ &= (T - T_0)\mathrm{d}S - (P - P_0)\mathrm{d}V + \gamma\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{10.8}$$

En remarquant que $\mathrm{d}A = 8\pi r\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$, on peut continuer de développer $\mathrm{d}G^*$:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G^* &= (T - T_0)\mathrm{d}S - (P - P_0)4\pi r^2\mathrm{d}r + \gamma 8\pi r\mathrm{d}r \\ &= (T - T_0)\mathrm{d}S + 4\pi r^2\left(P_0 - P + \frac{2\gamma}{r}\right)\end{aligned} \tag{10.9}$$

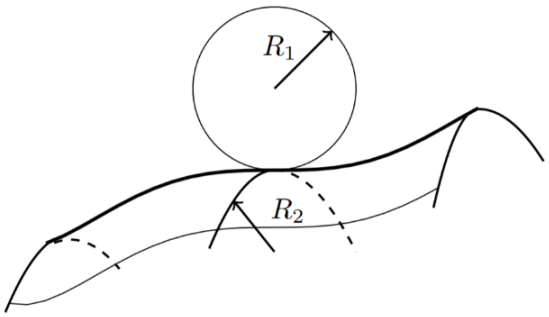
Par définition, $\mathrm{d}G^* = 0$ à l'équilibre, si bien qu'on obtient :

$$\begin{aligned}\text{Équilibre thermique} &\iff T = T_0 \\ \text{Équilibre mécanique} &\iff P = P_0 + \frac{2\gamma}{r}\end{aligned}$$

L'équilibre mécanique impose donc une surpression à l'intérieur de la bulle due à la courbure de l'interface. On appelle **loi de Laplace** l'expression de la surpression pour une bulle en 2D ayant pour rayon de courbure à l'interface le rayon r :

$$P - P_0 = \frac{2\gamma}{r}$$

Généralisation en 3 dimensions :



On a étudié le cas simple d'une bulle sphérique. Dans le cas général d'une interface en 3 dimensions, on définit 2 rayons de courbure R_1 et R_2 pour 2 plans orthogonaux donnés. On définit ensuite la courbure moyenne $\mathcal{C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ qui est indépendante du choix des plans orthogonaux.

Des calculs réalisés dans ✍ De Gennes (chap 1) permettent alors d'aboutir à la loi de Laplace générale :

$$P - P_0 = \gamma \mathcal{C} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

On peut regarder quelques cas particuliers :

- interface plane : R_1, $R_2 \longrightarrow 0$ donc $P \longrightarrow P_0$: on retrouve la continuité de la pression pour une interface plane
- bulle sphérique : $R_1 = R_2 = r$ donc $P - P_0 = \frac{2\gamma}{r}$: on retrouve la loi de Laplace démontrée précédemment
- bulle de savon de rayon r : on a une interface air/eau suivie d'une deuxième interface eau/air, donc $P - P_0 = \frac{4\gamma}{r}$

Mûrissement d'Oswald

✍ ⏲

Utiliser le robinet à trois entrées avec une poire à pipeter à la sortie d'une. Créer deux bulles de rayons différentes sur les deux entrées restantes via la poire à pipeter puis connecter les deux bulles entre elles.

La surpression augmentent avec la diminution du rayon de la bulle par loi de Laplace, la petite bulle va alors se vider dans la grande bulle. C'est ce que l'on appelle le *mûrissement d'Oswald* : la taille des bulles augmente spontanément avec le temps pour compenser la surpression présente à l'intérieur.

Les secteurs agro-alimentaires ou encore agricoles doivent alors ralentir ce mûrissement présent dans leurs mousses (air dans liquide) ou leurs émulsions (liquide dans liquide non miscible).

Attention : Cette manip est très pénible à faire correctement car la création des bulles peut polluer l'intérieur des tubes reliant les différentes entrées du robinet avec le liquide à bulles : il ne faut donc pas s'y attarder si elle ne fonctionne pas.

2.2 Ondes gravito-capillaires

✍ Poly de P. Lidon p12 + Guyon, Heulin, Petit

On détaille les calculs, mais à l'oral on peut se contenter de citer les étapes de calcul et les hypothèses.

2.2.1 Expression du potentiel des vitesses

On considère la propagation à 1 dimension d'ondes à la surface d'un fluide. La hauteur au repos du fluide est notée h et on note $\xi(x,t)$ la variation de hauteur en x à l'instant t. On fait les hypothèses suivantes :

- fluide parfait et incompressible
- fluide irrotationnel au repos et le reste à tout instant t, *i.e.* la perturbation ne crée pas de vorticité.
  On peut donc écrire $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi$ avec Φ qui vérifie l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$.
- l'onde est de faible amplitude donc le champ de vitesse est un terme d'ordre 1

On cherche une solution sous la forme d'onde propagative $\Phi(x,y,t) = \varphi(u = x_c t)\psi(y)$ à l'équation de Laplace. Ainsi,

$$0 = \delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2}\psi + \varphi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} \tag{10.10}$$

Par séparation des variables, on obtient donc

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2} = -k^2 = \frac{-1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} \tag{10.11}$$

Le potentiel des vitesse Φ doit également satisfaire deux conditions limites :

- la composante normale de la vitesse au fond du liquide est nulle
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$
- la composante normale de la vitesse à la surface du liquide est égale à la composante normale de la vitesse de l'interface (en supposant la normale de l'interface proche de la verticale, *i.e.* des petits angles)
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = v_{\mathrm{interf},y}(h+\xi) = \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

On obtient alors l'expression de Φ :

$$\Phi(x,y,t) = Ae^{ik(x_c t)}\cosh(ky) \tag{10.12}$$

2.2.2 Relation de dispersion

On veut maintenant obtenir la relation de dispersion. Pour cela, on utilise deux relations :

• la relation de Bernoulli

On néglige le terme convectif devant la dérivée temporelle dans l'équation d'Euler ($\Longleftrightarrow$ longueur d'onde $\gg \xi$). On a alors un fluide parfait, incompressible et irrotationnel donc on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gy = \text{constante} \iff \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{10.13}$$

• la loi de Laplace

À la surface du liquide, on obtient en faisant attention au signe et on considérant qu'on a un rayon de courbure infini dans le plan yz :

$$P(x,h+\xi,t) - P_0 = -\frac{\gamma}{R} = -\gamma\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{-1} \tag{10.14}$$

En combinant ces deux relations, on obtient à la surface du liquide :

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=h+\xi} = 0 \tag{10.15}$$

On en déduit enfin la relation de dispersion

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right)\tanh(kh) \tag{10.16}$$

2.2.3 Discussion de la relation de dispersion

On se place dans le **régime d'eau profonde**, *i.e.* dans le cas où h est bien plus grand que toutes les autres longueurs caractéristiques du système, ce qui permet d'avoir $\tanh(kh) \simeq 1$. La relation de dispersion simplifiée permet ainsi d'obtenir la vitesse de phase de l'onde

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right)} \tag{10.17}$$

On note l'apparition d'une nouvelle longueur caractéristique, la **longueur capillaire**, donnée par $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Pour l'eau, elle vaut environ 3 mm.

On distingue alors deux régimes :

- le régime gravitationnel : $k \ll \frac{1}{l_c}$, les termes capillaires sont négligés et $c \propto \sqrt{\frac{1}{k}}$
- le régime capillaire : $k \gg \frac{1}{l_c}$, la gravité est négligée et $c \propto \sqrt{k}$

On constate également l'existence d'une vitesse minimale $c_{\min}$ pour une longueur d'onde $\lambda_{\min} = 2\pi l_c$. Pour l'eau, $c_{\min} = 23$ cm/s.

Remarque

On peut revenir sur l'expression du rayon critique pour que le trombone flotte et qui a la même expression que la longueur capillaire, et donc le même ordre de grandeur, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il s'agit d'une compétition entre gravité et tension de surface.

2.2.4 Expérience

Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires

✍ ⏲ 5 min

Observer la propagation des ondes capillaires avec une cuve à ondes. Un pot vibrant excite un vibreur qui crée des ondes. Régler le stroboscope pour observer tout le temps le même profil, et mesurer la longueur d'onde directement sur l'écran de projection (attention au facteur de conversion).

Faire quelques points en préparation, le dernier en direct, et tracer $c^2 =\propto 1/\lambda$ ainsi que $c^2 = \frac{g}{k}\left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right)$. Remonter à l_c.

3 Interfaces triples

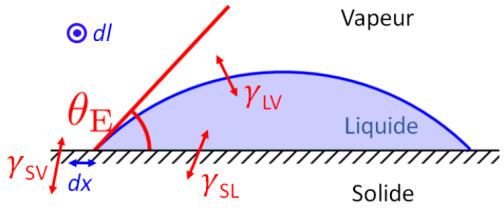
✍ avec les forces : Lidon p.17

✍ avec l'énergie : de Gènes p.24.

On va maintenant considérer un cas classique : l'interface triple. Il s'agit d'une interface entre un liquide, un solide et un gaz, comme par exemple le cas d'une goutte d'eau sur une table dans l'atmosphère de la pièce.

3.1 Positionnement du problème

On sait que la goutte d'eau, initialement sphérique, va s'étaler et finir par ressembler à un pâté. On caractérise cet étalement par un angle caractéristique de contact θ_E. Regardons comment on peut caractériser l'interface entre les trois phases, appelée **ligne triple**. On introduit pour cela les tension de surface γ_{LV}, γ_{SV} et γ_{SL}.



3.2 Mouillage et loi de Young-Dupré

Mouillage : il s'agit de l'étude d'un étalement de liquide sur un substrat (liquide ou solide) dans un environnement gazeux. On a donc trois phases qui rentrent en jeu, en compétition, donc trois interfaces, donc trois tensions de surface

Pour caractériser l'efficacité d'un mouillage on regarde l'angle entre la bulle et le solide. En fonction de sa valeur, on parle de solide mouillant ou déperlant.

Une façon de caractériser cela est de comparer l'énergie de l'interface solide-liquide à l'interface solide-vapeur à l'aide du paramètre d'étallement S :

$$S = E_{sec} - E_{mouille} = \gamma_{SV} - (\gamma_{SL} + \gamma_{LV}) \tag{10.18}$$

L'étalement de la goutte d'une distance dx dans le plan du schéma et d'une distance dl dans le plan orthogonal au schéma introduit une variation de surface différente pour chaque interface. Regardons cela suivant la direction x.

- Pour l'interface solide-liquide, dA = dxdl (la surface de contact entre le solide et le liquide augmente quand la goutte s'étale).
- Pour l'interface solide-vapeur, dA = -dxdl (la surface de contact entre le solide et le gaz diminue quand la goutte s'étale).
- Pour l'interface liquide-vapeur, dA = cos(θ_E) dxdl (la surface de contact entre le liquide et le gaz augmente quand la goutte s'étale).

D'un point de vue énergétique, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E &= \gamma_{SL}\mathrm{d}x\mathrm{d}l - \gamma_{SV}\mathrm{d}x\mathrm{d}l + \gamma_{LV}\cos(\theta_E)\mathrm{d}x\mathrm{d}l \\ &= 0 \qquad \text{à l'équilibre} \end{aligned}$$

On en déduit la loi de Young Duprès :

$$\cos\theta_E = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma_{LV}} \tag{10.19}$$

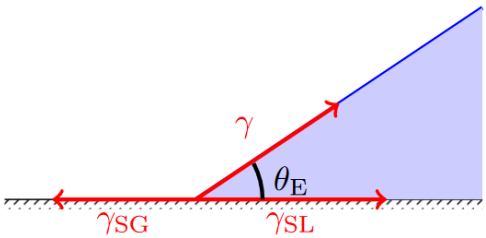
On peut alors distinguer deux cas :

- si $\gamma_{SV} > \gamma_{SL}$, $\theta_E < \frac{\pi}{2}$: le liquide est qualifié de mouillant, c'est-à-dire qu'il va avoir tendance à bien s'étaler. C'est le cas de la majorité des liquides de la vie courante.
- si $\gamma_{SV} < \gamma_{SL}$, $\theta_E > \frac{\pi}{2}$: le liquide est qualifié de non mouillant, c'est-à-dire qu'il va avoir tendance à ne pas s'étaler. C'est le cas du mercure.

La loi de Young-Dupré est une loi hypothétique, car elle considère que les surfaces sont idéales ce qui n'est jamais le cas en réalité à cause des défauts. De plus, l'angle de contact n'est pas le même si on regarde une augmentation ou une diminution de la surface de la goutte à cause de l'ancrage de la ligne triple sur les défauts : cette hystérisis complique d'autant plus la mesure.

Version en forces

✍ Lidon p.18



Écrivons l'équilibre des forces (projeté sur l'axe horizontal) qui s'écercent sur la ligne triple de longueur l :

$$\gamma_{SL} l + \gamma_{LV} l \cos\theta_E - \gamma_{SV} l = 0 \tag{10.20}$$

Et on retrouve ainsi la loi de Young-Dupré. Notons qu'il y a un problème en projetant sur l'axe vertical : il doit y avoir une force qui compense la traction de la goutte vers le haut. En fait le solide se déforme légèrement jusqu'à ce que le rappel élastique compense le traction de la goutte. La déformation est évidemment minuscule vu que le module d'Young est fat devant la tension de surface (oui je viens de comparer une tension de surface et un module d'Young, tu vas faire quoi ?).

En mesurant l'angle de contact et en connaissant deux des trois tensions de surface, il est théoriquement possible de remonter à la dernière tension de surface inconnue avec la loi de Young-Dupré. Cependant, les difficultés expérimentales nous poussent à considérer un autre système pour mesurer les tensions de surface, à savoir un capillaire plongé dans un liquide

3.3 Ascension capillaire et loi de Jurin

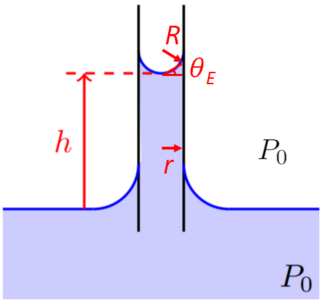


FIGURE 10.3 – Le fluide monte dans le capillaire de rayon r d'une hauteur r. On note R les rayons de courbure pour l'interface liquide-vapeur. Le fluide est en équilibre avec un fluide de température T_0 et P_0 constantes.

On considère le système présenté ci-dessus. Lorsqu'un capillaire de rayon r plonge dans un liquide, celui-ci monte dans le capillaire jusqu'à une certaine hauteur h. Essayons d'utiliser cette propriété pour mesurer la tension de surface γ_{LV} . On suppose que le liquide dans le capillaire est en contact avec un deuxième fluide qui se comporte comme un thermostat à la température T_0 et un pressiostat à la pression P_0. On suppose également que l'équilibre thermique est réalisé, et que les effets du ménisque sont négligeables. Cette dernière approximation valable si la hauteur de montée h est grande devant la hauteur du ménisque : c'est généralement le cas car le ménisque se situe à proximité de la paroi et décroît exponentiellement avec la distance.

Les rayons de courbure à l'interface sont ici les mêmes puisque le problème est invariant par rotation autour de l'axe du capillaire et sont négatifs d'après notre précédente convention. Effectuons un bilan de pressions.

- Pression hydrostatique : $P = P_0 - \rho g h$ (on néglige le ménisque)
- Laplace : $P = P_0 - \dfrac{2\gamma_{LV}}{R} = P_0 - \dfrac{2\gamma_{LV}\cos\theta_E}{r}$

Par identification on trouve la **loi de Jurin** :

$$h = \frac{2\gamma_{LV}\cos\theta_E}{\rho g r} \tag{10.21}$$

Démonstration thermodynamique

On considère le système en s'intéressant à une variation de hauteur dh.

$$\mathrm{d}G^* = (T - T_0)\mathrm{d}S - (P - P_0)\mathrm{d}V + \gamma \mathrm{d}A \tag{10.22}$$

Puisque l'on est à l'équilibre thermique, le premier terme s'annule. En ce qui concerne l'interface, elle n'est pas impactée par la variation de hauteur dh. La variation de pression ne fait donc intervenir que l'hydrostatique tel que $P - P_0 = \rho g h$. Enfin, la variation d'énergie due à la tension de surface ne se fait qu'entre les phases solide-liquide (augmentation de la surface d'un facteur $2\pi r\mathrm{d}h$) et solide-vapeur (diminution de la surface d'un facteur $2\pi r\mathrm{d}h$). On a donc :

$$\mathrm{d}G^* = -\rho g h \pi r^2 \mathrm{d}h + (\gamma_{SV} - \gamma_{SL})2\pi r \mathrm{d}h = 0 \tag{10.23}$$

Et en utilisant la loi de Young-Duprès on retrouve bien Jurin.

C'est la loi de Jurin qui est notamment responsable de la montée des sèves dans les petites plantes.

La loi de Jurin est une autre méthode pour mesurer γ_{LV}. Cependant, elle comporte elle aussi plusieurs approximations. Premièrement, on suppose souvent que le ménisque n'existe pas, c'est une première erreur systématique.

De plus, l'hystérésis due à l'accroche du liquide sur les défauts du capillaire implique qu'il faut faire les mesures en descente du ménisque pour que la pesanteur aide la ligne triple à se décrocher des défauts.

Loi de Jurin

✍ 🕒 2mn

Plonger des capillaires connus dans de l'éthanol coloré et mesurer la hauteur pour vérifier la loi de Jurin.

$\rho_{eth} = 789\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

3.4 Imprégnation capillaire et loi de Washburn

✍ Lidon p.23

✍ de Gènes p.118

Washburn : On montre qu'un front d'eau dans un tube capillaire est tel que $x(t) \propto \sqrt{(t)}$.

Deux plaques séparées de e, dirigée selon l'horizontale e_z, verticale e_x, gravité négligée. On suppose que l'on est en régime établi [1] et que le nombre de Reynolds est petit (pas très restrictif car on est très confiné, R petit). On écrit les équations de Navier-Stokes, avec $\overrightarrow{v} = v(x)\overrightarrow{e_z}$:

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{10.24}$$

Or v ne dépend pas de z, et le gradient de pression vaut $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{P(h(t)) - P(0)}{h(t)} = -\dfrac{2\gamma\cos\theta}{eh(t)} < 0$.

Le fluide est bien entrainé dans le tube. Le fluide est visqueux, donc $v(\pm\frac{e}{2}) = 0$ donc on peut intégrer Navier-Stokes, et $v(x) = \dfrac{\gamma\cos\theta}{\eta e h(t)}((\frac{e}{2})^2 - x^2)$. On peut calculer le débit volumique

$$Q = w\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} v(x)dx = \frac{we^2\gamma\cos\theta}{6\eta h} = \dot{h}ew \tag{10.25}$$

Ainsi $\dot{h} = \dfrac{e\gamma\cos\theta}{6\eta h}$ en intégrant avec h(0)=0, on obtient :

$$h^2(t) = \frac{e\gamma\cos\theta}{3\eta}t \tag{10.26}$$

On a donc une hauteur qui augmente rapidement au début puis ralentit, ce qui est conforme à ce que l'on connaît, comme une tache d'huile sur un tissu.

La tension superficielle peut donc être motrice, elle peut aussi déstabiliser une interface

1. Voir ✍ Lidon, on néglige le terme de dérivée temporelle devant le terme de viscosité, *i.e.* échelle de temps grande devant le temps de diffusion $\frac{e}{2}$, c'est la même approximation que dans le cas de la lubrification

4 Interfaces instables

4.1 Nucléation homogène

✍ poly de P. Lidon, p10

Dans de nombreux cas de transitions de phase, l'existence d'états métastables permet d'observer un retard à la transition. On parle par exemple de surfusion lorsque du champagne refroidi sous 0°C se solidifie instantanément quand on le verse dans un verre. Dans de nombreux cas, c'est la tension de surface qui est responsable de l'existence de ces phases métastables et donc de ce retard à la transition.

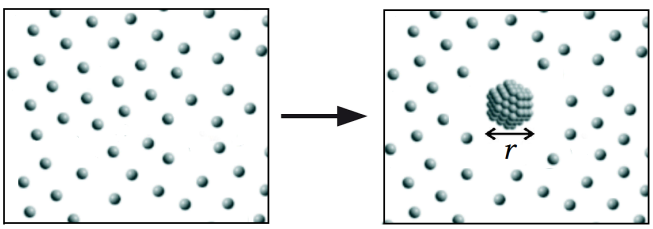
Nous allons étudier ici le phénomène de nucléation, qui correspond à la croissance d'un germe provoquée par la perturbation d'un milieu métastable. C'est sur ce principe que fonctionnent les chambres à brouillard : du gaz est refroidi à pression constante sous sa température de liquéfaction, on dit qu'il est rendu métastable en état de surcondensation. Le passage d'une particule chargée suffit alors à amorcer la condensation d'un petit volume de gaz autour d'elle. On appelle **nucléation** la propagation de cette "onde" de condensation à un volume macroscopique de gaz, la trajectoire de la particule est alors rendue visible par la trainée de gouttes qui se forment dans son sillage. Ce principe a permis des avancées notables en physique des particules et il a valu le prix Nobel de 1927 à son inventeur, le physicien écossais Charles Wilson.

4.1.1 Évolution du germe de liquide

Considérons un gaz homogène. On s'intéresse au processus de nucléation homogène, *i.e.* la nucléation peut avoir lieu n'importe où avec la même probabilité, et pour cela on étudie la formation d'un germe sphérique de liquide de rayon r. La formation de ce gène provoque une variation d'énergie composée de 2 termes :

- un terme volumique, qui traduit la différence d'énergie de cohésion entre le liquide et le gaz, et qui sera favorable à la nucléation si l'on se place dans le domaine de stabilité du liquide
- un terme surfacique, qui traduit le coût de création d'une interface, toujours défavorable

On voit dès lors que l'énergie ne sera abaissée que si l'on se trouve dans le domaine de stabilité du liquide et si le germe est suffisamment gros, de façon à ce que le terme de volumique domine le terme surfacique.



On considère le gaz comme étant un thermostat T_0, un pressiostat P_0 ainsi qu'un réservoir de particules (de potentiel chimique μ_g). **Le système considéré est donc ouvert.** Le potentiel adapté à cette étude est alors le grand potentiel :

$$\Omega^* = U + P_0 V - T_0 S - \mu_g N \tag{10.27}$$

avec N le nombre de molécules dans le germe, U son énergie interne, V son volume et S son entropie. On ne va pas seulement s'intéresser au sens d'évolution du système mais également à la barrière énergétique à franchir pour

provoquer la transition. On ne va donc pas calculer $\mathrm{d}\Omega^*$ mais plutôt la variation $\Delta\Omega^*$ entre un état sans germe ($r = 0$) et un état où le germe a un rayon r :

$$\begin{aligned}\Delta\Omega^* &= \Delta U + P_0\Delta V - T_0\Delta S - \mu_g\Delta N \\ &= (T - T_0)\Delta S + (\mu_l - \mu_g)\Delta N - (P - P_0)\Delta V + \gamma\Delta A \\ &= (T - T_0)\Delta S + [\rho(\mu_l(r) - \mu_g) + (P_0 - P(r))]\,\frac{4}{3}\pi r^3 + \gamma 4\pi r^2\end{aligned} \tag{10.28}$$

avec ρ la densité **particulaire** du liquide, μ_l son potentiel chimique, P sa pression et T sa température.

Considérons que les équilibres thermiques et mécaniques s'établissent rapidement par rapport à l'équilibre osmotique. On a alors $T = T_0$ et $P = P_0 + \dfrac{2\gamma}{r}$.

Considérons également le cas de fluides simples pour lesquels pression et température imposent le potentiel chimique : on a alors $\mu_g(T_0, P_0)$ pour le gaz et $\mu_l\left(T = T_0, P = P_0 + \dfrac{2\gamma}{r}\right)$ pour le liquide. On s'intéresse au cas de germes assez grands pour développer μ_l à l'ordre 1 autour de P_0 :

$$\mu_l(T, P) = \mu_l\left(T_0, P_0 + \frac{2\gamma}{r}\right) \simeq \mu_l(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{r}\left.\frac{\partial\mu_l}{\partial P}\right|_T = \mu_l(T_0, P_0) + \frac{2\gamma}{\rho r} \tag{10.29}$$

Développement à l'ordre 2

Si on pousse le développement à l'ordre 2, on fait apparaître un terme en $-\dfrac{4\gamma^2}{r^2}\dfrac{\chi_T}{\rho}$ avec $\chi_T \simeq 4 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$ est la compressibilité isotherme du liquide.

on peut donc négliger ce terme tant que $r \gg 2\gamma\chi_T$ ($= 3 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ pour l'eau), ce qui est légitime (en plus, la thermodynamique n'est plus valable bien avant d'atteindre de si petites échelles).

On obtient donc

$$\Delta\Omega^* = \rho\,[\mu_l(T_0, P_0) - \mu_g(T_0, P_0)]\,\frac{4}{3}\pi r^3 + \gamma 4\pi r^2 \tag{10.30}$$

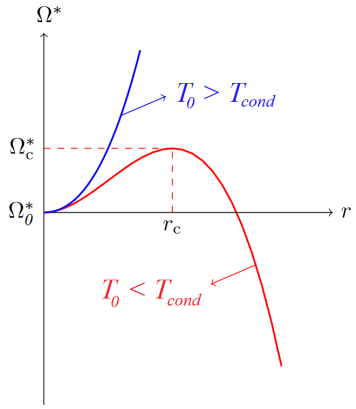


FIGURE 10.4 – $\Delta\Omega^*$ en fonction de r

On distingue deux cas :

- $\mu_l(T_0, P_0) > \mu_g(T_0, P_0)$: $\Delta\Omega^*$ est une fonction strictement croissante de r donc le germe s'évapore peu importe son rayon
- $\mu_l(T_0, P_0) < \mu_g(T_0, P_0)$: $\Delta\Omega^*$ passe par un maximum en r_c. On a alors

$$r_c = \frac{2\gamma}{\rho\,[\mu_l(T_0, P_0) - \mu_g(T_0, P_0)]}$$

$$\Delta\Omega^*_c = \Delta\Omega^*(r_c) = \frac{16\pi\gamma^3}{3\rho^2\,[\mu_l(T_0, P_0) - \mu_g(T_0, P_0)]^2}$$

Si $r < r_c$, $\Delta\Omega^*$ croît avec r donc le germe s'évapore. Si $r > r_c$, $\Delta\Omega^*$ décroît avec r donc le germe grandit.

4.1.2 Estimation du rayon critique et de la barrière énergétique

On suppose que la pression P_0 du gaz est proche de la pression de vapeur saturante $P_s(T_0)$ de façon à développer le potentiel chimique autour de celle-ci en sachant que $\left.\frac{\partial \mu}{\partial P}\right|_T = \frac{1}{\rho}$:

$$\begin{cases} \mu_l(T_0, P_0) \simeq \mu_l(T_0, P_s(T_0)) + \dfrac{1}{\rho}[P_0 - P_s(T_0)] \\ \mu_g(T_0, P_0) \simeq \mu_g(T_0, P_s(T_0)) + \dfrac{1}{\rho_{\text{gaz}}(T_0)}[P_0 - P_s(T_0)] \end{cases} \tag{10.31}$$

Or par définition de la pression de vapeur saturante, $\mu_l(T_0, P_s(T_0)) = \mu_g(T_0, P_s(T_0))$ et on peut considérer que $\rho \gg \rho_{\text{gaz}}$. On connaît ρ_{gaz} en supposant le gaz comme parfait, si bien qu'on a

$$\mu_l(T_0, P_0) - \mu_l(T_0, P_0) \simeq \frac{P_0 - P_s(T_0)}{P_s(T_0)} k_B T_0 \tag{10.32}$$

Finalement, on obtient

$$r_c = \frac{2\gamma}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)} \qquad \text{et} \qquad \Delta\Omega_c^* = \frac{16\pi\gamma^3}{3} \left[\frac{1}{\rho k_B T_0} \frac{P_s(T_0)}{P_0 - P_s(T_0)}\right]^2 \tag{10.33}$$

Application numérique : Pour de l'eau à une pression supérieure de 1% à $P_s(100°\text{ C})$, avec $\gamma = 59$ mN/m et $\rho = \rho_{\text{massique}} \mathcal{N}_A / M = 3.2 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$ à cette température, on obtient $r_c \simeq 7 \times 10^{-8}$ m et $\Delta\Omega_c^* \simeq 10^{-15}$ J.

4.2 Instabilité de Rayleigh-Plateau

✍ De Gennes p.108 + Poly de P. Lidon p.34

En résumé : on a un cylindre de rayon R et de longueur L que l'on perturbe : dans le plan de l'axe, la courbure des parties se rapprochant de celui-ci diminue mais elle augmente dans le plan de coupe (on ne fait pas le calcul exact ici mais c'est faisable) et il peut y avoir déstabilisation. On considère alors N gouttes de rayon r.

La conservation du volume donne $\pi R^2 L = N \frac{4}{3}\pi r^3$ donc $N = \frac{3R^2 L}{4r^3}$.

Le rapport des surfaces vaut $\frac{S_N}{S_0} = \frac{N 4\pi r^2}{2\pi R L} = \frac{3R}{2r}$.

Ainsi, il y a déstabilisation si $r > \frac{3R}{2}$. On part d'un fin filet d'eau et on forme des gouttes de taille typique 3R/2. C'est ce qu'on observe après un robinet.

Dans ce cas la tension de surface déstabilise l'interface, il y a aussi des cas où elle le stabilise, c'est le cas pour les ondes gravito-capillaires.

4.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor

✍ `Rayleigh-Taylor.pdf`

Conclusion

La création d'une interface n'est pas neutre du point de vue énergétique, et la minimisation de l'énergie de surface permet de traduire l'équilibre entre deux fluides en contact l'un avec l'autre => agro-alimentaire et cosmétique, mousses et des émulsions.

LP 11

Gaz réels, gaz parfait

Commentaires du jury

- **2017 :** Les corrections apportées au modèle du gaz parfait doivent s'appuyer sur des analyses physiques et pas seulement sur des développements calculatoires. La leçon ne peut pas se limiter aux modèles du gaz parfait et du gaz de van der Waals. L'utilisation d'un diagramme enthalpique permet notamment de voir les limites des modèles.
- **2015 :** Les discussions d'ordres de grandeurs sont importantes et l'appui sur des diagrammes thermodynamiques recommandé. La distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann est trop souvent méconnue.
- **2014 :** Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de collision à l'échelle moléculaire et prendre du recul vis-àvis du modèle des sphères dures. Le calcul de la pression cinétique doit être fait avec soin. Il faut préciser à quel moment intervient la moyenne statistique des grandeurs microscopiques. Les limites du modèle du gaz parfait et le cas des gaz réels doivent occuper une partie significative de la durée de la leçon.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique*, **BFR** ⟶ Bonne base
- ✍ *Thermodynamique*, **Pérez** ⟶ Compléments
- ✍ *Thermodynamique*, **Diu** ⟶ Compléments
- ✍ *Physique statistique (PS)*, **Diu** ⟶ Limites du GP
- ✍ *Cap Prépa Physique MPSI-PCSI* ⟶ Courbes et une autre approche

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Énergie interne, enthalpie, capacité thermique
- ➢ Théorème de l'équipartition d'énergie

Expériences

- ☕ tire sur mon doigt

1 Modèle du gaz parfait . . . 143
1.1 Hypothèses du gaz parfait . . . 143
1.2 Distribution des vitesses et température cinétique . . . 143
1.3 Pression cinétique . . . 145
1.4 Équation d'état du gaz parfait monoatomique . . . 146
1.5 Gaz diatomiques . . . 146
2 Limites . . . 147
2.1 Limites des hypothèses . . . 147
2.2 Limites quantiques . . . 150
2.3 Détende de Joule-Thomson . . . 150
3 Modèles de gaz réels . . . 151
3.1 Diagramme d'Amagat . . . 151
3.2 Développement du Viriel . . . 152
3.3 Van der Waals . . . 152
3.4 Retour sur Joule-Thomson . . . 153

Introduction

Historiquement, la thermodynamique s'est développée autour des machines thermiques, notamment à vapeur. Celles-ci fonctionnent grâce aux propriétés thermodynamiques des gaz et il est donc important de pouvoir décrire le comportement de ceux-ci dans différents domaines de pression et de température.

Un gaz peut être vu comme une collection de molécules à grande distance les unes des autres et qui ont une très faible énergie de cohésion entre elles. L'état physique d'un gaz est décrit par ses variables d'état qui sont la température T, la pression P et le volume V. Ces trois paramètres ne sont pas indépendants et sont reliés par l'équation d'état :

$$f(T, P, V) = 0 \tag{11.1}$$

On va étudier ici les équations d'état régissant le comportement de gaz pur. On va donc s'intéresser à plusieurs modèles pour décrire les gaz réels, modèles qui sont plus ou moins fidèles à la réalité dans des conditions données.

Dans un premier temps, on va étudier le modèle du gaz parfait, puis ses limites, et ensuite discuter d'une autre équation d'état pour se rapprocher du comportement des gaz réels : celle de Van der Waals.

1 Modèle du gaz parfait

1.1 Hypothèses du gaz parfait

✍ Pérez p25-26 + BFR p77

On considère un gaz comme étant parfait s'il satisfait les hypothèses suivantes :

- les particules de gaz sont ponctuelles, *i.e.* leur taille caractéristique est négligeable devant leur libre parcours moyen.
- elles ne sont pas relativistes
- elles n'interagissent entre elles ou avec une paroi que par l'intermédiaire de chocs, *i.e.* d'interaction entre les particules doit être négligeable devant leur énergie cinétique.
- elles ne subissent pas d'effets quantiques

On suppose également que la densité particulaire n est uniforme en l'absence de champ extérieur ($n \simeq N/V \simeq 10^{23}/10^{-2} \simeq 10^{25}\mathrm{m}^{-3}$) et que les vitesses des particules sont isotropes et indépendantes ("chaos moléculaire"), *i.e.* les lois de probabilités sont identiques pour les 3 composantes de la vitesse (seule la norme est importante). **Ces 2 hypothèses ne décrivent pas spécialement un gaz parfait** mais elles seront utiles d'un point de vue statistique.

1.2 Distribution des vitesses et température cinétique

✍ *Physique statistique*, **Diu**, III.C p350

Considérons un système composé de N particules, chacunes ayant une position $\overrightarrow{r_i}$ et une vitesse $\overrightarrow{v_i}$.

Le système a pour énergie totale

$$\mathcal{E}(\{\overrightarrow{r_i}\}, \{\overrightarrow{v_i}\}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_i}^2 + U(\{\overrightarrow{r_i}\}) \simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \overrightarrow{v_i}^2$$

avec $U(\{\overrightarrow{r_i}\})$ l'énergie d'interaction des molécules entre elles et éventuellement avec un champ extérieur.

La probabilité pour que les particules aient des vitesses $\overrightarrow{v_i}$ à d^3v_i près est donnée par la distribution canonique et vaut

$$\mathrm{d}^{6N}P(\{\overrightarrow{v_i}\}) = A\exp\left[-\beta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\overrightarrow{v_i}^2 + U(\{\overrightarrow{r_i}\})\right)\right]\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}^3r_i\mathrm{d}^3v_i$$

avec $\beta = \dfrac{1}{k_BT}$ et A une constante de normalisation.

On intègre sur toutes les positions pour avoir

$$\mathrm{d}^{3N}P(\{\overrightarrow{v_i}\}) = B\exp\left[-\beta\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\overrightarrow{v_i}^2\right]\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}^3v_i$$

On intègre de nouveau cette probabilité sur les vitesses de toutes les particules sauf une particule en particulier pour trouver que la probabilité que cette particule ait la vitesse $\overrightarrow{v}$ à d^3v près est donnée par :

$$\mathrm{d}^3P(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\overrightarrow{v}^2}{2k_BT}\right)\mathrm{d}^3v$$

Le nombre moyen de particules ayant la vitesse $\overrightarrow{v}$ à d^3v près est alors donné par

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3N(\overrightarrow{v}) = N\mathrm{d}^3P(\overrightarrow{v}) &= N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m\overrightarrow{v}^2}{2k_BT}\right)\mathrm{d}^3v\\ &= N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2k_BT}\right]\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\end{aligned}$$

Cette formule représente la **distribution de Maxwell des vitesses**. Elle est valable pour les gaz et les liquides **classiques** à condition qu'**il n'y ait pas d'intercations dépendant des vitesses**.

On peut déduire de cette formule le nombre de particules dont la composante de la vitesse selon x vaut v_x à $\mathrm{d}v_x$ près :

$$\mathrm{d}N(v_x) = N\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}\exp\left[-\frac{mv_x^2}{2k_BT}\right]\mathrm{d}v_x$$

Il s'agit d'une gaussienne centrée en $v_x = 0$, de valeur moyenne $< v_x >= 0$ et d'écart-type $\sigma_{v_x} = \sqrt{< v_x^2 >} = \sqrt{\dfrac{k_BT}{m}}$.

Remarque

On a $\dfrac{1}{2}m < v_x^2 >= \dfrac{1}{2}k_BT$: on retrouve le théorème d'équipartition de l'énergie !

L'hypothèse d'indépendance des composantes de la vitesse impose que $< v^2 >=< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >$ tandis que l'hypothèse d'isotropie impose que $< v_x^2 >=< v_y^2 >=< v_z^2 >$. On en déduit que la vitesse quadratique moyenne des particules vaut

$$v_q = \sqrt{< v^2 >} = \sqrt{< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >} = \sqrt{3 < v_x^2 >}$$

La vitesse quadratique moyenne des particules dans un gaz parfait a donc pour expression

$$v_q = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

À partir de cette expression, on peut définir la **température cinétique** $T_{\mathrm{cin}} = \dfrac{mv_q^2}{3k_B}$.

Ordres de grandeur

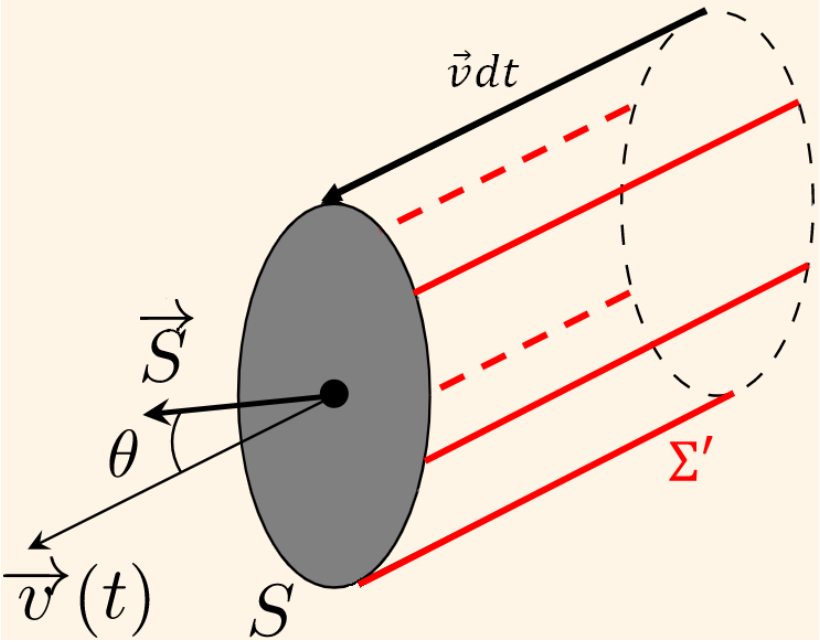
Dans les conditions normales de pression et de température (CNTP), on a :

- pour H_2, $v_q = 1934$ m/s
- pour He, $v_q = 1368$ m/s
- pour O_2, $v_q = 484$ m/s
- pour CO_2, $v_q = 412$ m/s

1.3 Pression cinétique

✍ *Physique statistique*, **Diu**, III.C p358 + BFR p88 + Sanz p651

On note V le volume qui contient le gaz de N particules. On considère une paroi rigide placée dans le gaz. De par l'agitation thermique, les particules de gaz entrent en collision avec cette paroi. On appelle **pression cinétique** la pression crée par ces collisions.



Regardons la pression subie par un élément de surface dS de la paroi. Afin d'atteindre cet élément de surface, les particules doivent être dans le cylindre de volume $\mathrm{d}\vec{S} = v_q \mathrm{d}t\mathrm{d}S$. Seulement 1/6 des particules vont en direction de la paroi (isotropie). La quantité de particules arrivant sur dS est donc $\frac{1}{6}\frac{N}{V} \times v_q \mathrm{d}t\mathrm{d}S$. Cependant, il s'agit des particules arrivant sur un côté de la paroi, il faut donc doubler ce nombre pour tenir compte des particules arrivant sur l'autre côté de la paroi.

La quantité de mouvement qu'elles transmettent vaut donc

$$\mathrm{d}^3 p = \frac{1}{3}\frac{N}{V} v_q \mathrm{d}t\mathrm{d}S \times m v_q$$

La pression cinétique vaut alors

$$P_{\text{cin}} = \frac{\mathrm{d}^3 p}{\mathrm{d}t\mathrm{d}S} = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m v_q^2$$

On trouve l'équation d'état des GP microscopiques en utilisant l'expression de v_q :

$$P_{\text{cin}} V = N k_B T$$

Une formulation, bien plus connue, de cette équation à l'échelle macroscopique donne

$$PV = n\mathcal{N}_A k_B T = nRT$$

1.4 Équation d'état du gaz parfait monoatomique

✍ BFR p90 + *Physique statistique*, **Diu**, I.A, III.B et C

Intéressons-nous à différentes fonctions d'états, et commençons par l'énergie interne. Puisque que les particules de gaz n'interagissent pas entre elles par hypothèse, l'énergie interne U du gaz s'exprime uniquement en fonction de son énergie cinétique, à savoir

$$U = N < \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{1}{2}Nm < v^2 >= \frac{3}{2}Nk_BT$$

On trouve donc que U est proportionnelle à T et on appelle **capacité calorifique à volume constant** C_V le coefficient de proportionnalité. Alors $U = C_V T$

Attention

C'est toujours vrai pour un GP, mais l'expression de C_V dépend des hypothèses que l'on fait.

Ainsi, pour un GP **monoatomique** composé de particules **ponctuelles**, $C_V = \frac{3}{2}Nk_B = \frac{3}{2}nR$

Passons maintenant à l'enthalpie $H = U + PV$. Pour le GP, on a donc

$$H = C_V T + nRT = C_P T$$

On trouve donc que H est également proportionnelle à T et on appelle **capacité calorifique à pression constant** C_P le coefficient de proportionnalité.

De plus, tout GP vérifie la **relation de Mayer** :

$$C_P - C_V = nR = Nk_B$$

On appelle coefficient adiabatique γ le rapport $\frac{C_P}{C_V}$.

Pour un GP **monoatomique** composé de particules **ponctuelles**, $C_P = \frac{5}{2}Nk_B = \frac{5}{2}nR$ et $\gamma = \frac{5}{3} \simeq 1.7$

Les gaz nobles Ar, Ne, ... sont de bons GP monoatomiques. Mais quid de O_2, N_2 et compagnie ?

1.5 Gaz diatomiques

✍ *Physique statistique*, **Diu**, I.A, III.B

La plupart des gaz de la vraie vie sont, de plus, diatomiques. Qu'est-ce que cela change à notre histoire ?

On considère désormais un gaz parfait composé de molécules diatomiques de longueur typique $a \sim 1$ Å et d'énergie typique de liaison $\varepsilon = 13.6$ eV, en ordre de grandeur. La liaison est modélisée par un ressort de raideur $k = \frac{\varepsilon}{a^2}$ et on appelle μ la masse réduite de la molécule.

On doit alors prendre en compte plusieurs nouveaux effets

- **Vibration :** Cette molécule a une énergie de vibration $\varepsilon_{vib} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$. On peut associer une température à cette énergie telle que : $\varepsilon_{vib} = k_B T_{vib}/2$, c'est-à-dire que pour $T > T_{vib}$, il faudra prendre en compte l'énergie de vibration de la molécule dans le calcul de l'énergie interne U et deux degrés de liberté en plus (r^2, $\dot{r}^2$, correspondant aux énergies potentielle et cinétique de vibration).
- **Rotation :** La molécule peut également avoir une énergie de rotation, évaluée par la mécanique quantique : $\varepsilon_{rot} = \hbar\omega_{rot}$. Pour évaluer ω_{rot}, on peut raisonner en ordre de grandeur via l'action : $\hbar = r.p = a \times \mu a \omega_{rot}$. On a donc :

  $\varepsilon_{rot} = \hbar^2/\mu a^2$. On peut également définir une température de rotation T_{rot} telle que : $T_{rot} = 2\varepsilon_{rot}/k_B = 2\hbar^2/k_B\mu a^2$, où pour $T > T_{rot}$, il faudra prendre en compte l'énergie de rotation de la molécule dans le calcul de l'énergie interne U et deux degrés de liberté en plus ($\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, correspondant aux énergies potentielle et cinétique de rotation).

On peut ainsi comprendre que la prise en compte de ces degrès de liberté va jouer sur la valeur de C_V pour le gaz parfait, suivant les domaines de température considérés.

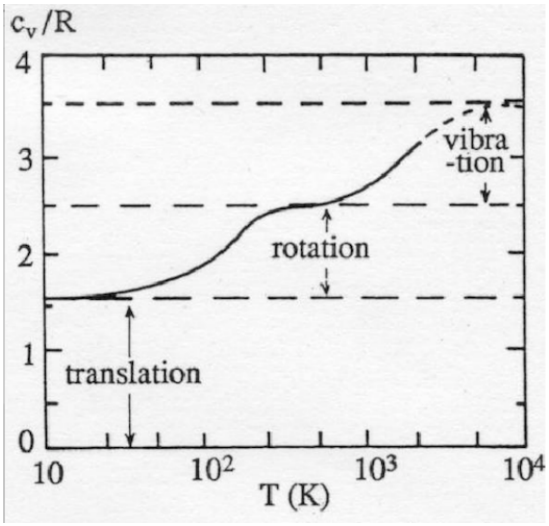


FIGURE 11.1 – Effet des degrès de liberté sur C_V pour H_2.

Cependant, cette notion en plus ne remet pas en cause le modèle du gaz parfait, puisque les équations d'état sont toujours vérifiées, mais elle étend les hypothèses à plus de gaz. Il existe pourtant des véritables limites au modèle du GP, où l'on ne pourra plus appliquer ce modèle de façon satisfaisante. Trois limites seront présentées dans la suite.

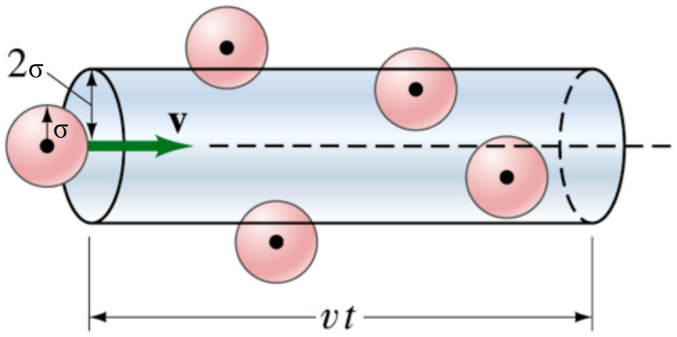
2 Limites

2.1 Limites des hypothèses

2.1.1 Particules ponctuelles

✍ BFR pp91-93, Sanz p805

Dans le modèle du gaz parfait, on fait l'hypothèse des molécules ponctuelles. Or ce n'est valable que tant que les collisions entre molécules restent un phénomène anecdotique. On définit le libre parcours moyen d'une molécule ℓ comme la distance moyenne qu'elle peut parcourir sans rencontrer une autre molécule du gaz.



$$\ell = \frac{1}{n^* \pi a^2} \tag{11.2}$$

où a est le diamètre des molécules.

Cette longueur doit être comparée à la distance typique entre molécules $\overline{d}$: plus le libre parcours moyen est grand, plus les chocs sont effectivement rares. Cela correspond donc a une densité faible. Si $\ell \gg \overline{d}$. Les collisions sont anecdotiques. ℓ est proportionnel à l'inverse de la densité, donc le modèle est vérifié à basse densité puisque la pression est proportionnelle à la densité, comme vu dans la première partie).

ODG

- Dans les CNTP (conditions normales de température et de pression), indépendamment du gaz considéré, pour $n^* = 10r^5m^3$ et $a = 1\,\text{Å}$, on a $\ell \simeq 3\,\mu\text{m}$ et $\overline{d} \simeq 5\,\text{nm}$. Donc l'hypothèse de particules ponctuelles est valide pour les gaz.
- Pour l'eau liquide : à faire, trop dense pour être un GP.

Cette hypothèse est facilement vérifiée pour la plupart des gaz. Qu'en est-il de l'hypothèse de particules sans interactions ?

↓

2.1.2 Limite de l'hypothèse particules sans interaction

✍ Diu PS, Complément I.A pp50-51

Dans le modèle du gaz parfait, on néglige les interactions entre molécules en dehors des collisions. Ces interactions sont de type Van der Waals et sont associées au potentiel suivant :

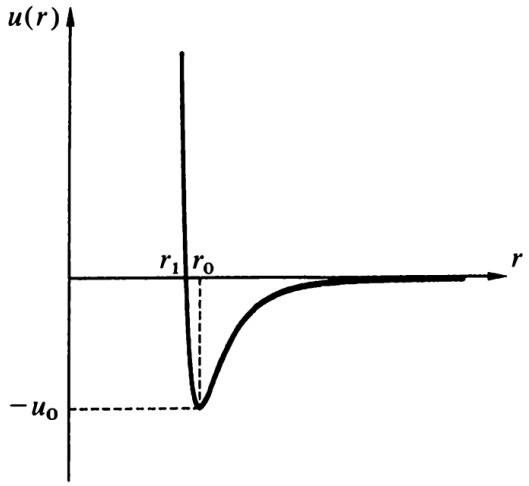


FIGURE 11.2 – Potentiel d'interaction typique entre deux molécules, en fonction de leur distance relative r. (Lennard-Jones)

Autour de chaque molécule du gaz, on peut alors définir une sphère d'interaction de rayon r_0 donc de volume $V_{int} = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ dans lequel le potentiel vaut $-u_0$. Il y a $\frac{N}{V} * V_{int}$ particules dans la sphère d'interaction d'une molécule, ce qui correspond à une énergie potentielle :

$$< E_{p,1} >= \frac{N}{V} * V_{int} \times (-u_0) \tag{11.3}$$

Donc, l'énergie potentielle pour tout le gaz est :

$$< E_{P,tot} >= N \times E_{p,1} = -\frac{N^2}{V} * V_{int} u_0 \tag{11.4}$$

On compare cette énergie avec l'énergie cinétique du gaz $< E_C > \approx N k_B T$:

$$\left| \frac{< E_C >}{< E_{P,tot} >} \right| = \frac{V k_B T}{N V_{int} u_0} \approx \frac{V k_B T}{N r_0^3 u_0} \tag{11.5}$$

Pour que l'hypothèse des particules sans interaction soit vérifiée, il faut donc :

$$\left| \frac{< E_C >}{< E_{P,tot} >} \right| \gg 1 \tag{11.6}$$

ODG : Il nous reste à préciser les paramètres du potentiel, u_0 et r_0. Puisque ce sont des paramètres du domaine atomique, on s'attend à trouver u_0 de l'ordre de l'eV, r_0 de l'ordre de l'Å. En fait, u_0, qui représente l'énergie d'interaction entre deux molécules chimiquement stables, est pour les gaz usuels beaucoup plus faible, et r_0 systématiquement plus grand : u_0 est de l'ordre de quelques centièmes d'eV seulement et r_0 vaut de 3 à 10 Å suivant la taille des molécules. Par exemple, r_0 vaut 3,9 Å pour l'argon, 4,2 Å pour l'azote et 4,8 Å pour le gaz carbonique ; les valeurs de u_0 correspondantes sont respectivement 10^{-2} eV (118 K), 8×10^{-3} eV (95 K) et $1,7 \times 10^{-2}$ eV (198 K).

Dans les CNTP $\left| \frac{< E_C >}{< E_{P,tot} >} \right| \approx 1500$.

Ainsi, à pression (ou densité) fixée, le gaz se comporte comme un GP à haute température. A température fixée, l'approximation est d'autant meilleure que le gaz est dilué. [1]

1. À noter que cette condition de particules sans interactions est la plus restrictive, en effet, en général, avant de devenir quantique ou de franchir la limite de densité en devenant liquide par exemple, le gaz commence par avoir des interactions non négligeables.

2.2 Limites quantiques

On a supposé les molécules ponctuelles et décrites par les lois de la mécanique du point classique. Or celle-ci n'est valide que lorsque la longueur d'onde thermique de de Broglie associée aux molécules de gaz, $\lambda_{DB} = \frac{\hbar}{\sqrt{3mk_BT}}$ est petite devant la distance typique qui sépare deux molécules du gaz, à savoir $\overline{d} = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$

ODG

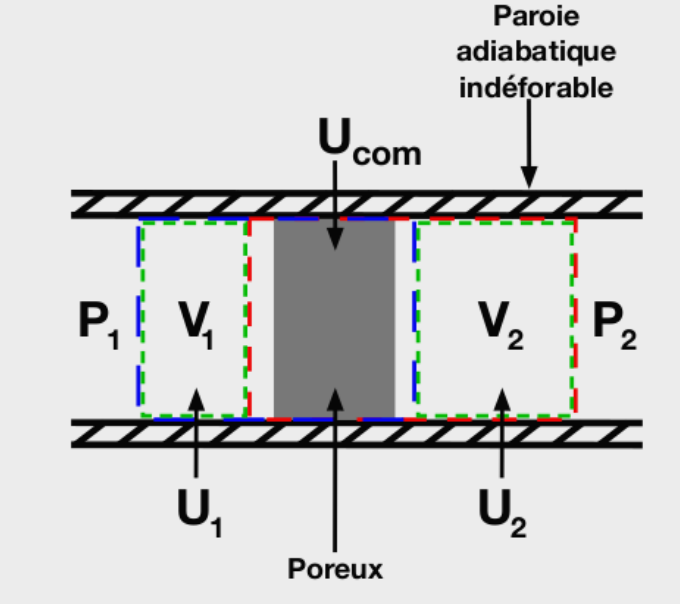
Pour H_2 à 300K, $\lambda_{DB} = 0.2$Å et $\overline{d} = 35$Å, H_2 est classique.
Pour un gaz d'électrons en revanche, $\lambda_{DB} = 12$Å et $\overline{d} = A$Å. Il est quantique !

On peut donc conclure que dans les CNTP, la plupart des gaz peuvent être considérés comme des gaz parfaits.

Cependant, ce n'est plus le cas pour de très basses températures, puisque λ est suffisamment grand pour être de l'ordre de d. C'est pour cela que les gaz froids sont autant étudiés : parce qu'ils ont un comportement quantique.

2.3 Détende de Joule-Thomson

La détente de Joule-THomson est un bon moyen de montrer le caractère non parfait d'un gaz.



On étudie l'écoulement lent d'un gaz dans un tube séparé en deux régions par un milieu poreux (coton, verre fritté). Partie de gauche : pression uniforme et égal à P_1. Partie de droite : pression uniforme et égale à P_2. $P_1 > P_2$ pour qu'il y ait écoulement de gauche à droite. Écoulement stationnaire et lent => on néglige l'énergie cinétique macroscopique du gaz.

On applique le 1er principe de la thermodynamique au système fermé S, à cheval sur le milieu poreux et s'étant déplacé de 1 à 2 entre l'instant initial et final :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q \tag{11.7}$$

La transformation est adiabatique donc Q = 0 et seules les forces de pression fluide travaillent :

$$W = W_1 + W_2 = P_1V_1 - P_2V_2 \tag{11.8}$$

Ainsi $U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2$

$$\Delta H = 0 \tag{11.9}$$

On définit alors le coefficient de Joule-Thomson :

$$\xi = \left.\frac{\partial T}{\partial P}\right|_H \tag{11.10}$$

Il mesure la variation de température que provoque une variation de pression lors d'une détente de Joule-Thomson.

Si on pose $\alpha = \frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P$, on a

$$\frac{V}{C_P}(\alpha T - 1) \tag{11.11}$$

En effet

$$\xi = \frac{\left.\frac{\partial H}{\partial P}\right|_T}{\left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P}$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P = C_P$$

$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial P}\right|_T = T\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_T + V$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_T = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_P \quad \text{(Maxwell)}$$

Pour le gaz parfait, $\alpha = \frac{1}{T}$, donc $\xi = 0$, la température reste constante. Pour des gaz réels, on observe une variation de température ! C'est une limite expérimentale directe du modèle du gaz parfait !

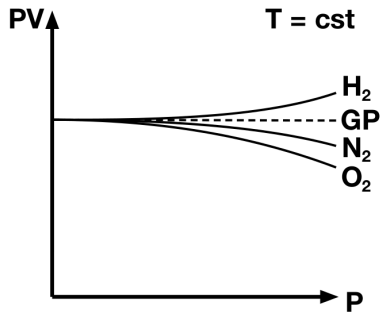
Nous venons de voir que le modèle du gaz parfait décrivait correctement les gaz dans des domaines de température et pression raisonnables mais ne permet pas de décrire tous les phénomènes. Il faut donc trouver un autre modèle.

↓

3 Modèles de gaz réels

3.1 Diagramme d'Amagat

Une manière de représenter la déviation entre le modèle des gaz parfaits et le comportement réel des gaz est le diagramme d'Amagat représentant l'évolution du produit PV en fonction de P :



Ce diagramme met bien en évidence que PV n'est pas constant à T fixé comme le prédit la loi des gaz parfaits.

Cependant on voit aussi que PV reste proche de la valeur prédite pour de faibles pressions, c'est à dire de faibles densités. On remarque tout de même que quand la pression tend vers 0 tous les gaz ont un comportement de gaz parfait. C'est à dire que pour des densités suffisamment faibles TOUS les gaz se comportent comme des gaz parfaits ce qui est remarquable.

La plupart des gaz que l'on rencontre se comportent en bonne approximation comme des gaz parfaits, pourvu que l'on reste dans des conditions de pression et de température raisonnables. Cependant si l'on veut augmenter la précision ou explorer des domaines de paramètres plus vastes, il faut faire appel à des formes d'équation d'état différentes : on parle alors d'équations d'états de gaz réels.

3.2 Développement du Viriel

Une façon systématique d'obtenir des corrections au modèle du gaz parfait est d'utiliser le développement du viriel, qui corrige l'équation d'état en puissances de la densité (N/V), ce qu'on attend d'un formalisme qui décrit les gaz condensés. Il s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{P}{k_B T} = \frac{N}{V} + B_2(T)\left(\frac{N}{V}\right)^2 + B_3(T)\left(\frac{N}{V}\right)^3 + ... \tag{11.12}$$

Il permet, au prix de calculs un peu lourds, d'obtenir une équation d'état d'une précision arbitrairement grande pourvu qu'on pousse le développement assez loin. En pratique, pour l'argon à 300 K on obtient une précision de 99.96% jusqu'à 100 bars en ne gardant que les trois premiers ordres ; c'est donc plutôt honnête.

Au premier ordre, on retrouve évidemment le gaz parfait. Attention, on lit parfois (y compris sur Wikipédia) que l'équation de Van der Waals correspond à l'ordre 2 du développement du viriel, ce qui est faux pour des raisons assez subtiles (✍ **Diu**, complément V.C).

3.3 Van der Waals

Le modèle du gaz parfait considère les molécules comme ponctuelles, cette hypothèse est idéale et peut être corrigée. Lorsque le volume offert au gaz varie, c'est seulement le volume entre les molécules qui change. Les molécules possèdent un volume propre incompressible appelé covolume, noté b pour une mole de gaz. Le volume disponible est donc $(V-b)$.

De même, le modèle du gaz parfait considère uniquement les forces de pression dues aux chocs. Il existe néanmoins des interactions entre les particules, nous amenant à considérer une pression interne, notée Π. Van der Waals a proposé d'exprimer Π (après ses travaux sur les interactions moléculaires) sous la forme : $\Pi = \frac{a}{V^2}$. Le coefficient molaire a dépend du gaz considéré. La pression s'écrit alors $(P + \frac{a}{V^2})$. L'équation des gaz parfaits devient alors

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT \tag{11.13}$$

et pour n moles

$$(P + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT \tag{11.14}$$

Les coefficients a et b sont de l'ordre, pour l'argon par exemple, de a =133 $\times 10^3$ J m^3 mol^{-1} et b =32.2 $\times 10^6$ m^3 mol^{-1}.

Les isothermes théoriques du gaz font ainsi apparâitre, aux températures T inférieures à une température critique T_c, un phase montante dans le diagramme (P, V), c'est à dire une compréssibilité isotherme $\chi_T = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T$ négative. On sait (LP15) que cela correspond à une transition de phase, et un équilibre diphasé !

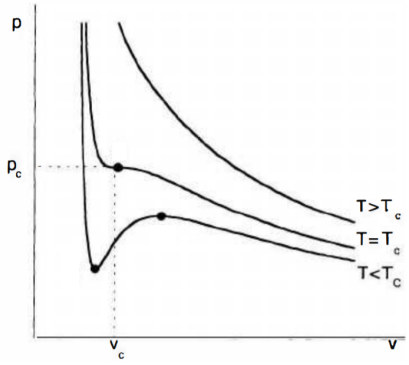


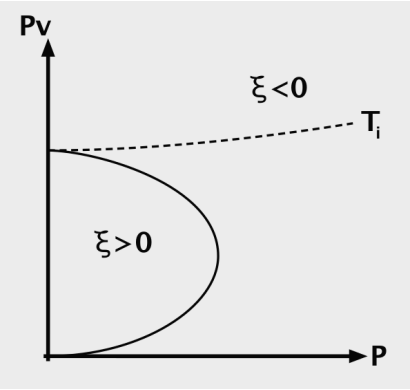
FIGURE 11.3 – Isothermes de Van der Waals dans le plan (P, V). Pour $T > T_c$, les isothermes sont toujours décroissantes. Pour $T < T_c$, ce n'est plus le cas : chaque isotherme présente deux extrema. Cela est caractéristique d'un changement de phase.

Ainsi, le modèle de Van der Waals permet de prédire l'existence des liquides, ce qui était un gros défaut du modèle du gaz parfait.

Pour plus de détails et les limites de VdW, voir la LP15 et le ✍ Pérez.

3.4 Retour sur Joule-Thomson

Pour un gaz quelconque le coefficient de Joule-Thomson peut être a priori positif ou négatif. On définit alors la courbe d'inversion comme le lieu des points dans le diagramme d'Amagat tel que : $\xi = 0$ Cette courbe divise le plan en deux région : dans la première $\xi > 0$ et une détente de Joule-Thomson provoque un abaissement de la température du fluide ; dans l'autre $\xi < 0$, elle l'élève. Dans le cas d'un gaz de Van der Waals cette courbe d'inversion à la forme suivante : L'isotherme tangent à la courbe d'inversion à pression nulle définit la température d'inversion T_i au-dessus de laquelle une détente de Joule-Thomson ne peu pas engendrer de refroidissement du fluide. Expérimentalement la température d'inversion de N_2 = 625 K et O_2 = 1043 K (argon 1018 K). On remarque aussi qu'il existe une pression maximale à partir de laquelle il y a toujours réchauffement du fluide par la détente de Joule-Thomson.



Conclusion

Au cours de cette leçon nous avons vu la nécessité d'une description des gaz à l'aide de variables macroscopiques. Cela nous a poussé à écrire une équation d'état reliant les variables macroscopiques. Nous avons commencé par étudier le modèle du gaz parfait qui néglige la taille des particules et leurs interactions, ce qui nous a permis d'écrire l'équation d'état des gaz parfaits. Par l'étude des limites de ce modèle nous avons monté sa robustesse pour décrire les gaz dans un domaine de pression et de température raisonnable. Pour explorer un plus grand domaine de paramètres il nous a fallu trouver d'autre équation d'état décrivant cette fois ci les gaz réels. En particulier nous nous sommes intéressés à la fonction d'état de Van der Waals. Cette nouvelle fonction d'état nous a permis de décrire un phénomène que le modèle du gaz parfait ne décrivait pas : l'effet Joule-Thomson.

La suite de ce cours pourrait être l'étude des transitions de phase ou bien l'étude de gaz qui nécessite une approche quantique comme les électrons dans un métal.

LP 12

Premier principe de la thermodynamique

Niveau : L1/L2

Commentaires du jury

- **2017 :** Des exemples concrets d'utilisation du premier principe de la thermodynamique sont attendus.
- **2015 :** La notion d'équilibre thermodynamique n'est pas toujours bien comprise. Des exemples pertinents doivent être utilisés pour mettre en exergue l'intérêt du premier principe, y compris pour l'introduire.

Bibliographie

✍ *PC-PC** **Dunod**	Tout.
✍ *Tout-en-un Physique PCSI*	
✍ *Cap Prépa PCSI-MPSI*	Compléments
✍ *Thermodynamique*, **Diu**	Compléments
✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet**	Équivalence travail-chaleur

Prérequis

- ➢ Vocabulaire de la thermodynamique
- ➢ Mécanique du point (et du solide ?)
- ➢ Gaz réels et gaz parfait

Expériences

☕

1 Conservation de l'énergie . . . 156
1.1 Énergie d'un système thermodynamique . . . 156
1.2 Énoncé du premier principe . . . 157
1.3 Modes de transfert d'énergie . . . 158
1.4 Équivalence Chaleur-Travail . . . 159
1.5 Retour sur l'intro . . . 159
2 Échanges d'énergie . . . 159
2.1 Échange de travail mécanique . . . 160
2.2 Transfert thermique . . . 160
2.3 Notion d'enthalpie . . . 160
2.4 Capacité calorifique . . . 161
3 Premier principe industriel . . . 161
3.1 Bilan d'énergie pour un système ouvert . . . 162
3.2 Application au climatiseur . . . 162
4 Détentes des gaz . . . 163
4.1 Joule Gay Lussac . . . 164
4.2 Joule Thomson . . . 165

Introduction

Faire glisser un solide sur la table : il finit par s'arrêter à cause des forces de frottement. On considère le système solide+table :

- L'énergie cinétique du système diminue au cours du temps
- l'énergie potentielle reste constante

On a vu que l'énergie est une quantité qui a vocation a être conservée. Où est passée l'énergie cinétique ? [1] Elle est devenue de la chaleur.

☕

Frotter ses mains ensemble pour les faire chauffer.

Après une série d'aller-retours, le système fermé {main gauche + main droite} est redevenu immobile. Sa variation d'énergie cinétique est donc nulle au cours de l'évolution. De plus, le mouvement est horizontal donc la variation d'énergie potentielle est nulle également. Le théorème de l'énergie mécanique permet alors de conclure que le travail des forces non conservatives reçu par le système est nulle. Pourtant, les muscles ont travaillé et pour cause, les paumes des deux mains se sont échauffées. La mécanique classique ne permettant pas de prédire cet échauffement, il faut faire appel à la thermodynamique pour l'expliquer. Pour ce faire, nous allons présenter ici une version "complète" du théorème de l'énergie mécanique appelée premier principe, qui prend en compte les énergies cinétique et potentielle à l'échelle microscopique. Au cours de cette leçon, nous décrirons les étapes de la construction de ce principe, nous verrons qu'il permet d'effectuer des bilans d'énergie sur des systèmes en évolution et nous en donnerons quelques applications.

1 Conservation de l'énergie

Nous avons pour objectif d'étendre le concept d'énergie interne, vu dans le cadre de l'étude de la cinétique des gaz, à n'importe quel système.

1.1 Énergie d'un système thermodynamique

✍ hprepa p.105

Un système thermodynamique est généralement constitué d'un grand nombre de particules (de l'ordre de $\mathcal{N}_A$). On considère que le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ est galiléen. Soit un système Σ constitué de N particules. Effectuons un bilan d'énergie à ce système :

On considère les particules indicées par $i \in [\![1, N]\!]$, de masses m_i. À chaque particule on associe une énergie cinétique et une énergie potentielle : $e_{c,i}$ et $e_{p,i}$. L'Énergie mécanique totale du système s'exprime alors comme la somme de toutes ces énergies.

Pour l'énergie cinétique, chaque particule est animée d'une vitesse $\overrightarrow{v_i}$, que l'on peut décomposer en deux termes : $\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{\delta v}$, avec $\overrightarrow{v_G}$ la vitesse du barycentre des particules. Ainsi on peut écrire :

1. Et alors Timéo ? Elle est où l'énergie ? elle est oùùùùù ?

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2}(v_G^2 + \delta v_i^2) + \overrightarrow{v_G} \cdot \sum_i m_i \overrightarrow{\delta v_i} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{2}(v_G^2 + \delta v_i^2) \qquad \text{car} \sum_i m_i \overrightarrow{\delta v_i} = \overrightarrow{0} \\ &= \frac{m_{tot} v_G^2}{2} + E_{c_i nt} \end{aligned}$$

On a un terme d'énergie cinétique macroscopique, qui est l'énergie cinétique due au mouvement d'ensemble du système thermodynamique, et un terme microscopique, qui correspond à l'énergie cinétique de chacune des particules dans le référentiel barycentrique.

De même, pour l'énergie potentielle, trois types d'énergies peuvent intervenir :

- Une énergie potentielle liée à l'extérieur du système (par exemple au champ de pesanteur)
- Une énergie potentielle interne à chaque composant microscopique (par exemple l'énergie de liaison des molécules)
- Une énergie potentielle d'interaction entre les composants (par exemple potentiel de van der Waals).

Le premier terme va donner lieu à un terme d'énergie potentielle macroscopique, puisqu'il est lié directement à l'extérieur du système. À l'inverse, les deux autres ne font intervenir que le système thermodynamique lui-même, et correspondent à un terme interne. Ainsi, l'énergie totale du système est donnée par :

$$E_{\text{tot}} = E_{c,\text{macro}} + E_{p,\text{macro}} + E_{c,\text{micro}} + E_{p,\text{micro}} = E_m + U \tag{12.1}$$

On peut donc séparer l'énergie totale du système en une contribution macroscopique, qui est l'énergie mécanique qui l'on utilise en mécanique, et une contribution microscopique, qui est l'énergie interne du système. Cette énergie interne est plus difficile à calculer car elle met en jeu tous les degrés de liberté microscopiques du système, trop nombreux pour être tous déterminés par le calcul. C'est pourquoi l'énergie interne doit être reliée à un nombre réduit de variables si on veut pouvoir faire des calculs.

remarque : pour un GP monoatomique, $E_{p,\text{micro}} = 0$ et $E_{c,\text{micro}} = \frac{3}{2} N k_B T$

1.2 Énoncé du premier principe

✍ Hprépa p105, BFR p.118

Définition : Fonction d'état
Une fonction d'état est une fonction qui, dans un système thermodynamique à l'équilibre interne, est entièrement déterminée (à une constante près) par la connaissance des variables d'état du système.

C'est là qu'est toute la puissance de la thermodynamique : décrire un système comportant de nombreux degrès de liberté avec un nombre minimaliste de variables (pour le GP monoatomique, la température suffit).

En pratique, U sera une fonction de T et de V. On parlera alors de transformation thermodynamique comme d'un passage entre différents points de l'espace (P, V).

Premier principe de la thermodynamique (Meyer, 1845) : Le premier principe est le postulat que, à tout système thermodynamique Σ est associée une fonction d'état U appelée énergie interne. cette fonction d'état est additive et extensive. Au cours d'une transformation quelconque, la variation d'énergie totale $E_{tot} = E_m + U$ du système est égale à l'énergie reçue par le système.

Approche moderne

C'est une approche historique, où le premier principe est un postulat (donc non démontrable). La démarche moderne consiste plutôt à partir d'un postulat plus fondamental définissant l'entropie, duquel découle le premier principe. (✍ Diu p.66 et p.547)

Quelques remarques sont à faire sur cette définition cependant :

- le fait que U est additive et extensive est une approximation. En effet, U contient deux termes. Si l'énergie cinétique interne est toujours extensive et additive, ce n'est pas toujours le cas de l'énergie potentielle interne. En effet, $E_p(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = E_p(\Sigma_1) + E_p(\Sigma_2) + E_p(\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2)$: dire que U est additive revient à négliger les éventuelles interactions entre Σ_1 et Σ_2 .
- $E_{p,\text{micro}}$n'est pas forcément extensive. Pour qu'elle le soit, il faut que l'énergie potentielle d'interaction entre composants soit extensive. Les interactions à longue portée (EM, gravitationnelle) ne le sont pas par exemple.

Cependant, dans les applications usuelles, il n'y a pas lieu de se soucier de ces détails, l'extensivité et l'aditivité de U sont vérifiées avec une très bonne approximation.

ODG

Typiquement pour une particule d'eau, on néglige l'interaction gravitationnelle devant les interactions de Van Der Waals :

$$E_G \sim \frac{m^2 G}{R^2} \sim 10^{-45}\,\text{J} \ll E_{VdW} \sim \left(\frac{\mu^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 \frac{1}{k_B T} \sim 10^{-21}\,\text{J}$$

1.3 Modes de transfert d'énergie

✍ Hprépa p.108

Au cours d'une transformation thermodynamique quelconque, la variation de l'énergie E du système Σ est égale à la somme du travail W des forces non-conservatives et conservatives et du transfert thermique Q.

$$\Delta(U + E) = W + Q \tag{12.2}$$

L'idée ici c'est de regarder la variation d'énergie entre deux états d'équilibre. La convention utilisée pour les signes de W et de Q sont que le signe positif correspond à tout ce qui est reçu.

Les échanges peuvent se faire de deux manières :

- Par un travail mécanique apporté au système par l'extérieur, c'est ici W.
- Par un transfert de chaleur, Q, qui rassemble toutes les forces intérieures au système. Ce sont des échanges qui se font directement à l'échelle microscopique, là où W peut très bien être macroscopique.

Amusant :

U et Q sont micro, W et E macro, pourtant on a pas $\Delta U = Q$ et $\Delta E = W$, c'est ce qui fait la difficulté et l'intérêt de la thermo.

dU, mais δQ

En effet Q et W ne sont pas des fonctions d'état, leur somme l'est. Individuellement ils dépendent du chemin suivi.

1.4 Équivalence Chaleur-Travail

La première conséquence importante du premier principe est qu'il identifie le travail mécanique et le transfert thermique comme deux modes d'échange d'une même grandeur : l'énergie. Cela peut paraître évident aujourd'hui puisqu'on associe souvent chaleur et énergie d'agitation thermique mais c'était loin d'être le cas jusqu'au XIXe siècle.

On a d'abord pensé que la chaleur était un gaz contenu dans la matière, le « calorique », au même titre que l'hydrogène qu'avait pu isoler Lavoisier. Cela expliquait pourquoi le perçage d'un métal dégageait de la chaleur : le foret, en perçant la matière libère le calorique qu'elle contient et provoque un échauffement. Cependant, les scientifiques de l'époque se sont vite aperçus qu'un outil émoussé provoque le même échauffement sans pour autant abimer le matériau. La chaleur était donc forcément liée aux frottements, c'est-à-dire à l'énergie mécanique.

Le physicien britannique James Prescott Joule fut le premier à mettre en évidence expérimentalement cette équivalence en s'intéressant à un système pour lequel on peut facilement identifier la nature des transferts énergétiques.

Expérience de Joule (1845)

✍ ⏲ 1mn

Le principe de cette expérience consiste à mettre en mouvement un fluide visqueux à l'aide de pales mises en rotation par un moteur. Ainsi, c'est bien un travail qui est fourni au fluide. Après quelques minutes, on constate que la température du fluide s'est élevée, signe que l'énergie mécanique a été transformée en « chaleur ».

1.5 Retour sur l'intro

On considère le système constitué des deux mains. On lui applique une force $\overrightarrow{F}$ qui compense le frottement $\overrightarrow{T}$ entre les deux mains, permettant de donner une vitesse constante (par morceaux).

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(E_c + E_p) &= \delta W_F + \delta W_T = 0 \\ \mathrm{d}(U + E_m) &= \delta W_{ext}^{nc} + \delta Q \end{aligned}$$

Important, ce ne sont que les forces non conservatives et extérieures qui apportent du travail au système. Deux pos- sibilités :

- $\delta Q = 0$, d'où $\mathrm{d}U = -\delta W_T > 0$, l'énergie interne augmente
- $\mathrm{d}U = 0$, et alors $\delta Q < 0$, le système chauffe l'air ambiant !

On va maintenant s'intéresser de plus près à différents types de transformations courantes en thermodynamique pour relier les grandeurs précédemment défini à des grandeurs intuitives et surtout mesurables.

2 Échanges d'énergie

On a une expression du premier principe qui est plutôt abstraite. On va ici relier U, W et Q à des grandeurs mesurables. Pour ça, on se place dans le cas d'un système Σ dont l'énergie potentielle externe ne varie pas et qui est immobile dans le référentiel d'étude (on peut prendre par exemple le référentiel barycentrique de Σ). Ainsi, U sera l'énergie de référence du système.

2.1 Échange de travail mécanique

Le travail mécanique correspond au travail des forces extérieures s'exerçant sur le système. Un exemple récurrent d'une telle force est la force de pression.

Prenons l'exemple classique du piston. Une quantité fixe de gaz est contenue dans un volume V que l'on peut faire varier à l'aide un piston.

On considère alors le système {Piston + Gaz}. Le système subit une pression P_{ext} à travers le piston, et donc une force $\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = -P_{\text{ext}} S \overrightarrow{u}$. Pour un déplacement infinitésimal du piston, le système reçoit donc un travail $\delta W = \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -P_{\text{ext}} S \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ On a donc

$$\delta W = -P_{\text{ext}} \mathrm{d}V$$

Le signe - est logique : pour diminuer le volume (*i.e.* comprimer le gaz), il faut fournir de l'énergie au système puisque le travail sera positif.

Rappelons que W n'est pas une fonction d'état et dépend donc du type de transformation. Considérons alors quelques cas particuliers de transformation :

- **Isochore :** le volume ne varie pas donc $W = 0$.
- **Monobare :** le système est en contact avec un unique barostat de pression P_{ext} : la pression initiale ainsi que la pression finale du système sont donc égales à P_{ext} (mais la pression dans le système peut varier pendant la transformation). On a donc $W = -P_{\text{ext}}(V_f - V_i)$.
- **Quasi-statique :** à chaque instant, le système est à l'équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur de sorte que la pression du gaz soit égale à P_{ext}. On a donc $W = -\int_i^f P \mathrm{d}V = -P_{\text{ext}} \int_i^f \mathrm{d}V$.
- **Isobare :** transformation à la fois monobare et quasi-statique

2.2 Transfert thermique

Contrairement à W, Q ne peut pas être calculé de manière simple (on ne peut pas calculer simplement quelle quantité d'énergie est échangée au cours de la transformation). Ainsi, le moyen le plus direct pour trouver Q est justement d'utiliser le premier principe.

Cependant, on appelle transformation **adiabatique** une transformation pour laquelle $Q = 0$, *i.e.* pour laquelle aucun transfert thermique n'a lieu entre le système et son environnement. Notons que c'est une transformation théorique puisqu'en pratique il n'existe pas d'isolant thermique parfait. On distinguera la notion de paroi **diatherme** qui permet les transferts thermiques entre les systèmes qu'elle sépare et celle de paroi **calorifugée** qui ne les permet pas (du moins en grande partie).

On peut cependant comparer le temps typique d'établissement des échanges thermiques à ceux des autres échanges pour se rendre compte qu'il est souvent bien plus grand. une transformation rapide devant ce temps pourra donc être considérée comme adiabatique, même sans enceinte calorifugée (par exemple les explosions).

2.3 Notion d'enthalpie

On se place dans le cas particulier où le système est séparé d'un barostat par une paroi diatherme mobile, qui impose donc l'égalité des pressions de part et d'autre à l'équilibre.

Pour une transformation monobare, on a vu que $W = -P_{\text{ext}} \Delta V$. En réécrivant le premier principe, on aboutit à $\Delta(U + P_{\text{ext}} V + E_m) = Q$.

On introduit alors une nouvelle fonction d'état, appelée **enthalpie**, qui est donnée par

$$H = U + P_{\text{ext}}V$$

. Cette fonction d'état est particulièrement adaptée à l'étude de transformations monobares.

2.4 Capacité calorifique

Dans les cas les plus courants, U dépend de T et V de sorte qu'on puisse écrire

$$\mathrm{d}U = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V$$

où les dérivées partielles dépendent des forces s'exerçant sur le système.

Exemples

- $\delta W = -P\mathrm{d}V$ pour les forces de pressions
- $\delta W = -\gamma \mathrm{d}A$ pour la tension de surface
- $\delta W = k\mathrm{d}A$ pour le ressort
- $\delta W = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{m}$ pour le moment magnétique

On définit alors la **capacité calorifique à volume constant** C_V comme :

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V$$

Elle représente l'énergie à apporter au système pour faire varier sa température de 1 K. Pour l'eau, elle vaut $C_{V,\text{eau}} = 4.18\,\mathrm{J\,K^{-1}\,g^{-1}}$ (1 calorie).

Pour les phases condensées et pour les gaz parfaits, on a la **loi de Joule** $\mathrm{d}U = C_V\mathrm{d}T$. L'énergie interne du système est donc directement reliée à sa température qui est mesurable.

Cas du gaz parfait : $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$

- transformation isochore : $V = \text{cste} \Rightarrow W = 0 \Rightarrow \Delta U = Q \Rightarrow Q = C_V(T_f - T_i)$
- transformation isobare : $P = \text{cste} \Rightarrow \Delta H = Q \Rightarrow Q = C_P(T_f - T_i)$
- transformation isotherme : $T = \text{cste} \Rightarrow \Delta U = C_V\Delta T = 0 \Rightarrow Q = -W$
  De plus, $W = -\int P\mathrm{d}V = -\int nRT\frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$ donc $Q = nRT\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$
- transformation adiabatique : $Q = 0 \Rightarrow W = \Delta U = C_V\Delta T$
  Alors $\mathrm{d}U = \delta W$ donc $\frac{nR}{\gamma-1}\mathrm{d}T = -P\mathrm{d}V$. Or $PV = nRT$ donc, après calculs, on obtient

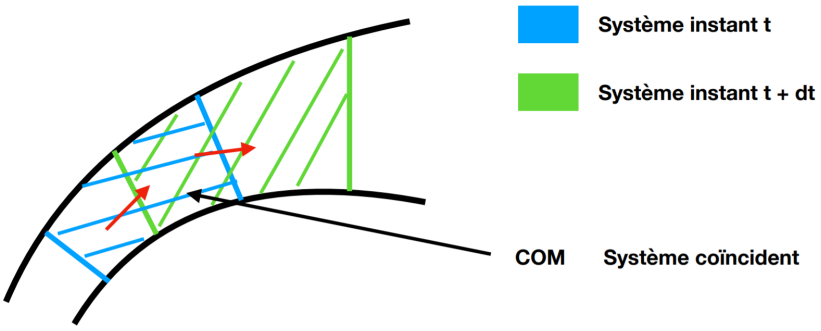
$$PV^\gamma = \text{cste}$$

3 Premier principe industriel

Voyons voir comment tout ça peut être utilisé dans l'industrie.

3.1 Bilan d'énergie pour un système ouvert

Quand on s'intéresse à une transformation dans un réacteur, on se heurte à un premier problème : **le système est ouvert** ! En effet, on a une arrivée et une sortie de fluide dans le réacteur.



On règle ce problème aisément : par la pensée, on suit un système fermé de fluide en écoulement permanent. Le système à l'instant $t + \mathrm{d}t$ (zone verte) est donc le fluide composant le système à l'instant t (zone bleue) mais s'étant déplacé pendant $\mathrm{d}t$. On remarque qu'il y a une zone commune, notée COM, entre les deux zones. On a alors, pour ce système :

$$\begin{cases} (U + E_p + E_c)(t + \mathrm{d}t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t + \mathrm{d}t) + (U + E_p + E_c)_s \\ (U + E_p + E_c)(t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t) + (U + E_p + E_c)_e \end{cases} \tag{12.3}$$

avec $(U + E_p + E_c)_{COM}(t + \mathrm{d}t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t)$ en régime permanent. Le premier principe donne alors

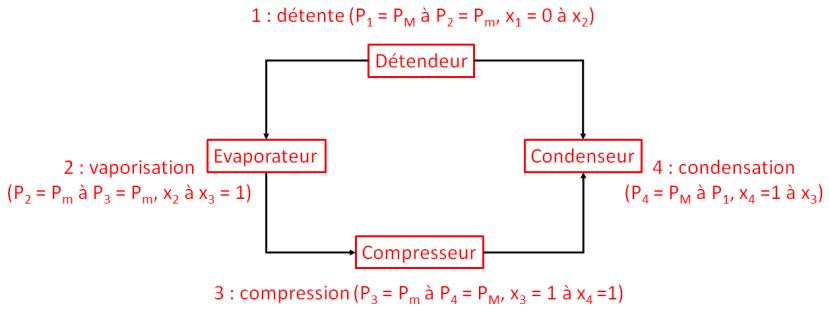
$$\begin{aligned} (U + E_p + E_c)(t + \mathrm{d}t) - (U + E_p + E_c)(t) &= \delta W + \delta Q \\ (U + E_p + E_c)_s - (U + E_p + E_c)_e &= \delta W + \delta Q \\ \mathrm{d}t D_m \left[u + e_p + e_c\right]_e^s &= \delta W + \delta Q \end{aligned} \tag{12.4}$$

avec D_m le débit massique et en notant en minuscule les grandeurs massiques. Or $\delta Q = \mathcal{P}_{\text{th}}\mathrm{d}t$ et $\delta W = \mathcal{P}_u \mathrm{d}t - P_s\overrightarrow{S_s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_s} + P_e\overrightarrow{S_e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_e} = \mathcal{P}_u \mathrm{d}t + \mathrm{d}t D_m(P_e v_e - P_s v_s)$ en notant v_e et v_s les vitesses du fluide à l'entrée et à la sortie du réacteur ainsi que $\mathcal{P}_u$ la puissance des forces autres que celles de pression.

On obtient *in fine* le premier principe industriel

$$D_m \left[u + Pv + e_p + e_c\right] = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_u \iff D_m \left[h + e_p + e_c\right] = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_u = q + w_u \tag{12.5}$$

3.2 Application au climatiseur



On considère le cycle suivant :

- état 1 $\longrightarrow$ état 2 : détente adiabatique de $(P_1 = P_M = 10$ bar, $x_1 = 0)$ à $(P_2 = P_m = 5$ bar, $x_2)$ dans un détendeur calorifugé et sans pièce mécanique mobile
- état 2 $\longrightarrow$ état 3 : vaporisation isobare réversible du fluide de $(P_2 = P_m = 5$ bar, $x_2)$ à $(P_3 = P_m = 5$ bar, $x_3 = 1)$

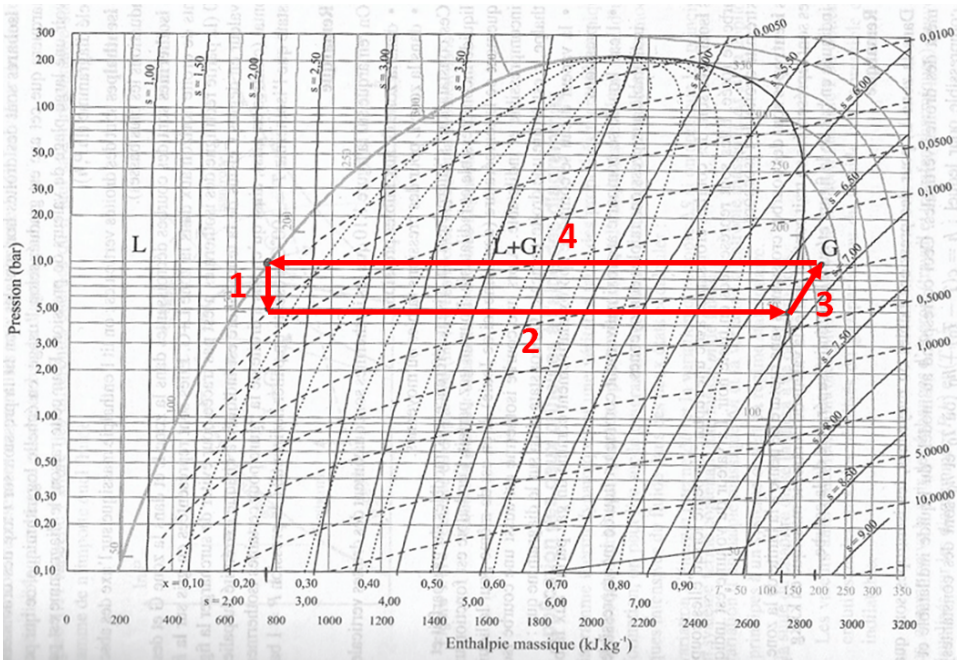
  C'est la source froide du cycle, donc ce qu'on veut refroidir.

- état 3 $\longrightarrow$ état 4 : compression adiabatique réversible (donc isentrope) de ($P_3 = P_m = 5$ bar, $x_3 = 1$) à ($P_4 = P_M = 10$ bar, $x_4 = x_3 = 1$) où le fluide est monophasé (vapeur)

  C'est le travail qu'on dépense.

- état 4 $\longrightarrow$ état 1 : condensation isobare réversible de ($P_4 = P_M = 10$ bar, $x_4 = 1$) à ($P_1 = P_M = 10$ bar, $x_1 = 0$)

on peut visualiser ce cycle dans un diagramme enthalpique : on obtient le diagramme des frigoristes (ou diagramme de Mollier)



- état 1 $\longrightarrow$ état 2 : $q_{12} = 0$ et $w_{u,12} = 0$ donc $\Delta h_{12} = 0$

  $\Rightarrow$ on part du point (P_1,$x_1 = 0$) sur le diagramme et on descend verticalement jusque (P_2,x_2).

- état 2 $\longrightarrow$ état 3 : $P_2 = P_3$ et $q_{23} = \Delta h_{23} = h_3 - h_2$

  $\Rightarrow$ on part du point (P_2,x_2) sur le diagramme et on se déplace horizontalement vers la droite jusque ($P_3 = P_2$,$x_3 = 1$).

- état 3 $\longrightarrow$ état 4 : $q_{34} = 0$ et $w_{u,34} = \Delta h_{34} = h_4 - h_3$

  $\Rightarrow$ on reste dans la zone diphasée et on se déplace de (P_3,x_3) jusque (P_4,x_4) en suivant une isentrope

- état 4 $\longrightarrow$ état 1 : $P_4 = P_1$ et $\Delta h_{41} = h_1 - h_4$

  $\Rightarrow$ on part du point (P_4,x_4) sur le diagramme et on se déplace horizontalement vers la gauche jusque ($P_1 = P_4$,$x_1 = 0$).

On définit alors le rendement

$$\eta = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{q_{23}}{w_{u,34}} = \frac{h_3 - h_2}{h_4 - h_3}$$

Avec de l'eau, $\eta = 13.2$. Avec NH_3 (ou R717), $\eta = 12$.

On peut comparer avec d'autres fluides frigorigènes.

4 Détentes des gaz

✍ `détentes.pdf`

4.1 Joule Gay Lussac

✍ CAP Prépa p696

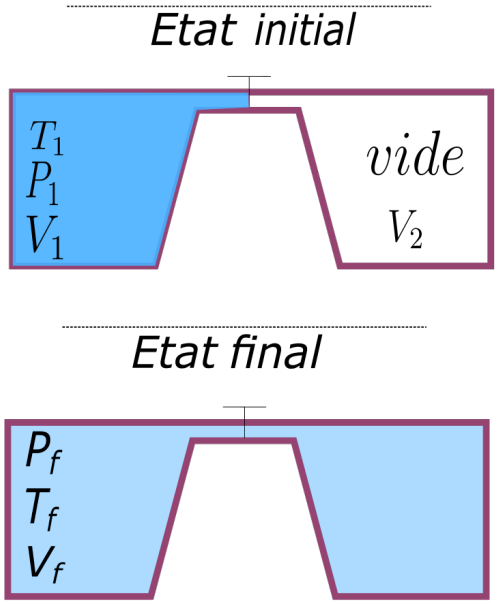


FIGURE 12.1 – Schéma de principe de la détente de Joule Gay-Lussac.

La détente de Joule Gay-Lussac, du nom de Joseph Louis Gay-Lussac, est une détente adiabatique irréversible dans le vide. Pendant cette expérience, l'énergie interne du système reste constante : elle est donc isoénergétique.

On en déduit la première loi de Joule : « l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température ».

4.1.1 Description de l'expérience

On considère deux récipients C_1 de volume V_1 et C_2 de volume V_2 aux parois calorifugées et indéformables pouvant communiquer au moyen d'un robinet. Le premier C_1 contient un gaz de pression P_1 et de température T_1, le deuxième récipient C_2 est initialement vide.

On ouvre le robinet. Le gaz se répand alors dans C_2 : cette diffusion est un processus spontané, non renversable et donc irréversible. L'état final du gaz est P_f, V_f, T_f .

Pour un gaz parfait, on constate expérimentalement que $T_f \approx T_1$.

4.1.2 Interprétation

Le système considéré pour les deux calculs ci-dessous regroupe le récipient contenant initialement le gaz parfait à V_A, P_A et T_A et celui contenant du vide, de volume $V_B = V_1 + V_2$.

Calcul de la variation d'énergie interne

Calculons la variation d'énergie interne ΔU du système considéré.

D'après le Premier principe de la thermodynamique, on a : $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$

Or, la transformation est adiabatique donc $\delta Q = 0$.

De plus, le volume varie mais aucun travail n'est produit par le gaz (puisque l'enceinte 2 est vide), d'où : $\delta W = 0$.

On en conclut que $\mathrm{d}U = 0$, c'est-à-dire $U = \text{cte}$ (et donc $T = \text{cte}$ pour un gaz parfait car alors $\mathrm{d}U = mC_v\mathrm{d}T$ avec C_v la capacité thermique massique à volume constant).

HORS SUJET : Calcul de la variation d'entropie

Cherchons la variation d'entropie dans le cas de cette expérience, c'est-à-dire en considérant une transformation irréversible adiabatique sur un gaz parfait.

Comme la transformation est adiabatique ($S_{\text{ech}} = 0$) irréversible ($S_{\text{cr}} > 0$), on peut conclure que $\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{cr}} > 0$

L'entropie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin parcouru entre A et B mais seulement de l'entropie aux points A et B. Pour calculer la variation d'entropie ΔS, nous allons donc considérer la transformation réversible associée qui passe par le même état initial (V_A, T_A) et le même état final $(V_B, T_B = T_A)$.

On obtient donc : $\mathrm{d}S = \delta S_{\text{ech}} = \frac{\delta Q}{T_A}$

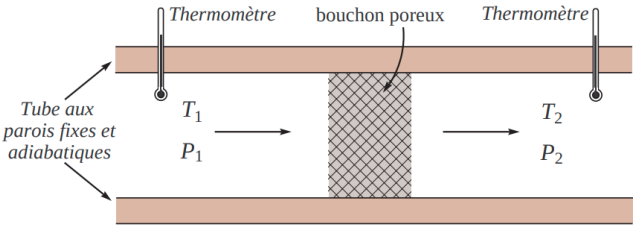
Or, d'après le premier principe : $\delta Q = \mathrm{d}U - \delta W = -\delta W = P \cdot \mathrm{d}V$ (car la transformation est isoénergétique et réversible)

D'où : $\mathrm{d}S = P \cdot \frac{\mathrm{d}V}{T} = nR \cdot \frac{\mathrm{d}V}{V}$ (d'après la loi des gaz parfaits)

On intègre et on obtient finalement : $\Delta S = nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

4.2 Joule Thomson

✍ CAP Prépa p697



Nous avons étudié la DJGL dans la section précédente. Cette détente s'effectue dans le vide et est, de fait, assez rapide. À l'opposé, dans l'appareil de Joule-Thomson (1852), on force le gaz à s'écouler lentement le long d'un tuyau qui est obstrué en son milieu par un obstacle (bouchon poreux, verre fritté, coton tassé, robinet à pointeau, ...). Les parois du tuyau sont rigides et adiabatiques.

La pression P_1 en amont du tampon est plus forte que la pression P_2 en aval (cette baisse de pression pouvant être comprise par l'existence de forces de frottements à la traversée du bouchon poreux provoquant un ralentissement du gaz et une diminution de pression).

Hyp1 : L'écoulement est suffisamment lent pour qu'on puisse considérer les pression P_1, P_2 et les températures T_1, T_2 uniformes de part et d'autre du bouchon poreux.

Hyp2 : On considère l'écoulement une fois atteint le régime stationnaire (ou permanent).

Pour faire le bilan énergétique, il faut utiliser le premier principe de thermodynamique, valable uniquement pour les circuits fermés, c'est-à-dire sans déplacement de masse vers l'extérieur.

Pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$, la masse qui entre dans le système est égale à la masse qui sort du système, on peut alors considérer que le système est fermé et on pourra donc appliquer le premier principe pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$. Le travail de transvasement du fluide est le travail W des forces de pression en amont et en aval reçu par le système.

$\Delta U = W + Q$, et $Q = 0$, donc $\Delta U = W = P_2V_2 - P_1V_1$, travail des forces de pression. On en déduit que $U_1 + P_1V_1 = U_2 + p_2V_2$.

On pose alors la fonction Enthalpie $H = U + PV$ qu est tout particulièrement pratique pour étudier cette transformation. En effet la détente de Joule-Thomson est isenthalpique et adiabatique.

Un fluide suit la **deuxième loi de Joule** lorsqu'il ne subit aucune variation de température lors d'une détente de Joule-Thomson.

Expérimentalement, cette détente de Joule-Thomson est utilisée pour refroidir les fluides dans les machines frigorifiques et les liquéfacteurs de gaz (détendeurs du type capillaire ou à pointeau).

Conclusion

On peut évoquer ici un cas concret d'insuffisance du premier principe (pourquoi faut-il payer EDF pour faire marcher un frigo ou une pompe à chaleur) ?

Ouverture : En revanche, il ne permet pas de prévoir le sens d'une évolution entre deux états d'équilibre : le premier principe est symétrique par renversement du temps ; or, il apparaît évident que bien des transformations, et en réalité toutes les transformations qu'on peut observer sont irréversibles, et ont donc un sens privilégié. Cela nécessitera l'introduction du second principe de la thermodynamique.

LP 13

Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé

Commentaires du jury

- **2016 :** Il est intéressant de choisir un système physique dont l'évolution n'est pas intuitive.
- **2011-2014 :** Nous ne saurions que trop insister sur l'importance d'écrire systématiquement les variables et paramètres des fonctions thermodynamiques introduites au cours de la leçon. Si l'analogie avec la mécanique peut se justifier, nous invitons les candidats à bien identifier le message qu'ils souhaitent transmettre.
- **2012-2014 :** Bien que ne faisant pas partie de la leçon, les candidats doivent réfléchir à l'interprétation statistique des potentiels thermodynamiques, et, en particulier, à leur lien avec la fonction de partition.
- **2011 :** Les potentiels thermodynamiques sont des outils puissants dont l'illustration ne doit pas se réduire au cas d'un corps pur en contact avec un thermostat.
- **2008 :** Les exemples d'application sont indispensables.
- **2003 :** Cette leçon permet d'introduire la notion de travail récupérable. Il est nécessaire de présenter un exemple montrant clairement que l'on peut éventuellement récupérer du travail lors d'une transformation si celle-ci est bien conduite. Les fonctions d'état F et G ne sont pas simplement des cas particuliers de fonctions F ? et G ? ; elles ont un intérêt thermodynamique propre et ne doivent pas être confondues avec les potentiels thermodynamiques.

Niveau : L2

Idées : Objectif des potentiels = reformulation pratique des principes, pour prédire l'évolution et étudier l'équilibre, Universalité de la méthode, Un potentiel dépend des conditions extérieurs et n'est pas une fonction d'état

Bibliographie

- ✍ *Précis Bréal Thermodynamique* ⟶ Base de la leçon
- ✍ *Tec&Doc PC*, **Olivier** ⟶ Compléments
- ✍ *Thermodynamique*, **Diu** ⟶ Loi de Laplace
- ✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet** ⟶

Prérequis

- ➢ Identités thermodynamiques
- ➢ Premier principe
- ➢ Deuxième principe
- ➢ Mécanique du point

Expériences

- ☕ Surfusion de l'acétate de sodium
- ☕ Murissement d'Ostwald

1 Notion de potentiel thermodynamique . . . 169
1.1 Potentiel en mécanique . . . 169
1.2 Rappels : Systèmes isolés et second principe . . . 169
1.3 Extension aux potentiels thermodynamiques . . . 171
2 Évolution d'un système fermé . . . 171
2.1 Choix du potentiel thermodynamique adéquat pour différentes transformations . . . 171
2.2 Quelques propriétés . . . 173
3 Applications . . . 173
3.1 Travail récupérable . . . 174
3.2 Bulle de savon . . . 174
3.3 Phénomène de surfusion . . . 175
3.4 Système thermomécanique . . . 176

Introduction

Nous avons vu que dans le cas d'un système isolé, c'est-à-dire n'échangeant ni matière, ni chaleur, ni travail avec l'extérieur, l'entropie nous permettait de déterminer le sens d'évolution du système. Dans cette leçon, nous allons étendre cette démarche à des systèmes fermés, c'est-à-dire ne pouvant échanger de la matière mais pouvant échanger de la chaleur et subir un travail. Nous allons pour cela détailler la notion de potentiel thermodynamique en revenant sur le cas du système isolé avant de construire un outil qui nous permettra de déterminer l'état d'équilibre en fonction des contraintes imposées, avant de détailler des exemples d'application.

1 Notion de potentiel thermodynamique

1.1 Potentiel en mécanique

On a déjà vu en mécanique la notion de potentiel. L'exemple typique est celui d'une bille dans une cuvette, qui peut rouler et va naturellement (si on considère les frottements) se stabiliser dans un minimum de potentiel, aussi nommé "vallée". Ainsi on peut dégager un principe de minimisation du potentiel.

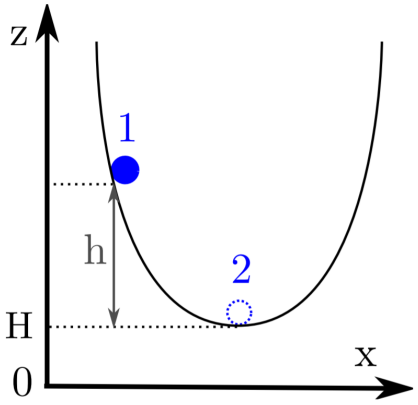


FIGURE 13.1 – Schéma de l'analogie mécanique.

On dispose alors de deux types de paramètre : les **paramètres de contrôle**, dont la valeur est fixe au cours de l'évolution (ici la masse de la bille et la forme du potentiel), et les **variables internes**, libres de s'ajuster pour atteindre l'équilibre (ici l'altitude).

En thermodynamique, c'est moins évident parce qu'on a pas un accès direct à toutes ces grandeurs, et elles sont moins apparente. Il s'agit de trouver les paramètres de contrôle et les variables internes adaptées, puis de déterminer une grandeur qui nous donnera le sens d'évolution du système.

1.2 Rappels : Systèmes isolés et second principe

Second Principe : Pour un système isolé, il existe une fonction $S(U, V, N)$ appelée *entropie* telle que l'évolution d'un état i à un état f est possible si et seulement si

$$S(f) \geq S(i)$$

À l'équilibre S est maximale, et donc $\mathrm{d}S = 0$.

L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter ou rester constante

Pour plus de détails :

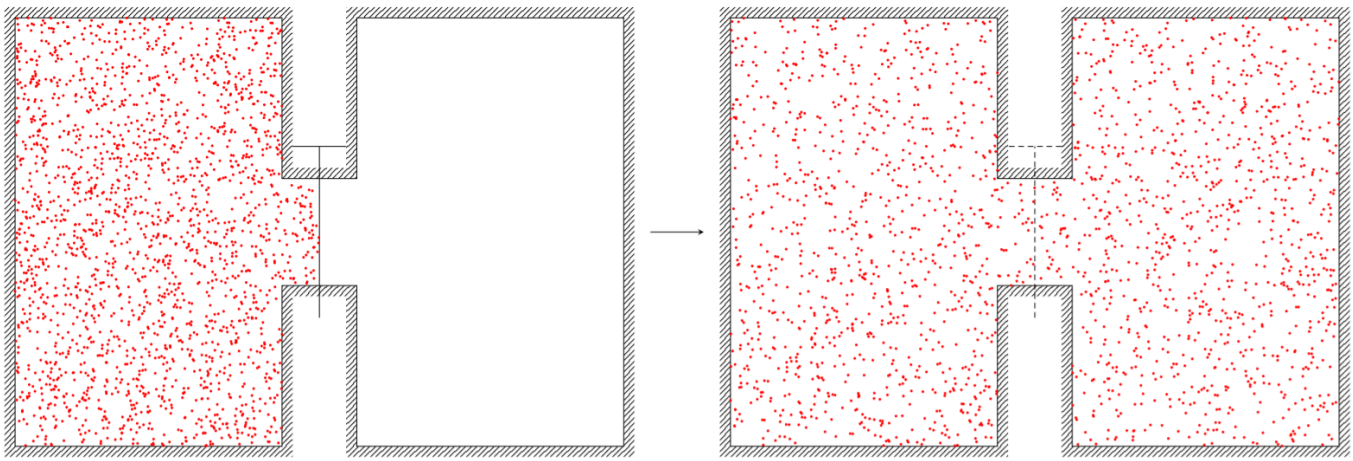
https://fr.wikipedia.org/wiki/Deuxième_principe_de_la_thermodynamique
Le second principe introduit la fonction d'état extensive S, appelée entropie. La variation d'entropie d'un système, lors d'une transformation quelconque, peut être décrite comme la somme d'un terme d'échange et d'un terme de création :

$$\Delta S_{\text{syst}} = S_{\text{échange}} + S_{\text{création}}$$

- Le terme de création, toujours positif ou nul, impose le sens de l'évolution de la transformation, $S_{\text{création}} \geq 0$; l'égalité n'a lieu que pour une transformation réversible.
- Le terme d'échange dans le cas d'un système fermé, délimité par une surface Σ, est $S_{\text{échange}} = \int_{\overrightarrow{r}\in\Sigma,\ t\in[t_1;t_2]} \frac{\delta Q(\overrightarrow{r},t)}{T(\overrightarrow{r},t)}$ où $T(\overrightarrow{r},t)$ est la température au point $\overrightarrow{r}$ et à l'instant t, et $\delta Q(\overrightarrow{r},t)$ la chaleur échangée avec le milieu extérieur.

Une autre formulation est possible, en considérant l'entropie du système et l'entropie du milieu extérieur. Cette formulation est totalement compatible avec la précédente.

$$\Delta S_{\text{global}} = S_{\text{création}} = \Delta S_{\text{syst}} + \Delta S_{\text{ext}}$$



On applique le second principe à la détente de Joule-Gay-Lussac : deux compartiments de volumes respectifs V_1 et V_2 tels que $V_{tot} = V_1 + V_2$ soit constant sont séparés par une membrane impénétrable. Du gaz est présent dans le premier compartiment à $t < 0$, et à $t = 0$ on enlève la membrane. On cherche à déterminer le sens d'évolution du système et son équilibre. On s'intéresse ici au système {enceinte + gaz}. Grâce aux identités thermodynamiques appliquées au système {gaz}, on peut écrire $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V_g$, soit encore

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{P}{T}\mathrm{d}V_g \tag{13.1}$$

Or le système est isolé, donc $\mathrm{d}U = 0$, et ainsi $\mathrm{d}S = \frac{P}{T}\mathrm{d}V_g$, et ainsi

$$\left.\frac{\partial S}{\partial V_g}\right|_U = \frac{P}{T} > 0 \tag{13.2}$$

On en conclut que S est maximale lorsque V_g l'est.

Paramètres de contrôle : U, V_{tot}.

Variables internes : V_g.

Dans cet exemple, on maximise S sous les contraintes U, V_{tot} grâce à un ajustement de V_g : c'est S qui permet de résoudre l'état d'équilibre pour un système isolé. S est ce que l'on appelle un potentiel thermodynamique, en l'occurrence le potentiel thermodynamique adapté aux systèmes isolés.

1.3 Extension aux potentiels thermodynamiques

Définition :
On appelle **potentiel thermodynamique** une fonction ϕ dépendant des paramètres de contrôle et des variables internes du système thermodynamique étudié telle que l'évolution d'un état i à un état f est possible ssi

$$\phi(f) \leq \phi(i), \ i.e. \ \mathrm{d}\phi \leq 0$$

À l'équilibre, ϕ est minimale, $\mathrm{d}\phi = 0$

Remarque : pour un système isolé, le potentiel thermodynamique adapté est -S, qu'on appelle [1] la néguentropie.

Question : "Pourquoi ne pas juste utiliser tout le temps l'entropie ?", demande alors Timéo qui sort de la sieste.

Dans les cas ou le système n'est pas isolé, mais par exemple seulement fermé, on ne peut plus appliquer notre joli théorème, parce que le système isolé à considéré est plus grand. Par exemple de la vapeur d'eau dans une cocotte en contact avec une pièce froide va condenser, ce qui est en désaccord avec ce que l'on vient de dire (maximisation du volume). Le système isolé est en fait l'ensemble {pièce, eau}. Cependant on peut intelligemment se réduire à l'étude du gaz seul, et donc simplifier grandement le problème !

2 Évolution d'un système fermé

On ne se limite plus à un système isolé. On considère maintenant des systèmes pouvant échanger de la chaleur mais uniquement avec un thermostat et, de façon analogue, les transferts de travail et de matière ne se feront qu'avec des réservoirs de pression et de particules. Cependant, on suppose que l'ensemble {Système + Réservoir(s)} est fermé.

Pour chaque système, il faut donc déterminer quel potentiel est adapté, *i.e.* quelle fonction d'état vérifie les 2 conditions énoncées précédemment : sa différentielle est négative quand le système évolue spontanément et s'annule quand le système atteint l'équilibre.

2.1 Choix du potentiel thermodynamique adéquat pour différentes transformations

2.1.1 Transformation monotherme isochore

Commençons par le cas d'un système subissant une transformation *monotherme* (température extérieure $T_{\text{ext}} = T_0$ constante $\Rightarrow$ contact avec un thermostat T_0) et *isochore* (volume V constant). On considère que le système est fermé et qu'il reçoit un transfert thermique δQ ainsi qu'un travail utile δW_u (différent du travail des forces de pression puisque V est constant).

Les deux principes de la thermodynamique donnent :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \delta Q + \delta W_u \\ \mathrm{d}S &= \delta S_e + \delta S_c \geq \delta S_e = \frac{Q}{T_0} \end{aligned} \tag{13.3}$$

donc $\mathrm{d}U \leq T_0 \mathrm{d}S + \delta W_u$, ce qui donne

$$\mathrm{d}(U - T_0 S) \leq \delta W_u \tag{13.4}$$

Dans le cas où aucun travail n'est reçu, $\mathrm{d}(U - T_0 S) \leq 0$.

En posant $F^*(S, V, T_0) = U(S, V) - T_0 S$, on obtient une fonction d'état qui vérifie les conditions pour être un potentiel thermodynamique, à savoir il diminue pendant l'évolution spontanée du système et atteint son minimum à l'équilibre.

1. quand on a vraiment que ça à faire

Le **potentiel de Helmholtz** $F^* = U - T_0 S$ (ou énergie **externe** libre) est donc le potentiel thermodynamique adéquat pour décrire une transformation monotherme isochore.

2.1.2 Transformation isotherme isochore- différence entre F et F*

Pour une transformation monotherme, la température du système n'est égale à celle du thermostat qu'aux états initial et final. Plaçons-nous maintenant dans le cas d'une transformation *isotherme*. La température T du système est alors égale à T_0 **à tout instant de la transformation**. En faisant un raisonnement analogue à celui fait précédemment, on trouve que

$$\mathrm{d}(U - TS) \leq \delta W_u \iff \mathrm{d}F \leq \delta W_u$$

L'énergie libre $F = U - TS$ du système est donc le potentiel thermodynamique adéquat pour décrire une transformation isotherme isochore.

Il faut cependant garder en tête que le potentiel de Helmholtz F^* et l'énergie libre du système F sont **deux grandeurs complètement différentes**, malgré le fait que leur expression soit similaire. Cette différence dépasse la différence mathématique ou des conditions expérimentales. En effet, ces 2 grandeurs n'ont pas été établies de la même façon :

- F^* a été construite en se demandant quelle grandeur pouvait jouer le rôle de potentiel thermodynamique dans le cas d'une transformation particulière, à savoir une transformation monotherme isochore
- F a été construite parce qu'on voulait une fonction d'état caractéristique du système à partir de l'entropie S

F est donc une grandeur bien plus générale que F^* et elle peut décrire entièrement le système. En effet, on peut écrire $\mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T$ sans supposer que T est une constante.

C'est donc **uniquement dans le cas particulier d'une transformation isotherme** qu'on peut identifier F à F^*.

2.1.3 Transformation monotherme monobare

Passons maintenant au cas où le système subit une transformation monotherme (donc en contact avec un thermostat T_0) et *monobare* (pression extérieure $P_{\text{ext}} = P_0$ constante $\Rightarrow$ contact avec un barostat P_0).

Les deux principes de la thermodynamique donnent :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \delta W + \delta Q + \delta W_u = -P_0 \mathrm{d}V + \delta Q + \delta W_u \\ \mathrm{d}S &= \delta S_e + \delta S_c \geq \delta S_e = \frac{Q}{T_0} \end{aligned} \tag{13.5}$$

donc $\mathrm{d}U \leq -P_0\mathrm{d}V + T_0\mathrm{d}S + \delta W_u$, ce qui donne

$$\mathrm{d}(U - T_0 S + P_0 V) \leq \delta W_u \tag{13.6}$$

Dans le cas où aucun travail n'est reçu, $\mathrm{d}(U - T_0 S + P_0 V) \leq 0$.

En posant $G^*(S, V, T_0, P_0) = U(S, V) - T_0 S + P_0 V$, on obtient une fonction d'état qui vérifie les conditions pour être un potentiel thermodynamique, à savoir il diminue pendant l'évolution spontanée du système et atteint son minimum à l'équilibre.

Le **potentiel de Gibbs** $G^* = U - T_0 S + P_0 V$ (ou enthalpie **externe** libre) est donc le potentiel thermodynamique adéquat pour décrire une transformation monotherme monobare.

2.1.4 Transformation isotherme isobare

On peut faire un raisonnement similaire à celui mené pour la transformation isotherme. On trouve alors que l'enthalpie libre $G = U - TS + PV$ joue le rôle de potentiel thermodynamique.

L'enthalpie libre $G = U - TS + PV$ du système est donc le potentiel thermodynamique adéquat pour décrire une transformation isotherme isobare.

2.1.5 Résumé

Transformation	Potentiel adéquat
Adiabatique	$-S(U,V)$
Monotherme isochore	$F^*(S,T_0,V) = U - T_0 S$
Isotherme isochore	$F(T,V) = U - TS$
Monotherme monobare	$G^*(S,V,T_0,P_0) = U - T_0 S + P_0 V$
Isotherme isobare	$G(T,P) = U - TS + PV$

2.2 Quelques propriétés

2.2.1 Condition de stabilité

La recherche de l'équilibre *stable* d'un système se traduit par le fait que son potentiel thermodynamique est minimal ($\mathrm{d}\phi = 0$), ce qui se traduit mathématiquement par

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial X}\right|_{\text{eq}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \geq 0 \tag{13.7}$$

Reprenons l'exemple d'une transformation monotherme. Le potentiel adapté est le potentiel de Helmholtz F^*. La stabilité de l'équilibre se traduit alors par :

- $0 = \left.\dfrac{\partial F^*}{\partial S}(S,V,T_0)\right|_{\text{eq}} = \left.\dfrac{\partial U}{\partial S}(S,V)\right|_{\text{eq}} - T_0 \left.\dfrac{\partial S}{\partial S}\right|_{\text{eq}} = T_{\text{eq}} - T_0 \Rightarrow T_{\text{eq}} = T_0$
- $0 \leq \dfrac{\partial^2 F^*}{\partial S^2} = \left.\dfrac{\partial T}{\partial S}\right|_{\text{eq}}$, sachant que $\left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_V = \dfrac{C_V}{T} \Rightarrow C_V \geq 0$

2.2.2 Additivité

Dans la limite où S est additive, c'est à dire la limite où les systèmes sont faiblement couplés, toutes les fonction d'état cités précédement sont additives. En effet elles sont définies comme la somme de U, additive, et de plusieurs termes produits d'une grandeur extensive et d'une grandeur intensive. On se placera toujours dans cette limite à notre niveau.

Ainsi l'énergie libre d'un système composé de deux sous-systèmes est simplement la somme des deux énergies libres des deux sous-systèmes.

3 Applications

3.1 Travail récupérable

✍ Olivier p287

Reprenons le cas de l'évolution **monotherme et isochore**. mais où le système est concu pour fournir du travail, *i.e.* $W_u < 0$. On a

$$-W_u \leq -\Delta F^* \tag{13.8}$$

Cette équation a une égalité ssi la transformation considérée est réversible. Ainsi ΔF^* est le travail maximal récupérable lors d'une transformation.

> Plus généralement, le travail maximal récupérable au cours d'une évolution est la différence de potentiel entre les deux, pour le potentiel thermodynamique adapté.

Exemple : Détente d'une bouteille de gaz

On prend une bouteille d'air comprimé ($V_i = 50$ L, $P_i = 20$ bar, T_0). On cherche le travail maximal récupérable par une détente dans l'air à l'état final (V_f , P_0, T_0).

Ici, on va supposer la transformation **monotherme et monobare**, et le gaz parfait. On a donc :

$$|W|_{\max} = -(\Delta F^* + P_0 \Delta V) = -\Delta G^*$$

Or, pour un GP, on a :

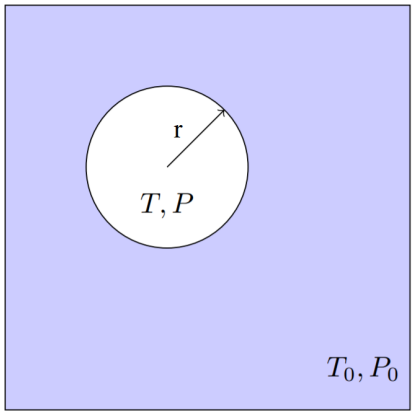
$\Delta U = C_v \Delta T = 0$ et $\Delta S = C_v \ln \dfrac{T_f}{T_i} - nR \ln \dfrac{P_f}{P_i}$.

Donc :

$$|W|_{\max} = nRT_0 \ln \frac{P_i}{P_0} - P_0(V_f - V_i) = P_i V_i \left(\ln \frac{P_i}{P_0} - 1 + \frac{P_0}{P_i} \right) \tag{13.9}$$

AN : $|W|_{\max} = 205\,\text{kJ}$.

3.2 Bulle de savon



Soit une bulle de savon en contact avec l'atmosphère à T_0 et P_0. On appelle r son rayon, variable. Pour augmenter réversiblement l'aire de $\mathrm{d}A$, on fournit le travail $\delta W = \gamma \mathrm{d}A$.

L'évolution est ici Monotherme (thermostatée) et monobare, on va donc utiliser ? G^* oui Timéo c'est bien !

Les paramètres de contrôle sont la pression exterieure, la température et la quantité de matière, les variables internes sont la pression à l'intérieur et le rayon, et U. Remarque : dA comprend deux interface, donc deux fois l'aire d'une sphère.

$$G^* = U - T_0 S + P_0 V \tag{13.10}$$
$$\mathrm{d}G^* = (P_0 - P)\mathrm{d}V + (T - T_0)\mathrm{d}S + \gamma \mathrm{d}A \tag{13.11}$$
$$\mathrm{d}G^* = 4\pi r^2 \left(P_0 - P + \frac{4\gamma}{r}\right)\mathrm{d}r + (T - T_0)\mathrm{d}S \tag{13.12}$$

Or à l'équilibre la différentielle de G^* est nulle, donc on a directement la loi de Laplace :

$$P = P_0 + \frac{4\gamma}{r} \tag{13.13}$$

Murissement d'Ostwald
Tu sais quoi faire. (les bubuuuuuulles)

3.3 Phénomène de surfusion

Il peut arriver par un matin d'hiver que, en voulant se débarrasser d'une couche d'eau liquide déposée sur son pare-brise en passant un coup d'essuie-glace, l'eau se solidifie instantanément. On interprète ce phénomène en disant que l'eau se trouvait dans un état dit *métastable*, c'est-à-dire dans un minimum local de potentiel, et que la perturbation induite par le mouvement de l'essuie-glace a permit de sortir de cet état métastable.

Tâchons d'expliquer ce phénomène de métastabilité. Pour cela, on considère un récipient de volume V contenant une espèce sous forme liquide et dans lequel ajoute un germe solide de la même espèce de rayon r. Le récipient est donc constitué d'une phase liquide de volume $V_l = V - \frac{4}{3}\pi r^3$ et d'une phase solide de volume $V_s = \frac{4}{3}\pi r^3$. On suppose également que la température dans le récipient est inférieure à la température de fusion du solide.

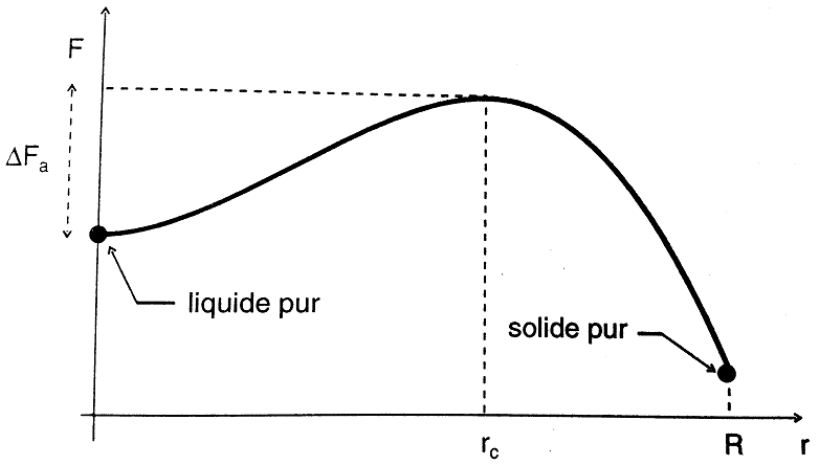
Le système {Récipient + Contenu} est au contact de l'atmosphère qui joue alors le rôle de thermostat T_0 et de barostat P_0. Le potentiel thermodynamique adapté à l'étude de ce système est donc le potentiel de Gibbs G^*. Ce potentiel est extensif donc, en sachant que chaque phase est homogène, on peut écrire pour chaque phase

$$G_l^* = V_l g_l^* \qquad \text{et} \qquad G_s^* = V_s g_s^*$$

où g_l^* et g_s^* sont les enthalpies libres internes volumiques des phases liquide et solide et sont constantes. On a alors

$$G^* = \left(V - \frac{4}{3}\pi r^3\right) g_l^* + \frac{4}{3}\pi r^3 g_s^* + \gamma 4\pi r^2$$

Le fait qu'on soit à température inférieure à celle de fusion indique que $g_s^* < g_l^*$, donc le tracé de G^* en fonction de r est :



On remarque l'existence d'un rayon critique $r_c = \dfrac{2\gamma}{g_l^* - g_s^*}$ qui sépare deux cas :

- si $r < r_c$, le système évolue spontanément vers $r = 0$ (diminution de G^* dans ce sens) donc le germe fond et la totalité du contenu du récipient reste liquide.
- si $r > r_c$, le système évolue spontanément vers $r \longrightarrow +\infty$ donc la totalité du contenu du récipient se solidifie.

Surfusion de l'acétate de sodium

✍ Internet ⏲ 25 min en prépa, 2 min en live

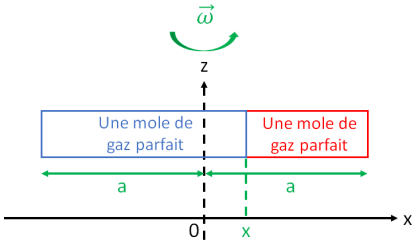
Matériel :

- Acétate de sodium solide (75 mL)
- Un bécher de 150 mL
- 2 cristallisoirs (1 eau chaude, 1 eau froide)
- Une plaque chauffante
- Un agitateur en verre

On fait fondre l'acétate de sodium en chauffant, éventuellement avec 10 mL d'eau, ce qui arrive vers 79°C. On le laisse refroidir à l'air, et si nécessaire à l'eau si on est à la bourre. C'est bon dès 35°C. Devant le jury, on prend quelques grains d'acétate de sodium solide et on en verse dans le bécher : l'état métastable est rompu tout se condense.

3.4 Système thermomécanique

On considère un tube cylindrique de section s et de longueur $2a$. Un piston de masse m sépare deux compartiments dans le tube, qui est mis en rotation à la vitesse ω constante.



On s'intéresse à la position d'équilibre de la paroi, et on s'intéresse aux compartiments 1 et 2 et au piston comme systèmes thermodynamiques. L'ensemble est isochore et isotherme.

Paramètres : T_0, n, a, ω, m

Paramètres : U, V, P, x

Le système est isochore et isotherme, on utilise donc... F oui Timéo, tu suis aujourd'hui c'est bien ! On écrit la variation de F :

$$\Delta F_{tot} = \Delta F_1 + \Delta F_2 \leq W_{rot} + W_P \tag{13.14}$$

Or on est dans un système isochore, donc $W_P = 0$.

$$\begin{cases} \Delta F_1 &= -nRT_0 \ln\left(\dfrac{P_i}{P_{f,1}}\right) = nRT_0 \ln\left(\dfrac{V_i}{V_{f,1}}\right) = nRT_0 \ln\left(\dfrac{a}{a+x}\right) \\ \Delta F_2 &= nRT_0 \ln\left(\dfrac{a}{a-x}\right) \end{cases} \tag{13.15}$$

et de plus le travail fourni par rotation vaut :

$$W_{rot} = \int_i^f \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = m\omega^2 \frac{x^2}{2} \qquad \text{inertie d'entrainement} \tag{13.16}$$

Le bon potentiel est alors

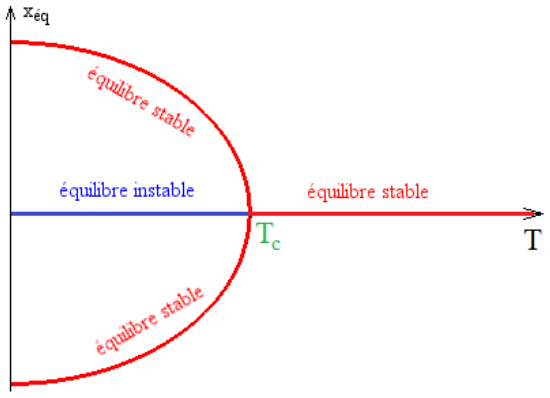
$$\phi = nRT_0 \ln\left(\frac{a}{a+x}\right) + nRT_0 \ln\left(\frac{a}{a-x}\right) - m\omega^2 \frac{x^2}{2} \tag{13.17}$$

Soit encore à l'équilibre

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_{eq} = 0 = nRT_0 \left(\frac{1}{a+x_{eq}} - \frac{1}{a-x_{eq}}\right) - m\omega^2 x_{eq} \tag{13.18}$$

$$\begin{cases} x_eq &= 0 \\ x_{eq} &= \pm a\sqrt{1 - \dfrac{T}{T_c}} \end{cases} \qquad \text{pour } T < T_C = \frac{m\omega^2 a^2}{2nR} \tag{13.19}$$

C'est donc une bifurcation, un peu comme un changement de phases en fait. Si $T < T_c$ il y a deux solution stables, et le 0 est instable. Si $T \geq T_c$ il y a une seule solution stable, le 0.



Cette bifurcation se comprend du fait que l'on a une compétition entre l'énergie de rotation et l'agitation thermique.

Conclusion

Ouverture : les transitions de phase.

Remarques

- On peut parler d'entropie en physique statistique. Elle est très pratique pour répondre à de nombreuses questions du jury, telle que celle classique sur le Démon de Maxwell.
- Potentiel thermo ⇒ Fonction d'état, mais pas l'inverse. H n'est pas un potentiel thermo.
- *Jusqu'où peut-on pousser l'analogie mécanique ?* Il y a différentes positions d'équilibre stable pour la bille. Équilibre = stationnarité + pas d'échange avec l'extérieur. *Comment atteindre l'équilibre ?* En fixant T et P. *Y a-t-il unicité de l'équilibre thermodynamique à P et T fixés ?* Non, il peut y avoir de l'hystérésis, et en fonction du potentiel ça dépend des conditions initiales.
- Souvent, à T et P fixées, le potentiel G est très bien, mais attention si variation de volume.
- mettre les identités thermodynamiques en pré-requis.
- Attention à la différence entre δW et W.

LP 14

Machines thermiques réelles

Commentaires du jury

- **2017 :** L'utilisation de diagrammes enthalpiques peut permettre de discuter de façon quantitative l'irréversibilité d'une machine réelle et, en plus, d'éviter de se contenter du modèle du gaz parfait. Le jury rappelle en outre que les machines thermiques ne se limitent pas aux moteurs.
- **2016 :** Au-delà des modèles classiques, le candidat s'appuiera sur des diagrammes de fluides réels.
- **2014 :** Les moteurs thermiques ne sont pas réalisés en visant uniquement un rendement optimal.
- **2009 :** Les applications ne se limitent pas au moteur de Stirling et doivent rester concrètes.
- **2003 :** Au delà de l'exposé classique que l'on trouve toujours, il faut discuter les causes d'irréversibilité. Par ailleurs, les moteurs réversibles ont forcément un fonctionnement lent : comment peut-on alors récupérer de la puissance avec une telle machine thermique ? Il est intéressant d'évoquer également la nature des fluides subissant les cycles.

Niveau : L1 / L2 si on fait un bilan en système ouvert

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique, une approche pragmatique*, **Cengel** ⟶ Très complet sur les aspects pratiques
- ✍ *Thermodynamique*, **Diu** ⟶ Point théorie
- ✍ *Le réfrigérateur*, **BUP 832, Martin** ⟶ Partie sur les machines frigorifiques
- ✍ *Diagrammes thermodynamiques de fluides purs*, **BUP 894, Picard** ⟶ moins essentiel mais intéressant
- ✍ *Physique PCSI*, **Grécias** ⟶ Point prépa

Prérequis

- ➢ Transformations d'un système
- ➢ Premier et second principes de la thermodynamique pour des systèmes fermés et ouverts
- ➢ Capacité calorifique, chaleur latente
- ➢ Gaz parfait

Expériences

☕

1 Notion de machine thermique . . . 181
1.1 Définition du système . . . 181
1.2 Les deux principes de la thermodynamique . . . 181
1.3 Machines dithermes . . . 182
1.4 Rendement et Coefficient de Performances (COP) . . . 183
1.5 Cycle de Carnot . . . 184
2 Réfrigérateur . . . 185
2.1 Premier principe en réacteur ouvert . . . 185
2.2 Application au climatiseur . . . 186
2.3 Diagramme de Mollier . . . 186
2.4 Diagramme de Mollier du frigo . . . 187
2.5 Processus irréversibles et conséquences . . . 187
3 Moteurs thermiques . . . 188
3.1 Moteur à explosion . . . 188
3.2 Moteur Diesel . . . 191
3.3 Centrales thermiques . . . 193

Introduction

Au cours du XIXe siècle, l'essor de la thermodynamique a permis l'exploitation de sources de chaleur pour faire tourner des roues. C'est l'essor des machines à vapeur et le début de la révolution industrielle qui a tout accéléré. Depuis, on a améliorés ces procédés mais les machines thermiques font toujours partie de notre quotidien (moteurs, réfrigérateurs). Il est donc important de s'intéresser à leur fonctionnement, et cela permet de mettre en application les notions vues précédemment en thermodynamique.

1 Notion de machine thermique

1.1 Définition du système

Soit un système thermodynamique Σ qui effectue une transformation **cyclique**. Son état final est donc le même que son état initial, après contact et échanges avec le milieu extérieur.

Si les caractéristiques du milieu extérieur sont invariantes, ou renouvelées par l'expérimentateur pour être toujours les mêmes, le processus peut se reproduire indéfiniment, identique à lui-même.

On dit que le système Σ constitue une **Machine**. Lorsque la Machine reçoit de l'extérieur uniquement du travail et de la chaleur, on parle de **machine thermique**.

Remarques : Généralemet c'est un fluide qui subit les transformations en circulant dans un circuit fermé. Le système est donc composé du fluide ET des organes de la machines. Il est à noter que les machines peuvent aussi fonctionner en circuit ouvert, comme on le verra plus tard.

Sur un cycle, du fait que c'est un cycle, on a $\Delta U = 0$ et $\Delta S = 0$. Il en va de même pour toutes les fonctions d'état.

Exemples de machines thermiques : Réfrigérateur, le système c'est le fluide de la canalisation. Moteur à explosion ? Oui mais en système ouvert. Moteur électrique ? NON !

La façon idéale de traiter ces systèmes, pour lesquels la thermodynamique a été inventée, c'est d'exprimer les deux principes sur un cycle !

1.2 Les deux principes de la thermodynamique

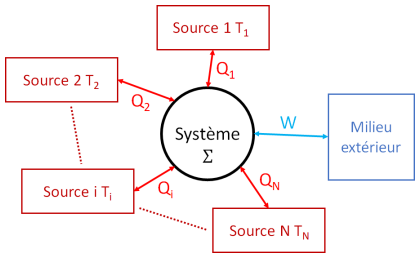


FIGURE 14.1 – Schéma général d'une machine thermique

On se place, bien sûr, dans la convention récepteur. C'est positif quand c'est recu ! Écrivons alors les deux principes :

- $\Delta U = 0 = W + \sum_i Q_i$
- $\Delta S = 0 \geq \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$ (Clausius, 1850.)

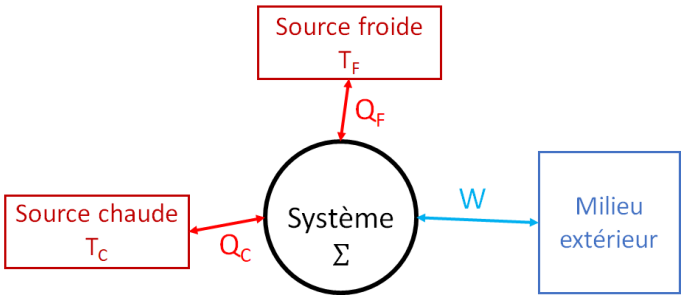
1.3 Machines dithermes

Maintenant on veut voir à limiter le nombre de sources thermiques, parce qu'on veut une machine simple ! Essayons la machine monotherme :

$$0 \geq \frac{Q}{T} \tag{14.1}$$

Ainsi on a forcément $Q \leq 0$, la machine chauffe le réservoir de température. $W + Q = 0$, donc $W \geq 0$, on doit donner du travail à la machine. Cette... chose... consome du travail et produit de la chaleur [1] et n'est donc d'une utilité que négligeable [2], puisqu'on sait très bien comment faire du chaud...

"Une machine monitherme ne peut pas être motrice", Lord Kelvin.



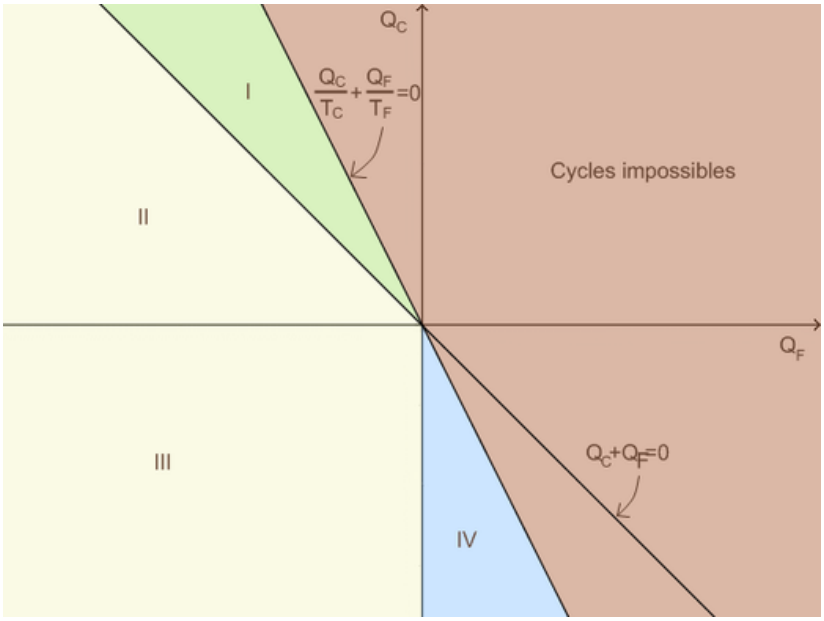
Passons à la machine ditherme. Il s'agit, on va le voir, de la machine la plus simple pour extraire, au choix, du froid ou du travail d'un cycle.

On a pour cette machine une source chaude, T_c, et une source froide, T_f. On a donc, d'après les équations suivantes, 4 cas à considérer.

$$\begin{cases} 0 & = Q_f + Q_c + W \\ 0 & \geq \dfrac{Q_f}{T_f} + \dfrac{Q_c}{T_c} \end{cases} \tag{14.2}$$

On peut représenter ces 4 cas sur un diagramme de Raveau.

1. Comme toi Timéo.
2. Comme toi Timéo.



Su ce diagramme sont représentées 5 zones, dont nous allons détaillé les propriétés. On trace les droites du premier et du second principe : $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ et $Q_c + Q_f = 0 = -W$.

- Zone rouge : Impossible, ne respecte pas le second principe
- Zone I : $Q_F < 0$, $Q_C > 0$, $Q_C + Q_F > 0$ donc $W < 0$, On prend de la chaleur à la source chaude pour fournir du travail, Cas des **moteurs**.
- Zone II : $Q_F < 0$, $Q_C > 0$, $W > 0$, peu intéressant car peut être réalisé sans fournir de travail (mais peut permettre de l'accélérer).
- Zone III : $Q_F < 0$, $Q_C < 0$, $W > 0$. On fournit du travail pour fournir de la chaleur, peu intéressant, se rapproche des machines monothermes.
- Zone IV : $Q_F > 0$, $Q_C < 0$, $W > 0$. On fournit du travail pour chauffer la source chaude et refroidir la source froide. Principe de la pompe à Chaleur ou du **réfrigérateur**.

Maintenant que l'on sait comment faire théoriquement pour fabriquer une pompe à chaleur ou un moteur, évaluons le rendement théorique maximal de ces engins.

1.4 Rendement et Coefficient de Performances (COP)

On définit le rendement comme le rapport entre la quantité que l'on veut récupérer et la quantité que l'on fourni au système, en valeur absolue. Ainsi pour un moteur, on veut récupérer le travail, et on fournit de la chaleur (par explosion au chauffage par exemple).

$$\eta_{\text{moteur}} = \frac{-W}{Q_c} \tag{14.3}$$

Pour une pompe à chaleur, on fourni du travail, et on cherche à récupérer le flux thermique chaud, pour un réfrigirateur, le flux thermique froid.

$$\text{Pompe} : COP = \frac{-Q_c}{W} \qquad \text{frigo} : COP = \frac{Q_f}{W} \tag{14.4}$$

Il est possible de MAJORER les rendements définis ci-dessus, grâce aux principes de la thermo. En effet $-W = Q_c + Q_f$, donc$\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$. De plus $0 \geq \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}$, donc

$$\eta \leq \eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} \tag{14.5}$$

De même pour la pompe à chaleur et le réfrigérateur, on peut écrire

$$COP_{\text{pompe}} \leq COP_{\text{pompe,c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \qquad COP_{\text{frigo}} \leq COP_{\text{frigo,c}} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \tag{14.6}$$

Déterminer le rendement du moteur de Stirling
Voir le MP35.

Remarque avant de continuer

Ici le rendement NE PEUT PAS atteindre la valeur de conversion totale 1. On a une limitation propre aux machines thermiques et d'origine entropique. Dans le cadre de cette leçon, il est important de constater que c'est l'irréversibilité qu'il va falloir limiter.

1.5 Cycle de Carnot

L'éfficacité maximale pour ces machines est atteinte dans le cas d'une évolution réversible, donc isentropique, tout le long du cycle. Le cycle qui est alors décrit est appelé cycle de Carnot. C'est un cas idéal, composé de deux isothermes et de deux isentropiques (fig 3). Cependant parcourir ce type de cycle est très long (pour avoir des transformations réversibles) et ne développe donc que peu de puissance.

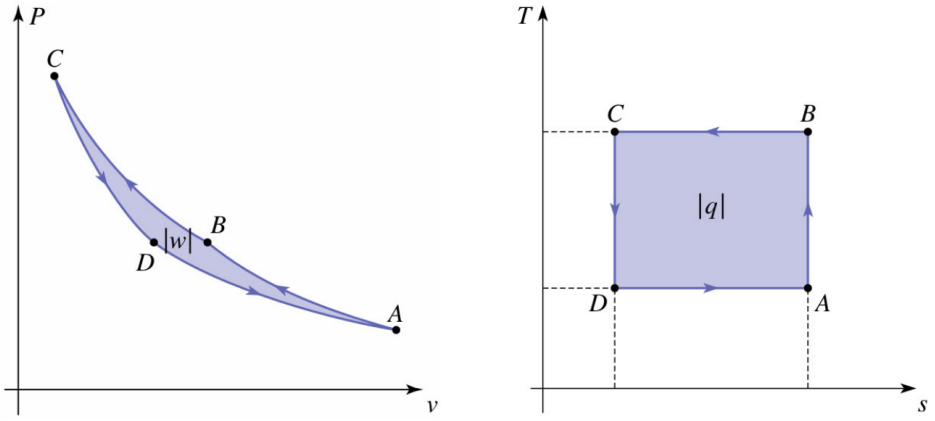


FIGURE 14.2 – Cycle de Carnot d'un GP récepteur, avec deux isentropiques et deux isothermes.

L'aire définit par le cycle dans le diagramme TS est égale à la quantité de chaleur telle que :

$$|Q| = \oint_{\text{cycle}} T\mathrm{d}S \tag{14.7}$$

L'aire définit par le cycle dans le diagramme de Clapeyron est égale au travail :

$$|W| = \oint_{\text{cycle}} P\mathrm{d}V \tag{14.8}$$

Si le cycle est parcouru dans le sens horaire, $W < 0$, la machine fournit du travail, le cycle est dit "moteur".

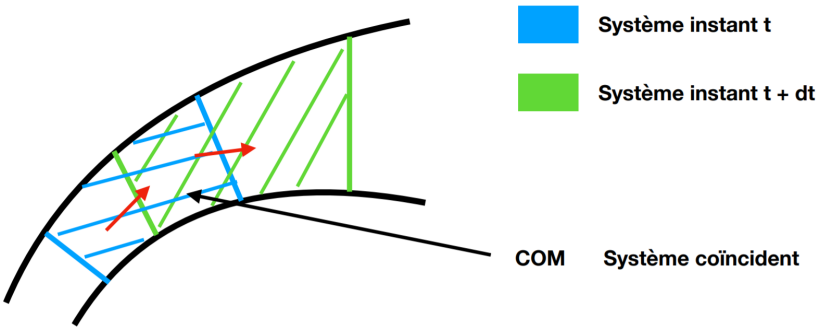
Les cycles décrits réellement correspondent à des machines dont le rendement maximal est nécessairement inférieur à celui de Carnot. On va donc voir comment décrire une machine thermique un peu plus réelle. De plus, on a ici parlé du premier principe de la thermodynamique pour un système fermé, mais lorsque l'on étudiera une machine, on la décomposera en étapes et on appliquera à chacun le premier principe en réacteur ouvert : $\Delta h = w + q$.

2 Réfrigérateur

Jusqu'à présent on a appliqué le premier principe sur des systèmes isolés, puis fermés. Il est temps de regarder des systèmes ouverts, dans lequel le fluide est en écoulement.

2.1 Premier principe en réacteur ouvert

Quand on s'intéresse à une transformation dans un réacteur, on se heurte à un premier problème : **le système est ouvert** ! En effet, on a une arrivée et une sortie de fluide dans le réacteur.



On règle ce problème aisément : par la pensée, on suit un système fermé de fluide en écoulement permanent. Le système à l'instant $t + \mathrm{d}t$ (zone verte) est donc le fluide composant le système à l'instant t (zone bleue) mais s'étant déplacé pendant $\mathrm{d}t$. On remarque qu'il y a une zone commune, notée COM, entre les deux zones. On a alors, pour ce système :

$$\begin{cases} (U + E_p + E_c)(t + \mathrm{d}t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t + \mathrm{d}t) + (U + E_p + E_c)_s \\ (U + E_p + E_c)(t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t) + (U + E_p + E_c)_e \end{cases} \tag{14.9}$$

avec $(U + E_p + E_c)_{COM}(t + \mathrm{d}t) = (U + E_p + E_c)_{COM}(t)$ en régime permanent. Le premier principe donne alors

$$\begin{aligned} (U + E_p + E_c)(t + \mathrm{d}t) - (U + E_p + E_c)(t) &= \delta W + \delta Q \\ (U + E_p + E_c)_s - (U + E_p + E_c)_e &= \delta W + \delta Q \\ \mathrm{d}t D_m \left[u + e_p + e_c\right]_e^s &= \delta W + \delta Q \end{aligned} \tag{14.10}$$

avec D_m le débit massique et en notant en minuscule les grandeurs massiques. Or $\delta Q = \mathcal{P}_{\text{th}}\mathrm{d}t$ et $\delta W = \mathcal{P}_u\mathrm{d}t - P_s\overrightarrow{S_s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_s} + P_e\overrightarrow{S_e} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_e} = \mathcal{P}_u\mathrm{d}t + \mathrm{d}tD_m(P_e v_e - P_s v_s)$ en notant v_e et v_s les vitesses du fluide à l'entrée et à la sortie du réacteur ainsi que $\mathcal{P}_u$ la puissance des forces autres que celles de pression.

On obtient *in fine* le premier principe industriel

$$D_m \left[u + Pv + e_p + e_c\right] = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_u \iff D_m \left[h + e_p + e_c\right] = \mathcal{P}_{\text{th}} + \mathcal{P}_u = q + w_u \tag{14.11}$$

2.2 Application au climatiseur

On cherche à faire un réfrigérateur, on souhaite donc se placer dans la partie IV du diagramme de Raveau : $Q_F > 0$, $Q_C < 0$, $W > 0$. On va fournir du travail pour refroidir l'intérieur du réfrigérateur et évacuer cette énergie dans l'air extérieur.

Or on sait que pour l'eau, il faut 4.18 kJ pour chauffer 1 kg d'eau, mais 2265 kJ pour en évaporer la même quantité. Ce résultat est assez général : **le changement d'état permet un plus grand échange d'énergie qu'une élévation de température.** L'évaporation est endothermique, la liquéfaction exothermique, le fluide doit donc s'évaporer au contact de la source froide et se condenser au contact de la source chaude.

Pour cela, il faut un fluide qui puisse s'évaporer à $-10\,°C$ et se condenser à $25\,°C$. Or on sait que les températures de vaporisation de de liquéfaction sont strictement égales à Pression donnée, il va donc falloir changer la pression entre les deux échangeurs thermiques, c'est la que l'on va fournir du travail. Il faut un compresseur avant le condenseur et un détendeur avant l'évaporateur.

On choisi le fluide calorifique **R134a**, qui est le 1,1,1,2-Tétrafluoroéthane (F_3C-CH_2F) car il se vaporise à $-10\,°C$ à 1.64 bar et se liquéfie à $25\,°C$ à 6.65 bar, possède une capacité calorifique ($\simeq 1.3\,kJ$) [3] et une enthalpie de liquéfaction ($\simeq 225\,kJ$) relativement élevées, et ne détruit pas la couche d'ozone (mais est à effet de serre).

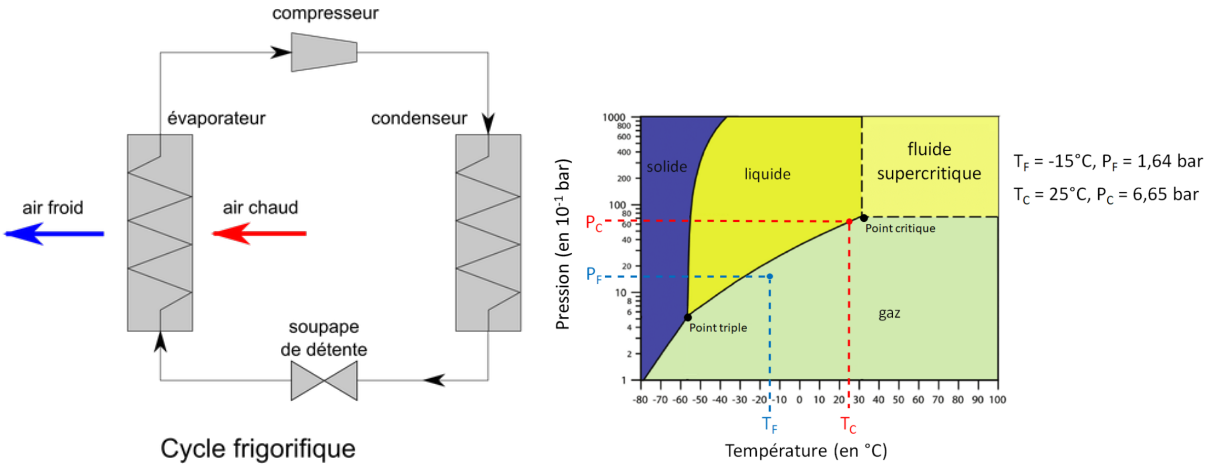
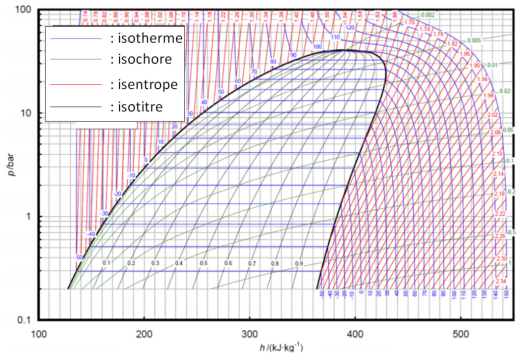


FIGURE 14.3 – Schéma de fonctionnement d'un cycle frigorifique, et diagramme de phases du R134a.

2.3 Diagramme de Mollier



Un diagramme de Mollier, ou diagramme des frigoristes, est une représentation pratique des cycles de machines thermiques. On y représente $\ln(P)$ en fonction de h.

Dans un diagramme de Mollier, on met la courbe d'ébulition et de rosée, comme dans un Clapeyron. On trace ensuite l'ensemble des transformations subies par le système. Par exemple :

3. ref : THERMODYNAMIC PROPERTIES OF R134a (1,1,1,2-TETRAFLUOROETHANE) Marcia L. Huber and Mark 0. McLinden

- Isobare : droite horizontale, graduée en log.
- Isenthalpique : droite verticale
- Isotherme : Comme dans clapeyron, isenthalpe dans la zone diphasée
- les autres : elles sont représentées sur l'abaque !

2.4 Diagramme de Mollier du frigo

- 1 : On a une compression isentropique de 1.64 bar à 6.65 bar.
- 2 : Puis une liquéfaction à pression constante dans le condenseur.
- 3 : À la sortie du condenseur, le fluide subit une détente isenthalpique de 6.65 bar à 1.64 bar.
- 4 : On a évaporation à pression constante qui permet de refroidir le réfrigérateur. On cherche à retourner à l'état initial, et surtout à bien évaporer tout le fluide car le liquide (incompressible) pourrait endommager le compresseur.

On peut représenter le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de Mollier (H,ln(P)), qui permet de visualiser les différentes transformations.

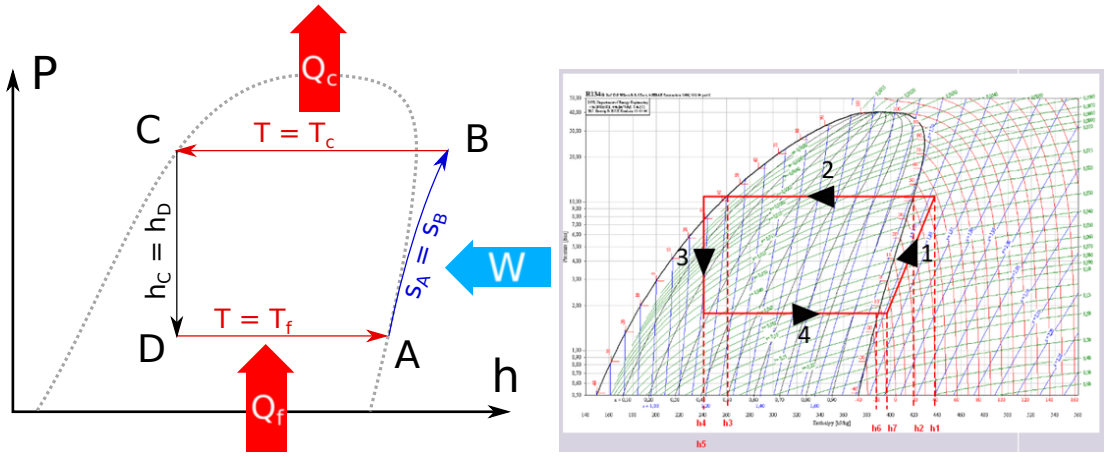


FIGURE 14.4 – Cycle idéal d'un réfrigérateur.

Cette représentation nous permet de calculer le COP du réfrigérateur.

- L'énergie utile est celle qui est reçue dans l'évaporateur : $q_F = \Delta h(4) = 158\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.
- Le travail fournit est celui fournit au compresseur et au détendeur (ici seulement au compresseur) : $w = \Delta h(1) = 28\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

Cela donne une efficacité $e = \dfrac{q_F}{w} = 5.64$. Pour 1 kJ d'énergie dépensée, on soutire 5.64 kJ à l'intérieur du réfrigérateur. Cependant cette valeur est à comparer avec l'efficacité maximale suivant un cycle de Carnot, elle est : $e^{rev} = \dfrac{T_F}{T_C - T_F} = 6.45$. On en est pas trop éloigné.

2.5 Processus irréversibles et conséquences

On a fait des hypothèses pour pouvoir écrire le cycle précédent. On a notamment négligé la perte de pression lors du passage du fluide dans la tuyauterie, le fait que le compresseur ne soit pas isentropique : il y des frottements

donc diffusion de température et donc irréversibilité. On doit alors modifier le cycle obtenu. On constate alors une augmentation du travail à fournir pour obtenir le même refroidissement.

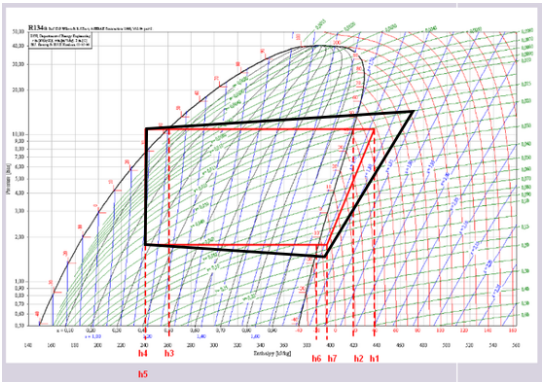


FIGURE 14.5 – Modification du cycle frigorifique en prenant en compte certaines causes d'irréversibilité. On devrait aussi avoir disparition des points anguleux.

Il est à noter qu'il existe de nombreuses améliorations possibles (Cengel parle de cycles frigorifiques innovants) comme la réfrigération en cascade ou la réfrigération à compression étagée.

remarque : L'aire du diagramme n'a ici pas de sens.

Nous avons étudié le fonctionnement d'un réfrigérateur réel simplifié. L'autre partie intéressante du diagramme de Raveau est la zone I, où l'on utilise l'énergie de la source chaude pour produire un travail. Il existe de nombreux types de telles machines : Moteur de Stirling, centrales thermiques (cycle de Rankine), propulsion par jet, cycle de Brayton (turbine à gaz), moteurs à combustion. (voir Cengel). Nous allons maintenant étudier un cycle utilisé pour les moteurs à combustion, le cycle du moteur essence.

3 Moteurs thermiques

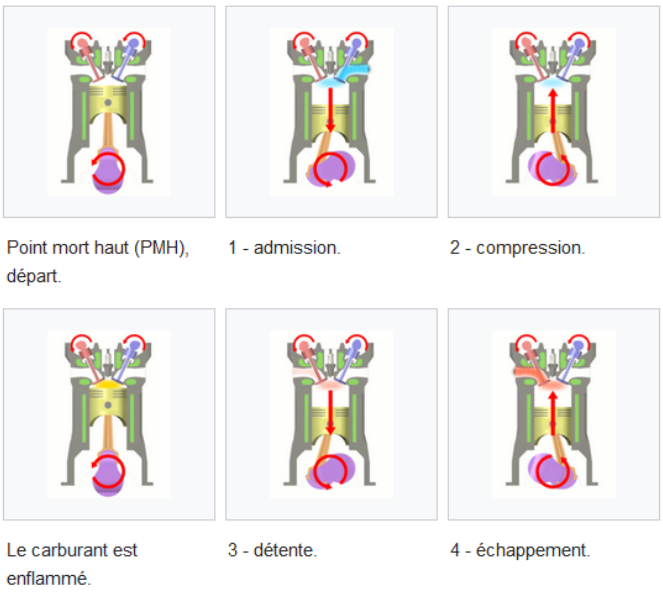
Une utilisation également très connue des machines thermiques est le moteur thermique que l'on peut trouver dans tous les véhicules imaginables.

3.1 Moteur à explosion

Intéressons-nous en premier au moteur à explosion (ou moteur à essence, moteur à 4 temps). C'est un moteur dont le fonctionnement peut être décrit par la succession d'étapes [4] suivantes :

- $0 \longrightarrow 1$: admission isobare de $V_{\min}$ à $V_{\max}$
- $1 \longrightarrow 2$: compression supposée adiabatique réversible donc isentropique (frottements et diffusion négligés car étape rapide)
- $2 \longrightarrow 3$: combustion isochore des gaz (combustion rapide)
- $3 \longrightarrow 4$: détente supposée adiabatique réversible donc isentropique
- $4 \longrightarrow 1$: ouverture de la soupape d'isolement : évacuation isochore de la chaleur
- $1 \longrightarrow 0$: échappement isobare

4. On peut trouver un gif à https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur_à_combustion_et_explosion#/media/Fichier:4-Stroke-Engine.gif



On modélise cette succession d'étapes par le **cycle de Beau de Rochas** (1862), aussi appelé cycle d'Otto :

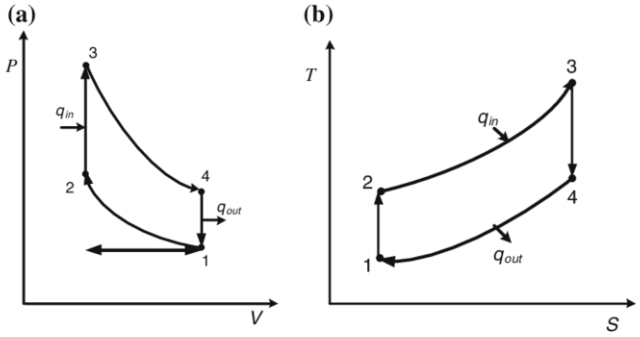


FIGURE 14.6 – Cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Clapeyron (P, V) et le diagramme entropique (T, S).

On veut déterminer le rendement de ce moteur. On fournit de l'énergie Q_c 3 au système {air + essence} lors de l'étape 2 $\longrightarrow$ et on le système fournit un travail $-W$ au cours du cycle, donc le rendement s'écrit

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} \tag{14.12}$$

Remarque

L'air du cycle dans le diagramme de Clapeyron vaut $\mathcal{A} = \oint P\mathrm{d}V = -W$!

On peut décrire ce qu'il se passe thermodynamiquement durant les étapes pour exprimer Q_c et W, on considérant que l'air est un gaz parfait diatomique de coefficient adiabatique $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$:

- $0 \longrightarrow 1$: se compense avec $1 \longrightarrow 0$
- $1 \longrightarrow 2$: évolution isentropique $\Rightarrow$ loi de Laplace $T_1 V_{\max}^{\gamma} = T_2 V_{\min}^{\gamma}$
- $2 \longrightarrow 3$: apport de chaleur par combustion $Q_c = \Delta U_{23} = C_v(T_3 - T_2)$
- $3 \longrightarrow 4$: évolution isentropique $\Rightarrow$ loi de Laplace $T_3 V_{\min}^{\gamma} = T_4 V_{\max}^{\gamma}$
- $4 \longrightarrow 1$: évacuation de chaleur $Q_f = \Delta U_{41} = C_v(T_1 - T_4)$

- $1 \longrightarrow 0$: se compense avec $0 \longrightarrow 1$

Le bilan d'énergie interne sur le cycle donne également $0 = \Delta_{\text{cycle}} U = -W + Q_c + Q_f$ En en déduit que

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \tag{14.13}$$

Il reste à exprimer ce rapport de température. Pour cela, on peut profiter des étapes isentropiques qui, à travers la loi de Laplace, donnent

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_4}{T_3}$$

Avec ces égalités, on peut aisément montrer que

$$\frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = -\frac{T_1}{T_2} = -\left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} = -\alpha^{1-\gamma}$$

en notant $\alpha = \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}$ le *rapport de compression*, on obtient finalement

$$\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma} \tag{14.14}$$

Remarque

On remarque que le rendement augmente avec le taux de compression. On pourrait alors augmenter η en augmentant α. Le problème est qu'à partir d'une certaine valeur de α, le gaz s'enflamme spontanément. Ce phénomène n'est pas voulu dans ce moteur de Beau de Rochas mais mis à profit dans le cycle de Diesel.

Pour un moteur à explosion typique, $\alpha = 8$. Ayant $\gamma = 1.4$, on peut conclure que $\eta = 0.56$. Le rendement de Carnot d'un moteur thermique vaut $\eta_{\text{carnot}} = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 0.76$ avec $T_f = 25°\text{C}$ et $T_c = 950°\text{C}$. Le rendement du cycle de Beau de Rochas n'est donc pas vraiment bon, sachant qu'en réalité le cycle n'est pas parfait et donc le rendement est encore plus faible.

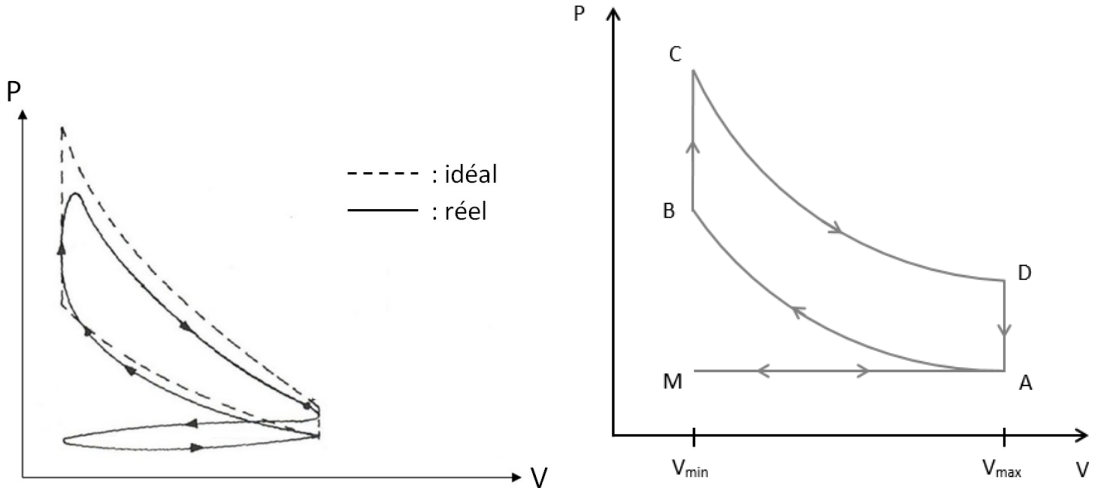


FIGURE 14.7 – Cycle de Beau de Rochas réel (à gauche) et idéal (à droite).

On remarque les différences suivantes :

- les étapes d'admission $0 \longrightarrow 1$ et d'échappement $1 \longrightarrow 0$ ne se compensent plus : on voit un cycle parcouru dans le sens antihoraire donc qui correspond à un travail qui n'est pas moteur. il s'agit du *travail de pompage (c'est celui que l'on donne à la tondeuse en tirant sur le fil.)*.

- Les étapes de combustion et d'évacuation de la chaleur ne sont pas instantanées donc pas à volume constant, par exemple l'allumage des bougies doit se faire un peu avant que le piston n'atteigne son Point Mort Haut. Cela se traduit sur le cycle par une courbure des isochores, donc une diminution de l'aire et donc une diminution du travail fourni.
- Dans le moteur réel, les gaz chauds transmettent une quantité importante de chaleur aux parois du cylindre. Les lignes de compression et de détente ne sont plus adiabatiques donc plus modélisables par la loi de Laplace mais par une évolution polytropique :
$$PV^n = \text{cste} \qquad \text{avec} \qquad n \neq \gamma$$
- Les gradients de pression et de température entraînent des irréversibilités qui diminuent le rendement obtenu.
- Les capacités thermiques des gaz augmentent avec la température donc l'écriture de $Q_c = C_V(T_3 - T_2)$ n'est plus valable

Toutes ces différences nous font passer d'un rendement idéal de 0.56 à un maigre rendement réel de 0.2-0.3, ce qui pour le coup est vraiment faible par rapport au rendement de Carnot.

On a mentionné précédemment qu'on augmente η en augmentant α, ce qui a comme conséquence une explosion spontanée du gaz. C'est ce qui est mis à profit dans les moteurs Diesel.

3.2 Moteur Diesel

Le moteur/cycle de Diesel (R. Diesel 1893) est une variante du cycle de Beau de Rochas, toujours à 4 temps. Le changement réside dans l'allumage de la combustion : l'air seul subit d'abord une compression élevée puis on injecte le carburant. Sur le cycle, cette différence est visible sur la portion $2 \longrightarrow 3$ qui était une isochore et qui devient une isobare puisque dans le moteur Diesel le combustible est injecté sous pression au point 2 du cycle, de façon assez progressive.

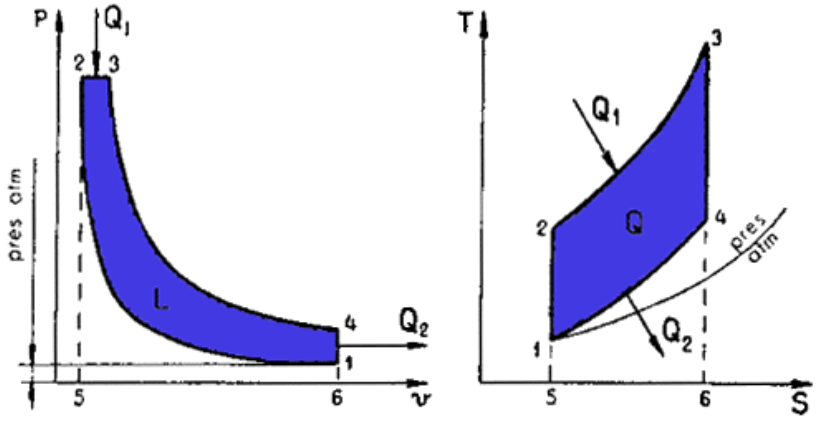


FIGURE 14.8 – Cycle de Diesel dans le diagramme de Clapeyron (P, V) et le diagramme entropique (T, S).

Les étapes du cycle sont donc

- $0 \longrightarrow 1$: admission isobare de $V_{\min}$ à $V_{\max}$
- $1 \longrightarrow 2$: compression supposée adiabatique réversible de l'air **seul** donc isentropique (frottements et diffusion négligés car étape rapide) + injection du carburant
- $2 \longrightarrow 3$: combustion **isobare** (et non plus isochore) des gaz (combustion rapide)

- $3 \longrightarrow 4$: détente supposée adiabatique réversible donc isentropique
- $4 \longrightarrow 1$: ouverture de la soupape d'isolement : évacuation isochore de la chaleur
- $1 \longrightarrow 0$: échappement isobare

Calculons le rendement de ce cycle. Pour cela, on peut reprendre les calculs menés pour le cycle de Beau de Rochas en faisant attention à deux différences :

- l'étape $2 \longrightarrow 3$ n'étant plus isochore mais isobare, l'égalité $Q_c = \Delta U_{23} = C_v(T_3 - T_2)$ n'est plus valable.
  Pour trouver Q_c, il faut écrire le premier principe en système **ouvert**, aussi connu sous le nom de premier principe industriel. On obtient alors pour une transformation isobare
  $$Q_c = \Delta h_{23} = C_p(T_3 - T_2)$$
  Le fait que cette étape soit isobare permet également d'écrire $\dfrac{T_2}{V_{\min}} = \dfrac{T_3}{V_3}$ (gaz parfait).
- on n'a plus 2 volumes caractéristiques $V_{\min}$ et $V_{\max}$, on en a 3 : $V_{\min}$, $V_{\max}$ et V_3. On écrit donc pour les étapes isentropiques :
  $$T_1 V_{\max}^{\gamma-1} = T_2 V_{\min}^{\gamma-1} \qquad \text{et} \qquad T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_{\max}^{\gamma-1}$$
  $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{1-\gamma} \qquad \text{et} \qquad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\gamma-1} = \beta^{1-\gamma}$$
  avec toujours $\alpha = \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}$ le rapport de compression et $\beta = \dfrac{V_{\max}}{V_3}$ le rapport de détente.
  On peut remarquer que le rapport des volumes avant et après compression vaut $\dfrac{V_3}{V_{\min}} = \dfrac{V_3}{V_{\max}}\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Or $\dfrac{T_2}{V_{\min}} = \dfrac{T_3}{V_3}$ donc
  $$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_{\min}} = T_2 \frac{\alpha}{\beta}$$

Le rendement vaut donc :

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{diesel}} &= 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \\
&= 1 + \frac{C_v}{C_p}\frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_3\beta^{1-\gamma} - T_2\alpha^{1-\gamma}}{T_3 - T_2} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_2\frac{\alpha}{\beta}\beta^{1-\gamma} - T_2\alpha^{1-\gamma}}{T_2\frac{\alpha}{\beta} - T_2} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\frac{\alpha}{\beta}\beta^{1-\gamma} - \alpha^{1-\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{\beta^{-\gamma} - \alpha^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}
\end{aligned} \tag{14.15}$$

Pour $\gamma = 1.4$, $\alpha = 14$ et $\beta = 9$, on trouve $\eta_{\text{diesel}} = 0.62$, ce qui est mieux que pour le cycle de Beau de Rochas.

Remarque

Pour les moteurs actuels, la portion isobare $2 \longrightarrow 3$, est remplacée par une étape isochore $2 \longrightarrow 2{,}5$ puis une étape isobare $2{,}5 \longrightarrow 3$ car l'injection du combustible est avancé. On parle alors de *cycle mixte*.

3.3 Centrales thermiques

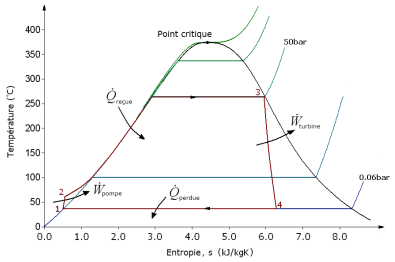


FIGURE 14.9 – Le cycle de Rankine, ✍ https://en.wikipedia.org/wiki/Rankine_cycle

Dans les centrales électriques à base de générateurs thermiques, comme les centrales à charbon, on converti de l'énergie chimique en énergie thermique, puis en énergie mécanique via le cycle de Rankine.

Le cycle de Rankine est un cycle endoréversible, c'est-à-dire que les seules irréversibilités proviennent des échanges, ici de chaleur, avec l'extérieur. Au contraire, les transformations dites fermées sont considérées comme réversibles. Le cycle, parcouru dans le sens moteur, est composé des quatre transformations suivantes :

- 1→2 : Compression adiabatique et réversible (isentropique).
- 2→3 : Vaporisation isobare et irréversible [5].
- 3→4 : Détente adiabatique et réversible (isentropique).
- 4→1 : Liquéfaction isobare et irréversible.

Le cycle de Carnot est un cycle idéal réversible qui, pour deux sources de chaleur données, est le plus efficace. En réalité, les phases de compression, de détente et de condensation sont trop délicates d'un point de vue technique. De plus, la notion de réversibilité des transferts de chaleur et de travail implique des surfaces d'échanges infiniment grandes et des transformations infiniment lentes qui ne sont pas réalisables en pratique. Le cycle de Rankine, physiquement réalisable, est le cycle thermodynamique qui se rapproche le plus du cycle de Carnot.

Dans le cycle de Rankine, contrairement au cycle de Carnot, la condensation est totale. La compression qui suit nécessite un travail moindre car le fluide est sous forme liquide. Cette amélioration fait qu'une pompe, peu consommatrice d'énergie, peut être utilisée comme compresseur et que le travail utile produit est plus important que pour le cycle de Carnot. Néanmoins, le surplus de chaleur nécessaire pour évaporer le liquide fait que le rendement du cycle de Rankine reste inférieur à celui du cycle de Carnot.

De manière générale, l'efficacité du cycle de Rankine est dans le cadre d'un cycle idéal réversible :

$$\eta_{\text{rank}} \approx \frac{W_{\text{turb}}}{Q} = \eta_{\text{carnot}}$$

Conclusion

Dans le cadre de machines thermiques dithermes, on a vu quels étaient les régimes de fonctionnement possibles (moteur, récepteur, organisation des transferts thermiques) et les rendements maximaux espérables. De façon plus détaillée, nous avons vu comment mettre en oeuvre de telles machines et surtout les écarts à la théorie que les cycles réels présentent, ainsi que leurs origines physiques et leurs conséquences pratiques. Les notions de rendement et d'efficacité constituent notamment des discussions importantes. On peut envisager une étude des machines employant plus de deux sources thermiques, et en particulier se poser la question du dépassement du rendement de Carnot dans ce cas. *Alerte spoiler :* il se trouve que multiplier les sources ne permet pas de dépasser le rendement de Carnot !

5. L'évaporation isobare du fluide peut être divisée en deux étapes successives : chauffe du liquide de façon isobare uniquement puis évaporation isobare et isotherme.

LP 15

Transitions de phases

Commentaires du jury

- 2015 : Il est dommage de réduire cette leçon aux seuls changements d'états solide-liquide-vapeur. La discussion de la transition liquide-vapeur peut être l'occasion de discuter du point critique et de faire des analogies avec la transition ferromagnétique-paramagnétique. La notion d'universalité est rarement connue ou comprise.
- 2014 : Il n'y a pas lieu de limiter cette leçon au cas des changements d'état solide-liquide-vapeur. D'autres transitions de phase peuvent être discutées.
  Jusqu'en 2014, le titre était : Étude thermodynamique d'un système constitué par un corps pur sous plusieurs phases.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Étude thermodynamique d'un système constitué par un corps pur sous plusieurs phases. Exemples.
- 2009, 2010 : Les potentiels thermodynamiques ne servent pas seulement à prédire l'équilibre, mais aussi à prévoir le sens d'évolution d'un système diphasé hors équilibre et à interpréter le diagramme des états.
- 2007, 2008 : Il s'agit bien d'une étude thermodynamique fondée sur l'utilisation des potentiels thermodynamiques, et non d'une étude descriptive des changements d'état. Il importe de comprendre l'intérêt de l'enthalpie libre pour cette leçon.
- 1998 : Cette leçon est souvent traitée de façon trop abstraite : les ordres de grandeurs élémentaires valeurs caractéristiques des pressions et des températures, des chaleurs latentes de vaporisation ou de solidification sont ignorés de même que leurs liens avec les interactions et les processus microscopiques : interactions attractives, compétition ordre/désordre . . . Les observations quotidiennes ne doivent pas être passées sous silence : transpiration, phénomènes météorologiques, ustensiles de cuisson . . .

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ **FLTCLD** ⟶
- ✍ *Physique PC*, **Sanz** ⟶ Très bon
- ✍ *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, **Callen** ⟶ Pour une vision plus fonctions d'états
- ✍ *Transitions de phase*, **Papon** ⟶ Chapitres 1 et 4
- ✍ *Thermodynamique*, **Diu** ⟶ Transition ferro-para
- ✍ *Magnétisme. 1.Fondations*, **Du Trémolet De Lacheisseire** ⟶ Tout sur le ferro-para (et LP45)

Prérequis

➢ Bases de thermo, 1er et 2eme principe

Expériences

☕

1 Transition liquide-vapeur . . . 197
1.1 Approche expérimentale . . . 197
1.2 Nécessité d'une transition de phase . . . 198
1.3 Équilibre entre deux phases . . . 200
1.4 Expression de P_{sat} et chaleur latente de transition . . . 201
1.5 Étude de $F(V)$ . . . 201
1.6 Ordre de la transition et classification d'Ehrenfest . . . 203
2 Transition ferro-para . . . 203
2.1 Approche expérimentale . . . 203
2.2 Étude thermodynamique : développement de Landau . . . 203
2.3 Prédictions du modèle . . . 204
2.4 Fondement théorique : la thermodynamique statistique . . . 205
3 Plus de théorie (Landau, exposants critiques) . . . 206

Introduction

On appelle **phase** un arrangement des constituants d'un milieu dabs lequel les propriétés thermiques, mécaniques, électriques, ... varient de façon continue.

Dès lors, nous savons par expérience qu'un corps peut se présenter sous différentes phases suivant les conditions auxquelles il est soumis. Il suffit par exemple d'évoquer le cas de l'eau pour s'en convaincre : imaginez faire bouillir de l'eau dans une casserole pendant que dehors il neige, en l'eau présente des propriétés bien différentes dans ces 3 phases.

On va alors appeler **transition de phase** la transformation macroscopique de la structure d'un milieu sous l'effet d'une instabilité et le faisant passer d'une phase à une autre.

Les modifications des propriétés du milieu lors d'une transition de phase peuvent être très variées et ne sont pas forcément une conséquence d'un réarrangement structurel, comme le montre la transition ferro-para où l'aimantation est modifiée mais l'arrangement atomique ne change pas

1 Transition liquide-vapeur

✍ Papon

Pour commencer, on va s'attaquer à une transition de phase très courante qu'on rencontre par exemple quand on veut faire cuire des pommes de terre [1] à la vapeur.

Faire bouillir de l'eau.

1.1 Approche expérimentale

✍ FLTCLD p370

Tracé des isothermes du SF_6

✍ ⏲

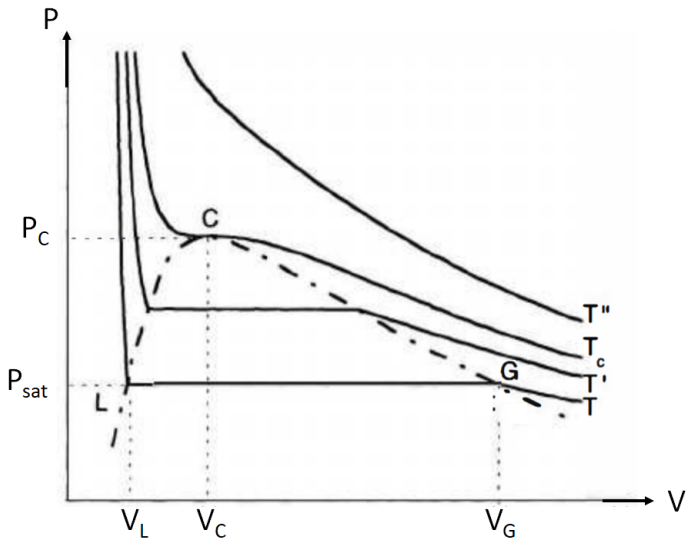
Pour différents volumes, mesurer la pression au manomètre et en préparation prendre une vidéo de l'apparition des premières gouttes de liquide.

On met en évidence l'existence du point critique avec le tracé des isothermes dans le diagramme de Watt (diagramme (P, V)).

Remarque

Le diagramme (pression,volume) est appelé diagramme de Watt. Le diagramme (pression, volume **molaire**) est appelé diagramme de Clapeyron.

1. ou Timéo...



En dessus d'une certaine valeur de température T_c, on n'observe plus de palier de pression.

Ordres de grandeur

- SF_6 : $P_c = 37.55$ bar et $T_c = 45.57°C$
- eau : $P_c = 221.1$ bar et $T_c = 374.15°C$

Comment expliquer ça ?

1.2 Nécessité d'une transition de phase

En thermodynamique, la stabilité d'un système à l'équilibre est reliée à la convexité/concavité des potentiels thermodynamiques exprimées selon les variables adéquates.

Un potentiel thermodynamique est :

- convexe sur les variables extensives $\Rightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} \geq 0$
- concave sur les variables intensives $\Rightarrow \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} \leq 0$

Pour une transition isotherme, le potentiel thermodynamique adapté est l'énergie libre $F(V,T,N)$. Puisque V est une variable extensive, F doit être convexe par rapport à V donc

$$\begin{aligned} \text{stabilité} &\iff \left.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right|_{T,N} \geq 0 \\ &\iff \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T,N} \leq 0 \qquad \text{car } \mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T + \mu\mathrm{d}N \end{aligned}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le système est instable et il doit subir une transition de phase : le fluide doit se diphaser.

Utilité du diagramme de Watt

On peut regarder très rapidement les conditions de stabilité sur un diagramme de Watt en observant la pente d'une isotherme : on a instabilité si cette pente est positive.

Prenons maintenant quelques exemples.

- **Gaz parfait :** $PV = nRT \Rightarrow \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T,N} = -\frac{nRT}{V^2} \leq 0$

Le gaz parfait semble toujours remplir la condition de stabilité, ce qui signifie qu'une transition de phase ne serait jamais nécessaire ! En réalité, il s'agit juste d'une conséquence de l'hypothèse de non-interaction entre les particules, qui est de moins en moins vérifiée au fur et à mesure que la densité du gaz augmente.

- **Gaz de Van der Waals :** $\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$

Dans cette équation d'état, $a\frac{n^2}{V^2}$ représente l'attraction entre les particules et nb est un volume interdit. On a alors

$$P = \frac{nRT}{V_n b} - a\frac{n^2}{V^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T,N} = -\frac{nRT}{(V_n b)^2} + 2a\frac{n^2}{V^2}$$

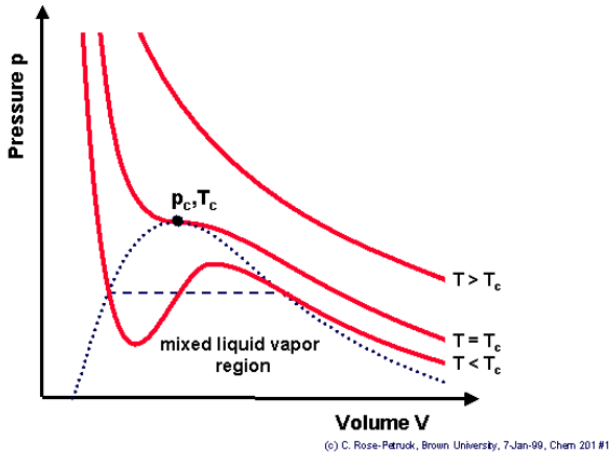
Cette fois, on va pouvoir trouver un triplet (P_c, V_c, T_c) qui va délimiter la faisabilité de la transition. on le trouve en calculant :

- $\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_{T,N} = 0$ (palier horizontal)
- $\left.\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right|_{T,N}$ (changement de concavité)

On obtient :

$$P_c = \frac{a}{27b^2}$$
$$T_c = \frac{8a}{27bR}$$
$$V_c = 3b$$

On peut ainsi, à partir de ces équations, déterminer a et b.



En traçant les isothermes sur le diagramme de Watt, on voit d'ailleurs clairement la zone d'instabilité du système pour laquelle P croît avec V. On appelle **courbe spinodale** la courbe délimitant la zone d'instabilité des isothermes

de Van der Waals, *i.e.* la courbe délimitée par le minimum local et le maximum local délimitant la portion croissante de F.

Comment passer d'une instabilité à la coexistence de deux phases ?

1.3 Équilibre entre deux phases

Dans cette partie, on choisit de se placer à température constante. Alors

$$\mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

On considère donc un système diphasé fermé, *i.e.* qui peut échanger de l'énergie mais pas de particules avec son environnement, en contact avec un thermostat. Ainsi, en notant, V_i et N_i le volume et le nombre de particules dans la phase i, on peut écrire

$$V_2 = V - V_1 \qquad \text{et} \qquad N_2 = N - N_1$$

Par additivité de F, on a également

$$F = F_1(V_1, N_1) + F_2(V_2, N_2)$$

On peut en déduire les conditions d'équilibre :

Équilibre mécanique :

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial F}{\partial V_1}\right|_{T,N_1} = 0 &\iff \left.\frac{\partial F_1}{\partial V_1}\right|_{N_1} + \frac{\partial V_2}{\partial V_1}\left.\frac{\partial F_2}{\partial V_2}\right|_{N_1} = 0\\ &\iff -P_1 - (-P_2) = 0\\ &\iff \boxed{P_1 = P_2}\end{aligned}$$

Équilibre chimique :

$$\left.\frac{\partial F}{\partial V_1}\right|_{T,N_1} = 0 \iff \boxed{\mu_1 = \mu_2}$$

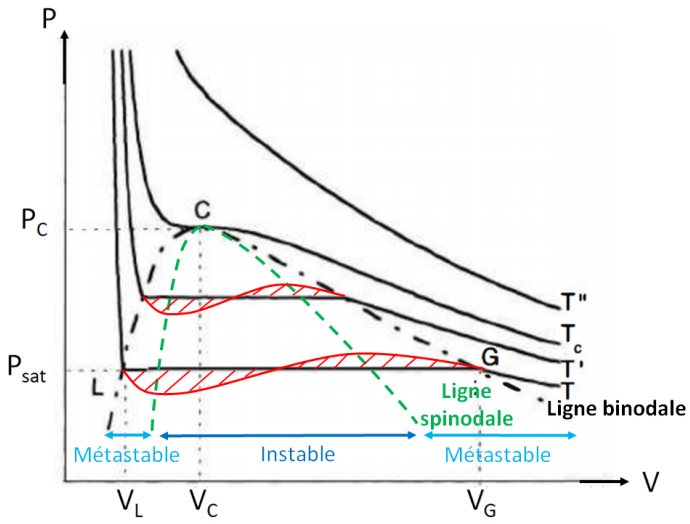
Ces conditions ne nous disent rien sur comment placer le palier de pression sur le diagramme de Watt. On peut néanmoins écrire

- $F(T, V_2, N) = F(T, V_1, N) + \int_{V_1}^{V_2} \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_{T,N} \mathrm{d}V \iff F_2 = F_1 - \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V$
- $\mathrm{d}G = V\mathrm{d}P - S\mathrm{d}T + \mu\mathrm{d}N$ (Gibbs-Duhem) donc $\mathrm{d}F = \mathrm{d}(G - PV) = \mu\mathrm{d}N - P\mathrm{d}V$ à T fixée donc $F = \mu N - PV$ d'où $F_2 - F_1 = -P_{coexistence}(V_2 - V_1)$ à μ fixé.

On en déduit que

$$P_{coexistence}(V_2 - V_1) = \int_{V_1}^{V_2} P\mathrm{d}V \iff \boxed{\int_{V_1}^{V_2} (P - P_{\text{coexistence}})\mathrm{d}V = 0}$$

L'aire entre la courbe est le plateau est donc nulle. C'est ce qu'on appelle la **construction de Maxwell**.



On appelle alors **courbe binodale** la courbe tracée par les extrémités du palier de pression. La pression correspondant à ce palier est appelée **pression de vapeur saturante** P_{sat}.

La zone située entre la courbe binodale et la courbe spinodale est la zone de **métastabilité**. Elle correspond à des états qui ne sont pas intrinsèquement instables mais qui ne sont pas diphasés. La surfusion d'un liquide est un bon exemple de système métastable.

1.4 Expression de P_{sat} et chaleur latente de transition

On peut trouver l'expression de P_{sat} en posant $\mu_1(P_{\text{sat}}, T) = \mu_2(P_{\text{sat}}, T)$. Puisque $N\mathrm{d}\mu = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P$, on a :

$$(S_2 - S_1)\mathrm{d}T = (V_2 - V_1)\mathrm{d}P_{\text{sat}} \iff \frac{\mathrm{d}P_{\text{sat}}}{\mathrm{d}T} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}$$

On aboutit à **l'équation de Clapeyron** :

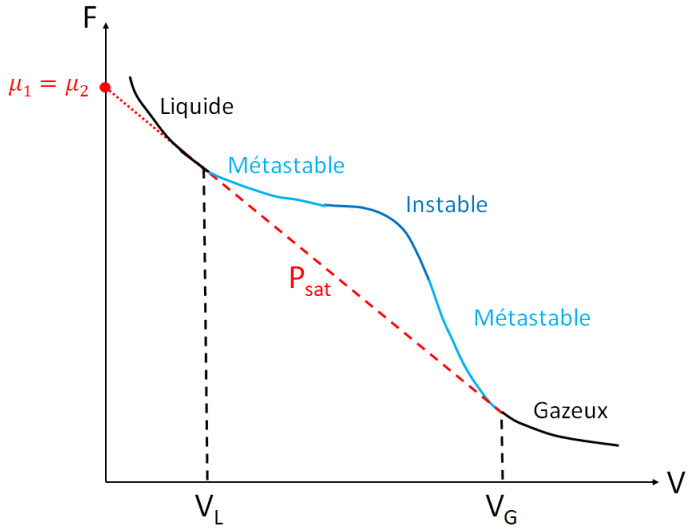
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P_{\text{sat}}}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}}$$

avec v_1 et v_2 des volumes massiques et $L = T\Delta S$ la **chaleur latente de transition** qui correspond l'énergie libérée lors de la transition de phase d'1 kg de l'espèce considérée. on voit que L est reliée à la discontinuité d'entropie entre les deux phases et est donc une caractéristique des transitions du 1er ordre (on parle de ça dans la suite de la leçon).

Pour l'eau, la chaleur latente massique de vaporisation vaut 2264.76 kJ/kg à pression et température ambiante. Il faut donc 6 fois plus d'énergie pour chauffer 1 kg de 0 à 100°C que pour vaporiser la même masse d'eau, et il faut la même énergie pour vaporier 1 kg d'eau que pour monter une voiture en haut de la Tour Eiffel.

1.5 Étude de $F(V)$

Tous les résultats précédents peuvent également être trouvés en étudiant le tracé de F (qui est ici potentiel thermodynamique adéquat) en fonction de V.



La zone où F est concave, *i.e.* $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right|_{T,N} \leq 0$, est la zone d'instabilité. On retrouve la zone de métastabilité entre les minima locaux de F et les points d'inflexion, où on a quand même $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right|_{T,N} \geq 0$. Elle correspond à un équilibre *local* et non global.

On peut également s'apercevoir que les deux minima de F ont une tangente commune : on peut alors tracer une droite reliant les deux minima de F et tangente à F en ces deux points. Si on suit cette droite, on se rend compte que F sera plus faible que si on restait sur la courbe correspondant au système monophasé. Ainsi, l'énergie *réelle* du système sera décrite par cette droite entre les volumes V_1 et V_2. Cette droite correspond au système diphasé, et la transition de phase est due à une minimisation de l'énergie.

Pourquoi cette droite correspond au système diphasé ?

Pour un système diphasé, on peut écrire

$$V = xV_1 + (1-x)V_2 \qquad \text{avec un paramètre } x \text{ entre 0 et 1}$$

Puisque V et x sont liés par une relation affine, tracer $F(V)$ revient à tracer $F(x)$. Par additivité de F, on a donc

$$F_{\text{diphasé}}(x) = xF_1(V_1) + (1-x)F_2(V_2)$$

C'est bien une droite !

Par ailleurs on a par convexité

$$F_{\text{diphasé}} = xF_1(V_1) + (1-x)F_2(V_2) \leq F(xV_1 + (1-x)V_2) = F_{\text{monophasé}}$$

La convexité de F et sa minimisation sont équivalentes.

Lorsqu'on construit cette droite, on peut écrire l'équation de la tangente à F en V_1

$$y = F(V_1) + \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_{V=V_1}(V - V_1) = F_1 - P_1(V - V_1) = F_1 + P_1V_1 - P_1V = \mu_1 N - P_1V \qquad \text{(Gibbs-Duhem)}$$

ou bien celle de la tangente à F en V_2

$$y = F(V_2) + \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_{V=V_2}(V - V_2) = F_2 - P_2(V - V_2) = F_2 + P_2V_2 - P_2V = \mu_2 N - P_2V \qquad \text{(Gibbs-Duhem)}$$

Or ces deux tangentes ont la même pente et la même ordonnée à l'origine, donc $P_1 = P_2 = P_{\text{sat}}$ et $\mu_1 = \mu_2$.

1.6 Ordre de la transition et classification d'Ehrenfest

Cette classification est un outil pour étudier de manière systématique les transitions de phase sous l'angle du potentiel thermodynamique.

Définition générale : Lorsqu'une variable extérieure au système est modifiée, cela se traduit par une instabilité de la phase dans laquelle se trouve le système. On a alors discontinuité ou divergence d'une ou plusieurs dérivées de potentiels thermodynamiques. On a alors changement de phase.

On dira que la transition est d'ordre 1 si la discontinuité touche une dérivée, et d'ordre 2 si elle touche une dérivée seconde, mais pas de dérivée première.

Exemple : $\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{V,N} = -S$, $S_2 - S_1 = \frac{L}{T_0}$. Si on a une transition d'ordre 1 en F, il y a une chaleur latente L, comme dans le cas de la solidification ou vaporisation de l'eau. L'exemple de la section suivante est celui d'une transformation d'ordre 2.

2 Transition ferro-para

Certains matériaux présentent une aimantation non nulle à température ambiante. On les appelle les matériaux ferromagnétiques. Exemples : fer, cobalt, nickel.

2.1 Approche expérimentale

La chute du clou quand il fait chaud
À la Peter !

Le fer est un matériaux ferromagnétique, capable d'être très aimanté. Ainsi contre un aimant, il se colle. Cependant, lorsque qu'on le chauffe, on remarque que la bestiole se détache. La tempétrature à laquelle le fer cesse d'être aimanté est nommée **température de Curie** du fer, et elle vaut 1043 K.

Nous allons au cours de cette section caractériser cette transition. Notons pour cela $\overrightarrow{M}$ l'aimantation du matériaux, qui microscopiquement correspond à la propension qu'ont les spins du fer à s'aligner. Il s'agit du moment magnétique par unité de volume. On va chercher à déterminer sa variation avec la température.

Expérimentalement on a vu que $\overrightarrow{M}$ est une fonction de T, et qu'il existe une température T_c telle que $\forall T > T_c$, $\overrightarrow{M} = 0$. On va donc cherche le potentiel thermodynamique qui décrit ce bazar !

2.2 Étude thermodynamique : développement de Landau

✍ Diu p.215

Lev D.[2] Landau propose de décrire le système en utilisant un potentiel $\phi(\overrightarrow{M}, T)$ polynomial. Quelles doivent être les propriétés de ce potentiel ? Tout d'abord, pour un matériaux isotrope, ϕ doit dépendre de la norme de $\overrightarrow{M}$, donc de M^2. On fait alors un développement de Taylor autour de $M = 0$

$$\phi(T, M) = A_0(T) + \alpha(T)M^2 + \frac{\beta(T)}{2}M^4 + \mathcal{O}(M^6) \tag{15.1}$$

2. Non, en vrai c'est juste Lev, mais bon...

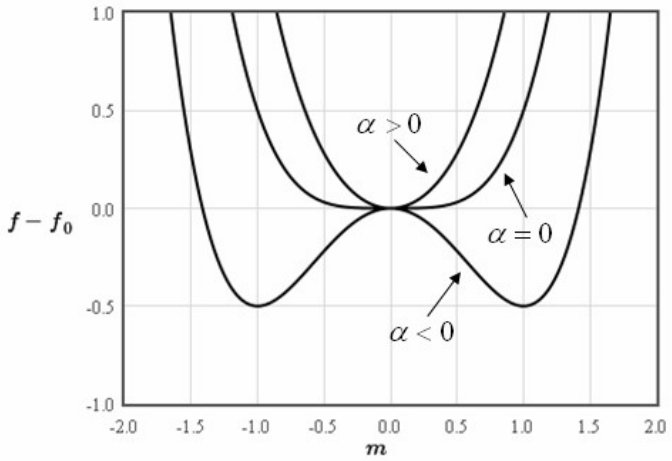
On cherche alors $M_c(T)$ tel que ϕ soit un minimum, puisque c'est un potentiel thermodynamique.

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial M}\right|_T = 0 \Leftrightarrow 2\alpha(T)M + 2\beta(T)M^3 = 0 \tag{15.2}$$

On a alors 3 solutions : $M = 0$ ou $M = \pm\sqrt{-\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}}$. Pour que la deuxième soit acceptable il faut bien sur que $T < T_C$, et que α et β soient de signa opposé.

La deuxième condition, celle de la stabilité, demande que $\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial M^2}\right|_T > 0$. Au vu des résultats expérimentaux, on doit avoir, pour $T < T_c$, $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Pour $T > T_c$, α doit changer de signe, et β on s'en fiche. Finalement, en première approximation, on peut écrire :

$$\phi(T, M) = A_0(T) + \alpha \times (T - T_c)M^2 + \frac{\beta}{2}M^4 \qquad \text{avec } \alpha \text{ et } \beta > 0 \text{ qui dépendent du matériaux.} \tag{15.3}$$



2.3 Prédictions du modèle

Ici M est le paramètre d'ordre de la transition, et ϕ est l'énergie libre F !

Le modèle dit que $M(T) = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(T_c - T)}$ si $T < T_c$ et $M = 0$ si $T > T_c$. Calculons alors F.

$$\begin{cases} F(T, M) & = A_0(T) - \dfrac{\alpha^2}{2\beta}(T_c - T)^2 \text{ si } t < T_c \\ & = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{15.4}$$

Ainsi F est continue en T_c, $\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{...}$ l'est aussi, mais $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right|_{...}$ ne l'est pas. Il s'agit de ce que l'on appelle une **transition du deuxième ordre** en T_c.

Remarque : $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ est continue, donc il n'y a pas de chaleur latente, ni de coéxixtence de deux phases. $C_v = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$ n'est pas continue.

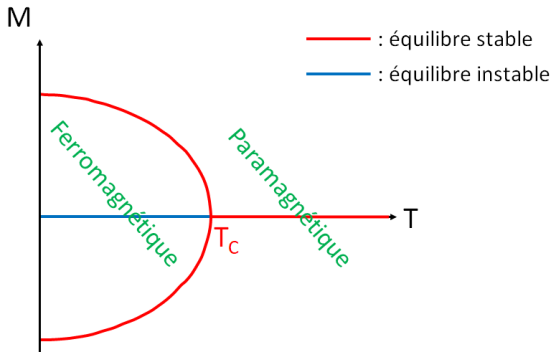


Figure 15.1 – La bifurcation fourche de cet équilibre.

OdG : Fer : 1043K, Cd : 1388K, Ni, 627K.

2.4 Fondement théorique : la thermodynamique statistique

On peut remonter de manière explicite à la forme de l'aimantation grâce à un petit raisonnement de physique statistique et une équation autocohérente sur le modèle d'Ising.

C'est un modèle parti- culièrement important de la physique statistique, à priori simple, mais encore largement non résolu.

N sites sur un réseau à d dimensions sont occupés par des spins pouvant occuper deux états (on note $s_i = \pm 1$). Ils sont placés dans un champ magnétique avec lequel ils interagissent. Ils ont également une interaction entre plus proches voisins. cherche a modéliser ainsi un cristal magnétique (l'origine physique des interactions est d'ailleurs complexe, et est liée à une interaction d'échange). On suppose une interaction attractive. En résumé,

$$H = -B\sum_i s_i - J\sum_{<i,j>} s_i s_j \tag{15.5}$$

On se place dans l'ensemble canonique, et on cherche à connaître la fonction de partition $Z = \sum_\mu e^{-\beta E_\mu}$, μ désignant la liste des micro-états. L'interaction tend à organiser les spins, tandis que la température tend à désorganiser, comme pour le fluide de Van der Waals. Enfin, la variable d'interêt est l'aimantation moyenne, avec $<s_i>$ la moyenne d'ensemble des spins :

$$M = \frac{1}{N}\sum_i < s_i >= \frac{1}{N\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \tag{15.6}$$

Le calcul se mène à 1D, mais requiert des outils que l'on ne peut décemment pas introduire ici. À 2D, (et B =0), la solution analytique est réputée extraordinairement difficile à obtenir. Les maths étant difficiles, on utilise une hypothèse simplificatrice, le **champ moyen**. On cherche a négliger les fluctuations des spins dans le terme d'interaction, que l'on résume en définitive par un champ moyen crée par les spins voisins.

$$\begin{aligned}
s_i s_j &= (s_i + < s_i > - < s_i >)(s_j + < s_j > - < s_j >) && (15.7)\\
&= (s_i - M)(s_j - M) + M(s_i - M) + M(s_j - M) + M^2 && (15.8)\\
&\simeq M(s_i - M) + M(s_j - M) + M^2 && (15.9)\\
\Rightarrow E &= -J\sum_{<i,j>}(M(s_i + s_j) + M^2) - B\sum_i s_i && (15.10)\\
&= \frac{1}{2}JNzM^2 - (JMz + B)\sum_i s_i && (15.11)
\end{aligned}$$

Avec z le nombre de plus proches voisins. On voit un champ efficace apparaitre : $B_{eff} = B + JMz$. Chaque spin est maintenant indépendant des autres, et les sites étants discernables, on factorise la fonction de partition :

$$Z = \exp\left(-\frac{1}{2}\beta JNzM^2\right)\left(e^{\beta B_{eff}} + e^{-\beta B_{eff}}\right)^N \tag{15.12}$$

$$\Rightarrow M = \tanh(\beta B_{eff}) \tag{15.13}$$

Evidement, B_{eff} dépend de M. Nous sommes face à une équation d'auto-cohérence. Pour résoudre en M, le plus simple est l'analyse graphique.

Sortir la simulation géogébra !

Si $B = 0$, on retrouve tout ce que l'on vient de voir ! Et encore mieux, on a une magnifique expression pour $T_c = \frac{Jz}{k_B}$!

3 Plus de théorie (Landau, exposants critiques)

✍ `guyomar_landau.pdf`

Conclusion

Ouverture : diagrammes binaires.

LP 16

Facteur de Boltzmann

Commentaires du jury

- 2016 : La contextualisation est primordiale dans cette leçon. Jusqu'en 2016, le titre était : Étude statistique d'un système en contact avec un thermostat. Probabilité canonique.
- 2015 : Développer une théorie sans illustrations n'est pas acceptable. D'ailleurs, l'application de la probabilité canonique à des situations concrètes et classiques, lors de l'entretien, révèle parfois une culture assez limitée en physique.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Étude statistique d'un système en contact avec un thermostat. Probabilité canonique. Applications.
  Jusqu'en 2012, le titre était : Introduction au facteur de Boltzmann à partir d'un exemple au choix.
- 2012 : Le jury invite les candidats à définir proprement le cadre statistique dans lequel ils se placent, et les
- 2010 : On peut introduire les statistiques quantiques à l'occasion de cette leçon, et s'intéresser à la limite classique.
- 2008 : Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées. L'atmosphère en équilibre isotherme n'est qu'un exemple parmi d'autres permettant d'introduire le facteur de Boltzmann.
  Jusqu'en 2007, le titre était : Modèle de l'atmosphère terrestre en équilibre isotherme. Introduction au facteur de Boltzmann. Applications.
- 2007 : Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées. L'atmosphère en équilibre isotherme est un exemple parmi d'autres permettant d'introduire le facteur de Boltzmann. Il n'est pas le seul et le jury souhaite laisser davantage de liberté aux candidats. Dans la liste 2008, le titre de la leçon correspondante est modifié dans ce sens.
- 2006 : Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées.
- 2005 : Curieusement, la valeur numérique de la constante de Boltzmann n'est pas connue. D'une manière générale, les leçons présentées pêchent par manque d'ordres de grandeur des énergies mises en jeu.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique*, **Bertin, Faroux, Renault** ⟶ Introduction au facteur de Boltzmann
- ✍ *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, **Callen** ⟶ Concept d'entropie, description canonique
- ✍ *Physique Statistique*, **Diu, Guthmann, Lederer, Roulet** ⟶ Description canonique

Prérequis

- ➢ Thermodynamique classique
- ➢ Ensemble micro-canonique
- ➢ Mécanique
- ➢ Mathématiques

Expériences

☕

1 Exemples introductifs . . . 209
1.1 L'atmosphère isotherme . . . 209
1.2 Répartition des porteurs de charges dans un électrolyte soumis à une différence de potentiel . . . 210
2 Ensemble canonique . . . 211
2.1 Définitions . . . 211
2.2 Probabilité des micro-états . . . 212
2.3 Retour sur la fonction de partition . . . 214
2.4 Application au paramagnétisme . . . 215
2.5 Application au gaz parfait monoatomique (bof) . . . 215
3 Théorème d'équipartition et applications . . . 217
3.1 Hypothèses . . . 217
3.2 Démonstration et énoncé . . . 217
3.3 Applications . . . 218

Introduction

L'ensemble microcanonique, qui est l'étude des systèmes isolés nous a permis de poser les bases de la physique statistique. On a postulé l'équiprobabilité de tous les états microscopiques accessibles pour un système isolé à l'équilibre et on a alors défini l'entropie microcanonique d'un système $S = k_B \ln \Omega$ en introduisant la constante de Boltzmann $k_B = 1.380\,648\,52 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ et Ω le nombre de microétats accessibles. Cependant, tous les systèmes ne sons pas isolés, et dès que le système en question est en contact avec un thermostat, il y a des échange de chaleur. Il est alors nécessaire d'introduire un nouveau formalisme : l'ensemble canonique. Ce modèle va nous permettre d'expliquer de nombreux phénomènes de la physique

Donner des dates pour tout !

Rappel : ensemble micro-canonique

C'est plus pour se rafraîchir la mémoire qu'autre chose, pour cette leçon on met cette partie dans les pré-requis.

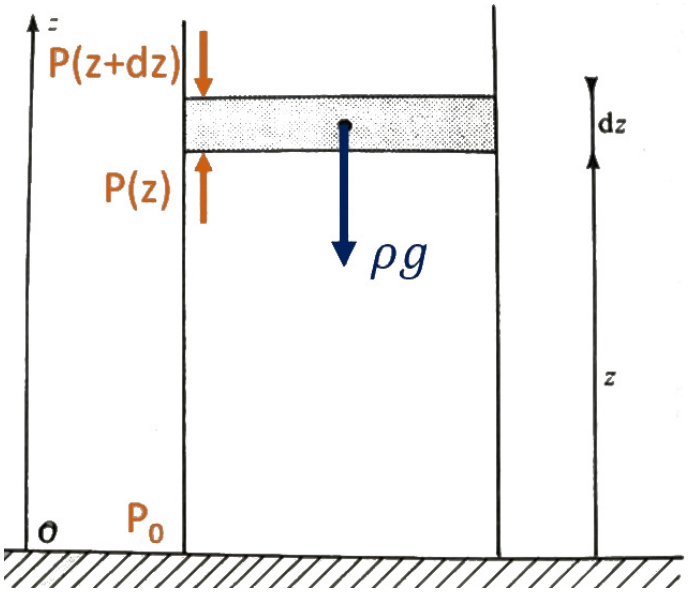
Wikipedia est ton ami : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_microcanonique.

1 Exemples introductifs

Ne présenter qu'un exemple suffit.

1.1 L'atmosphère isotherme

✍ BFR p97



Supposons que l'air est un gaz parfait et que la température soit constante pour une altitude z donnée. On note $\mathrm{d}P$ la variation de pression entre les alitutides z et $z + \mathrm{d}z$. L'équilibre hydrostatique donne :

$$\mathrm{d}P = -\rho g \mathrm{d}z \tag{16.1}$$

L'air étant un GP, on peut écrire $\rho = \dfrac{PM}{RT}$ avec $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ et donc obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}z \tag{16.2}$$

On peut intégrer cette équation pour obtenir l'expression de P :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}z\right) = P_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) \qquad \text{avec} \qquad k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \tag{16.3}$$

On voit de nouveau apparaître la constante de Boltzmann, on on reconnaît également l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgz$.

On peut également en faire une interprétation statistique (✍ BFR p99). Pour cela, on considère un cylindre de surface S et de hauteur infinitésimale $\mathrm{d}z$. La loi des GP donne $P\mathrm{d}V = RT\mathrm{d}n$, soit $PS\mathrm{d}z = RT\mathrm{d}n$ avec $\mathrm{d}n$ la quantité de matière infinitésimale de particules d'air contenues dans le cylindre. On peut en déduire la quantité de particules dans le cylindre simplement en écrivant :

$$\mathrm{d}N = \mathcal{N}_A \mathrm{d}n = \frac{\mathcal{N}_A PS}{RT}\mathrm{d}z = \frac{SP_0}{k_B T}\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)\mathrm{d}z \tag{16.4}$$

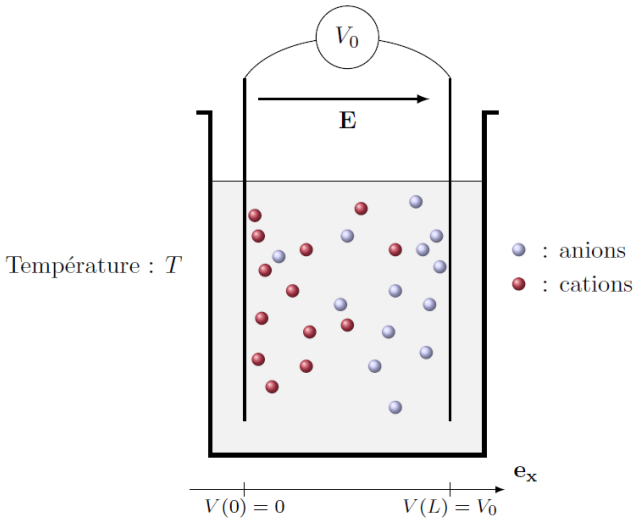
$$\boxed{\mathrm{d}N = \frac{SP_0}{k_B T}\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right)\mathrm{d}z} \tag{16.5}$$

Le terme $\exp\left(-\frac{E_p}{k_B T}\right)$ est appelé le **facteur de Boltzmann**. Il caractérise la compétition entre l'énergie d'une particule, ici l'énergie potentielle de pesanteur, et $k_B T$ que l'on assimile à une énergie d'agitation thermique $k_B T$ (qui équivaut à l'énergie cinétique microscopique $\frac{3}{2}k_B T$ puisque la vitesse quadratique des particules d'un GP s'écrit $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$). Cette compétition donne une répartition exponentielle des particules, mais il ne faut cependant pas s'imaginer que les particules sont réellement réparties de la sorte. Au niveau microscopique, elles ont toutes une vitesse, et cette représentation est celle à un instant t. On peut réinterpréter cette densité (plutôt N/N_{tot}) comme la probabilité $\mathbb{P}$ pour une particule de se trouver à une altitude comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$.

1.2 Répartition des porteurs de charges dans un électrolyte soumis à une différence de potentiel

✍ BFR chap 5 exo 11

On considère une solution aqueuse contenant des ions, dans laquelle sont plongées des électrodes de potentiels fixés. La solution est thermostatée à une température T. On note V_0 la différence de potentiel imposée, et $\vec{E}$ le champ électrique résultant. La répartition des charges le long le l'axe x résulte de deux phénomènes antagonistes : $\vec{E}$ tend à déplacer les anions vers les zones de fort potentiel et les cations vers celles de faible potentiel, créant ainsi un gradient de densité et de la diffusion de particule par la loi de Fick en sens opposé.



Mettons en équation ce qu'on vient de dire. On note q la charge des ions, μ leur mobilité et n leur densité dans l'électrolyte. Le champ $\overrightarrow{E}$ crée un courant de particule $\overrightarrow{j_E}$ dont l'expression est obtenue par un PFD appliqué à l'ion soumis à $\overrightarrow{E}$ et à la force de Stokes dues à la viscosité de l'électrolyte (donc μ est reliée à la viscosité de l'électrolyte et un rayon de l'ion). On obtient :

$$\overrightarrow{j_E} = \mu q n \overrightarrow{E} = -\mu q n \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} \tag{16.6}$$

La loi de Fick donne quant à elle le courant de diffusion

$$\overrightarrow{j_D} = -D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} \tag{16.7}$$

avec D le coefficient de diffusion de l'ion dans l'électrolyte, relié à μ par la formule de Stokes-Einstein : $6\pi\eta D = k_B T \iff D = \mu k_B T$. À l'équilibre,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{j_E} + \overrightarrow{j_D} = 0 &\iff -\mu q n \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} - D\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{e_x} = 0 \\ &\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(n)\right) = -\frac{q}{k_B T}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ &\iff n(x) = n_0 \exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \end{aligned} \tag{16.8}$$

Le terme $\exp\left(-\dfrac{E}{k_B T}\right)$ est appelé le **facteur de Boltzmann**. Il caractérise la compétition entre l'énergie d'une particule, ici l'énergie électrostatique de l'ion, et $k_B T$ que l'on assimile à une énergie d'agitation thermique $k_B T$ (qui équivaut à l'énergie cinétique microscopique $\dfrac{3}{2}k_B T$ puisque la vitesse quadratique des particules d'un GP s'écrit $v = \sqrt{\dfrac{3k_B T}{m}}$). Dans le cas d'une charge $q > 0$, on distingue 2 cas :

- $qV < k_B T$: il est possible de trouver des charges dans les zones où $V(x) \neq 0$, *i.e.* hors de la zone d'énergie potentielle minimale. En effet, comme $qV/k_B T < 1$, le facteur de Boltzmann reste non nul pour $V(x) > 0$
- $qV \gg kBT$: seul $V \simeq 0$ permet d'obtenir un facteur de Boltzmann non nul.

Ainsi, l'agitation thermique permet à un ion d'atteindre les zones de potentiel élevé. Dans le cas $qV \gg k_B T$, les chocs moléculaires successifs ont très peu de chance de parvenir à communiquer à un ion l'énergie nécessaire pour atteindre les zones de potentiel non nul. L'agitation thermique agit donc comme un réservoir d'énergie.

> *Le facteur de Boltzmann intervient dans de nombreux phénomènes, que ce soit dans la répartition des molécules pour l'atmosphère isotherme, la répartition des ions dans un électrolyte ou encore la loi d'Arrhénius permettant la détermination de constantes de vitesse en cinétique chimique. Tous ces systèmes ont un point commun : ils sont de température fixée. Le facteur de Boltzmann est en fait caractéristique des systèmes en équilibre thermique avec un thermostat, comme nous allons le voir en détail dans la prochaine section.*

↓

2 Ensemble canonique

2.1 Définitions

Mais dis moi Timéo, tu sais ce que c'est un thermostat ?

Soit deux systèmes Σ et $\mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{T}$ est un thermostat pour Σ si

- $\mathcal{T}$ est beaucoup plus grand que Σ et n'est donc pas affecté par les échanges d'énergie avec Σ.
- $\mathcal{T}$ impose sa température à Σ
- $\mathcal{T}$ et Σ sont faiblement couplés, et n'échangent que de la chaleur.
- $\mathcal{T}$ est le seul système a avoir ces caractéristiques envers Σ.

On peut alors considérer que le système $\{\mathcal{T} \cup \Sigma\}$ est isolé, et que son énergie $E_0 = E_\mathcal{T} + E_\Sigma$ est constante.

Une définition plus rigoureuse d'un critère de thermostatage est le suivant :

$$\left|\frac{\delta E_\mathcal{T}}{E_\mathcal{T}}\right| \ll \left|\frac{\delta E_\Sigma}{E_\Sigma}\right| \tag{16.9}$$

Définition : On se place dans l'**ensemble canonique** lorsque le système que l'on étudie est en contact avec un thermostat.

Josiah Willard Gibbs, 19eme siècle

Exemple de système thermostaté : Une fiole dans l'atmosphère se comporte comme un système thermostaté, dont le thermostat est l'atmosphère.

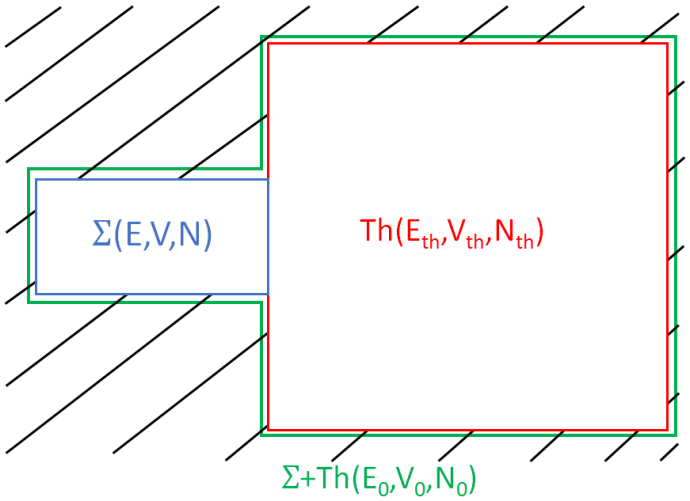


FIGURE 16.1 – Schématisation d'un thermostat

2.2 Probabilité des micro-états

Mise en place

Définition : Un **Micro-État** est une spécification détaillée d'une configuration spécifique du système. C'est un état du système.

Le système $\{\mathcal{T} \cup \Sigma\}$ est isolé, par conséquent on peut lui appliquer la statistique micro-canonique et le postulat fondametal, qui est que tous les micro-états accessibles sont équiprobables.

On note $\Omega_X(\alpha)$ le nombre de microétats du système X à l'énergie E_α.

Première expression

On cherche la probabilité que Σ soit dans le micro-état ℓ, d'énergie E. Être dans le micro-état ℓ force le thermostat a être dans un état d'énergie $E_0 - E_\ell = E_L$. Tous les états (ℓ, L) sont équiprobable, et il y en a $\Omega_\mathcal{T}(L)$.

Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_\ell$ que Σ soit dans l'état ℓ revient alors à compter le nombre d'état accessibles à $\mathcal{T}$ à E_L, $\Omega_\mathcal{T}(L)$, et à le diviser par le nombre total d'états à E_0, $\Omega_{\Sigma\cup\mathcal{T}}(E_0)$.

$$\mathbb{P}_\ell = \frac{\Omega_\mathcal{T}(L)}{\Omega_{\Sigma\cup\mathcal{T}}(E_0)} \tag{16.10}$$

Remarque : Si il y a plusieurs états d'énergie E_ℓ pour Σ, la formule reste la même, car on divise la probabilité par $\Omega_\Sigma(\ell)$ dans $\Omega_{\Sigma\cup\mathcal{T}}(E_0)$.

Mise en place des approximations

Comme $\Omega_{\Sigma\cup\mathcal{T}}(E_0)$ est indépendant de ℓ, on notera $\Omega_{\Sigma\cup\mathcal{T}}(E_0) = \dfrac{1}{C}$ par la suite.

On exprime l'entropie du thermostat, et on y fait un DL autour de E_0, puisque $\dfrac{E_\ell}{E_0} \ll 1$

$$S_\tau(E_0 - E_\ell) = k_B \ln(\Omega_\mathcal{T}(E_0 - E_\ell)) \simeq k_B \left(\ln(\Omega_\mathcal{T}(E_0)) - E_\ell \frac{\partial S_\tau}{\partial E}(E_0)\right) \tag{16.11}$$

Ainsi on peut écrire $\mathbb{P}_\ell$;

$$\mathbb{P}_\ell = C \exp\left(\frac{S_\mathcal{T}(E_0)}{k_B}\right) \exp\left(-\frac{E_\ell}{k_B}\frac{\partial S_\tau}{\partial E}(E_0)\right) \tag{16.12}$$

Or le système que l'on considère est un thermostat, que l'on peut considèrer comme un système isolé, donc $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S$, et ainsi

$$k_B \frac{\partial S_\tau}{\partial E}(E_0) = \frac{1}{T} \tag{16.13}$$

On obtient alors la puissance, avec $\dfrac{1}{Z}$ une fonction de T uniquement.

$$\mathbb{P}_\ell = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_\ell}{k_B T}\right) \tag{16.14}$$

Trouver la fonction de partition

Pour trouver l'expression exacte de Z, il suffit de se souvenir que la probabilité de tirer une carte quand on tire une carte, c'est 1.

$$\sum_\ell \mathbb{P}_\ell = 1 \iff \frac{1}{Z}\sum_\ell \exp\left(\frac{E_\ell}{k_B T}\right) = 1 \tag{16.15}$$

$$\iff Z = \sum_\ell \exp\left(\frac{E_\ell}{k_B T}\right) \tag{16.16}$$

On appelle $Z(T)$ la fonction de partition du système.

Quelques résultats

On remarque tout de suite que seuls les états d'énergie inférieure à k_BT ont une propabilité forte d'être atteints. $\mathrm{k_B}T$ fixe l'ordre de grandeur de l'énergie donnée à Σ par le thermostat.

On peut calculer le rapport de deux probabilité très facilement. Deux états ont une prbabilité similaire si leur différence d'énergie est faible devant l'énergie seuil qu'est $\mathrm{k_B}T$.

$$\frac{\mathbb{P}_1}{\mathbb{P}_2} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{\mathrm{k_B}T}\right) \tag{16.17}$$

Remarque : Ici on ne tient pas compte de la dégénérescene, cependant, on peut la noter $g(E_\ell)$ et la prendre en compte :

$$\frac{\mathbb{P}_1}{\mathbb{P}_2} = \frac{g(E_1)}{g(E_2)}\exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{\mathrm{k_B}T}\right) \tag{16.18}$$

2.3 Retour sur la fonction de partition

On vient de poser $Z(T) = \sum_\ell \exp\left(\frac{E_\ell}{k_BT}\right)$ la fonction de partition. Pour rendre eplicitement compte de la multiplicité, puisqu'on somme sur les énergie E_ℓ comptés avec, on peut écrire $Z(T) = \sum_E \Omega_\Sigma(E)\exp\left(\frac{E}{k_BT}\right)$. On notera par la suite $\beta = \frac{1}{\mathrm{k_B}T}$.

- **Énergie moyenne :**

$$\begin{aligned} < E > &= \sum_\ell \mathbb{P}_\ell E_\ell \\ &= \sum_\ell \frac{E_\ell}{Z} e^{-\beta E_\ell} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\sum_\ell e^{-\beta E_\ell}\right) \\ < E > &= -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta} \end{aligned} \tag{16.19}$$

- **Énergie libre :**

$$\begin{aligned} F &=< E > -TS \\ \text{et } S &= -\mathrm{k_B}\sum_\ell \mathbb{P}_\ell \ln \mathbb{P}_\ell \\ &= -\mathrm{k_B}\sum_\ell \frac{e^{-\beta E_\ell}}{Z}\left(-\beta E_\ell - \ln Z\right) \\ &= \frac{\mathrm{k_B}\beta}{Z}\sum_\ell E_\ell e^{-\beta E_\ell} + \frac{\mathrm{k_B}\ln Z}{Z}\sum_\ell e^{-\beta E_\ell} \\ &= \frac{< E >}{T} + \mathrm{k_B}\ln Z \\ \text{alors } F &= -\mathrm{k_B}T\ln Z \end{aligned} \tag{16.20}$$

  On retrouve $S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right|_{V,N}$, $P = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_{T,N}$, et $\mu = \left.\frac{\partial F}{\partial N}\right|_{T,P}$. D'ailleurs on a calculé F parce que dans le cas d'un système thermostaté, c'est la bonne variable (LP13).

- $\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial U}\right|_{V,N}$

Limite continue

Si on prend un système qui a des énergies continues (ou suffisament proches pour être continuisés), on peut écrire

$$Z = \int g(E) \exp\left(-\frac{E}{\mathrm{k_B}T}\right) \mathrm{d}E$$

Avec $g(E)$ la densité d'états d'énergie, *i.e.* le nombre de microétats entre E et $E + \mathrm{d}E$.

2.4 Application au paramagnétisme

✍ NGô p.111 mais pas très clair (mélange entre aimantation et moment magnétique), DGLR

Un matériau paramagnétique est un matériau qui présente une aimantation dans le sens du champ en présence d'un champ extérieur. Les atomes ou les molécules qui le composent présentent un moment magnétique non nul en présence d'un champ extérieur. Cette effet peut être expliqué par la statistique canonique.

Soit un spin pouvant prendre deux valeurs, $\pm\mu_B$. Chaque configuration a une énergie $\mp\mu_B B$ en présence d'un champs magnétique extérieur B. Calculons la fonction de partition :

$$\begin{aligned} Z(T,B) &= e^{\frac{-\mu_B B}{\mathrm{k_B}T}} + e^{\frac{+\mu_B B}{\mathrm{k_B}T}} \\ Z(T) &= 2\cosh\left(\frac{\mu_B B}{\mathrm{k_B}T}\right) \end{aligned} \tag{16.21}$$

Soient n particules identiques et indépendantes par unité de volume à l'équilibre thermique, en présence d'un champ $\overrightarrow{B}$ homogène. On peut déduire de ce qu'il y a au dessus le moment magnétique moyen :

$$\begin{aligned} < m > &= \mu_B \mathbb{P}\uparrow - \mu_B \mathbb{P}\downarrow \\ &= \mu_B \tanh \beta\mu_B B \end{aligned} \tag{16.22}$$

On peut même aller encore plus loin et retrouver la loi de Curie !

$$\frac{\partial < m >}{\partial B} = \mu_B^2 \beta(1 - \tanh^2 \beta\mu_B\beta) \xrightarrow[B\to 0]{} \mu_B^2(1 - (\beta\mu_B B)^2) \tag{16.23}$$

Soit encore, si on prend un équivalent brutal :

$$\frac{\partial < m >}{\partial B} \underset{B\to 0}{\sim} \frac{\mu_B^2}{\mathrm{k_B}T} \tag{16.24}$$

2.5 Application au gaz parfait monoatomique (bof)

✍ Diu p.295

Fonction de Partition

On a vu que l'on pouvait calculer toutes les grandeurs thermodynamiques à partir de la fonction de partition, on va donc la calculer.

On a N particules, $\ell = (\ell_i)_i$. On les considère indépendantes, donc $E_\ell = \sum_i E_{\ell_i}$. Ainsi on a

$$Z = \prod_i \left(\sum_{\ell_i} e^{-\beta E_{\ell_i}} \right) \tag{16.25}$$

Les particules sont identitiques, on peut donc écrire $Z = z^N$ avec $z = \sum_{\ell_1} e^{-\beta E_{\ell_1}}$ fonction de partition à une particule.

Les N particules sont dans un volume V, on considère un cube de côté $L =^3 \sqrt{V}$. La mécanique quantique nous indique que les états sont quantifiés, et que

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \tag{16.26}$$

On peut donc écrire z en séparant les sommations :

$$z = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\beta E_0 n^2} \right)^3 \tag{16.27}$$

On s'intéresse alors à la limite classique, c'est à dire le cas où N et V sont ∞, à $\frac{N}{V}$ constant et $E_0 \propto \frac{1}{V^{2/3}} \ll \mathrm{k_B}T$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\beta E_0 n^2} = \int_0^\infty e^{-\beta E_0 x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi \mathrm{k_B} T}{4E_0}} \tag{16.28}$$

Ainsi on trouve :

$$Z = \left(\frac{2\pi m \mathrm{k_B} T}{\hbar^2} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N \tag{16.29}$$

On a cependant oublié de prendre en compte le fait que les particules étaient indiscernables, en sommant sur tous les micro-états, on a fait une erreur en comptant plusieurs fois le même état. Cette erreur est le nombre de permutation dans un ensemble à N éléments : N ! . On obtient finalement :

$$Z = \left(\frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \frac{V^N}{N!} \tag{16.30}$$

Équation du gaz parfait monoatomique

On peut donc calculer F avec la formule de Stirling $\ln(N!) \simeq N\ln(N) - N$,

$$F = -Nk_BT \left(\ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m k_B T}{\hbar^2} - 1 \right) \tag{16.31}$$

Et donc $P = \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_{T,N} = \frac{Nk_BT}{V}$ soit la fameuse équation $PV = nRT$

Franchement, c'est complètement pété non ? Et bien ce n'est pas fini, parce qu'avec ce qui suit, on va casser des problèmes de physique à la pelle !

3 Théorème d'équipartition et applications

3.1 Hypothèses

L'étude de la plupart des propriétés microscopiques d'un système relèvent de la mécanique quantique, cependant il existe certaines propriétés qui peuvent être décrites par des lois classiques dans la limite où $\hbar$ est négligeable devant l'action du système, de dimension $[\hbar] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$.

On va donc faire les hypothèses suivantes pour pouvoir se placer dans l'approximation classique :

- **l'énergie thermique $k_B T$ est grande devant l'intervalle entre les niveaux d'énergie**

  Cela permet de négliger la quantification des niveaux d'énergie et de considérer un continuum d'énergie. Notons que cette condition ne suffit pas puisque que certains degrés de libertés peuvent être considérés comme classiques tandis que d'autres doivent être traités de manière quantique. Par exemple, pour le GP diatomique a température ambiante, la rotation et la translation peuvent être traitées classiquement mais la vibration est forcément traitée quantiquement jusquà haute température.

- **les particules sont indépendantes**

  Cela permet d'écrire le hamiltonien comme la somme des hamiltoniens de chaque particule isolée et donc de factoriser la fonction de partition.

3.2 Démonstration et énoncé

✍ *Physique statistique* Diu p304

On considère un système en contact avec un thermostat à la température T et qui peut être décrit classiquement. On introduit les variables q_i repérant les positions des particules ainsi que leur moment conjugué p_i, avec $i \in [\![1; n]\!]$. On suppose également qu'un des moments intervient dans le hamiltonien du système que par un terme quadratique. Le hamiltonien du système s'écrit sous la forme

$$\mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}) = a p_m^2 + f(\{q_i\}, p_1, \cdots, p_{m-1}, p_{m+1}, \cdots, p_n) \tag{16.32}$$

avec $a > 0$ et $f(\{q_i\}, \{p_{i\neq m}\})$ indépendants de m.

On veut alors calculer la valeur moyenne de ce terme quadratique. Pour simplifier, on prend $m = 1$ on intègre de $-\infty$ à $+\infty$ sur tous les q_i et les p_i :

$$\begin{aligned} < a p_1^2 > &= \frac{\int a p_1^2 \cdot \exp\left(-\dfrac{a p_1^2 + f(\{q_i\}, \{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \prod_{i_1}^n \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i}{\int \exp\left(-\dfrac{a p_1^2 + f(\{q_i\}, \{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \prod_{i_1}^n \mathrm{d}q_i \mathrm{d}p_i} \\ &= \frac{\int \prod_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \int \prod_{i=2}^n \mathrm{d}p_i \exp\left(-\dfrac{f(\{q_i\}, \{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \int \mathrm{d}p_1 a p_1^2 \exp\left(-\dfrac{a p_1^2}{k_b T}\right)}{\int \prod_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \int \prod_{i=2}^n \mathrm{d}p_i \exp\left(-\dfrac{f(\{q_i\}, \{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \int \mathrm{d}p_1 \exp\left(-\dfrac{a p_1^2}{k_b T}\right)} \end{aligned} \tag{16.33}$$

On va calculer l'intégrale $\int \mathrm{d}p_1 a p_1^2 \exp\left(-\dfrac{a p_1^2}{k_b T}\right)$ par intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(p_1) = p_1 \qquad \text{donc} \qquad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p_1} = 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p_1}(p_1) = a p_1 \exp\left(-\dfrac{a p_1^2}{k_b T}\right) \qquad \text{donc} \qquad v(p_1) = \dfrac{k_B T}{2} \exp\left(-\dfrac{a p_1^2}{k_b T}\right) \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}p_1 a p_1^2 \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right) &= [uv]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}p_1} v \mathrm{d}p_1 \\ &= \left[p_1 frac k_B T 2 \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{k_b T}{2} \int \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right) \mathrm{d}p_1 \\ &= \frac{k_b T}{2} \int \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right) \mathrm{d}p_1\end{aligned} \tag{16.34}$$

On utilise alors ce résultat dans l'expression de $< a p_1^2 >$:

$$< a p_1^2 >= \frac{\int \prod_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \int \prod_{i=2}^n \mathrm{d}p_i \exp\left(-\frac{f(\{q_i\},\{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \frac{k_B T}{2} \int \mathrm{d}p_1 \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right)}{\int \prod_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \int \prod_{i=2}^n \mathrm{d}p_i \exp\left(-\frac{f(\{q_i\},\{p_{i>1}\})}{k_b T}\right) \int \mathrm{d}p_1 \exp\left(-\frac{a p_1^2}{k_b T}\right)} \tag{16.35}$$

On trouve finalement que $\boxed{< a p_1^2 >= \frac{k_B T}{2}}$. Ce raisonnement peut être fait pour tout p_m et pour tout q_m.

Théorème d'équipartition de l'énergie
Soit un système de particules classiques en équilibre thermique à la température T, dont le hamiltonien contient un terme quadratique indépendant. Alors la valeur moyenne de ce terme est $\frac{k_B T}{2}$.

Cela a une conséquence forte : tout degré de liberté classique quadratique indépendant (et donc apparaissant dans le hamiltonien sous forme d'un terme quadratique indépendant) intervient pour $\frac{k_B T}{2}$ dans l'expression de la valeur moyenne $< E >$ de l'énergie du système..

3.3 Applications

3.3.1 Capacité calorifique de gaz parfait diatomique

✍ *Physique statistique* Diu p329

Chacune des N particules de gaz parfait diatomique possède plusieurs degrés de libertés indépendants :

- 3 degrés de liberté de liberté de translation selon les 3 directions de l'espace
- 3 degrés de rotation autour des trois directions de l'espace
- 2 degrés de vibration : la liaison est modélisée par un ressort qui présente une énergie cinétique et une énergie potentielle.

Le théorème d'équipartition de l'énergie donne alors :

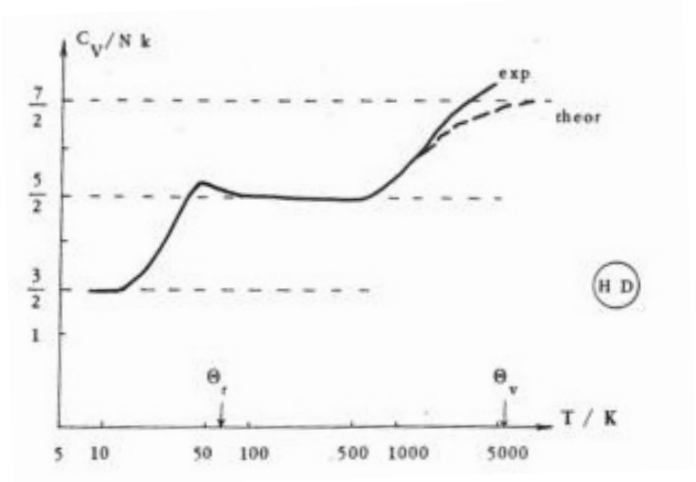
$$\begin{cases} < U_{\text{tra}} > = \frac{3}{2} N k_B T & \text{pour les 3 degrés de translation de chaque particule de gaz} \\ < U_{\text{rot}} > = \frac{3}{2} N k_B T & \text{pour les 3 degrés de rotation de chaque particule de gaz} \\ < U_{\text{vib}} > = \frac{2}{2} N k_B T & \text{pour les 2 degrés de vibration de chaque particule de gaz} \end{cases}$$

À basse température, les énergies des degrés de rotation et de vibration sont quantifiées. La variation d'énergie interne avec T est très faible. Il faut dépasser un certain seuil de température pour que de nombreux niveaux soient peuplés et

on peut alors considérer que les degrés de liberté sont classiques. On définit T_{rot} la température de gel de la rotation et T_{vib} la température de gel de la vibration. On définit la capacité calorifique de ce gaz par

$$C_V = \left.\frac{\partial < U >}{\partial T}\right|_V \tag{16.36}$$

On a mesuré expérimentalement la capacité calorifique d'un gaz hydrogène-deutérium à différentes températures pour obtenir :



On observe 3 paliers, et on remarque 2 sauts de paliers proportionnels à $\frac{k_B}{2}$ pour les deux températures T_{rot} et T_{vib}. on peut comprendre ça assez facilement avec le théorème d'équipartition de l'énergie :

- Pour $T < T_{\text{rot}}$ et $T < T_{\text{vib}}$: on a uniquement les 3 degrés de translation, les autres degrés étant gelés

$$< U >=< U_{\text{tra}} >= \frac{3}{2}Nk_BT$$

$$\Rightarrow \qquad C_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

- Pour $T_{\text{rot}} < T < T_{\text{vib}}$: les degrés de rotation s'ajoutent aux 3 degrés de translation. Cependant, la rotation autour de l'axe de la molécule est négligée car ce degré devient classique ssi $k_BT \gg e_c \simeq \frac{\hbar^2}{2mr^2}$, ce qui donne $T \gg 10^{12}$ K en prenant le rayon $r = 10^{-15}$ m d'un noyau atomique. On a donc $< U_{\text{rot}} >= \frac{2}{2}Nk_BT$

$$< U >=< U_{\text{tra}} > + < U_{\text{rot}} >= \frac{3}{2}Nk_BT + \frac{2}{2}Nk_BT = \frac{5}{2}Nk_BT$$

$$\Rightarrow \qquad C_V = \frac{5}{2}Nk_B$$

- Pour $T > T_{\text{rot}}$ et $T > T_{\text{vib}}$: les 2 degrés de vibration s'ajoutent aux 5 autres degrés de liberté

$$< U >=< U_{\text{tra}} > + < U_{\text{rot}} > + < U_{\text{vib}} >= \frac{3}{2}Nk_BT + \frac{2}{2}Nk_BT + \frac{2}{2}Nk_BT = \frac{7}{2}Nk_BT$$

$$\Rightarrow \qquad C_V = \frac{7}{2}Nk_B$$

Remarque

Le maximum au moment du dégel de la rotation est dû à un état métastable du deutérium. La différence aux hautes températures entre les résultats expérimentaux et la prévision théorique est due à un couplage non-négligeable entre les degrés de rotation et de vibration.

3.3.2 Capacité calorifique d'un solide

✍ *Physique statistique* Diu p378

• **Loi de Dulong et Petit**

On modélise le solide par un réseau cristallin et on décrit la vibration des N atomes autour de leur position d'équilibre par un oscillateur harmonique. Ainsi, pour un atome de masse m_i, de position $\overrightarrow{r_i}$ et d'impulsion $\overrightarrow{p_i}$, on note ω_i la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre. L'énergie totale du solide est alors

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\overrightarrow{p_i}^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i \overrightarrow{r_i}^2 \right) \tag{16.37}$$

Le système possède donc $6N$ degrés de liberté quadratiques indépendants donc $< E >= 3Nk_BT$, ce qui donne

$$\boxed{C_V = 3Nk_B}$$

On retrouve la loi de Dulong et Petit, mais elle ne donne pas le bon comportement de C_V aux basses températures (expérimentalement, C_V tend vers 0 quand T tend vers 0). Le problème vient en fait de notre description classique du système : aux basses températures, k_BT devient comparable aux quanta d'énergie du système, si bien que les effets quantiques jouent un rôle non négligeable.

• **Modèle d'Einstein** Le modèle d'Einstein prend en compte cet aspect quantique des oscillations en gardant la même description du solide mais en supposant que les atomes sont des oscillateurs harmoniques **quantique** de même pulsation ω. Pour chaque atome,

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \qquad \text{où} \qquad n_x,\ n_y,\ n_z \in \mathbb{Z} \tag{16.38}$$

Les N atomes sont identiques donc la fonction de partition Z peut être factorisée sous la forme z^N avec z la fonction de partition d'un seul oscillateur. On obtient facilement (en tout cas d'après le ✍ Diu) :

$$Z = z^N = \left[\sum_{n_x,n_y,n_z} \exp\left(-\frac{E}{k_BT} \right) \right]^N = \left[\frac{1}{8} \sinh^{-3}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right) \right]^N \tag{16.39}$$

On en déduit la capacité calorifique du solide

$$C_V = \frac{\partial < E >}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \right) \tag{16.40}$$

$$\boxed{C_V = 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right)^2 \sinh^{-2}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right)} \tag{16.41}$$

Pour T grand, on retrouve bien la loi de Dulong et Petit, et on a également C_V qui tend vers 0 quand T tend vers 0. La prise en compte des phénomènes quantiques a donc permis de reproduire la chute de la capacité calorifique aux basses températures. Le comportement n'est cependant pas celui observé expérimentalement, car la loi de décroissance est ici exponentielle, et non en T^3. La prise en compte d'une relation de dispersion, et donc d'une variation de la pulsation associée aux oscillateurs permet, dans le cadre du modèle de Debye, de résoudre ce problème.

Remarques

- expérience de Jean Perrin : mesure de $\mathcal{N}_A$ à partir de la variation du mouvement brownien de petites particules, validation de l'agitation thermique.
- autres domaines où on retrouve k_B : concentration des charges dans un plasma (Debye) : $n = n_0 \exp\left(-\frac{q\Phi}{k_BT} \right)$ avec Φ le potentiel, laser, diode $I = I_0 \exp\left(-\frac{eV}{k_BT} \right)$.
- k_B représente un quantum de désordre si on regarde l'expression $S = k_B \ln \Omega$

LP 17

Rayonnement d'équilibre thermique, corps noir

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique, 1ère et 2ème année*, **Olivier et Gié** ⟶ Très complet, surtout pour les définitions.
- ✍ *Mécanique Quantique 1*, **Aslangul** ⟶ Loi de Planck
- ✍ *Physique MP*, **Dunod, Sanz** ⟶
- ✍ *Thermodynamique 2ème année*, **H-prépa** ⟶

Prérequis

- ➢ Conduction - convection
- ➢ Gaz Parfait
- ➢ Ondes Electromagnétiques
- ➢ Angle solide

Expériences

- Chauffage par rayonnement à l'aide d'une QI
- Opacité du verre aux IR
- Loi de Wien avec une petite ampoule

1 Positionnement de l'étude . . . 224
1.1 Mécanismes de rayonnement . . . 224
1.2 Rayonnement d'équilibre thermique . . . 225
2 Le corps noir . . . 226
2.1 Définition . . . 226
2.2 Équilibre local, modèle en couche . . . 227
3 Lois de rayonnement à l'équilibre radiatif . . . 227
3.1 Loi générale . . . 227
3.2 Loi de Planck . . . 228
3.3 Loi de Wien, température des étoiles. . . . 229
3.4 Loi de Stefan . . . 230

Questions

- Qu'est-ce qu'il se passe dans la limite de Wien ? En quoi est-elle pertinente ? *C'est une excellente approximation à hautes fréquences, à l'inverse de Rayleigh-Jeans. La loi de Planck a alors unifié ces deux lois.*
- La loi de Rayleigh-Jeans est-elle théorique ou empirique ? *Elle est issue de la physique statistique avec la statistique de Maxwell-Boltzmann.*
- Est-ce que la thermodynamique permet de prédire des propriétés de rayonnement thermique et en particulier de rayonnement de corps noir ? *Certaines oui, Kirchhoff a prédit beaucoup de propriétés sans la loi de Planck.*
- Retour sur l'expression de u_λ. Comment obtenir cette expression à partir de celle de u_ν ? *Avec* $\lambda = \frac{c}{\nu}$ *(il y avait une erreur dans l'expression écrite au tableau).*
- Détailler "l'intégrale évidente" sur l'angle solide qui aboutit à $\Phi_\nu = \frac{c}{4} u_\nu$. *Le schéma n'était pas forcément clair. Dans le calcul, on a du* $\frac{d\Omega}{4\pi}$ *qui n'est pas vrai si on considère une hémisphère à partir de la paroi comme le suggérait le schéma. Pour le coup, le* $\frac{d\Omega}{4\pi}$ *est juste mais le schéma devrait bien montrer que l'on considère une sphère.*
- Dans quel cas l'équilibre thermodynamique et l'équilibre radiatif ne sont pas équivalents ? *L'étoile n'est pas à l'équilibre thermodynamique mais elle est à l'équilibre radiatif (en effet, elle n'est pas à l'équilibre chimique).*
- Les corps rayonnent-ils à température ambiante ? *Oui, ils rayonnent dans l'IR.*
- Dans les pré-requis, on a conduction et convection. Du coup, quand on fait les calculs avec uniquement ces 2 échanges d'énergie, a-t-on faux ? *Le rayonnement est en réalité pris en compte dans le coefficient conducto-convectif. L'exemple du radiateur est exploitable.*
- Y-a quoi dans une lampe QI ? *Filament en tungstène, l'atmosphère dans l'ampoule en quartz est un gaz d'iode pour éviter la détérioration du filament.*
- Pourquoi on vaut chauffer assez fort le filament ? *Pour décaler le spectre de rayonnement le plus possible dans le visible.*
- Expliquer l'effet de serre. *L'atmosphère piège une partie du rayonnement solaire (et terrestre) à la surface de la Terre.*
- Comment sait-on que les photons sont des bosons ? *Le spin des photons vaut 1, comme l'a montré l'expérience de Beth.*
- On considère une enceinte isolée adiabatique dans laquelle on a 2 corps noirs séparés par un piston totalement réfléchissant. Les corps noirs sont à des températures différentes. Que se passe-t-il ? Et si le piston était opaque ? *Le corps noir le plus chaud pousse le piston le plus fort d'après la loi de Stefan. Les photons donnent une impulsion* $2p\cos(i)$ *à cause de la réflexion. Si le piston était opaque, on aurait le même phénomène mais un photon transmettrait uniquement* $p\cos(i)$.
- Datez la première expérience mettant en évidence le photon. *1905, effet photoélectrique.*
- Qu'est-ce que l'effet Casimir ? https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Casimir
- Quels sont les corps qui ne sont pas des corps noirs ? *Tous, car un corps n'est jamais un corps noir pour toutes les fréquences. Ce sont des corps gris, avec une transmittance et une absorbance.*

Commentaires

- Essayer de se détacher de ses notes.
- Manque un peu de *contenu scientifique*, *i.e.* mettre en contexte les lois. Notamment "on verra plus tard" dans une leçon qui se prêterait à la discussion des lois. La loi de Planck n'est pas la seule qui s'est intéressée au rayonnement (exemple Kirchhoff) même si c'est elle qui marche théoriquement.
- Dire à quoi ça sert. Pourquoi on étudie le rayonnement d'un corps (ça définit les notions d'absorbance et d'émittance).
- Manque de schéma (on n'avait pas eu le temps de connecter l'ordi au vidéoprojecteur).
- Gestion des tableaux bof. Certains tableaux sont vides (un titre, un schéma et c'est tout).
- Les courbes expérimentales arrivent trop tôt, il faut d'abord parler de la théorie.
- Peu d'informations (intéressantes) dans le I et le II alors que ça a représenté 18 minutes. Il faudrait condenser ces parties. Ca laisse le temps le développer un peu plus les calculs dans la suite. La définition de l'opacité n'est pas forcément pertinente.
- Donner plus d'ordres de grandeurs, notamment pour la loi de Wien ou la loi le Stefan.
- Passer sous silence le $e^{-x} + 0.2x + 1 = 0$. C'est une étape de calcul qui est parachutée sans qu'on voit vraiment le rapport, et qui n'est pas pertinente.
- Le 'h' de Planck vient de *grandeur auxiliaire* (*hilfe Große* en allemand).
- Il a été dit que la loi de Stefan a été trouvée après Planck, ce qui est faux. Elle est été trouvée via la thermodynamique sans avoir besoin de Planck pour obtenir la dépendance en T^4. D'où l'importance de savoir ce que la thermodynamique permet de montrer et ce qu'elle est incapable de montrer.
- Éviter de meubler avec des expressions du type "on utilise la loi de Planck pour partir sur des bases saines".
- L'expérience introductive suffit. L'expérience pour montrer la loi de Stefan avec l'ampoule relève plus du montage que de la leçon.
- L'analyse dimensionnelle n'est pas ultra utile puisque le jury est intelligent. De plus, on ne sait jamais quelle convention utiliser donc bon. Juste dire "puissance en Watt". Techniquement il ne faut utiliser que les unités SI même si un prof en général met juste à un élève qui fait un analyse dimensionnelle avec des Watts ou autres unités non SI (cf programmes).

Introduction

Il existe trois types d'échange de chaleur (et donc d'énergie) :

- la conduction, comme lorsqu'on chauffe une barre de métal ;
- la convection, comme lorsqu'on agite une infusion ;
- le rayonnement, comme lorsqu'on ressent la chaleur du Soleil ou d'un feu.

Cette leçon se focalisera sur ce troisième type d'échange d'énergie qui présente les caractéristiques suivantes :

- il ne nécessite pas de milieu,
- il se fait à distance,
- il est rapide à notre échelle (vitesse de la lumière).

Ce mode de transport de l'énergie est de plus particulièrement intéressant car il sous-entend un couplage entre la matière et la lumière.

Mise en évidence du rayonnement thermique :
Focaliser une lampe QI sur un thermomètre. Comparer la température affichée par celui-ci à celle donnée par un thermomètre témoin à température ambiante.

1 Positionnement de l'étude

Le cadre scientifique de l'étude de la conduction et de la convection thermique est plutôt bien connu. On veut donc en faire de même pour le rayonnement thermique.

Définition : On définit la **puissance transmise** P comme étant l'énergie traversant une surface S pendant une durée t. On introduit alors le **flux surfacique d'énergie** Φ (en $\mathrm{W\,m^{-2}}$) tel que

$$\mathrm{dP} = \Phi \mathrm{dS}$$

1.1 Mécanismes de rayonnement

On considère un système Σ à l'équilibre thermodynamique. Ce système est soumis à divers flux surfaciques d'énergie :

- Φ_i : flux incident,
- Φ_p : flux partant,
- Φ_r : flux réfléchi,
- Φ_t : flux transmis,
- Φ_a : flux absorbé par le corps et transformé en énergie interne,
- Φ_e : flux résultant de la conversion d'énergie interne du corps et émis par celui-ci.

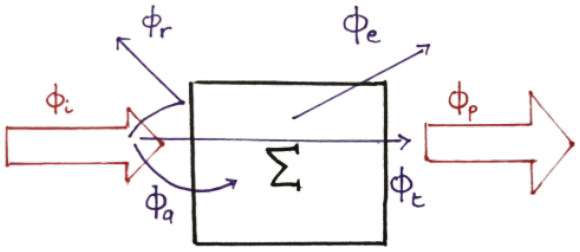


FIGURE 17.1 – Schéma des flux d'énergie radiative sur le système.

Pour un système Σ fermé dans un milieu transparent isotherme et sans échange par conduction, on a

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \\ \Phi_p &= \Phi_r + \Phi_e + \Phi_t \end{aligned} \tag{17.1}$$

On définit alors le **flux radiatif algébrique** Φ_R comme

$$\Phi_R = \Phi_p - \Phi_i = \Phi_e - \Phi_a \tag{17.2}$$

Opacité :

Comme Φ_e et Φ_a dépendent des propriétés du corps considéré, ces phénomènes radiatifs en dépendent aussi. On peut définir deux cas limites : le milieu opaque et le milieu transparent. On définit un corps **opaque** comme un corps pour lequel $\Phi_t = 0$. En pratique, un corps n'est opaque que pour un domaine de longueur d'onde (ou de fréquence) donné, comme par exemple le verre qui est opaque pour des longueurs d'onde inférieures à 100 nm. Un milieu **transparent** à l'inverse n'absorbe aucun rayonnement. Il est caractérisé par l'égalité $\Phi_a = \Phi_e = \Phi_r = 0$.

Opacité d'un anticalorique pour les IR :

Reprendre la manip avec la lampe QI focalisée sur un thermomètre. Placer un anticalorique devant la QI et constater la chute de la température du thermomètre.

1.2 Rayonnement d'équilibre thermique

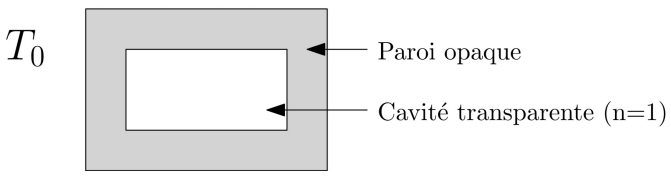


FIGURE 17.2 – Schématisation du système.

Considérons une cavité transparente délimitée par une paroi opaque (au moins dans une certaine gamme des fréquences). Le tout est en contact avec un thermostat à la température constante $T_0 = T_{paroi} = T_{cavite}$. On se place à l'équilibre thermique.

$$\Sigma = \{\text{paroi} + \text{rayonnement}\}@T_0$$

Comme le cas du gaz parfait, le rayonnement EM est un système physique en-soi qui relève de la thermodynamique. Quel est l'état d'équilibre thermodynamique du rayonnement à la température T_0 ?

À l'équilibre thermodynamique, la température de la paroi n'évolue pas. Son énergie interne de varie pas dans le temps, l'énergie absorbée par la paroi est donc réémise, le flux radiatif est donc nul. Cela correspond à l'**équilibre radiatif**.

Ainsi, on a :

$$\text{équilibre thermodynamique} \iff \Delta \mathrm{U}_{\text{paroi}} = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_R = 0$$

L'équilibre thermodynamique implique donc l'équilibre radiatif. La réciproque est fausse cependant !

Bilan

Le **rayonnement d'équilibre thermique** à la température T_0 est le rayonnement du champ EM qui existe dans une enceinte remplie d'un corps transparent avec indice optique de 1, dont la paroi est opaque et maintenue à une température constante T_0.

Un cas particulier de rayonnement d'équilibre thermique est le corps noir. C'est lui qui a historiquement lancé cette étude, et nous allons le décrire ci-dessous.

↓

2 Le corps noir

2.1 Définition

Le corps noir, notion introduite par Kirchhoff en 1862, représente le cas extrême du corps opaque général. Par définition, le corps noir est un **absorbeur intégral**, car tout rayonnement incident est absorbé pour toutes les fréquences et pour toute direction incidente. Cela se traduit par $\Phi_i = \Phi_a$, et donc $\Phi_p = \Phi_e$.

Ce cas particulier n'est que idéal. En pratique, les corps se rapprochant le plus des corps noir sont des corps qui absorbent totalement l'énergie incidente, dans toutes les directions, mais dans une certaine fenêtre spectrale. Un four serait une bonne approximation de corps noir, mais un morceau de tungstène dans une ampoule aussi, malgré son apparence non noire.

À l'équilibre radiatif, $\Phi_R = 0$. On en déduit donc que tous les flux sont égaux :

$$\Phi_i = \Phi_a = \Phi_e = \Phi_p = \Phi_0$$

On remarque que cette condition est **indépendante du corps étudié**, le corps noir est un modèle universel qui transcende les différences de matériaux, ce qui explique que l'on qualifie de corps noir des objets si différents. On rajoute le fait que $\Phi_r = \Phi_t = 0$.

Cet équilibre thermodynamique est cependant une condition très restrictives, et dans la plupart des cas, l'équilibre partiel suffit, comme par exemple un équilibre en couches.

2.2 Équilibre local, modèle en couche

On prend l'exemple d'une étoile en équilibre local, *i.e.* chaque couche a une température uniforme. La température ne dépend donc que du rayon. L'équilibre radiatif et le caractère de corps noir de la dernière couche au niveau de la surface de l'étoile indiquent que tous les rayonnements provenant de l'intérieur de l'étoile sont absorbés par la couche superficielle qui va les réémettre vers l'extérieur.

Ce modèle constitue un bon exemple de corps noir, comme on peut et va le voir avec le Soleil.

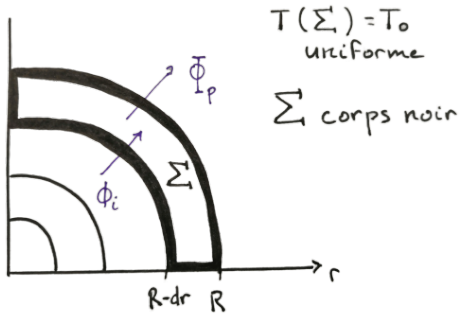


FIGURE 17.3 – Schéma en couches d'une étoile.

Il faut s'intéresser aux propriétés du rayonnement en Équilibre Radiatif et Thermique (ERT) afin d'exprimer l'énergie du rayonnement dans la boîte comme une fonction des flux définis précédement.

3 Lois de rayonnement à l'équilibre radiatif

On cherche à mettre en équation les dépendances en fréquence et en température de l'énergie interne volumique u et du flux surfacique d'énergie rayonnée Φ_R. On remarque qu'avec les dépendances en fréquence, on obtient aisément les dépendances en longueur d'onde car $\lambda = \dfrac{C}{\nu}$. On notera x_ν la grandeur par unité de ν.

On se place donc dans toute cette partie à l'équilibre radiatif pour toute fréquence, $\Phi_i = \Phi_p = \Phi$.

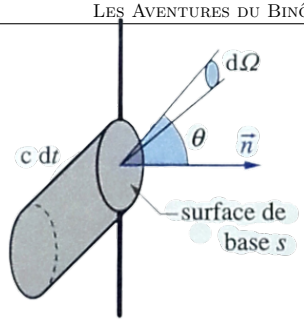
3.1 Loi générale

Dans un intervalle de fréquence $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$, l'énergie volumique du rayonnement s'écrit $\mathrm{du} = \mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T})\mathrm{d}\nu$, où u_ν s'exprime en $\mathrm{J\,s\,m^{-3}}$. On a

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \Phi_\nu \, \mathrm{d}\nu = \int_0^{+\infty} \Phi_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{17.3}$$

où Φ_ν est en $\mathrm{W\,m^{-2}\,s}$ et Φ_λ est en $\mathrm{W\,m^{-3}}$. Il nous faut alors lier u et Φ par une relation constitutive. Pour cela, on exprime l'énergie reçue par une tranche de paroi d'aire s :

$$\mathrm{d}^2\mathcal{E} = \Phi_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{s} \mathrm{d}t \tag{17.4}$$



À l'équilibre thermodynamique, la paroi émet l'énergie qu'elle reçoit. Comme le rayonnement se propage à la vitesse c, cette énergie se trouvait dans le cylindre de longueur c dt, de base s et de génératrices parallèles à la direction de propagation. Cette énergie vaut, dans l'angle solide dΩ,

$$\mathrm{d}^4\mathcal{E} = \mathrm{u}_\nu \mathrm{d}\nu \ \mathrm{s}\cos(\theta) \ \mathrm{cdt} \ \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{17.5}$$

On intègre sur dΩ pour obtenir

$$\mathrm{d}^2\mathcal{E} = \frac{\mathrm{c}}{4}\mathrm{u}_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{sdt}$$

On obtient alors

$$\Phi_\nu(\nu, \mathrm{T}) = \frac{\mathrm{c}}{4}\mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T})$$

Ce lien entre flux et énergie volumique du rayonnement nous permet, en connaissant la répartition de cette énergie, de donner le spectre d'émission d'un objet.

Il nous reste à préciser la répartition en fréquence de l'énergie et on pourra en déterminer le rayonnement. C'est ce qui a été fait tout au long du 19eme siècle avec la nécessité de remplacer la loi de Rayleigh-Jeans. C'est bien évidemment Planck qui a trouvé la solution.

3.2 Loi de Planck

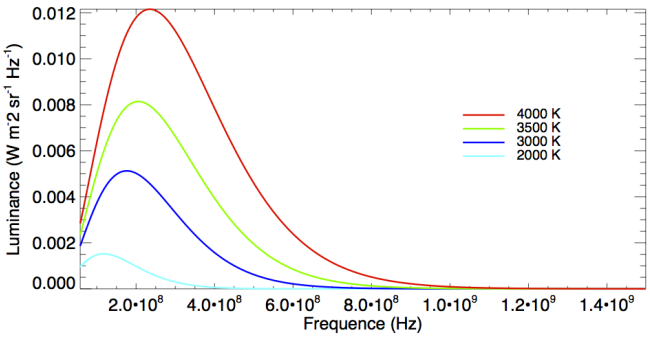


FIGURE 17.4 – Loi de Planck pour différentes température. L'abscisse est en Hz.

Planck a marqué l'histoire de l'étude du corps noir en introduisant le célèbre quantum d'énergie hν (cf la leçon LP38 sur l'aspect corpusculaire du rayonnement). En utilisant cette méthode de quantification du rayonnement, il a obtenu la forme suivante pour u :

$$\mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T}) = 8\pi\frac{\nu^2}{\mathrm{c}^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{k_B T_0}}\right) - 1} \cdot \mathrm{h}\nu \tag{17.6}$$

Le premier terme décrit la densité de modes de vibration des quantums, le second donne le nombre de photons par mode et le troisième donne l'énergie de chaque mode. On rappelle que $\mathrm{k_B} = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1} et h=$6.626 \cdot 10^{-34}$ J s.

On remarque que cette expression est indépendante du matériau étudié et qu'elle ne fait intervenir que T, ν ainsi que trois des constantes fondamentales de la physique.

On observe l'émergence de deux régimes :

- Wien pour $\dfrac{h\nu}{k_B T_0} \gg 1$;
- Stefan pour $\dfrac{h\nu}{k_B T_0} \ll 1$.

On remarque qu'on peut retrouver avec un développement limité de l'exponentielle au première ordre la loi de Rayleigh-Jeans, indépendante de la quantification :

$$u_\nu(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T_0$$

Cette loi donne cependant une divergence pour les hautes fréquences qu'on a appelée la catastrophe ultraviolette.

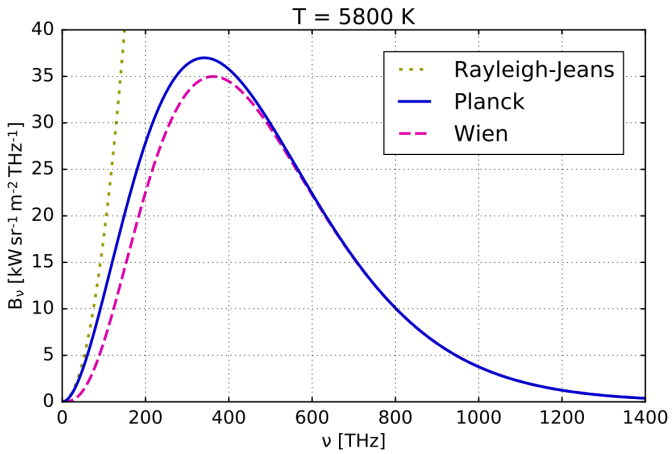


FIGURE 17.5 – La catastrophe ultraviolette.

On va maintenant exploiter ce résultat.

3.3 Loi de Wien, température des étoiles.

On veut relier le spectre du rayonnement du corps noir à sa température. Pour cela, il suffit d'exprimer u_λ puis de trouver la valeur de λ qui le maximise.

$$u_\lambda = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\dfrac{hc}{k_B T_0 \lambda}\right) - 1} \tag{17.7}$$

En posant $x = \dfrac{hc}{k_B T_0 \lambda}$, l'annulation de la dérivée de u_λ donne l'équation

$$e^{-x} + 0.2x - 1 = 0 \iff x = 4.97$$

On en déduit la loi de Wien :

$$\lambda_{max} T = 2898 \ \mu m\, K \tag{17.8}$$

Application : calculer la température de la surface du Soleil.

Comme on l'a vu, le soleil est modélisable par une structure en couches, et on peut considérer sa couche externe comme un corps noir. La lumière qui nous en parvient est donc un rayonnement d'équilibre thermique pur.

Sur cette figure, on voit le spectre solaire, avec un ajustement en loi de Planck. Le maximum est à 500nm, ce qui donne T=5800K.

Cette loi est très utilisée en cosmologie puisqu'elle donne une bonne première approximation de la température d'une étoile lointaine. Elle peut aussi servir à déterminer sans contact la température d'une surface, comme un être humain, simplement en trouvant le maximum de son spectre d'émission.

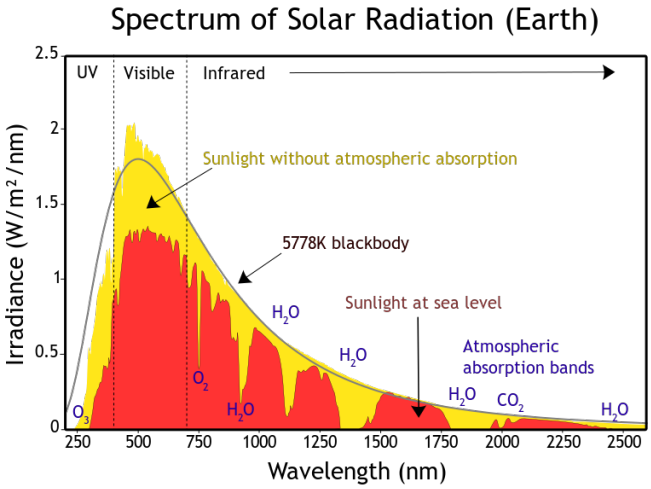


FIGURE 17.6 – Spectre d'émission du Soleil reçu sur Terre.

3.4 Loi de Stefan

Cette loi relie le flux de lumière, et donc l'énergie rayonnée, à la température. On se dit intuitivement que plus c'est chaud plus ça brille, c'est ce que l'on va montrer.

Le flux d'énergie rayonnée s'écrit

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \frac{c}{4} u_\nu d\nu$$

En combinant cette expression avec la loi de Planck, on obtient alors

$$\Phi = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T_0}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{=\frac{\pi^4}{15}} \tag{17.9}$$

On obtient ainsi la loi de Stefan :

$$\Phi = \sigma T^4 \tag{17.10}$$

où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ est la constante de Stefan.

Vérification de la loi de Stefan sur une petite ampoule

✍ Une petite ampoule, deux multimêtres, une alim, un ordinateur. ⏲ 5 minutes

L'ampoule de petite taille est un bon corps noir parce que le vide est quasiment total dans le bulbe. On peut d'ailleurs toucher ce dernier, il n'est pas chaud.

Le filament à l'intérieur est en Tungstène, on connaît donc sa courbe résistivité-température, notée $\rho(T)$. Dans

cette expérience celle-ci nous vient tout droit d'internet [a] [b]. On fait une regression quadratique sur les données de la table obtenue.

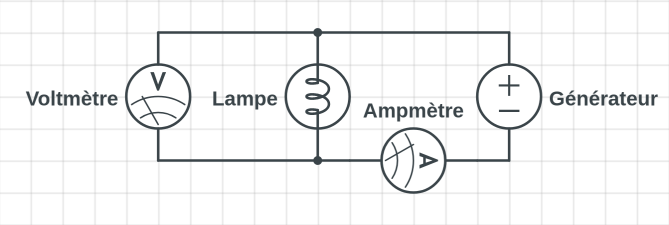
$$T = a + br + cr^2$$

$a = 128,0 \pm 9,0$, $b = 203,0 \pm 2,1$, $c = -1,62 \pm 0,1$.

Où on a posé

$$r = \frac{R(T)}{R(T_{amb})} = \frac{\rho(T)}{\rho(T_{amb})}$$

Pour remonter à R on utilise la relation $U = R \times I$, et le montage suivant :



Ainsi on remonte à T via la relation $r(T)$, puis on trace $P = U \times I$ en fonction de T^4 et Bam !!

a. The University of the State of New York Reference Tables for Physical Setting/Physics. New York : The State Education Department, 2002.
b. https ://hypertextbook.com/facts/2004/DeannaStewart.shtml

Question : J'ai deux minutes pour boire un thé brûlant, et je veux y mettre de l'eau froide. Quand dois-je mettre cette eau froide pour avoir le meilleur refroidissement ? *Il me suffit d'attendre le dernier moment, j'aurais ainsi transféré autant d'énergie que possible à l'air ambiant avant de mélanger et de boire mon thé.*

Boire le thé posé au bord de la paillasse.

Conclusion

On a vu au cours de cette leçon comment rayonnait un corps grâce aux lois de Planck, de Wien et de Stefan ; y compris dans le cas du corps noir qui est un modèle utile mais imparfait. Il est important de retenir que ces lois ne dépendent pas du matériau étudié et sont donc très générales, applicables dans de nombreux domaines.

Dans cette leçon, nous avons de plus brièvement abordé la notion de quantum d'énergie proposée par Planck. Cette notion fera l'objet de prochaines leçons traitant de mécanique quantique, et nous démontrerons à cette occasion la loi de Planck.

LP 18

Phénomènes de transport

Commentaires du jury

- 2017 : La leçon ne peut se limiter à la présentation d'un unique phénomène de transport.
- 2016 : Les analogies et différences entre les phénomènes de transport doivent être soulignées tout en évitant de dresser un simple catalogue.
- 2015 : Les liens et les limites des analogies entre divers domaines doivent être connus.
- 2013 : [À propos du nouveau titre] Le candidat développera sa leçon à partir d'un exemple de son choix

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique*,**Diu, Guthmann, Lederer, Roulet** ⟶
- ✍ *Physique MP-PT Cap prépa*, **Renvoizé** ⟶ Bilan thermique
- ✍ *Thermodynamique PC-PSI, Précis Bréal*, **Choimet** ⟶
- ✍ *Physique des électrons dans les solides. Tome 1.*, **Alloul** ⟶ Modèle microscopique
- ✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit** ⟶ COmparaison des phénomènes de transport
- ✍ *Physique PC, j'intègre*, **Sanz, Vandenbrouck, Salamito, Chardon** ⟶

Prérequis

- ➢ Thermodynamique à l'équilibre
- ➢ Bases de mécanique des fluides
- ➢ Modèle de Drude
- ➢ Gaz parfait

Expériences

- Piquer le montage MP34 – Phénomènes de transport

1 Transport d'une grandeur conservée . . . 235
1.1 Cadre d'étude . . . 235
1.2 Équation de conservation locale . . . 236
1.3 Types de transport . . . 238
2 Diffusion . . . 238
2.1 Phénoménologie . . . 238
2.2 Exemple d'une approche microscopique : cas de la loi de Wiedemann-Franz/Fourier . . . 239
2.3 Équation de diffusion . . . 240
2.4 Propriétés de l'équation de diffusion . . . 241
2.5 L'expérience de Jean-Perrin . . . 242
3 Autres détails . . . 242
3.1 Advection . . . 242
3.2 Nombre caractéristiques (Péclet, Reynolds) . . . 243
3.3 Couche limite . . . 243
3.4 Application au double vitrage : . . . 244
3.5 Double diffusion . . . 244

Introduction

La thermodynamique est un discipline dans laquelle la notion de temps est réduite à la notion d'état initial et d'état final. Elle ne donne pas d'informations sur la **dynamique** des processus **hors-équilibre** amenant le système jusqu'à cet état final. Par exemple, la thermodynamique décrit l'état final d'un système en contact avec un thermostat mais ne décrit pas du tout comment se font les échanges d'énergie entre le système et le thermostat.

On définit ainsi un **phénomène de transport** comme le déplacement spatial d'une quantité physique. De nombreux exemples de la vie courante illustrent cette définition, comme la diffusion du sirop dans un verre d'eau, la conduction électrique dans un métal, le rayonnement du Soleil qui nous réchauffe ou encore les mouvements des masses d'air dans l'atmosphère.

1 Transport d'une grandeur conservée

1.1 Cadre d'étude

Quand on regarde un bulletin météo à la TV, on voit des cartes de température et de pression. Cependant, la thermodynamique nous enseigne que ces grandeurs ne sont définies qu'à l'équilibre. Afin de pouvoir les définir localement en régime transitoire, il faut donc introduire une hypothèse fondamentale dans cette leçon : **l'équilibre thermodynamique local**.

> On définit un sous-système de taille d **mésoscopique**, un sous-système tel que $\ell \gg d \gg L$ avec ℓ le libre-parcours moyen et L la dimension macroscopique du système.
> L'hypothèse **d'équilibre thermodynamique locale** suppose que tous les sous-systèmes mésoscopiques sont à l'équilibre thermodynamique.

Cette hypothèse permet donc de définir **localement** en tout point d'un système une température, une pression, une concentration... Cette hypothèse implique

- que le temps de rétablissement de l'équilibre du système τ_{relax} soit négligeable devant les temps de transport des grandeurs $\tau_{\text{évolution}}$:
$$\tau_{\text{évolution}} \gg \tau_{\text{relax}}$$
- que l'échelle spatiale de variation des grandeurs $l_{\text{évolution}}$ soit grande devant le libre-parcours moyen ℓ :
$$l_{\text{évolution}} \gg \ell$$

Ordres de grandeurs

Pour un GP dans les conditions normales de température et de pression, $\tau_{\text{relax}} \simeq 10^{-9}$ s et $\ell \simeq 68$ nm.
Pour un métal, $\tau_{\text{relax}} \simeq 10^{-14}$ s et $\ell \simeq 10$ nm.

Ces conditions sont en général bien vérifiées pour les phénomènes de transport de la vie quotidienne tant que les milieux ne sont pas trop dilués (sinon ℓ est du même ordre de grandeur que la taille du système).

Dans cette leçon, nous nous intéresserons à l'évolution d'un type de grandeur spécifique : les **grandeurs conservées**.

> Une **grandeur conservée** est une grandeur extensive constante pour un système isolé. Sa variation dans une région de l'espace implique la présence d'un phénomène de transport.

Par exemple, la masse, l'énergie, ou encore la charge électrique sont des grandeurs conservées. L'avantage d'étudier des quantités conservées réside dans le fait qu'elles ne sont pas modifiées par les collisions microscopiques puisque ces collisions préservent le nombre de particule, leur énergie, leur charge... L'équilibre global ne peut être atteint que par transport d'une quantité conservée, d'un point à un autre. L'équilibre d'une quantité qui n'est pas conservée peut être rétabli localement par des collisions, sans nécessité de transport. Les phénomènes que nous étudierons concernent ainsi le transport de grandeurs conservées, comme par exemple la diffusion de matière (de particules), le transfert d'énergie ou diffusion de la chaleur, le transfert de charges électriques...

1.2 Équation de conservation locale

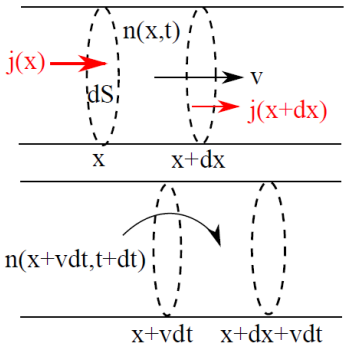
Pour établir l'équation de conservation locale, on va raisonner sur le nombre de particules dans un milieu chimiquement inerte. Ce raisonnement pourrait très bien être mené sur l'énergie ou sur la charges des particules. Prenons un système de volume V et de surface Σ. On a besoin, pour établir l'équation de conservation locale de particules dans ce système, de quantifier le flux algébrique $\Phi_{\text{int}\longrightarrow\text{ext}}$ de particules sortant de V. Pour cela, on définit le **vecteur densité de courant** $\overrightarrow{j_n}$ qui correspond au flux de particules par unité de surface et de temps et qu'on relie à $\Phi_{\text{int}\longrightarrow\text{ext}}$ par l'expression :

$$\boxed{\Phi_{\text{int}\to\text{ext}} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{j_n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}} \tag{18.1}$$

Remarques

- Cette définition montre que $\Phi_{\text{int}\longrightarrow\text{ext}}$ est algébrique puisque la direction de $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est par convention sortant de V. Ainsi, si $\overrightarrow{j_n}$ est dans le même sens que $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, on a bien un flux sortant de particules et $\Phi_{\text{int}\longrightarrow\text{ext}} > 0$.
- On comprend aisément que si $\overrightarrow{j_n} \perp \overrightarrow{\mathrm{d}S}$, alors $\Phi_{\text{int}\longrightarrow\text{ext}} = 0$.
- Cette définition permet de définir un vecteur densité de courant de particule, mais elle permet de façon analogue de définir un vecteur densité de courant d'énergie ou de charge (bien sûr les unités changent).

on peut maintenant travailler à établir l'équation de conservation locale. Pour cela, on se place dans un cas à 1 dimension afin de simplifier les calculs. On écrit alors $\overrightarrow{j_n} = j\overrightarrow{e_x}$.



Considérons un volume $\mathrm{d}V$ compris entre x et $x + \mathrm{d}x$ et de section S. Notons $\mathrm{d}N(x,t) = n(x,t)\mathrm{d}V$ le nombre de particules en x que contient le volume $\mathrm{d}V$ à l'instant t, avec $n(x,t)$ la densité particulaire. On suppose qu'il n'y a ni création, ni destruction de particules dans ce volume. Finalement, on note $\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{e_x}$ la vitesse *uniforme* à laquelle se déplace le milieu. On peut alors écrire la variation de $\mathrm{d}N$ pendant $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}N(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t) &= \mathrm{d}Vn(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t) = \mathrm{d}Vn(x+v_x\mathrm{d}t,t+\mathrm{d}t)\\
&= S\mathrm{d}x\left(n(x,t+\mathrm{d}t)+v_x\mathrm{d}t\frac{\partial n}{\partial x}(x,t+\mathrm{d}t)\right) \qquad \text{à l'ordre 1 en d}t\\
&= S\mathrm{d}x\left(n(x,t+\mathrm{d}t)+v_x\mathrm{d}t\frac{\partial n}{\partial x}(x,t)\right) \qquad \text{à l'ordre 1 en d}t\\
&= S\mathrm{d}x\left(n(x,t)+\frac{\partial n}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t+v_x\mathrm{d}t\frac{\partial n}{\partial x}(x,t)\right) \qquad \text{à l'ordre 1 en d}t\\
&= \mathrm{d}N(x,t)+S\mathrm{d}x\left(\frac{\partial n}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t+v_x\mathrm{d}t\frac{\partial n}{\partial x}(x,t)\right) \qquad \text{à l'ordre 1 en d}t
\end{aligned} \tag{18.2}$$

Cependant, on peut également écrire cette variation en fonction de ce qui sort et ce qui entre dans dV :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}N(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t) &= \mathrm{d}N(x,t)+S[j(x,t)-j(x+\mathrm{d}x,t)]\mathrm{d}t\\
&= \mathrm{d}N(x,t)-S\mathrm{d}x\frac{\partial j}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \qquad \text{à l'ordre 1 en d}x
\end{aligned} \tag{18.3}$$

On peut donc combiner ces deux équations pour obtenir

$$\frac{\partial n}{\partial t}+v_x\frac{\partial n}{\partial x}=-\frac{\partial j}{\partial x} \tag{18.4}$$

On peut généraliser cette équation pour écrire en 3 dimensions :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t}+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)n+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j_n}=0} \tag{18.5}$$

Pour un milieu immobile, on écrit $\dfrac{\partial n}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j_n}=0$.

Avec un terme source p représentant le nombre de particules produites par unité de volume et de temps, on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)n+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{j_n}=p$$

Dans le cas à 1 dimension où $\overrightarrow{v}$ n'est pas uniforme, on peut réécrire dN comme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}N(x+\mathrm{d}x,t+\mathrm{d}t) &= \{\text{quantité à l'instant } t \text{ entre } x+v(x,t)\mathrm{d}t \text{ et } x+\mathrm{d}x+v(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\}\\
&\quad -\{\text{quantité à l'instant } t \text{ entre } x \text{ et } x+\mathrm{d}x\}\\
&= n(x+v(x,t)\mathrm{d}t,t+\mathrm{d}t)S\left\{[x+\mathrm{d}x+v(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}t]-[x+v(x,t)\mathrm{d}t]\right\}\\
&\quad -n(x,t)S\left\{x+\mathrm{d}x-x\right\}\\
&= \frac{\partial n}{\partial t}S\mathrm{d}x\mathrm{d}t+v\frac{\partial n}{\partial x}S\mathrm{d}x\mathrm{d}t+n\frac{\partial v}{\partial x}S\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&= \frac{\partial n}{\partial t}S\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{\partial (nv)}{\partial x}S\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{18.6}$$

On a toujours $\mathrm{d}N=-\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ donc l'équation de conservation à 1 dimension devient :

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(j+nv)=0 \tag{18.7}$$

La généralisation en 3 dimensions donne alors

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{j_n}+n\overrightarrow{v})=0} \tag{18.8}$$

Encore une fois, ces équations de conservations sont analogues à celles obtenues pour l'énergie et la charge électrique.

Remarque

Dans les calculs, on prend parfois pour simplifier n en x et non pas en $x+\mathrm{d}x$ car l'erreur commise est d'ordre 2 donc négligeable.

1.3 Types de transport

On peut identifier deux modes de transport dans l'équation de conservation :

- **l'advection/la convection** : il s'agit du terme $\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) n$.

  On voit que ce mode de transport nécessite une vitesse non nulle du milieu. les particules de milieu entraînent les particules étudiées, comme quand on touille sa tasse de thé par exemple.

- **la diffusion** : il s'agit du terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{j_n}$.

  Ce mode de transport a lieu sans que le milieu soit en mouvement macroscopique, même si il est dû aux mouvements microscopiques des particules. On peut la voir quand on laisse diffuser du thé dans une tasse sans touiller. Si on touille, la diffusion sera masquée par la convection.

> *On va dans cette leçon s'intéresser plus en détail au phénomène de diffusion, qui est un phénomène général pouvant être rencontré dans des solides, des liquides ou des gaz, que ce soit pour transporter de la chaleur ou des particules.*

2 Diffusion

2.1 Phénoménologie

✍ Diu

✍ Renvoizé p.610, Choimet p.88

Diffusion d'ammoniac :

On place un fil de cuivre sur lequel on a attaché des bouts de papier de phénolphtaléine (devient rose en milieu basique) dans un tube en verre fermé. On introduit alors à une des extrémité un coton imbibé d'ammoniac (attention à ne pas créer trop de mouvement d'air !), puis on referme le tube. On observe alors l'ammoniac se diffuser.

Si il existe une variation d'une quantité dans l'espace, c'est à dire un gradient, le système réagit en développant un flux. Dans le cadre d'écarts de température, c'est un flux de chaleur. Du point de vue phénoménologique, on peut penser que la réponse du système est une fonction de l'écart à l'équilibre, caractérisée par le gradient. Prenons une grandeur ψ, et un courant $\vec{j_\psi}$ peut écrire :

$$\vec{j_\psi} = \vec{f}\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t)\right) \tag{18.9}$$

Une telle égalité repose sur une hypothèse supplémentaire, celle que le courant en un point donné ne dépend que du gradient en ce point. On ignore également tout effet de mémoire.

Approximation linéaire : l'approximation linéaire est de dire que la fonction f est une fonction linéaire du gradient, et constitue la **loi de diffusion linéaire** :

$$\vec{j}_\psi \propto \vec{\nabla}\psi \tag{18.10}$$

Grandeur	Énergie [J]=[W s]	Particules [N]	Charge [C]=[A s]	$\overrightarrow{p}$ [kg m s^{-1}]
Densité de courant	$\overrightarrow{j_Q}$ [W m^{-2}]	$\overrightarrow{j_n}$ [s^{-1} m^{-2}]	$\overrightarrow{j}$ [A m^{-2}]	$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}S}$ [kg m^{-1} s^{-2}]
Cause	$\overrightarrow{\nabla} T$	$\overrightarrow{\nabla} n$	$\overrightarrow{\nabla} V$	$\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v}$
Coefficient de transport	κ conductivité thermique [W m^{-1} K^{-1}]	D coef. de diffusion [m^2 s^{-1}]	σ conductivité électrique [Ω^{-1} s^{-1}]	η viscosité dynamique [kg m^{-1} s^{-1}]
Nom de la loi	Fourier	Fick	Ohm	Newton

TABLE 18.1 – Lois de transport linéaires dans différents domaines de la physique. À chaque fois, le flux est dû à une variation d'une grandeur intensive.

Validité :

- Faible écart à l'homogénéité, sinon tenseur d'ordre 2.
- Faible variation temporelle, sinon retard.
- Milieu isotrope sinon tenseur D.

2.2 Exemple d'une approche microscopique : cas de la loi de Wiedemann-Franz/Fourier

Tentons, à l'aide du modèle de Drude, de justifier cette loi et d'obtenir une expression de κ. Les métaux sont de bons conducteurs thermiques, nous pouvons alors supposer que ce sont les électrons qui sont responsables de la conduction thermique. Considérons une surface S à la température T dans un métal, à travers laquelle passe un flux $\phi_Q)\overrightarrow{j_Q}\cdot\overrightarrow{S}$, dû à une différence de température de part et d'autre de cette surface.

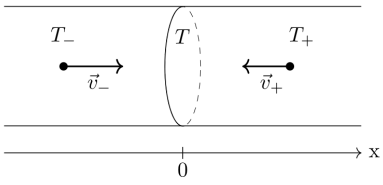


FIGURE 18.1 – Situation étudiée pour établir la loi de Fourier

Nous nous plaçons dans le référentiel lié au métal et dans le cas où l'équilibre thermodynamique local est réalisé. Le métal possède une densité n d'électrons libres pouvant participer à la conduction. L'agitation thermique confère aux électrons une vitesse $\overrightarrow{v}(T)$ telle qu'en moyenne, $\langle v(T)\rangle = \sqrt{3\mathrm{k_B}T/m_e}$, ce qui correspond à une énergie cinétique de $\frac{3}{2}\mathrm{k_B}T$.

Chaque électron conserve cette vitesse et cette énergie tant qu'il n'entre pas en collision avec les ions métalliques. Un électron parcoure donc en moyenne une distance $v\tau$ avant de subir une éventuelle modification de son énergie cinétique, telle que τ soi la durée moyenne séparant deux collisions. De plus, la distribution aléatoire de la direction de $\overrightarrow{v}$ donne

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle \tag{18.11}$$

Comme il est possible d'avoir v_x positive ou négative, il nous faudra apposer un facteur 1/2 dans notre calcul. La loi de Fourier étant une loi au premier ordre dans les variations de T, nous ne prendrons pas en compte la différence de vitesse des électrons due à la différence de température dans notre calcul. Déterminons j_x.

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{1}{2} n(-e_c^+ v_x^+ + e_c^- v_x^-) \\ &= \frac{3}{4} n v_x \mathrm{k_B}(T_- - T_+) \\ &= -\frac{3}{4} n v_x \mathrm{k_B}(-2 v_x \tau \nabla T) \end{aligned} \tag{18.12}$$

Ainsi on trouve la valeur de $\kappa = \frac{3}{2} n v_x^2 \mathrm{k_B} \tau$. Grâce au modèle de Drude des métaux, on a $\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m_e}$, d'où l'on tire :

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathrm{k_B}}{e} \right)^2 \sigma T \tag{18.13}$$

Il s'agit PRESQUE [1] de la loi de Wiedemann-Franz reliant de manière théorique conductivités thermique et électrique pour un métal, ce qui est remarquable ! Nous pouvons interpréter ce résultat comme une manifestation des électrons comme vecteurs du courant électrique et du courant thermique.

Ordres de grandeur : Pour le fer, $\frac{1}{\sigma} = 8.9\,\mu\Omega\,\mathrm{cm}$ à 273 K, ce qui nous donne $\kappa \simeq 0.34\,\mathrm{W\,cm^{-1}\,K^{-1}}$. La valeur effectivement mesurée est $0.8\,\mathrm{W\,cm^{-1}\,K^{-1}}$. On a donc le bon OdG mais pas vraiment la valeur attendue.

En réalité, $\frac{\kappa}{\sigma T} \simeq 2.22 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,\Omega\,K^{-2}}$ pour les métaux. Le facteur 2 observé entre les résultats expérimentaux et la valeur calculée provient de l'approche classique, qui à l'échelle quantique est vouée à l'échec. Une approche semi-classique par la statistique de Fermi nous aurait donné :

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\mathrm{k_B}}{e} \right)^2 \tag{18.14}$$

Nous obtenons alors pour le fer $\kappa \simeq 0.75\,\mathrm{W\,cm^{-1}\,K^{-1}}$, ce qui est la valeur effectivement mesurée, la loi de Fourier est ainsi justifiée.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à mettre cette magnifique équation en relation avec l'équation de conservation, et on aura tout ce dont on peut réver !

2.3 Équation de diffusion

Rappel : la loi de conservation donne l'équation 18.5.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \left(D \vec{\nabla} \psi \right) \tag{18.15}$$

où D est le coefficient de diffusion du milieu. Nous nous limiterons à un milieu homogène de sorte à ce que D ne dépende pas de l'espace :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \Delta \psi \tag{18.16}$$

1. Il faudrait un $\frac{3}{2}$

Encore une fois, cette équation se retrouve dans de nombreux domaines de la physique :

Diffusion	thermique	de particules	de quantité de mouvement
Conservation	de l'énergie	de la matière	de la qté de mvmt
Équation locale de conservation	$\rho c_P \partial_t T + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j}_Q = 0$	$\partial_t n + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j}_n = 0$	$\rho \partial_t \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}_V$
Équation de diffusion	$\partial_t T = D_{\text{th}} \Delta T$	$\partial_t n = D \Delta n$	$\partial_t \overrightarrow{v} = \nu \Delta \overrightarrow{v}$
Coefficient de diffusion	$D_{\text{th}} = \frac{\kappa}{\rho c_P}$ diffusivité thermique $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$	D diffusivité $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$	$\nu = \eta/\rho$ viscosité cinématique $[\text{m}^2\text{s}^{-1}]$

Élément	D $(\text{m}^2\text{s}^{-1})$
NH_3 dans l'air (CNTP)	2.10^5
Gaz	$10^{-6} - 10^{-4}$
Liquides	$10^{-12} - 10^{-8}$
Solides	$10^{-30} - 10^{-16}$

2.4 Propriétés de l'équation de diffusion

2.4.1 Linéarité

On dispose donc du théorème de superposition, ce qui est d'une efficacité redoutable pour de nombreux calculs. On a également accès à la décomposition de Fourier, qui est aussi très redoutable.

On peut aussi séparer les variable en Fourier, ce qui donne une résolution quasi instantanée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\psi}(k,t) - Dk^2\widetilde{\psi}(k,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{\psi}(k,t) = \widetilde{\psi}(k,0)e^{-Dk^2t} \tag{18.17}$$

Les hautes fréquences spatiales vont être gommées nettement plus rapidement que les fréquence basse, $\tau(k) = \dfrac{1}{Dk^2}$.

Un cas particulier de cela est la distance parcourue par des particules dans un milieu.

Distance parcourue

Intéressons nous à la distance parcourue en un temps t. Pour cela : **SORTIR PYTHON**.

$$n(x,t) = \frac{N}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{Dt}}e^{-\dfrac{x^2}{Dt}}$$

On peut écrire par analyse dimensionelle et/ou par résolution en 1D que :

$$\ell \sim \sqrt{Dt} \tag{18.18}$$

Irréversibilité

Contrairement à l'équation de d'Alembert, l'équation de diffusion a la fâcheuse tendance de n'être pas réversible. En effet une transformation de t en $-t$ modifie l'équation de la diffusion, ce qui signifie que les phénomènes qu'elle décrit sont irréversibles.

Nous n'avons vu qu'un seul autre cas d'équation provoquant une irréversibilité jusque là, avec le second principe de la thermodynamique. Procédons à une approche qualitative. Soient deux systèmes identiques si ce n'est par leurs températures $T_1 \neq T_2$. Une fois mis en contact, la chaleur diffuse de l'un vers l'autre jusqu'à ce que l'ensemble soit à la température $T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. Alors,

$$S_{1+2}(T_0) = S_1(T_0) + S_2(T_0) = 2S_x(T_0) > S_1(T_1) + S_2(T_2)$$

par concavité de l'entropie. On en déduit une augmentation de l'entropie, ce qui respecte bien le second principe et montre, qualitativement, que la diffusion est un processus irréversible.

Nous pouvons nous poser la question de savoir en combien de temps une distance l est parcourue par diffusion. Dans le cas de molécules dans l'air, D = 0,24 cm^2s^{-1} . Ainsi, pour qu'une molécule parcoure une distance $l \sim 5$ m, il faut un temps $t \sim 10^6$s (10 jours). L'expérience du quotidien nous force à penser qu'il doit exister un autre mode de transport.

2.5 L'expérience de Jean-Perrin

Cette expérience se base sur la compétition diffusion-gravité.

Elle est disponible à `http://bouquins.isabelle.free.fr/dotclear/public/Thermo/T07PerrinAvogadro.pdf`, ou dans `Perrin.pdf`.

3 Autres détails

3.1 Advection

L'advection est le transport d'une quantité dû à son entraînement par le mouvement d'un milieu. C'est le phénomène qui a lieu lorsque l'on mélange de la soupe avec une cuillère. Un cas particulier d'advection est la convection. Il s'agit d'une advection dont la cause est une instabilité du milieu. On peut citer la convection dans l'atmosphère terrestre, les courants marins, *etc.*

Advection et convection sont donc fondamentalement différentes de la diffusion, où le milieu peut être au repos ! Le transport par advection peut en particulier être bien plus rapide que le transport par diffusion lorsque le milieu se déplace à une vitesse suffisamment grande face à la vitesse de diffusion de la grandeur physique dont il est question.

Le vecteur densité de courant s'écrit alors

$$\vec{j} = \psi \vec{v_m}$$

avec $\vec{v_m}$ la vitesse du milieu. C'est le milieu qui porte ψ, et la vitesse *n'est pas* la vitesse des particules mais seulement celle du milieu qui les contient !

On a lors l'équation d'advection, qui s'obtient en mettant la forme précédente dans l'équation 18.5.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\psi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{18.19}$$

Or on ne se préoccupe pas ici du caractère compréssible du milieu, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ donc on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{D}\psi}{\mathrm{D}t} = 0 \tag{18.20}$$

Cette équation fait apparaître la dérivée particulaire déjà rencontrée en mécanique des fluides.

Type de transport	Vitesse	Distance parcourue en 1s (m)
Diffusion (eau liquide)	mal définie, mais $l \sim \sqrt{Dt}$	10^{-4}
Diffusion (aluminium)	mal définie, mais $l \sim \sqrt{Dt}$	10^{-2}
Advection (soupe)	$v_{\text{milieu}} \sim 10^{-1}\text{ms}^{-1}$	10^{-1}
Advection (chute d'eau)	$v_{\text{milieu}} \sim gt$	5

3.2 Nombre caractéristiques (Péclet, Reynolds)

Lorsqu'il y a diffusion et advection, nous obtenons, compte tenu des équations précédentes

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\text{tot}} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\text{adv}} + \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\text{diff}} = -\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi + D\Delta\psi \tag{18.21}$$

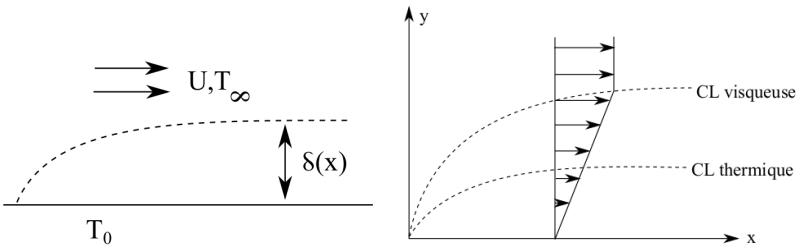
Nous pouvons comparer l'importance relative de ces deux effets en calculant un ordre de grandeur du rapport des termes correspondants :

$$\frac{\text{advection}}{\text{diffusion}} = \frac{\left|\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi\right|}{|D\Delta\psi|} \sim \frac{\ell v}{D} \tag{18.22}$$

En mécanique des fluides, appliqué au transport de quantité de mouvement, ce nombre est appelé nombre de Reynolds. Dans le cadre de la diffusion pour des quantités quelconques, il est nommé **nombre de Péclet**. Il permet, dans certains cas, de négliger un de ces deux termes par rapport à l'autre. Nous obtenons alors des écoulements laminaires pour $Re \ll 1$ ou turbulents pour $Re \gg 1000$, lorsque les effets convectifs dominent les effets diffusifs. Nous pouvons en particulier en déduire que pour une vitesse d'écoulement du fluide suffisante, les effets diffusifs sont négligeables face aux effets d'advection.

3.3 Couche limite

✍ GHP, chapitre 10



Le nombre de Reynolds nous donne pas tout non plus : on a toujours l'existence de cette couche limite où les phénomènes diffusifs sont primordiaux.

- Couche limite visqueuse : $\delta_v = \sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu x/U}$
- Couche limite thermique : $\delta_\theta = \sqrt{D_{th}t} = \sqrt{D_{th}x/v_{lim}}$

On peut ainsi définir le nombre de **Prandtl** : $Pr = \dfrac{\nu}{D_{th}}$.

- Pr$\ll 1$: $v_{lim} = U$, donc δ_{th} domine et vaut $\sqrt{\dfrac{D_{th}x}{U}}$

- Pr$\gg 1$: $v_lim = \frac{\delta_\theta}{\delta_v} U$, alors la couche limite visqueuse domine, et on a $\left(\frac{\delta_\theta}{\delta_v}\right)^3 = \frac{1}{Pr}$

Cette dernière formule est intéressante puisqu'elle nous dit que pour des nombres de Prandtl voisins de 1 (comme c'est le cas pour l'air), les deux couches limites sont en gros de la même épaisseur, et la couche limite thermique est "piégée" dans la couche limite visqueuse. Ainsi, pour refroidir mon assiette de soupe, je veux réduire la couche limite thermique, et pour cela il me suffit de réduire la couche limite visqueuse (puisque l'une agit sur l'autre), ce que je fais en soufflant sur ma soupe.

3.4 Application au double vitrage :

✍ Diu, se laisser guider, `Double_Vitrage.pdf`, en fin de leçon.

3.5 Double diffusion

Lorsque deux gradients (température et composition par exemple) donnent lieus simultanément à deux diffusions, avec des coefficients de diffusion différents, des phénomènes nouveaux peuvent apparaître. En ordre de grandeur, on suppose que $\frac{D_{th}}{D} = 10^2$.

On considère un milieu stratifié, ou de l'eau chaude salée se trouve au dessus d'eau froide douce. Comme la chaleur diffuse plus vite que la salinité, la parcelle de fluide qui diffuse peut s'équilibrer thermiquement sans s'équilibrer salinement, et on observe alors des doigts de sel !

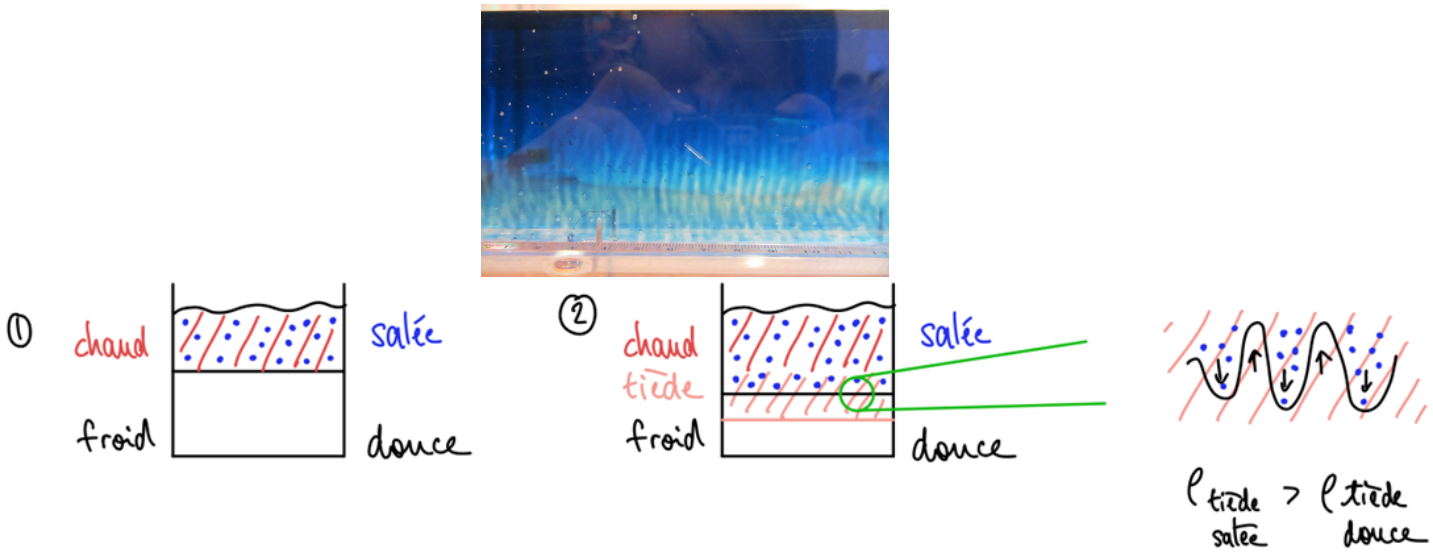


FIGURE 18.2 – Les doigts de sel.

Paradoxalement, le fait que la salinité diffuse lentement fait qu'elle se mélange mieux ! Ce phénomène est essentiel au mélange vertical des océans, et donc au transport du CO_2 (les océans absorbent 30% des émissions humaines).

Conclusion

Ouverture : rayonnement !

Position du problème Déterminons, en régime stationnaire, le flux de chaleur et la distribution de température à l'intérieur d'une paroi d'épaisseur l et d'aire A, lorsque ses faces sont maintenues à des températures constantes et différentes T_A et T_B. Nous supposons négligeables les effets thermiques sur le pourtour de cette paroi ; il s'agit alors d'un problème à une dimension dans lequel la seule variable géométrique pertinente est l'abscisse x suivant l'axe perpendiculaire à la paroi. Supposons la paroi homogène, de conductivité thermique κ et de coefficient de diffusion D_{th} que nous noterons simplement D par la suite.

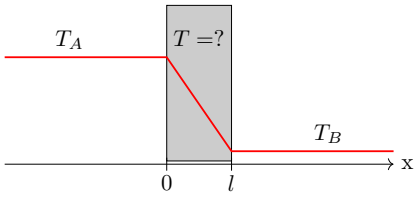


Figure 3 – *Situation étudiée. En rouge, le profil de température déterminé.*

Établissement de l'équation de la chaleur Dans cette situation, la grandeur physique Ψ est l'enthalpie, car nous nous plaçons à pression constante. Dans ce cas, $\psi = h$. Or, pour un corps donné, avec ρ sa masse volumique et c_P sa capacité calorifique massique à pression constante,

$$\mathrm{d}h = \rho c_P \mathrm{d}T, \text{ si bien que (4) donne} \qquad \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_Q = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0 \tag{26}$$

Solution de l'équation de la chaleur En régime stationnaire, (26) donne

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T = D\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = ax + b \tag{27}$$

soit, avec les conditions aux limites du problème à savoir $T(0) = T_A$ et $T(l) = T_B$,

$$T(x) = T_A + (T_B - T_A)\frac{x}{l} \tag{28}$$

On en déduit grâce à la loi de Fourier

$$\vec{j}_Q = -\kappa\vec{\nabla}T = -\kappa\frac{T_B - T_A}{l}\vec{e}_x \tag{29}$$

Notion de résistance thermique Nous pouvons, à partir de l'expression de $\vec{j}_Q$, déterminer la quantité de chaleur I_Q qui traverse la paroi par unité de temps, correspondant au flux de $\vec{j}_Q$ à travers la paroi :

$$I_Q = \frac{A\kappa}{l}(T_A - T_B) \tag{30}$$

Cette relation a même forme que la loi d'Ohm en électrocinétique, la température remplaçant le potentiel électrique et le flux de chaleur l'intensité du courant. Dans le cadre de cette analogie, on définit la « résistance thermique » R_{th} de la paroi comme

$$R_{\text{th}} \equiv \frac{l}{\kappa A} \tag{31}$$

Cette expression est évidemment à rapprocher de l'expression de la résistance d'un conducteur de longueur l et de section A : $R = \frac{l}{\sigma A}$.

Flux de chaleur Par analogie avec l'électrocinétique, nous pouvons écrire

$$I_Q = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\sum_i R_{\text{th}i}} \tag{32}$$

Pour $T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} \sim 10°\text{C}$ et une vitre d'une surface de 1 m^2 et de 5 mm d'épaisseur,

$$I_Q(\text{simple vitrage}) = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\frac{l}{\kappa A}} \sim 2\text{ kW} \tag{33}$$

Comme il est possible de le voir dans la table 4, une couche d'air dans laquelle ne se produit pas de convection constitue un excellent isolant thermique. Ainsi, avec $l' = 1$ cm d'air entre deux vitres identiques à celle étudiée précédemment :

$$I_Q(\text{double vitrage}) = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{2\frac{l}{\kappa A} + \frac{l'}{\kappa_{\text{air}} A}} \sim 25\text{ W} \tag{34}$$

Le double vitrage permet donc de réduire les pertes de chaleur !

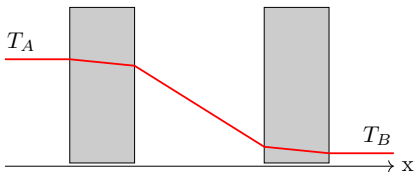


Figure 4 – *Situation étudiée avec double vitrage. En rouge, l'allure du profil de température.*

LP 19

Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs et radiatifs

Commentaires du jury

- **2017 :** Il ne faut pas oublier de faire des bilans thermiques dans cette leçon qui ne consiste pas en un catalogue des divers flux.
- **2015 :** Le traitement d'au moins un exemple mettant en jeu plusieurs mécanismes de transferts thermiques est l'un des objectifs de cette leçon.

Niveau : L2/L3

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique*, **Diu** ⟶
- ✍ *PC*, **Dunod** ⟶
- ✍ *Hydrodynamique physique*, **GHP** ⟶ Comparaison diffusion/convection
- ✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** ⟶ Base de la leçon
- ✍ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** ⟶

Prérequis

- ➢ Thermodynamique : 1er et 2nd principes
- ➢ Rayonnement du corps noir
- ➢ Diffusion
- ➢ Notion de couche limite

Expériences

- ☕

1 Cadre de l'étude . . . 249
1.1 Équilibre thermodynamique local . . . 249
1.2 Notion de flux thermique . . . 249
1.3 Bilan énergétiques . . . 250
1.4 Modes de transport . . . 250
2 Conduction thermique . . . 251
2.1 Loi de Fourier et équation de la chaleur . . . 251
2.2 Analogie avec l'électrostatique : notion de résistance thermique . . . 252
2.3 Exemple : la conduction dans le sol . . . 252
3 Convection thermique . . . 254
3.1 Mécanisme . . . 254
3.2 Loi de refroidissement de Newton, couche limite . . . 255
3.3 Applications directes . . . 256
4 Rayonnement . . . 257
4.1 Loi générale . . . 258
4.2 Loi de Planck . . . 258
4.3 Loi de Wien, température des étoiles. . . . 259
4.4 Loi de Stefan . . . 260
4.5 Application : effet de serre . . . 261
5 Exercice d'application : le plongeur . . . 263
5.1 Flux conductifs . . . 263
5.2 Flux convectifs . . . 263
5.3 Flux radiatifs . . . 264
5.4 Résistance thermique totale . . . 264
5.5 Bilan énergétique et conclusion . . . 265
5.6 Et si le plongeur est nu ? . . . 265

Introduction

On connait trois modes de transport d'énergie :

- Conduction : quand on se brule en touchant la casserolle
- Convection : naturelle quand elle est causée par l'instabilité d'un fluide, forcée quand le mouvement est forcé (clim)
- Rayonnement : quand on sent la chaleur du soleil

Pour les étudier, il va falloir sortir du cadre habituel que l'on a défini jusqu'ici de la thermo en équilibre. Il va falloir faire intervenir le temps, et les états hors équilibre.

Pourquoi les étudier ? Pour isoler les maisons et faire cuire des pâtes pardi !

1 Cadre de l'étude

1.1 Équilibre thermodynamique local

On veut étudier des systèmes hors équilibre, qui se thermalisent, donc on ne peut pas rigoureusement définir (T, P, μ). Mais on en a besoin, on va donc ruser en partitionnant les systèmes !

Par exemple, prenons un système Σ en contact avec deux thermostats de températures différentes de chaque côté, on ne peut pas définir sa température, mais on peut le couper en tranches infinitésimales de température égale !

Il faut cependant que ces tranches, ces sous-systèmes, soient assez grands pour y définir les variables thermodynamiques (une seule molécule ne suffit pas), donc on va se placer à l'échelle mésoscopique :

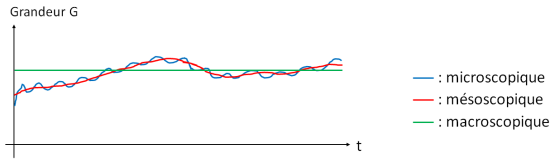


FIGURE 19.1 – Illustration de l'échelle mésoscopique.

On supposera alors **l'équilibre thermodynamique local**, c'est à dire l'équilibre thermodynamique de chacun des sous-systèmes. On a alors défini les variables thermodynamiques en chaque point du système !

On fera égalememnt l'**Approximation linéaire.** On supposera les écarts à l'équilibre suffisamment faibles pour les traiter comme des ordres 1 dans les Développement limités.

1.2 Notion de flux thermique

Soit un système Σ de volume V et de surface S. La chaleur reçue par Σ pendant $\mathrm{d}t$ s'exprime

$$\delta Q = \left[\iint_S \varphi_{\mathrm{ext}\to\Sigma} \mathrm{d}S \right] \mathrm{d}t \tag{19.1}$$

On voit apparaître le flux thermique surfacique entre [crochets]. C'est la chaleur reçue par unité de temps et de surface. On peut en définir un vecteur de courant, comme on l'a fait en électromagnétisme :

$$\begin{aligned} \varphi \mathrm{d}S &= \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \\ \text{c'est-à-dire } \varphi &= \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{19.2}$$

Point unités : δQ en J, φ en W/m^2.

L'utilité principale du flux thermique et de faire des bilans d'échange d'énergie entre deux systèmes, et c'est ce que nous allons faire tout de suite !

1.3 Bilan énergétiques

Soit Σ toujours notre système, mais cette fois-ci fermé et à frontière immobile, il ne reçoit aucun travail, si bien que l'on peut écrire le premier principe comme suit :

$$U_\Sigma(t + \mathrm{d}t) - U_\Sigma(t) = \mathrm{d}U_{Sigma} = \delta Q + \mathcal{P}_{vol,\text{produit}} \tag{19.3}$$

On voit ici l'apparition d'un therme de production, il s'agit de la production de chaleur dans le milieu, on peut par exemple imaginer un courant électrique qui, par effet Joules, fait chauffer Σ. On peut aussi imaginer des réactions thermonucléaires, comme dans les étoiles.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_\Sigma &= \left(\oiint_S \varphi \mathrm{d}S + \iiint_V \mathcal{P}_{vol} \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t \\ \frac{\partial U_\Sigma}{\partial t} \mathrm{d}t &= \left(\oiint_S \varphi \mathrm{d}S + \iiint_V \mathcal{P}_{vol} \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t \\ \frac{\partial U_\Sigma}{\partial t} \mathrm{d}t &= \left(\oiint_S -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iiint_V \mathcal{P}_{vol} \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t \qquad \text{"-" car on parle en reçu ici} \end{aligned} \tag{19.4}$$

On peut alors utiliser le théorème de la divergence et réorganiser les termes, pour obtenir la magnifique équation

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_\Sigma}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} - \mathcal{P}_{vol} \right) \mathrm{d}V \mathrm{d}t = 0 \tag{19.5}$$

Et comme ceci est vrai pour tout t et pour tout V, on peut passer à la formulation mésoscopique, à savoir :

$$\boxed{\frac{\partial u_\Sigma}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} + \mathcal{P}_{vol}} \tag{19.6}$$

1.4 Modes de transport

Mais ce petit j c'est quoi exactement ? On identifie trois modes de transport de la chaleur par transfert thermique :

Conductif : Dans un contexte plus général, on parle de diffusion. Lorsqu'une zone de l'espace est plus chaude, elle va avoir tendance à céder de l'énergie autour d'elle pour homogénéiser la température dans l'espace. Ce mode résulte de la collision des particules qui se transmettent leur énergie de proche en proche. L'aspect "propagatif" est un phénomène purement statistique mais ne découle d'aucune force ! **Exemple** : Lorsqu'on pose sa main sur une plaque de métal, celle-ci nous semble froide, parce qu'elle est à une température inférieure à celle de notre corps. L'énergie va de la main vers la plaque.

Convectif : On parle de convection lorsque lorsque le milieu support est en mouvement. Le fluide passe d'un système chaud à un système froid en transportant l'énergie avec lui. **Exemple** : Il existe de la convection naturelle (l'air chaud remonte) ou bien forcée (touiller son café)

Radiatif : Un système à température T est également capable de céder de l'énergie sans support matériel ! Ce transfert se fait via une onde électro-magnétique et est piloté par des mécanismes d'absorption / émission. **Exemple** : Le Soleil nous chauffe et pourtant c'est bien du vide qui se situe entre lui et la Terre ! Remarquons que nous somme aussi à température non nulle, donc nous chauffons également le Soleil...

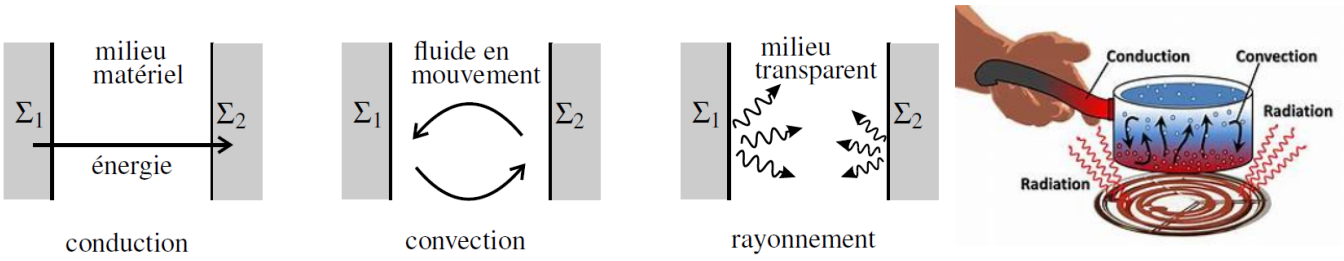


FIGURE 19.2 – Les différents flux.

2 Conduction thermique

Maintenant qu'on a pu poser un cadre d'étude, on va pouvoir rentrer dans le vif du sujet et parler d'un premier type de transport : la conduction thermique. C'est ce mode de transport qui explique pourquoi lorsqu'on trempe le bout d'une cuillère dans un thé chaud on constate que la cuillère entière devient chaude.

La conduction thermique nécessite un milieu matériel pour avoir lieu. Elle s'effectue sans transport de matière mais plutôt via un transfert d'énergie de proche en proche. Il s'agit du processus de transport de l'énergie dominant dans les solides.

2.1 Loi de Fourier et équation de la chaleur

La conduction est un phénomène de diffusion : en effet, elle est causée par une inhomogénéïté, *i.e.* un gradient, de température dans le milieu matériel. Comme pour tout phénomène diffusif, on peut définir un vecteur densité de courant d'énergie $\overrightarrow{j_Q}$ relié au flux d'énergie algébrique Φ *sortant* du système par unité de temps via la relation

$$\Phi = \oiint \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{19.7}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est un vecteur normal à la surface du système et dirigé vers l'extérieur. On a dit cependant que la conduction thermique était lié au gradient de température, il faut donc trouver un moyen de relier $\overrightarrow{j_Q}$ et $\overrightarrow{\nabla} T$.

En 1807, ce lien est établi grâce à la **loi phénoménologique de Fourier** :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \overrightarrow{\nabla} T} \tag{19.8}$$

où on introduit une grandeur spécifique au milieu étudié : la **conductivité thermique** λ, exprimée en $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Cette loi nécessite cependant de faire plusieurs hypothèses :

- équilibre thermodynamique locale, afin de définir T en tout point
- faible gradient de T, afin d'utiliser l'approximation linéaire $\overrightarrow{j_Q} \propto \overrightarrow{\nabla} T$
- λ est constante (en réalité λ dépend de T)

Quelques ordres de grandeur de λ pour différents matériaux :

Elément	λ (W.m^{-1}.K^{-1})	D_{th} (m^2.s^{-1})
Cuivre	400	$1{,}2.10^4$
Acier	50	10^{-5}
Béton	1	5.10^{-7}
Eau	0,6	$1{,}4.10^{-7}$
Air	$2{,}6.10^{-2}$	2.10^{-5}

Maintenant qu'on a relié $\overrightarrow{\nabla} T$ à $\overrightarrow{j_Q}$, il ne reste plus qu'à appliquer la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho c_v T) + \overrightarrow{\nabla} \cdot (-\lambda \overrightarrow{\nabla} T) \qquad \text{(1ère loi de Joule : } U = C_V T) \\ \Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = 0 \end{aligned} \tag{19.9}$$

avec ρ la masse volumique du matériau et c_v sa capacité calorifique massique. On obtient bel et bien une équation de diffusion, appelée **équation de la chaleur** :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0} \tag{19.10}$$

avec $D = \dfrac{\lambda}{{}_p hoc_v}$ le coefficient de diffusion thermique (cf tableau précédent pour des OdG). Comme tout équation de diffusion, cette équation est irréversible et possède une longueur caractéristique $L = \sqrt{Dt}$.

2.2 Analogie avec l'électrostatique : notion de résistance thermique

En régime stationnaire, on a $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$. On peut aussi se placer en ARQS pour avoir $\dfrac{\partial T}{\partial t} \simeq 0$.

En écrivant $\left\| \overrightarrow{\nabla} T \right\| \approx \dfrac{\delta T}{e}$, on peut obtenir le 'courant de chaleur' I_Q :

$$I_Q = \left\| \overrightarrow{j_Q} \right\| S = \frac{S\lambda}{e} \delta T \tag{19.11}$$

On peut faire un analogie avec l'électrostatique :

Domaine	Electrostatique	Thermique
Courant	$I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$	$I_Q = \dfrac{\partial Q}{\partial t}$
Ddp	$U = V_2 - V_1 = \delta V$	$T_2 - T_1 = \delta T$
Résistance	$R = \dfrac{U}{I}$	$R_{\text{th}} = \dfrac{\delta T}{I_Q}$

Avec cette analogie, on peut ainsi définir une **résistance thermique** R_{th}, exprimée en K W^{-1}. On a alors

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$$

2.3 Exemple : la conduction dans le sol

✍ Garing + Sanz

On cherche ici à connaître la profondeur adéquate à laquelle placer une cave pour éviter que les variations saisonnières de température viennent perturber la température de la cave. Le même problème se pose pour des canalisations, on cherche à éviter le gel dû aux variations journalières de température.

On modélise le problème en assimilant le sol à un demi-espace (z>0, axe z vers le bas) homogène de masse volummique ρ, de chaleur massique c_v et de conductivité thermique λ. On note $T(z,t)$ la température à l'instant t et à la profondeur z.

On suppose que la température à la surface suit la loi $T(z=0,t) = T_0 + T_1\cos(\omega t)$ (c'est une modélisation des cycles jour/nuit voire des cycles saisonniers si on veut). On admet qu'à grande profondeur la température tend vers la moyenne annuelle : $T(z \to +\infty, t) \longrightarrow T_0$. Finalement, on suppose qu'il n'y a aucune source d'énergie dans le sol. L'équation de la chaleur donne alors

$$D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z,t) = \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \tag{19.12}$$

Pour résoudre cette équation, on pose $\Theta(z,t) = T(z,t) - T_0$ et on passe en notations complexes : $\underline{\Theta}(z,t) = \Re[\underline{f}(z)\exp(i\omega t)]$. En mettant Θ dans l'équation de la chaleur, on peut obtenir un polynôme caractéristique de solution

$$r_\pm = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}$$

En en déduit que les solutions sont de la forme

$$\underline{f}(z) = \underline{\alpha}\exp\left(-(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right) + \underline{\beta}\exp\left(+(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z\right) \tag{19.13}$$

On a pour conditions aux limites.

$$\underline{\Theta}(z=0,t) = T_1\exp(i\omega t) \iff \underline{f}(z=0) = T_1$$
$$\underline{\Theta}(z\to+\infty,t) = 0 \iff \underline{f}(z\to+\infty) = 0$$

On obtient donc $\underline{\alpha} = T_1$ et $\underline{\beta} = 0$.

On peut finalement exprimer $T(z,t)$:

$$\boxed{T(z,t) = T_0 + T_1\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \qquad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}} \tag{19.14}$$

On remarque que plus les variations de température en surface sont rapides (*i.e.* plus ω est grand), plus la distance caractéristique d'atténuation δ est faible donc moins ces variations se propagent. En notant τ la période de ces variations, on peut écrire $\delta = \sqrt{\frac{D\tau}{\pi}}$.

Application numérique

Le sol a une diffusivité thermique moyenne $D_{\text{sol}} = 6.5\times10^{-7}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Pour des variations de température annuelles, on obtient donc $\delta(\tau = 1\text{ an}) = 2.5$ m. Si on veut creuser une cave telle que les variations annuelles de température ne causent un variation de température dans la cave de moins de 2°C, il faut que

$$|T_1\exp\left(-\frac{z_0}{\delta}\right)| < 2 \qquad \Rightarrow \qquad z_0 > \delta\ln\left(\frac{T_1}{2}\right)$$

En prenons des variations annuelles de température d'amplitude $T_1 = 20$°C, on obtient $z_0 > 6$ m.

Pour des variations journalières, $\delta(\tau = 1\text{ jour}) = 14$ cm. On enterre les canalisations d'eau à $z = 1$ m de profondeur. Ainsi, on divise l'amplitude des variations journalières de température par 1000 environ ! Les canalisations sont alors préservées du gel.

3 Convection thermique

✍ *J'intègre* MP, chap 23.

☕

Visualisation de la convection

✍ ⏲

Matériel : glace, bécher, colorant, baguette en verre

Déposer délicatement le glaçon imbibé d'eau colorée dans un bécher d'eau tiède/chaude. On observe le traçage de la cellule de convection par le colorant.

Mélanger avec la baguette pour illustrer la convection forcée plus efficace.

3.1 Mécanisme

On le rappelle, la convection thermique est le mode de transport thermique qui s'accompage d'un mouvement global de matière dont les molécules transportent leur agitation thermique. Elle nécessite une interface solide-liquide (casserole), liquide-gaz (surface de la mer) ou bien solide-gaz. Lorsqu'on étudie le transport de chaleur dans un fluide, on se rend vite compte que la convection est plus importante que la conduction. Exemple très simple : la casserole d'eau chauffée ! On voit bien les cycles de convection (c'est d'ailleurs leur petit nom) avec l'eau qui remonte. On peut prendre cet exemple pour comprendre le mécanisme de la convection.

À l'interface entre la casserole et l'eau du fond, il y a un échange thermique entre le métal chaud et le liquide froid, il y a, comme dans le cas de la conduction thermique, transmission-répartition de l'énergie cinétique d'agitation thermique. Ce transfert a pour conséquence le réchauffement de l'eau inférieure, du bas de la casserole. Or, un fluide (là c'est de l'eau mais c'est pareil pour de l'air) chaud est moins dense qu'un fluide froid ! On est donc dans la situation où du fluide peu dense est situé en dessous de fluide dense.

D'après les lois de la statique des fluides, cet état du système n'est pas stable. Le fluide peu dense, le chaud donc, va remonter dans la casserole et ce faisant faire descendre le fluide dense, le froid. On est donc revenu dans la situation initiale : on est reparti pour un tour ! En prenant en compte le refroidissement de l'eau supérieure au contact de l'air (par...convection) on a ainsi création d'un cycle !

Pour résumer la convection : Si le solide est à une température plus élevée que le fluide, il y aura remplacement progressif des parties du fluide en contact avec le solide par du fluide froid qui à son tour recevra de l'énergie de la part du solide. Ceci durera jusqu'à ce qu'il y ait homogénéisation de la température.

On distingue deux formes de convection :

- la convection naturelle : il s'agit du mécanisme précédemment décrit. Exemples : formation des courants océaniques (interface sol sous-marin/eau), formation des vents (interface surface de la mer/air), mouvement des plaques tectoniques [1] (convection dans le manteau).
- la convection forcée : lorsque le fluide est mis en mouvement par une pompe ou un ventilateur. Exemples : refroidissement d'un moteur à explosion, refroidissement des composants d'un ordi...

1. *Timéo stars to dance.*

3.2 Loi de refroidissement de Newton, couche limite

Le phénomène de convection est un phénomène non-linéaire mais qui phénoménologiquement peut être représenté par un modèle linéaire, celui de la couche limite.

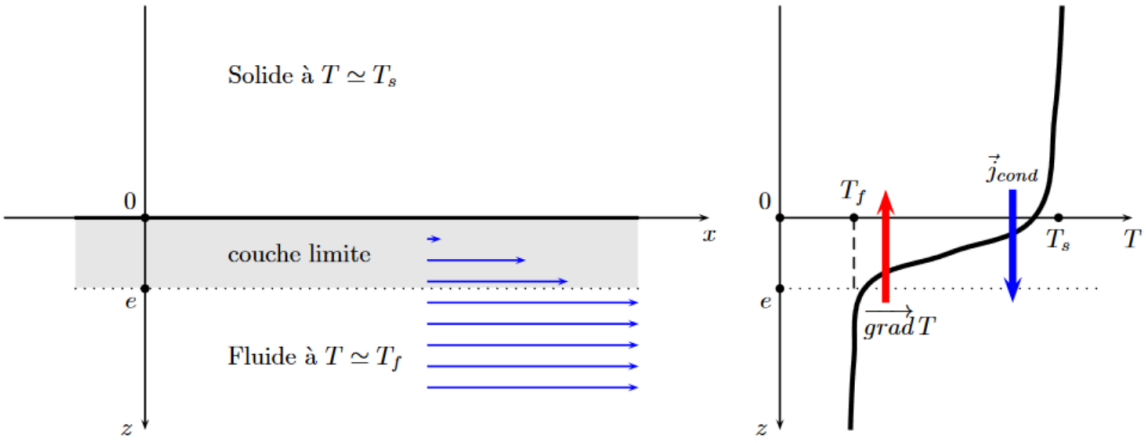


FIGURE 19.3 – Modèle de la couche limite.

Le modèle consiste à considérer qu'il existe un couche fine de fluide qui ne se déplace pas avec le reste du fluide, qui reste collée au fond de la casserolle en somme.

Cette couche, considérée fine, d'épaisseur e, est le siège d'un fort gradient thermique

$$\partial_z T = \frac{T_f - T_s}{e}$$

Comme le transfert thermique est conductif dans cette couche, on applique la **loi de Fourier**.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{j}_{conduc} &= -\lambda \partial_z T \overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{j}_{conduc} &= \frac{\lambda_f}{e}(T_s - T_f)\overrightarrow{e_z} \end{aligned} \tag{19.15}$$

On a de plus, de part l'équilibre thermodynamique local, l'impossibilité d'accumuler infiniment de la chaleur. Donc le flux conductif doit être évacué en flux convectif.

$$\overrightarrow{j}_{conduc} = \overrightarrow{j}_{convec} \tag{19.16}$$

Ce résultat se nomme **Loi de Newton**

$$\overrightarrow{j}_{convec} = h\Delta T \overrightarrow{n} \tag{19.17}$$

Avec $h = \frac{\lambda_f}{e}$ le coefficient conducto-convectif de Newton, en W m^{-2} K^{-1} et $\overrightarrow{n}$ la normale à la surface, que l'on dirige en fonction de la physique de la situation.

fluide	type de transfert	h en W.m^{-2}.K^{-1}
gaz	convection naturelle	5 – 30
	convection forcée	10 – 300
eau	convection naturelle	100 – 1000
	convection forcée	300 – 12000
métal liquide	convection forcée	6000 – 110000

FIGURE 19.4 – Ordre de grandeur de h en fonction du matériaux.

Dans le cas d'une température uniforme sur la surface considérée, comme par exemple dans le cas d'un mur de maison, on peut écrire la puissance dissipée par convection :

$$\mathcal{P} = h\Delta T S \tag{19.18}$$

Par analogie avec l'électrostatique, on peut poser une résistance thermique pour la convection $R_{\text{th}}^{conv} = hS$.

3.3 Applications directes

Deux applications sont standards, celle des ailettes de refroidissement et celle du double vitrage.

3.3.1 Ailettes

Pour refroidir un composant informatique, on utilise généralement un bloc métallique appelé radiateur, qui va dissiper de la chaleur par radiation et par conducto-convection.

✍ CCP 2017 :

Chaque ailette est parallélépipédique, de dimensions $a = 2{,}0$ mm (épaisseur), $b = 10$ cm (largeur) et $c = 20$ cm (longueur). On pourra admettre que a est négligeable devant b. En fonctionnement, le boîtier de l'appareil M sera maintenu à la température $T_M = 60°$C. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20°$C, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette.

Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, est monodimensionnel dans la direction de l'axe Ox. Il obéit à la loi de Fourier, la conductivité thermique étant $\lambda = 16\,\text{W m}^{-1}\,\text{K}^{-1}$. On note $T(x)$ la température de l'aile à x. Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, à travers la couche limite. Le flux thermique au niveau d'une surface dS de l'élément de l'ailette de longueur dx suit la loi de Newton, avec $h = 150\,\text{W m}^{-2}\,\text{K}^{-1}$.

1. Ecrire le bilan des transferts d'énergie pour la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et x+dx en régime permanent. On posera $L = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$. Écrire ensuite et résoudre l'EDL dont T est la solution.
2. Vérifier l'hypothèse d'épaisseur de la couche limite
3. Donner l'expression de d$\mathcal{P}(x)$, puis de la puissance totale $\mathcal{P}$ dissipée par l'ailette. En déduire le nombre d'ailettes nécessaires pour évacuer la chaleur produite par une machine de 1kW en le maintenant à 60°C.

---

1. La loi de Fourier nous donne, appliquée entre x et $x + dx$, $\vec{j} = -\lambda\vec{\nabla}T$, *i.e.* $j(x) = -\lambda\partial_x T$. On applique alors le bilan de conservation de l'énergie, avec une perte de puissance surfacique. Cette perte vaut $\mathcal{P}_{vol} = \dfrac{2h}{a}(T(x) - T_A)$. 2 car il y a deux surface, et divisé par a parce qu'il faut répartir la puissance surfacique sur l'épaisseur.

$$\partial_x^2 T = \frac{2h}{\lambda a}(T - T_A) = \frac{T - T_A}{L^2} \tag{19.19}$$

La résolution donne alors directement

$$T = T_A + (T_M - T_A)e^{-x/L} \tag{19.20}$$

2. L correspond à la couche limite en question, et pour appliquer la loi de Newton, il faut que la couche limite soit petite face à la largeur de l'ailette. Ici un rapide calcul nous donne $L \simeq 1$cm. On est bon !

3. $\mathcal{P} = \iint h(T(x) - T_A)\mathrm{d}S = \lambda \frac{ab}{L} T_M \simeq 100$W.

Remarque : la puissance est en $b\sqrt{a}$, on peut donc réduire a au profit de l'augmentation du nombre d'ailettes, c'est franchement plus rentable !

Remarque : Si on fait juste de la conducto-convection sur une surface de taille $a \times b$, on a un flux ridiculement petit, et $\mathcal{P} = abh\Delta T = 0.12$W...

3.3.2 Compétition avec la conduction thermique : puits canadiens

✍ Sanz PC p.149, *Puits Canadiens*

Un fluide à la vitesse v dans une canalisation, reçoit de la chaleur du sol par un flux conducto-convectif, et un flux dû au gradient de température dans la canalisation sous forme conductif.

Ici, on fait un bilan d'énergie thermique, on arrive à l'équation :

$$\partial_x^2 T - \frac{c_p \mu v}{\lambda}\partial_x T - \frac{2h}{\lambda R}(T(x) - T_s) = 0 \tag{19.21}$$

On a la dérivée seconde qui est de la conduction, la dérivée première qui est la convection. C'est assez subtil car en fait on ne compare pas la conducto-convection à la conduction. On dit juste que la conducto-convection a lieu (et est "toujours plus grande que la conduction" au vue des valeurs de h, ou tout du moins du même ODG), mais on compare avec la convection d'énergie interne qui est un résultat du mouvement du fluide. Ca c'est important. On fait le rapport des deux termes en ODG :

$$\frac{\text{Diff}}{\text{Conv}} = \frac{\lambda}{L\mu c_p v} = \frac{D_{th}}{Lv} = \frac{1}{Pe} \tag{19.22}$$

On fait apparaitre le nombre de Péclet, qui caractérise cette compétition. Il est ici visible que la conduction s'essouffle aux temps longs (en racine de t), alors que la convection non !

4 Rayonnement

✍ LP17 (et LP38)

On cherche à mettre en équation les dépendances en fréquence et en température de l'énergie interne volumique u et du flux surfacique d'énergie rayonnée Φ_R. On remarque qu'avec les dépendances en fréquence, on obtient aisément les dépendances en longueur d'onde car $\lambda = \frac{C}{\nu}$. On notera x_ν la grandeur par unité de ν.

On se place donc dans toute cette partie à l'équilibre radiatif pour toute fréquence, $\Phi_i = \Phi_p = \Phi$.

4.1 Loi générale

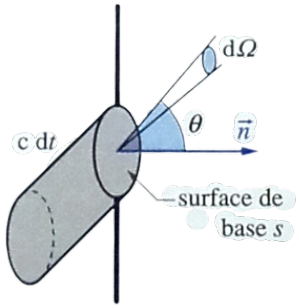
Dans un intervalle de fréquence $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$, l'énergie volumique du rayonnement s'écrit $\mathrm{du} = \mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T})\mathrm{d}\nu$, où u_ν s'exprime en $\mathrm{J\,s\,m^{-3}}$. On a

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \Phi_\nu \, \mathrm{d}\nu = \int_0^{+\infty} \Phi_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{19.23}$$

où Φ_ν est en $\mathrm{W\,m^{-2}\,s}$ et Φ_λ est en $\mathrm{W\,m^{-3}}$. Il nous faut alors lier u et Φ par une relation constitutive. Pour cela, on exprime l'énergie reçue par une tranche de paroi d'aire s :

$$\mathrm{d}^2\mathcal{E} = \Phi_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{s} \mathrm{d}\mathrm{t} \tag{19.24}$$

À l'équilibre thermodynamique, la paroi émet l'énergie qu'elle reçoit. Comme le rayonnement se propage à la vitesse c, cette énergie se trouvait dans le cylindre de longueur c dt, de base s et de génératrices parallèles à la direction de propagation. Cette énergie vaut, dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$,



$$\mathrm{d}^4\mathcal{E} = \mathrm{u}_\nu \mathrm{d}\nu \, \mathrm{s}\cos(\theta) \, \mathrm{c}\mathrm{d}\mathrm{t} \, \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{19.25}$$

On intègre sur $\mathrm{d}\Omega$ pour obtenir

$$\mathrm{d}^2\mathcal{E} = \frac{\mathrm{c}}{4}\mathrm{u}_\nu \mathrm{d}\nu \mathrm{s} \mathrm{d}\mathrm{t}$$

On obtient alors

$$\Phi_\nu(\nu, \mathrm{T}) = \frac{\mathrm{c}}{4}\mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T})$$

Ce lien entre flux et énergie volumique du rayonnement nous permet, en connaissant la répartition de cette énergie, de donner le spectre d'émission d'un objet.

Il nous reste à préciser la répartition en fréquence de l'énergie et on pourra en déterminer le rayonnement. C'est ce qui a été fait tout au long du 19eme siècle avec la nécessité de remplacer la loi de Rayleigh-Jeans. C'est bien évidemment Planck qui a trouvé la solution.

4.2 Loi de Planck

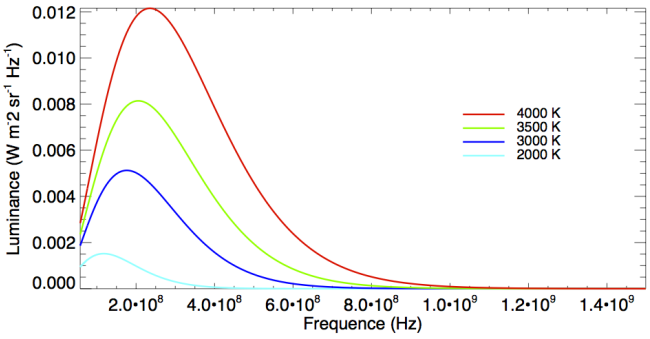


FIGURE 19.5 – Loi de Planck pour différentes température. L'abscisse est en Hz.

Planck a marqué l'histoire de l'étude du corps noir en introduisant le célèbre quantum d'énergie $h\nu$ (cf la leçon LP38 sur l'aspect corpusculaire du rayonnement). En utilisant cette méthode de quantification du rayonnement, il a obtenu la forme suivante pour u :

$$u_\nu(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T_0} - 1\right)} \cdot h\nu \tag{19.26}$$

Le premier terme décrit la densité de modes de vibration des quantums, le second donne le nombre de photons par mode et le troisième donne l'énergie de chaque mode. On rappelle que $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1} et h=$6.626 \cdot 10^{-34}$ J s.

On remarque que cette expression est indépendante du matériau étudié et qu'elle ne fait intervenir que T, ν ainsi que trois des constantes fondamentales de la physique.

On observe l'émergence de deux régimes :

- Wien pour $\frac{h\nu}{k_B T_0} \gg 1$;
- Stefan pour $\frac{h\nu}{k_B T_0} \ll 1$.

On remarque qu'on peut retrouver avec un développement limité de l'exponentielle au première ordre la loi de Rayleigh-Jeans, indépendante de la quantification :

$$u_\nu(\nu, T) = 8\pi \frac{\nu^2}{c^3} k_B T_0$$

Cette loi donne cependant une divergence pour les hautes fréquences qu'on a appelée la catastrophe ultraviolette.

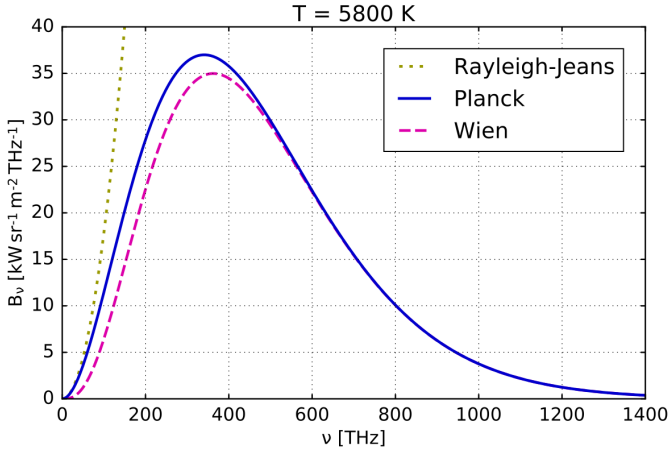


FIGURE 19.6 – La catastrophe ultraviolette.

On va maintenant exploiter ce résultat.

4.3 Loi de Wien, température des étoiles.

On veut relier le spectre du rayonnement du corps noir à sa température. Pour cela, il suffit d'exprimer u_λ puis de trouver la valeur de λ qui le maximise.

$$u_\lambda = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B T_0 \lambda}\right) - 1} \tag{19.27}$$

En posant $x = \dfrac{hc}{k_B T_0 \lambda}$, l'annulation de la dérivée de u_λ donne l'équation

$$e^{-x} + 0.2x - 1 = 0 \iff x = 4.97$$

On en déduit la loi de Wien :

$$\lambda_{max} T = 2898\ \mu m\,K \tag{19.28}$$

Application : calculer la température de la surface du Soleil.

Comme on l'a vu, le soleil est modélisable par une structure en couches, et on peut considérer sa couche externe comme un corps noir. La lumière qui nous en parvient est donc un rayonnement d'équilibre thermique pur.

Sur cette figure, on voit le spectre solaire, avec un ajustement en loi de Planck. Le maximum est à 500nm, ce qui donne T=5800K.

Cette loi est très utilisée en cosmologie puisqu'elle donne une bonne première approximation de la température d'une étoile lointaine. Elle peut aussi servir à déterminer sans contact la température d'une surface, comme un être humain, simplement en trouvant le maximum de son spectre d'émission.

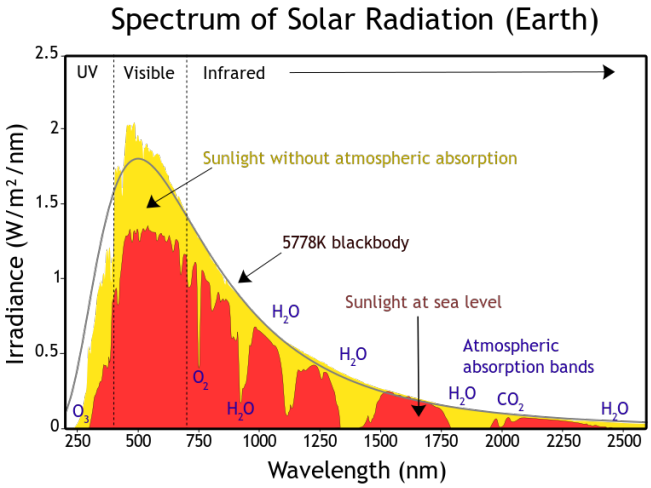


FIGURE 19.7 – Spectre d'émission du Soleil reçu sur Terre.

4.4 Loi de Stefan

Cette loi relie le flux de lumière, et donc l'énergie rayonnée, à la température. On se dit intuitivement que plus c'est chaud plus ça brille, c'est ce que l'on va montrer.

Le flux d'énergie rayonnée s'écrit

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \frac{c}{4} u_\nu d\nu$$

En combinant cette expression avec la loi de Planck, on obtient alors

$$\Phi = \frac{2\pi h}{c^2}\left(\frac{k_B T_0}{h}\right)^4 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{=\frac{\pi^4}{15}} \tag{19.29}$$

On obtient ainsi la loi de Stefan :

$$\Phi = \sigma T^4 \tag{19.30}$$

où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W\,m^{-2}\,K^{-4}$ est la constante de Stefan.

Vérification de la loi de Stefan sur une petite ampoule

✍ Une petite ampoule, deux multimêtres, une alim, un ordinateur. ⏲ 5 minutes

L'ampoule de petite taille est un bon corps noir parce que le vide est quasiment total dans le bulbe. On peut d'ailleurs toucher ce dernier, il n'est pas chaud.

Le filament à l'intérieur est en Tungstène, on connaît donc sa courbe résistivité-température, notée $\rho(T)$. Dans cette expérience celle-ci nous vient tout droit d'internet [a] [b]. On fait une regression quadratique sur les données de la table obtenue.

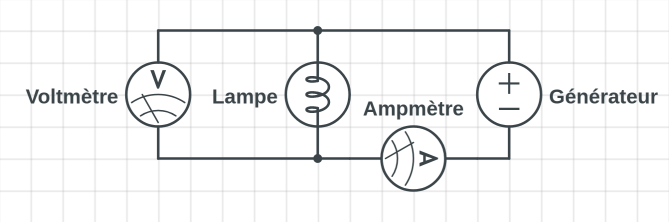
$$T = a + br + cr^2$$

$a = 128,0 \pm 9,0$, $b = 203,0 \pm 2,1$, $c = -1,62 \pm 0,1$.

Où on a posé

$$r = \frac{R(T)}{R(T_{amb})} = \frac{\rho(T)}{\rho(T_{amb})}$$

Pour remonter à R on utilise la relation $U = R \times I$, et le montage suivant :



Ainsi on remonte à T via la relation $r(T)$, puis on trace $P = U \times I$ en fonction de T^4 et Bam !!

a. The University of the State of New York Reference Tables for Physical Setting/Physics. New York : The State Education Department, 2002.
b. https ://hypertextbook.com/facts/2004/DeannaStewart.shtml

Question : J'ai deux minutes pour boire un thé brûlant, et je veux y mettre de l'eau froide. Quand dois-je mettre cette eau froide pour avoir le meilleur refroidissement ? *Il me suffit d'attendre le dernier moment, j'aurais ainsi transféré autant d'énergie que possible à l'air ambiant avant de mélanger et de boire mon thé.*

Boire le thé posé au bord de la paillasse.

4.5 Application : effet de serre

✍ Sanz ou n'importe quel livre de prépa

On étudie l'équilibre thermique radiatif de la Terre. En première approximation, la température de surface résulte de l'équilibre entre le rayonnement reçu du Soleil et le rayonnement produit par la Terre. De plus, la Terre réfléchit une partie de l'énergie reçue par le Soleil (on appelle cette fraction réfléchie l'albedo, notée A) et absorbe le reste. Le rayon du Soleil est $R_S = 7.2 \times 10^5$ km et sa température surfacique est $T_S = 5800$ K. La puissance totale rayonnée par le Soleil est donc :

$$\mathcal{P}_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \tag{19.31}$$

La Terre reçoit la pression surfacique

$$\mathcal{P}_{\text{surf}} = \frac{\mathcal{P}_S}{4\pi d_{T-S}^2} \tag{19.32}$$

où $d_{T_S} = 1.5 \times 10^{11}$ m est la distance terre-Soleil.

En supposant que les rayons solaires arrivent parralèles entre eux au niveau de la Terre (légitime compte tenu de la distance importante entre la Terre et le Soleil), on peut considérer que la terre reçoit la même puissance que celle d'un disque de rayon R_T (le rayon de la Terre) placé perpendiculairement à l'axe Terre-Soleil. La puissance reçue par la Terre est donc :

$$\mathcal{P} = \sigma T_s^4 \pi \frac{R_T^2 R_S^2}{d_{TS}^2} = 1.8 \times 10^{17}\,\text{W} \tag{19.33}$$

$$\phi = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R_T^2} = 1.4\,\text{kW m}^{-2} \tag{19.34}$$

Comme on l'a dit précédemment, la Terre réfléchit une partie A de la puissance P qu'elle reçoit. Elle réemet la puissance $\mathcal{P}_{\text{émise}} = 4\pi R_T^2 \sigma T_0^4$ où T_0 est la température à la surface de la Terre que l'on recherche. On obtient alors

$$(1-A)\mathcal{P} = 4\pi R_T^2 \sigma T_0^4 \iff T_0 = (1-A)^{1/4}\sqrt{\frac{R_S}{2d_{T-S}}}T_S \tag{19.35}$$

La valeur moyenne de l'albedo est de 0.31, ce qui donne une température de surface égale à $T_0 = 255$ K. Cette valeur est trop faible : **il faut prendre en compte la présence de l'atmosphère**.

On assimile l'atmosphère de la Terre à une couche sphérique de centre confondu avec celui de la Terre et d'épaisseur $e \sim 30\text{km} \ll R_T$.

La longueur d'onde d'émission maximale du Soleil est donnée par la loi de Wien et vaut : $\lambda_m \sim 500$ nm. En considérant que la température de surface recherchée doit être de l'ordre de 300 K, la longueur d'onde maximale d'émission de la Terre est de l'ordre de 10 µm. Ces deux longueurs étant très différentes, on peut faire les hypothèses suivantes :

- l'atmosphère laisse passer une grande partie du rayonnement solaire, on supposera en premier lieu qu'elle le transmet intégralement.
- l'atmosphère absorbe complètement le rayonnement de la Terre, notamment à cause de l'eau présente qui absorbe les rayonnements dans la gamme de longueurs d'onde rayonnées par la Terre.

On note T_0 et T_1 les températures respectives de la Terre et de l'atmosphère, supposées uniformes et on considère que l'albedo est le même que celui introduit précédemment. Les bilans thermiques, respectivement pour l'ensemble du système {Terre+atmosphère} et pour la Terre, sont :

$$\begin{cases} (1-A)\mathcal{P} &= \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 \\ (1-A)\mathcal{P} &+ \sigma T_1^4 4\pi R_T^2 = \sigma T_0^4 4\pi R_T^2 \end{cases} \tag{19.36}$$

La résolution de ce système donne $T_1 = 255$ K et $T_0 = 2^{1/4} T_1 = 303$ K. **Cette valeur de température est trop élevée.**

Il faut en réalité améliorer ce modèle. En effet, la Terre n'est pas totalement transparente au rayonnement solaire : une partie du rayonnement ultraviolet est absorbé par l'ozone stratosphérique et une partie du rayonnement infrarouge est absorbé par l'eau.

On suppose donc que l'atmosphère absorbe une fraction α du rayonnement solaire et donc que la Terre absorbe la fraction $1-\alpha$ du même rayonnement. Le bilan énergétique de l'ensemble du système est inchangé mais le bilan de la Terre devient alors :

$$(1-A)(1-\alpha)\mathcal{P} + 4\pi R_T^2 \sigma T_1^4 = 4\pi R_T^2 \sigma T_0^4 \tag{19.37}$$

On obtient une température de surface $T_0 = 290$ K, soit 17°C, ce qui est satisfaisant.

On peut encore affiner ce modèle sur deux points principaux :

- l'atmosphère n'est pas totalement opaque au rayonnement terrestre.
- la surface de la Terre ne fait pas qu'émettre simplement du rayonnement, une partie de l'énergie thermique reçue sert à l'évaporation des océans et est ensuite restituée lors de la condensation de la vapeur d'eau en altitude

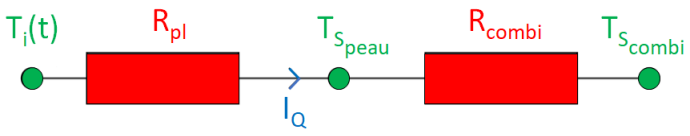
5 Exercice d'application : le plongeur

Considérons l'exemple d'un plongeur en combinaison qui barbote joyeusement dans de l'eau, et on se demande ou bout de combien de temps il entre en hypothermie, *i.e.* sa température corporelle atteint $T_c = 35°\text{C}$ (oui c'est cruel mais c'est pour la science). Le but est d'obtenir une expression de la résistance thermique du plongeur.

5.1 Flux conductifs

Pour obtenir une expression de cette résistance thermique via la diffusion, il faut se placer en ARQS, *i.e.* il faut que la température corporelle du plongeur évolue lentement par rapport au temps caractéristique de diffusion dans la combinaison. Pour une combinaison de néoprène d'épaisseur $e \simeq 3$ mm et de diffusivité thermique $D = 10^{-7}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ (OdG pour un isolant solide). On trouve alors $\tau_{\text{diff}} = \dfrac{(3\times10^{-3})^2}{10^{-7}} \simeq 90$ secondes. Si on suppose que le plongeur passe 1 heure dans son bain, on peut bien se placer en ARQS.

On peut ensuite modéliser le plongeur par un schéma électrique équivalent avec 2 résistances en série (résistance du plongeur et résistance de la combinaison) :



Pourquoi des résistances en série ?

Aux interfaces on a conservation du flux de chaleur I_Q donc

$$I_Q = I_{Q,\text{peau}} = I_{Q,\text{combi}} \iff \frac{T_i - T_{\text{combi}}}{R_{\text{th,eq}}} = \frac{T_i - T_{\text{peau}}}{R_{\text{pl}}} = \frac{T_{\text{peau}} - T_{\text{combi}}}{R_{\text{combi}}}$$

Comme $T_i - T_{\text{combi}} = T_i - T_{\text{peau}} + T_{\text{peau}} - T_{\text{combi}}$, on a donc

$$R_{\text{th,eq}} I_Q = R_{\text{pl}} I_{Q,\text{peau}} + R_{\text{combi}} I_{Q,\text{combi}} \Rightarrow R_{\text{th,eq}} = R_{\text{combi}} + R_{\text{combi}}$$

D'après ✍ Sanz p148, la résistance du plongeur vaut $R_{\text{pl}} = 3.0\times10^{-2}\,\text{K}\,\text{W}^{-1}$. Pour calculer R_{combi}, on prend une surface totale $S = 1.7\,\text{m}^2$ et $\lambda = 4.4\times10^{-2}\,\text{W}\,\text{m}^{-1}\,\text{K}^{-1}$ (encore une fois d'après ✍ Sanz). On obtient alors $R_{\text{combi}} = 4.0\times10^{-2}\,\text{K}\,\text{W}^{-1}$

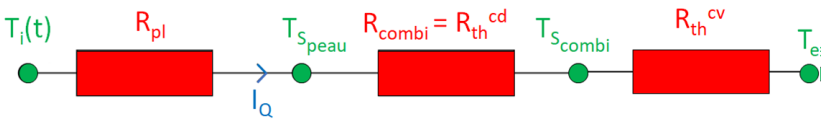
On obtient donc une résistance thermique équivalente

$$\boxed{R_{\text{th,eq}}^{\text{diff}} = 7.0\times10^{-2}\,\text{K}\,\text{W}^{-1}}$$

.

5.2 Flux convectifs

La convection opère à l'interface antre l'eau et la combinaison. Cela revient à ajouter sur le schéma électrique une résistance en série $R_{\text{th}}^{\text{conv}}$:



Pour un coefficient conducto-convectif $h = 10\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$, et toujours avec $S = 1.7\,\mathrm{m^2}$, on obtient

$$\boxed{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv}} = 5.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{K\,W^{-1}}}$$

5.3 Flux radiatifs

Pour cela, on suppose que les systèmes {plongeur + combinaison} et {eau + environnement} sont tous les deux des corps noirs de surface S. Le plongeur cède un flux de chaleur $\Phi_{\mathrm{pl}} = S\sigma T_{\mathrm{combi}}^4$ tandis qu'il reçoit de l'environnement un flux de chaleur $\Phi_{\mathrm{env}} = S\sigma T_e^4$.

Puisque $T_{\mathrm{combi}} > T_e$, on a un courant de chaleur allant du plongeur vers l'environnement :

$$I_Q^{\mathrm{ray}} = s\sigma(T_{\mathrm{combi}}^4 - T_e) = S\sigma[(T_e + \delta T)^4 - T_e^4] \simeq 4S\sigma T_e^3 \delta T$$

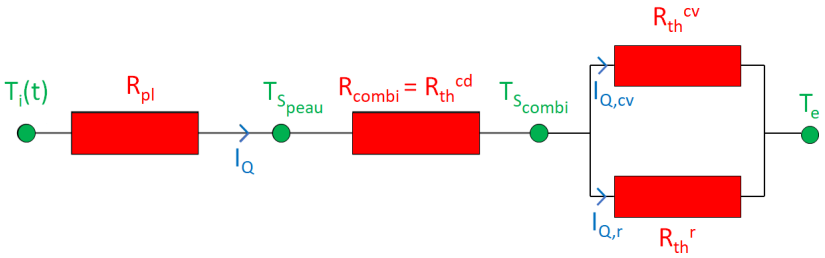
On obtient donc une résistance thermique de rayonnement

$$\boxed{R_{\mathrm{th}}^{ray} = \frac{1}{4S\sigma T_e^3} = 1.1 \times 10^{-1}\,\mathrm{K\,W^{-1}}} \qquad \text{pour une eau à } T_e = 15°\mathrm{C}$$

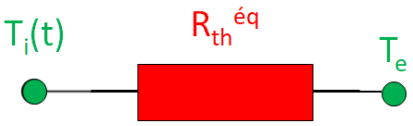
Il reste à savoir comment ajouter cette résistance dans le circuit équivalent. Pour cela, on remarque que les puissances (courants de chaleur) de la convection et du rayonnement s'ajoutent après la combinaison :

$$\begin{aligned} I_{Q,\mathrm{conv+ray}} = I_{Q,\mathrm{conv}} + I_{Q,\mathrm{ray}} &\iff \frac{T_{\mathrm{combi}} - T_e}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv+ray}}} = \frac{T_{\mathrm{combi}} - T_e}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv}}} + \frac{T_{\mathrm{combi}} - T_e}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ray}}} \\ &\iff \frac{1}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv+ray}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ray}}} \end{aligned}$$

On doit donc mettre les résistances thermiques de convection et de rayonnement en parallèle dans le circuit équivalent.



5.4 Résistance thermique totale



On assimile toutes ces résistances thermiques à une seul résistance thermique équivalente $R_{\mathrm{th,tot}}$ qui vaut :

$$\boxed{R_{\mathrm{th,tot}} = R_{\mathrm{th,eq}}^{\mathrm{diff}} + \frac{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv}} \cdot R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ray}}}{R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{conv}} + R_{\mathrm{th}}^{\mathrm{ray}}} = 1.04 \times 10^{-1}\,\mathrm{K\,W^{-1}}}$$

La puissance thermique perdue par le plongeur vaut alors $I_Q = \dfrac{T_i(t) - T_e}{R_{\mathrm{th,tot}}}$.

5.5 Bilan énergétique et conclusion

Dernière étape de l'exercice : savoir au bout de combien de temps le plongeur est en hypothermie. On a une évolution isochore de T_i et on peut écrire

$$mc_v \frac{\partial T_i}{\partial t} = -I_Q + \mathcal{P}$$

où $\mathcal{P}$ est la puissance dégagé par le corps humain de par son fonctionnement normal : $\mathcal{P} = 2500$ kcal/jour $= 120$ W.

Remarque

On ne travaille pas avec des grandeurs volumiques ici.

Avec l'expression de I_Q, on obtient

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{T_i(t) - T_e}{mc_v R_{\text{th,tot}}} + \frac{\mathcal{P}}{mc_v}$$

On reconnaît un temps caractéristique $\tau = mc_v R_{\text{th,tot}} = 3.7 \times 10^4\,\text{s} = 10$ heures. En réécrivant l'équation différentielle, on a alors

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{T_i}{\tau} = +\frac{T_e}{\tau} + \frac{\mathcal{P}}{mc_v} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

en posant $T_\infty = T_e + \dfrac{\tau \mathcal{P}}{mc_v} = T_e + \mathcal{P} R_{\text{th,tot}}$.

On peut donc déjà calculer la température à l'équilibre : $T_\infty = 303\,\text{K} \simeq 30°\text{C}$. Bon, le plongeur à l'équilibre est en hypothermie déjà assez vénère, ce qui veut dire qu'il ne peut pas rester indéfiniment dans l'eau. Il s'agit donc de savoir au bout de quelle durée $T_i(t)$ atteint $T_c = 35°\text{C}$. On résoud pour ça l'équation différentielle du 1er ordre :

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau} \Rightarrow T_i t = T_\infty + [T_i(t=0) - T_\infty] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \tau \ln\left(\frac{T_\infty - T_i(t=0)}{T_\infty - T_i(t)}\right)}$$

Avec $T_i(t=0) = 37.5°\text{C}$, $T_\infty = 30°\text{C}$ et $T_i(t = t_{\text{hypo}}) = T_c = 35°\text{C}$, on trouve

$$\boxed{t_{\text{hypo}} = 1.2 \times 10^4\,\text{s} \simeq 3 \text{ heures } 30 \text{ minutes pour atteindre l'hypothermie.}}$$

On trouve bien $t_{\text{hypo}} \gg \tau_{\text{diff}}$, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local formulée au départ.

On trouve un résultat satisfaisant malgré toutes les approximations effectuées puisque les secouristes estiment que le corps atteint l'hypothermie en 4 heures.

5.6 Et si le plongeur est nu ?

Dans ce cas, la résistance thermique totale change. On a juste à lui soustraire R_{combi} pour obtenir

$$R_{\text{th,tot,nu}} = R_{\text{peau}} + \frac{R_{\text{th}}^{\text{conv}} \cdot R_{\text{th}}^{\text{ray}}}{R_{\text{th}}^{\text{conv}} + R_{\text{th}}^{\text{ray}}} = 0.64 \times 10^{-1}\,\text{K W}^{-1}$$

Le nouveau temps caractéristique vaut alors $\tau, \text{nu} = 0.27 \times 10^4\,\text{s} = 6$ heures et 20 minutes (au lieu de 10 heures avec la combinaison, ce qui donne *in fine* :

$$t_{\text{hypo, nu}} = 7.5 \times 10^3\,\text{s} \simeq 2 \text{ heures } 6 \text{ minutes pour atteindre l'hypothermie.}$$

Conclusion

Sortez couverts !

LP 20

Conversion de puissance électromécanique

Commentaires du jury

- 2016 : Afin de pouvoir aborder des machines électriques de forte puissance, le rôle essentiel du fer doit être considéré car les forces électromagnétiques ne se réduisent pas aux seules actions de Laplace s'exerçant sur les conducteurs traversés par des courants.
- 2015 : Il est souhaitable de préciser le rôle de l'énergie magnétique lors de l'étude des convertisseurs électromécaniques constitués de matériaux ferromagnétiques linéaires non saturés.
- 2014 : Dans le cas des machines électriques, les candidats sont invités à réfléchir au rôle du fer dans les actions électromagnétiques qui peuvent également être déterminées par dérivation d'une grandeur énergétique par rapport à un paramètre de position.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Conversion de puissance électromécanique. Exemples et applications.
- 2011, 2012, 2013 : Dans cette leçon, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Ce ne sont pas les machines de technologie complexe qui illustrent le mieux les idées en jeu. Les notions de base sur l'induction sont supposées connues.
- 2008 : Cette leçon nécessite une bonne connaissance des machines présentées et de leurs applications.
- 2006 : Les principes élémentaires de l'induction ne sont pas correctement utilisés dans cette leçon qui nécessite un minimum de connaissance de la technologie des machines.
- 2005 : Il ne faut pas confondre force de Lorentz sur un porteur de charge et force de Laplace sur un conducteur. Toutes les grandeurs introduites doivent être algébriques ou vectorielles, ce qui nécessite de préciser les orientations et les bases de projection.
- 2004 : La conversion de puissance a donné lieu à des exposés purement descriptifs. Nous attendons une attitude de physicien, c'est-à-dire une justification des modèles simples proposés pour les machines à courant continu, par exemple avec les conditions d'algébrisation des grandeurs électriques et mécaniques introduites.
  Jusqu'en 2003, le titre était : Exemples de couplage électromécanique : haut-parleur électrodynamique, moteurs... Bilans énergétiques.
- 1999 : Les candidats doivent pouvoir donner le principe des moteurs électriques des différents types (à champ tournant, unipolaires, universels) ainsi que celui des générateurs électriques à courant continu ou alternatif. Il faut être particulièrement attentif aux signes dans cette leçon et ne pas omettre de mentionner des ordres de grandeur.
- 1998 : Il est essentiel de montrer l'importance des termes de couplage entre équation mécanique et équation électrique. Dans le bilan d'énergie global, il faut faire ressortir le rôle du champ magnétique et expliquer l'origine du bilan auxiliaire $\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{fem}} = 0$.
- 1997 : Dans les bilans énergétiques, deux approches sont possibles : raisonner sur le circuit mobile seulement ou sur le système constitué du circuit et des sources de B. Dans le premier cas, un fait important est que le travail des forces de Laplace extérieures subies par le circuit mobile augmenté du travail de la force électromotrice d'induction dans ce circuit et dû à son déplacement seulement, est nul ; cela provient de la nullité du travail des forces de Lorentz au niveau microscopique. Une illustration expérimentale des exemples traités, haut-parleur ou moteur, s'impose.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Hprépa PSI*, **Auteur** ⟶ Pourquoi
- ✍ *Précis d'électrotechnique*, **Bréhat** ⟶ Toute la leçon
- ✍ *BUP 846* ⟶ Ordres de grandeurs
- ✍ *Electrotechnique IUT*, **Palermo** ⟶ Plein infos et récap et triphasé
- ✍ *Electrotechnique*, *Gaude* ⟶ Autre cours et électronique de puissance
- ✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Pi%C3%A9zo%C3%A9lectricit%C3%A9 ⟶ Piézoelectricité

Prérequis

- ➢ Forces de Laplace et de Lorentz
- ➢ Lois de l'électromagnétisme (Faraday)
- ➢ Principe de l'induction
- ➢ Lois de l'électrocinétiques, puissance électrique
- ➢ PFD, puissance mécanique

Expériences

☕

1 Rappels sur l'induction . . . 269
1.1 Origine physique . . . 269
1.2 Compréhension du phénomène . . . 269
1.3 Lois de l'induction . . . 270
1.4 Auto-induction . . . 270
2 Principe de la conversion électromécanique . . . 271
2.1 Un premier exemple : les rails de Laplace . . . 271
2.2 Fonctionnement en générateur . . . 272
2.3 Fonctionnement en moteur . . . 273
2.4 Bilan de puissance . . . 273
3 Machines à courant continu . . . 274
3.1 Principe . . . 274
3.2 Fonctionnement en moteur . . . 275
3.3 Équations de fonctionnement . . . 276
3.4 Moteur ou générateur ? . . . 278
3.5 Considérations techniques . . . 278
4 Machines à courant alternatif . . . 279
4.1 Moteurs synchrones . . . 279
4.2 Moteurs asynchrones . . . 281

Introduction

Au quotidien, on utilise des moteurs, des générateurs, et de l'électricité tous les jours. Rien que dans une voiture, qui est un gros moteur sur pattes (ou plutôt sur roues), on a une quarantaine de moteurs électriques entre les pompes et autres essuie-glaces, ainsi que des transformateurs et des générateurs.

Dans la maison, on a des moteurs dans les lave-linges et autres portails électriques, qui convertissent de la puissance électrique en puissance mécanique. À l'autre bout de la chaîne, chez EDF, on converti de la puissance mécanique sous forme de turbine qui tournent en énergie électrique.

Ce sont ces deux aspects de la conversion de puissance que l'on va voir aujourd'hui.

1 Rappels sur l'induction

✍ Perez, Électromagnétisme

L'induction électromagnétique est un phénomène physique conduisant à l'apparition d'une force électromotrice dans un conducteur électrique soumis à un flux de champ magnétique variable. Cette force électromotrice peut engendrer un courant électrique dans le conducteur.

Ce phénomène est d'une importance pratique capitale. Il est notamment utilisé dans les générateurs et les transformateurs électriques, les bobines, ou encore les plaques à induction grâce aux courants de Foucault.

1.1 Origine physique

Ce phénomène a pour origine la force de Lorentz $\overrightarrow{F}$, appliquée aux électrons libres dans le conducteur électrique :

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \tag{20.1}$$

où q est la charge de la particule (exprimée en coulombs), $\overrightarrow{E}$ le champ électrique (volts par mètre), $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la particule (mètres par seconde), et $\overrightarrow{B}$ l'induction magnétique (teslas).

Ces grandeurs sont toutes mesurées dans le même référentiel galiléen au point où se trouve la particule. La notion de référentiel est ici très importante car suivant le référentiel dans lequel on se place, il y a deux manières d'interpréter le même phénomène. Dans ces deux points de vue, cela se modélise par la loi de Lenz-Faraday, ou bien une des quatre équations de Maxwell.

1.2 Compréhension du phénomène

On considère un conducteur électrique placé dans un champ magnétique. Suivant le référentiel de travail choisi, il est possible de mettre en évidence deux cas particuliers du phénomène d'induction :

- L'induction de Lorentz :

  on parle de l'induction de Lorentz lorsqu'on travaille dans un référentiel dans lequel le champ magnétique est stationnaire et que le conducteur électrique se déplace ou se déforme. Dans ce référentiel, les électrons ont alors une vitesse, subissent une force qui correspond à la partie magnétique de la force de Lorentz

  $$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \tag{20.2}$$

  Le phénomène est exploité dans les machines à courant continu. Pour un circuit filiforme, f.é.m. induite a pour expression :

  $$e = \oint (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \tag{20.3}$$

- L'induction de Neumann : dans le cas de l'induction de Neumann, le conducteur électrique est considéré rigide et fixe dans le référentiel de travail, et le champ magnétique y est variable dans le temps. Dans ce référentiel, les électrons n'ont pas de vitesse, donc la contribution de la force de Lorentz est nulle. Cependant, on observe la variation du flux du champ magnétique. Le phénomène est exploité dans les alternateurs, les moteurs asynchrones et moteurs à induction ainsi que des transformateurs électriques.

1.3 Lois de l'induction

Il existe deux formes, intégrale et locale, qui sont équivalentes.

1.3.1 Loi locale

La loi d'Ohm s'écrit localement :

$$\overrightarrow{j} = \sigma(-\overrightarrow{\nabla} V + \overrightarrow{E}_{em}) \tag{20.4}$$

où σ est la conductivité électrique du conducteur, $\overrightarrow{j}$ est la densité volumique du courant électrique. En l'absence de générateur électrochimique (qui crée un gradient de potentiel $\overrightarrow{\nabla} V$, seuls les phénomènes d'induction peuvent expliquer la naissance de courant, "via" le champ électromoteur

$$\overrightarrow{E}_{em} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \tag{20.5}$$

.

1.3.2 Loi de Faraday

La forme intégrale, ou loi de Faraday, est la suivante : un circuit soumis à un flux magnétique variable Φ (issu d'un champ magnétique variable B) subit une force électromotrice : e (en volts) orientée selon une convention générateur telle que :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{20.6}$$

où Φ est le flux de B à travers le circuit.

Dans un schéma électrique, cette force électromotrice est toujours fléchée avec la convention générateur. Ainsi, lorsqu'on utilise la convention récepteur, la tension u aux bornes de ce circuit est égale à la somme des chutes de tension liées à l'intensité i qui le parcourt, retranchées de cette force électromotrice.

En régime de courant continu, on peut alors écrire ce qu'on appelle la loi d'Ohm généralisée :

$$U = R \cdot I - e \tag{20.7}$$

où R est la résistance électrique du conducteur.

1.4 Auto-induction

On parle d'auto-induction lorsque la source du champ magnétique à l'origine d'une force électromotrice dans un circuit est le courant électrique parcourant ce même circuit. Le champ magnétique établit une rétroaction des variations du courant dans le circuit sur elles-mêmes.

L'auto-induction est la propriété électromagnétique remarquable qu'a un conducteur parcouru par un courant électrique, de s'opposer aux variations de celui-ci.

En effet, un conducteur parcouru par un courant électrique génère un champ magnétique (cf. loi de Biot et Savart). La loi de Lenz-Faraday décrit le phénomène suivant : lorsque le flux du champ magnétique qui traverse un circuit conducteur varie au cours du temps, il apparaît dans ce circuit une tension appelée force électromotrice. La f.e.m. ainsi créée est orientée de façon à générer des courants s'opposant à la variation du flux :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \tag{20.8}$$

Toute variation du courant produit une variation de ce champ induit, ce qui a pour effet de produire une tension qui s'oppose à la variation du champ donc qui s'oppose à la variation du courant :

$$u = -L\frac{di}{dt} \tag{20.9}$$

où L s'appelle le coefficient d'auto-inductance du circuit ou inductance propre du circuit. Il ne dépend que de la configuration géométrique du circuit, et est toujours strictement positif.

2 Principe de la conversion électromécanique

Système électromécanique : système mécanique couplé à un système électrique. Nous nous limiterons dans ce cours au couplage par les lois de l'induction.

2.1 Un premier exemple : les rails de Laplace

Un premier système que l'on peut étudier est celui des rails de Laplace. Ce montage est constitué de deux rails séparés d'une distance a reliés entre eux par un générateur vénère en mode moteur ou un ampèremetre en mode générateur. On ferme le circuit avec une barre en métal, placée dans un champs $\vec{B}$ permanent, uniforme et constant.

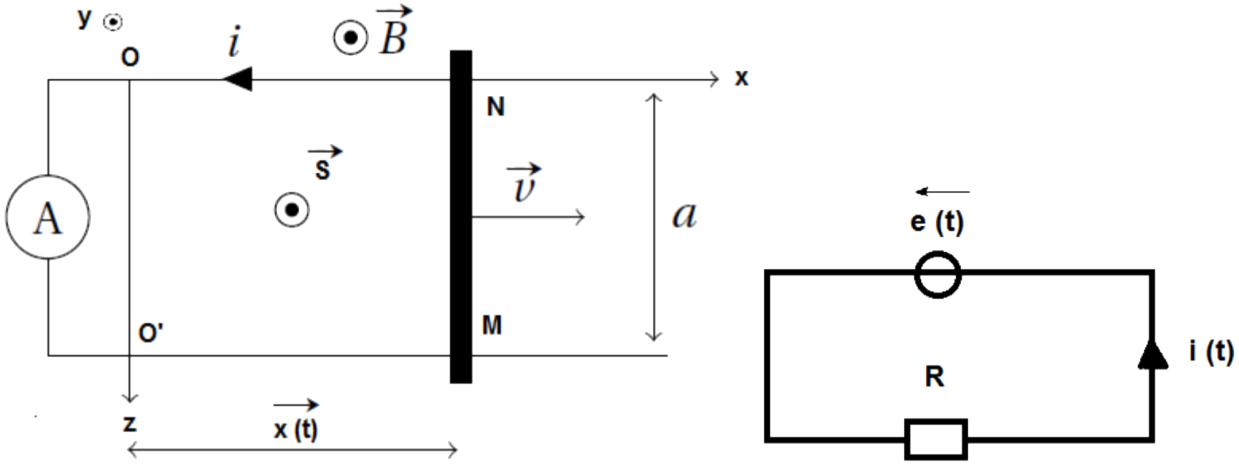


FIGURE 20.1 – Le montage des rails de laplace (ici en générateur) et son schéma électrique équivalent.

2.2 Fonctionnement en générateur

Conversion méca vers élec

☕

Rails de Laplace générateur

✍ ⏲

On mesure au microampèremètre à aiguille, avec le 0 au milieu pour bien voir dans les deux sens.

On créée un champs $\overrightarrow{B}$ à l'aide d'un aimant en U, créant un champs magnétique ascendant. La seule façon d bien l'orienter, c'est d'utiliser le schéma au-dessus.

On déplace la tige le long des rails, et on observe un courant ! Il change de sens avec le sens de la barre.

Question : d'où ça vient ?

Le flux passant dans la boucle, que l'on nommera ϕ dépend de la distance entre la barre et le bout des rails, nommé $x(t)$. On a grosso-modo $\phi \propto x(t)$.

Cette variation de flux a cours du temps va provoquer l'apparition d'une force électromotrice dans le circuit, par induction de Lorentz, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} \tag{20.10}$$

$\overrightarrow{F}$ sur la tige $\longrightarrow$ Variation de l'aire

$\uparrow$ $\downarrow$

$\overrightarrow{F}$ opposée de Laplace Variation de flux

$\uparrow$ $\downarrow$

courant $\longleftarrow$ f.é.m

Mise en équations :

On se place dans le cas d'un déplacement à x croissants. On oriente le courant comme indiqué dans le schéma, avec i de M vers N. La règle des trois doigts donne une force de Laplace dans le sens opposé à la vitesse, et une intensité négative.

$$\text{équation mécanique, PFD :} \qquad m\ddot{x} = i(t)aB + T \tag{20.11}$$

On a de plus une loi des mailles à exprimer, en considérant une résistance R pour la barre, et en utilisant la loi de Faraday, $e(t) = -\mathrm{d}_t\phi = -aB\dot{x}$.

$$\text{équation électrique :} \qquad aB\dot{x} + Ri = 0 \tag{20.12}$$

On a donc ici un couplage entre une équation mécanique et une équation électrique, comme annoncé dans l'introduction ! On voit aussi une propriété amusante de tout cela, le couplage n'a pas de notion de causalité, mais plutôt de boucle de rétroaction. Que se passe-t-il si je fais passer un courant ?

2.3 Fonctionnement en moteur

Conversion élec vers méca

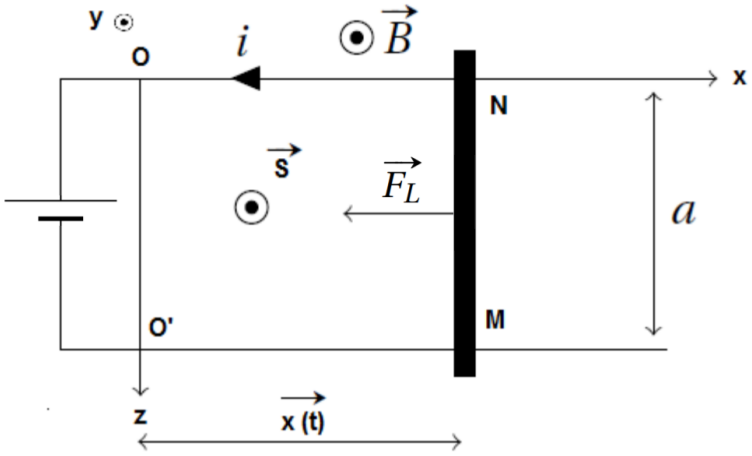


FIGURE 20.2 – Montage et conventions en mode moteur.

Rails de Laplace

✍ ⏲

Même expérience, en remplaçant l'ampèremètre par un gros générateur de tension continue générant quelques volts. Humidifier le barreau pour assurer un contact électrique et éviter les arcs électriques.

Les équations sont alors exactement les mêmes :

$$\begin{cases} E - aB\dot{x} + Ri &= 0 \\ n\ddot{x} - aBi &= 0 \end{cases} \tag{20.13}$$

On a donc réussi à faire des conversion de puissance électrique en puissance mécanique et inversement. Mais qu'en est-il du bilan de puissance justement ?

2.4 Bilan de puissance

Dans le cas du moteur, on peut écrire le bilan de puissance comme suit :

$$Ei = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{P}_{\text{géné}} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\text{joule}} \tag{20.14}$$

Dans le cas du générateur on a le même type d'équation, avec comme source cette fois la traction T.

$$T\dot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{P}_T = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\text{joule}} \tag{20.15}$$

On voit donc qu'on converti de la puissance électrique en puissance mécanique et inversement, avec pour pertes les pertes par effets Joule. Le rendement théorique maximal n'est, contrairement au cas des machines thermiques, pas limité par la physique. Seule la résistance du bousin limite l'efficacité de la conversion.

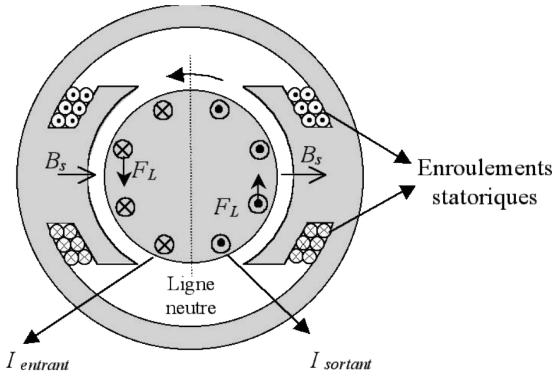
Il s'agit là d'un modèle très simpliste mais également très explicatif pour introduire les **vrais** machines de conversion.

FIGURE 20.3 – Les trains ART de Bombardier se déplacent grâce à la bande d'aluminium que l'on voit entre les voies. Ce train relie les terminaux du JFK-Airport de New-York.

3 Machines à courant continu

La MCC est un moteur-générateur qui a été grandement utilisé au cours du 20eme siècle. Elle a notamment servi à alimenter les TGV dans les années 80 (avant d'être remplacée par des machines à courant alternatif) et dans le métro de Lyon depuis 1978.

3.1 Principe



La MCC est une machine **réversible** : en mode moteur, elle convertit l'énergie électrique en énergie mécanique tandis qu'en mode générateur, elle fait l'inverse. Elle est composée de 2 parties :

- **le stator** : c'est la partie immobile qui joue le rôle de l'inducteur.
  Il crée un champ $\overrightarrow{B}$ *constant* à l'aide d'un bobinage traversé par un courant continu ou à l'aide d'un aimant permanent. Il est composé de fer pour canaliser les lignes de champ magnétiques.
- **le rotor** : c'est la partie mobile qui joue le rôle de l'induit
  Il est constitué d'un ensemble de spires pouvant être mises en rotation et qui sont reliées à l'arbre de transmission.

On appelle *ligne neutre* ou *ligne polaire* le plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{B}$. De manière générale, tout ce qui nous intéresse se passera au niveau de l'induit. L'inducteur ne sert juste qu'à créer un champ $\overrightarrow{B}$.

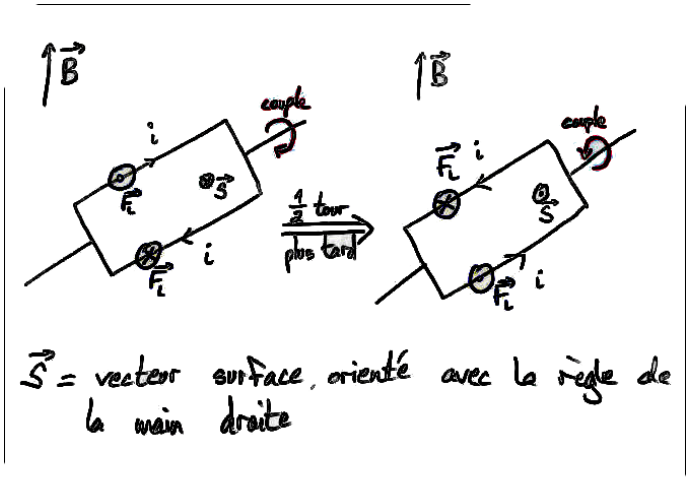
En fonctionnement moteur, un courant circule dans les spires, ce qui induit une force de Laplace due à la présence d'un champ $\overrightarrow{B}$. Il y a donc création d'un couple qui engendre la rotation du rotor.
En fonctionnement générateur, les spires tournent, ce qui implique une modification du flux de $\overrightarrow{B}$. D'après la loi de Faraday, on a création d'une force électromotrice (fem) et donc d'une tension.

Dans la suite, on se placera en fonctionnement moteur.

3.2 Fonctionnement en moteur

https://youtu.be/q4yZDYWMzJo

Lorsque la spire passe par la position pour laquelle le vecteur normal à la surface est perpendiculaire au champ $\overrightarrow{B}$, le couple appliqué change de signe et la force de Laplace tend à ramener la sppire en sens inverse. Pour que la rotation perdure, il faut donc que **le courant soit inversé** à chaque moitié de tour de la spire.

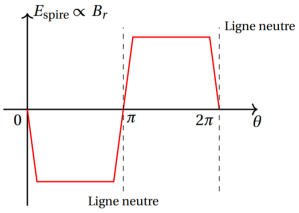


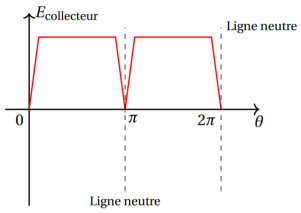
Encore faut-il être capable de fournir du courant à un conducteur en rotation. Pour cela, on utilise :

- **un collecteur (ou commutateur)** : c'est un ensemble de cylindres conducteurs isolés les uns des autres et reliés 2 par 2 à un solénoïdes du bobinage du rotor

- **2 balais** : ce sont 2 petits éléments circulaires sur lesquels les lames du collecteur glissent lors de la rotation du rotor. L'un de ces éléments possède un courant entrant tandis que l'autre possède un courant sortant.

Lorsqu'un solénoïde passe par la position critique d'inversion du couple, les 2 cylindres reliés au solénoïdes échangent de balais : le cylindre qui était au contact du balai ayant le courant entrant rompt ce contact pour entrer en contact avec le balai ayant le courant sortant et inversement. Ainsi, à chaque moitié de tour, le courant change de sens, c'est ce qu'on appelle la **commutation.**





Remarque

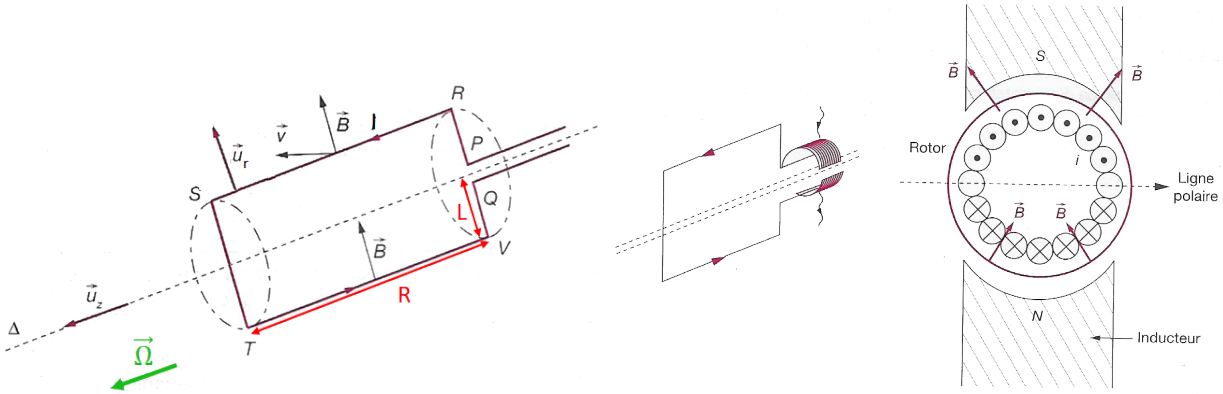
Dans la suite, on s'intéresse au montage à courant d'excitation séparé, c'est-à-dire dans lequel l'inducteur et l'induit sont alimentés séparément. Dans un tel montage, on a

- résistance de l'inducteur élevée
- vitesse stable pour le moteur en charge
- emballement possible si on coupe l'excitation
- couple proportionnel à I
- démarrage à courant élevé
- possibilité de freinage

C'est ce qui est toujours utilisé dans les machines actuelles.

3.3 Équations de fonctionnement

3.3.1 Calcul du couple



L'axe de rotation Δ est inclus dans le plan d'antisymétrie de $\overrightarrow{B}$, donc

$$\overrightarrow{B}(r,\theta+\pi) = -\overrightarrow{B}(r,\theta)$$

Puisque $\overrightarrow{B}$ est radial, les portions du solénoïdes à direction radiale ne subissent pas de force de Laplace. Seules les portions RS et TV la subissent :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{\text{RS}}} = i\,\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B} = iLB\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{F_{\text{TV}}} = -\overrightarrow{F_{\text{RS}}} = -iLB\overrightarrow{u_\theta} \end{cases} \tag{20.16}$$

On constate donc ces deux forces se compensent pour donner une résultante des forces nulles. Cependant, on ne peut pas en dire autant pour le couple :

$$\overrightarrow{\Gamma} = r\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{F_{\text{RS}}} + r(-\overrightarrow{e_r}) \wedge \overrightarrow{F_{\text{TV}}} = 2rLiB\overrightarrow{u_z} \tag{20.17}$$

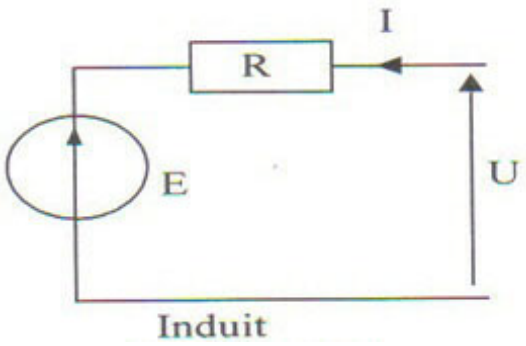
en notant r le rayon de la spire. On remarque que $\overrightarrow{\Gamma}$ est indépendant de ω, ce qui veut dire qu'on peut très bien avoir $\overrightarrow{\Gamma} \neq \overrightarrow{0}$ pour $\omega = 0$, c'set-à-dire avoir un couple au démarrage !!

On notera $\boxed{\overrightarrow{\Gamma} = \Phi_0 i\overrightarrow{u_z}}$ avec $\Phi_0 = 2rLB$ une constante (flux exprimé en Weber). On a donc directement $\Gamma \propto i$, on comprend comment on peut contrôler la rotation du moteur.

On peut être un peu plus réaliste en prenons en compte les frottements au niveau des contacts avec les balais. ces frottements génèrent une force selon $-\overrightarrow{u_\theta}$ et donc un couple $\overrightarrow{\Gamma_r} \parallel -\overrightarrow{u_z}$.

Le couple total est alors $\overrightarrow{\Gamma_{\text{tot}}} = \overrightarrow{\Gamma} - \overrightarrow{\Gamma_r}$.

3.3.2 Calcul de la fem



On note U la tension de l'induit. On peut faire un bilan de puissances pour l'induit et écrire $\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_e = 0$ avec :

- la puissance mécanique $\mathcal{P}_m = \overrightarrow{\Gamma_{\text{tot}}} \cdot \vec{\omega} = \Phi_0 i\omega - \Gamma_r \omega$. Par définition de l'effet Joule, on obtient
$$\mathcal{P}_m = -\Phi_0 i\omega - Ri^2$$
- la puissance électrique $\mathcal{P}_e = Ui$ donc
$$\mathcal{P}_e = (E + Ri)i$$

On identifie alors $E = \Phi_0\omega$ et en terme de tension imposée $\boxed{U = \Phi_0\omega + Ri}$. On écrit aussi $\boxed{\Gamma_{\text{tot}} = \Phi_0 i - \Gamma_r}$.

En fonctionnement générateur, on a $U = \Phi_0\omega - Ri$ *et* $\Gamma_{tot} = \Phi_0 i + \Gamma_r$.

Remarques

Si on néglige Ri, la vitesse de rotation est alors directement contrôlé par la tension U appliquée à l'induit.

On remarque également que $\omega \propto \dfrac{1}{\Phi_0}$: **si on éteint l'induit avant l'inducteur, le moteur s'emballe.**

3.3.3 Bilan de puissance

La machine absorbe au total la puissance Ui à l'induit mais également la puissance $U_e I_e$ à l'inducteur lorsqu'il est bobiné (ce n'est donc pas le cas si l'inducteur est un aiment permanent : il ne consomme alors aucune puissance électrique). Cependant, la puissance $U_e I_e$ est intégralement dissipée par effet Joule : $U_e I_e = R_e I_e^2$. On comprend donc pourquoi l'inducteur ne sert qu'à générer $\vec{B}$ pour générer un couple.

Au niveau de l'induit, $Ui = Ei + Ri^2$. Puisque Ri^2 représente les pertes, la puissance disponible est donc $\boxed{Ei = \Gamma\omega}$. Il existe également d'autres types de pertes que l'effet Joule (aussi appelé 'pertes cuivre') : les frottements, les pertes magnétiques dues aux courants de Foucault ('pertes fer' causées hystérésis).

On peut alors calculer le rendement :

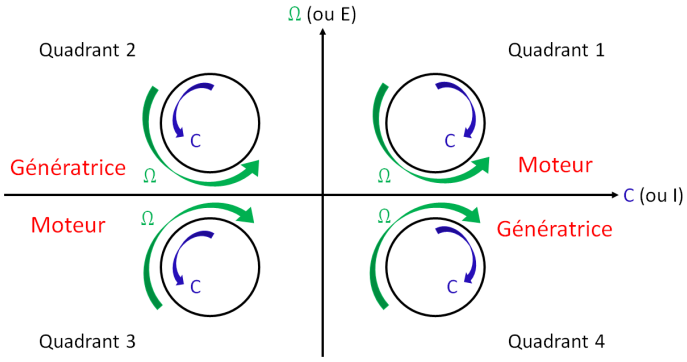
$$\eta = \frac{\text{Puissance utile}}{\text{Puissance électrique absorbée}} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{\text{fer}} + \mathcal{P}_{\text{frot}} + Ri^2 + R_e I_e^2} \tag{20.18}$$

Ordre de grandeur

Pour un moteur donc l'inducteur est un aimant permanent, $\mathcal{P}_u = Ui$. Ainsi, avec $U = 150$ V, $i = 40$ A, $R = 0.3\ \Omega$, $\omega = 105$ rad/s et $\mathcal{P}_{\text{fer}} + \mathcal{P}_{\text{frot}} = 200$ W, on obtient un rendement $\eta = 88.7\%$.

3.4 Moteur ou générateur ?

On a montré que $\gamma = \Phi_0 i$ et $\Gamma\omega = Ei$. Ainsi, le signe de i détermine celui de Γ via la première relation et les signes de Γ et de E détermine celui de ω via la seconde relation. En fonctionnement moteur, $Ei > 0$ (puissance reçue) et en fonctionnement générateur, $Ei < 0$ (puissance donnée).



- Quadrant 1 : $Ei > 0$ avec $E > 0$ et $i > 0$
  $\Rightarrow C > 0$
  $\Rightarrow \Gamma > 0$
  On est en fonctionnement moteur : tout tourne dans le même sens.
- Quadrant 2 : $Ei < 0$ avec $E > 0$ et $i < 0$
  $\Rightarrow C < 0$
  $\Rightarrow \Gamma < 0$
  On est en fonctionnement générateur : tout tourne dans des sens opposés.
- Quadrant 3 : $Ei > 0$ avec $E < 0$ et $i < 0$
  $\Rightarrow C > 0$
  $\Rightarrow \Gamma > 0$
  On est de nouveau en fonctionnement moteur : tout tourne dans le même sens.
- Quadrant 4 : $Ei < 0$ avec $E < 0$ et $i > 0$
  $\Rightarrow C < 0$
  $\Rightarrow \Gamma < 0$
  On est encore une fois en fonctionnement générateur : tout tourne dans des sens opposés.

On voit donc qu'on peut passer de moteur à générateur en jouant sur les signes de E et i.

3.5 Considérations techniques

Les avantages de cette machine résident dans le fait que la vitesse de rotation est réglable à volonté et que le démarrage est autonome. On l'utilise en tant que moteur dans les voitures par exemple ; et en tant que génératrice pour recharger les batteries.

Elle a cependant quelques inconvénients : elle est difficile à entretenir (démontage complet annuel pour les TGV) et plutôt coûteuses à cause de l'usure des balais (remplacés à chaque aller-retour pour les TGV).

4 Machines à courant alternatif

Les moteurs à courant alternatifs on remplacé, au cours du 20eme siècle, les machines à courant continu, et ce pour deux raisons : la première est leur plus grande simplicité et durabilité, car il n'y a pas de balais pour faire contact entre le rotor et le stator, la deuxième est la plus grande facilité à les contrôler en vitesse, simplement via la fréquence du courant reçu.

4.1 Moteurs synchrones

✍ MP35

Inventé par Tesla en 1888, cette belle machine permet elle aussi de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et inversement.

4.1.1 Principe

- Le principe de fonctionnement en mode moteur est le suivant :

  Le rotor est un aimant permanent (ou électroaimant d'ailleurs, quand on veut être efficace). Le stator est pour sa part un générateur de champs magnétique tournant. En tournant, le champs va pousser le rotor à s'aligner, le faisant tourner. Le couple généré est

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$$

- Le principe de fonctionnement en mode générateur est le suivant :

  Le rotor est toujours un aimant permanent, et le stator est parcouru par des courant induits par la variation de flux dans le bobinage. Grâce à cela, on génère un courant électrique triphasé.

  Le rendement d'une telle machine est généralement de l'ordre de 95% !

4.1.2 Champ tournant

La génénration de champs tournant se fait comme détaillé dans le ✍ MP35

4.1.3 Discussion pratique

L'avantage de ces machines en moteur réside dans leur grand rendement, et leur vitesse de synchronisation très précise. Cependant, ils nécessitent d'être lancé. Le moteur synchrone a beaucoup été utilisé pour la conception de machines-outil des anciens TGV mais tend à être supplanté par la machine asynchrone. Il est encore utilisé pour des applications de forte puissance (Renault Zoé et Peugeot iOn par exemple) ou de faible puissance (commande de disque dur d'ordinateur).

En générateur cependant, la machine synchrone a de beaux jours devant elle du fait qu'elle génère une tension triphasée de fréquence connue avec une très bonne précision, d'où son nom d'ailleurs.

Moteur synchrone

✍ ⏲

Faire la manip du MP35

4.1.4 Les calculs en mode moteur

On considère que les bobines sont décalées de $\frac{2\pi}{3}$, et que les bobinages sont parcourus par des courants de la forme suivante, avec $\alpha \in [\![0, 2]\!]$

$$i_k(t) = I\cos(\omega t + \alpha\frac{2\pi}{3}) \tag{20.19}$$

On a alors superposition (#linéarité) de trois champs magnétiques de la forme $\overrightarrow{B}_\alpha = kI\cos(\omega_t + ...)\overrightarrow{u_\alpha}$, ce qui donne un champs résultant

$$\overrightarrow{B} = \frac{3kI}{2}(\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + \sin(\omega t)\overrightarrow{u_y}) \tag{20.20}$$

On a alors directement le couple !

4.1.5 Les calculs en mode générateur

Par souci de simplicité nous allons étudier une machine constituées d'un rotor et d'un stator bipolaire. Le champ magnétique tournant engendré par le rotor de la génératrice synchrone, appelée aussi alternateur, est assimilable à celui créé par un aimant permanent en rotation autour de sont axe. Le rotor est placé au coeur d'un système de bobinages (stator) dans lesquels apparaissement des f.é.m induites.

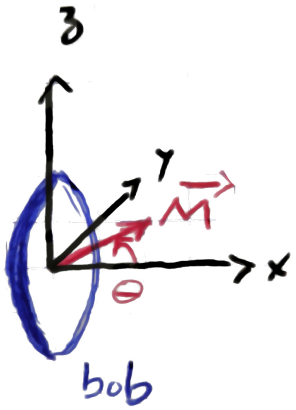


FIGURE 20.4 – Schématisation du générateur.

On considère un moment magnétique permanent $\overrightarrow{M}$ en rotation autour d'un point fixe O placé près d'une bobine comportant N spires, de section S et d'axe O_x. Le champs engendré par cette rotation est

$$\overrightarrow{B} = B_O\cos(\omega t)\overrightarrow{u_x} + B_0\sin(\omega t)\overrightarrow{u_y} \tag{20.21}$$

La f.é.m induite est alors simplement par la loi de Faraday

$$e = \omega NSB_0\sin(\omega t + \theta) \tag{20.22}$$

Et paf, on a un alternateur tout joli tout beau ! Dans le cas d'un alternateur triphasé, on va juste générer un courant triphasé !

4.2 Moteurs asynchrones

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_asynchrone

La machine asynchrone, connue également sous le terme anglo-saxon de machine à induction, est une machine électrique à courant alternatif sans connexion entre le stator et le rotor.

Comme les autres machines électriques (machine à courant continu, machine synchrone), la machine asynchrone est un convertisseur électromécanique basé sur l'électromagnétisme permettant la conversion bidirectionnelle d'énergie entre une installation électrique parcourue par un courant électrique (ici alternatif) et un dispositif mécanique.

Cette machine est réversible et susceptible de se comporter, selon la source d'énergie, soit en « moteur » soit en « générateur ».

Du fait de sa simplicité de construction, d'utilisation et d'entretien, de sa robustesse et son faible prix de revient, la machine asynchrone est aujourd'hui très couramment utilisée comme moteur dans une gamme de puissance allant de quelques centaines de watts à plusieurs milliers de kilowatts.

Quand la machine asynchrone est alimentée par un réseau à fréquence fixe, il est difficile de faire varier sa vitesse. En outre, au démarrage, le couple est faible et le courant appelé est très élevé, mais de nombreuses méthodes expérimentales existent (onduleur notamment) pour palier à cela.

Elle est aujourd'hui l'instrument de choix pour faire avancer les TGV, les métros parisiens, ou encore pour générer du courant dans les centrales EDF.

LP 21

Induction électromagnétique

Niveau : L2

Commentaires du jury

- **2015 :** L'algébrisation rigoureuse des grandeurs électriques et mécaniques est nécessaire lors de la paramétrisation.
- **2014 :** Dans cette leçon, le plus grand soin s'impose dans la définition des orientations et des conventions de signe. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Il n'est pas admissible à ce niveau de confondre les forces de Lorentz et de Laplace.
- **2012-2013 :** Il n'est pas nécessaire de traiter en détail les deux types d'induction.
- **2009 :** Ce ne sont pas les machines de technologie complexe qui illustrent le mieux la leçon. Compte tenu du temps imparti, des choix restent à faire : le jury tiendra compte de leur pertinence . . .

Bibliographie

✍ *HPrépa Electromagnétisme*, **Brébec** ⟶ Base de la leçon
✍ *EM*, **Mauras** ⟶ Compléments
✍ *Tec&Doc Physique Spé PSI*, **Olivier** ⟶ Compéments
✍ *Tout-en-un Physique PCSI*, **Salamito** ⟶ Compléments
✍ *La physique par les objets du quotidien*, **Ray** ⟶ Plaque à induction
✍ *1001 questions de la physique en prépa*, **Garing** ⟶ Plaque à induction et freinage par induction

Prérequis

- ➢ Équations de Maxwell
- ➢ Forces de Lorentz et de Laplace
- ➢ ARQS magnétique
- ➢ Transformateurs
- ➢ Champ magnétique d'une spire, d'un solénoïde infini
- ➢ Loi de Biot et Savard
- ➢ Composition des vitesses

Expériences

☕

1 Phénomène d'induction . . . 285
1.1 Cadre d'étude . . . 285
1.2 Force électromotrice et loi de Faraday . . . 286
1.3 Deux types d'induction . . . 287
1.4 Application : la pince ampèremétrique . . . 287
2 Couplage électromagnétique dans le cadre de l'induction de Neumann . . . 288
2.1 Auto-induction . . . 288
2.2 Inductance mutuelle . . . 288
2.3 Application aux transformateurs . . . 289
2.4 Expérience . . . 290
3 Courants de Foucault . . . 291
3.1 Principe . . . 291
3.2 Chauffage par induction . . . 292
3.3 Freinage par courants de Foucault . . . 294
4 Couplage électromécanique . . . 295
4.1 Conversion électromécanique de puissance . . . 295
4.2 Étude du haut-parleur . . . 295

Introduction

Lorsqu'on a vu les équations de Maxwell, on a constaté via Maxwell-Faraday qu'un variation temporelle de $\overrightarrow{B}$ implique $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} \neq \overrightarrow{0}$. On pourrait donc créer une différence de potentiel avec un champ magnétique variable.

Matériel : une bobine, un aimant, un oscillo en mode single, deux diodes en parallèle de sens opposé.

On note l'apparition d'une fem aux bornes de la bobine lorsqu'on déplace l'aimant. On remarque que bouger l'aimant dans un sens allume une diode puis le bouger dans l'autre sens allume l'autre diode. On discute rapidement de comment est modifiée la fem si on éloigne ou si on rapproche l'aimant, si on change son sens ou si on le tourne...

Faraday a découvert ce phénomène en 1831. Cette leçon a pour but de le formaliser et d'en montrer quelques applications.

1 Phénomène d'induction

✍ Perez, Électromagnétisme

1.1 Cadre d'étude

Pour étudier le phénomène d'induction, on se place dans l'ARQS magéntique :

- on néglige la propagation des ondes électromagnétiques devant les variations des champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$
- on suppose $\left\|\overrightarrow{j}\right\| \gg \rho c$ et $c\left\|\overrightarrow{B}\right\| \gg \left\|\overrightarrow{E}\right\|$
- on n'a pas d'accumulation de charges : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{j} = 0$
- on adopte la jauge de Coulomb : $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} = 0$ **(ne pas en parler durant la leçon)**
- seule l'équation de Maxweel-Ampère est modifiée : on y enlève le courant de déplacement

On définit le **potentiel vecteur** $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$, ce qui est une conséquence de $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$. Maxwell-Faraday permet alors d'écrire

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla} V$$

L'ARQSM est importante car elle permet d'identifier V au potentiel électrostatique et la dérivée de $-\overrightarrow{A}$ au **champ électromoteur** grâce à la jauge de Coulomb.

Jauge de Coulomb (hors-programme)

A priori, on peut choisir $\overrightarrow{A}$ à un gradient près car $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \overrightarrow{0}$. On peut cependant limiter le choix de $\overrightarrow{A}$ en adoptant la jauge de Coulomb $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A}$, ce qui permet d'avoir en ARQS magnétique un équation de Poisson pour $\overrightarrow{A}$:

$$\Delta \overrightarrow{A} + \mu_0 \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$$

Sans l'ARQS, on aurait alors une équation d'Alembert.

1.2 Force électromotrice et loi de Faraday

Considérons un circuit $\mathcal{C}$ fermé et orienté. En introduction, ce circuit a été soumis à un champ $\overrightarrow{B}(t)$ variable.

Les charges q soumises à un champ $\overrightarrow{E}$ vont se mettre en mouvement sous l'action de la force de Lorentz $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$. La résultante de cette force sur une charge sur le circuit est alors appelée **force électromotrice** et est définie par

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\overrightarrow{F}}{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \tag{21.1}$$

On peut faire deux remarques sur cette expression :

- bien que e soit appelée 'force' électromotrice, elle est définie avec la dimension d'une tension
- le terme en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ est absent puisqu'on suppose pour l'instant que le circuit est immobile, ce qui implique que la vitesse des charges $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{\mathrm{d}l}$ donc $(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$. Cette discussion donne naissance aux deux types d'induction, Neumann et Lorentz, qui seront développés dans la partie suivante.

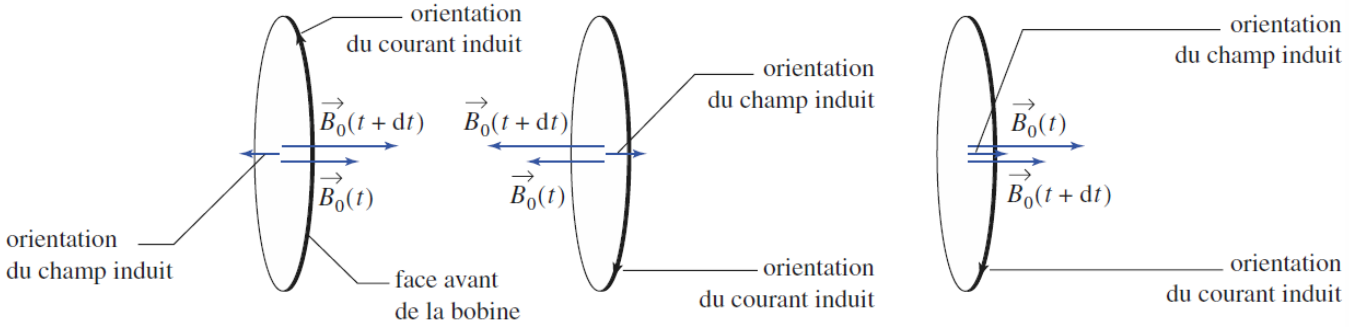
On peut développer $\overrightarrow{E}$ dans la formule de la fem :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\mathcal{C}} \left(-\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\nabla} V \right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \qquad \text{(l'intégrale d'un gradient sur un contour fermé est nulle)} \\ &= --\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \qquad \text{(théorème de Stockes)} \end{aligned} \tag{21.2}$$

avec S une surface quelconque ayant comme contour $\mathcal{C}$ et $\mathrm{d}S$ le vecteur surface orienté selon la convention d'orientation choisie pour $\mathcal{C}$. On comprend pourquoi on assimile $-\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ à un champ électromoteur. De plus, reconnaît l'expression du flux magnétique à travers la surface S, ce qui permet d'écrire la **loi de Faraday** :

$$\boxed{e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \qquad \text{où } \Phi = \iint_{S} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{21.3}$$

Le signe - dans la loi de Faraday traduit le **principe de modération de Lenz** selon lequel le courant induit par la fem va s'opposer à la variation du flux. En effet, le courant induit va créer un champ magnétique (via l'équation de Maxwell-Ampère) de direction opposée à la variation de $\overrightarrow{B}$:



(21.4)

1.3 Deux types d'induction

La démonstration précédente s'est faite de le cas où le champ magnétique variait mais que le circuit ne bougeait pas. Mais on a vu aussi qu'on pouvait faire bouger le circuit dans un champ constant (manip d'intro). En fait les deux phénomènes sont strictement les équivalents, ils décrivent la même réalité mais les calculs se font différemment.

- si le circuit est immobile dans un champ magnétique variable, on est dans le cadre de **l'induction de Neumann**
- si le circuit est mobile dans un champ magnétique constant, on est dans le cadre de **l'induction de Lorentz**

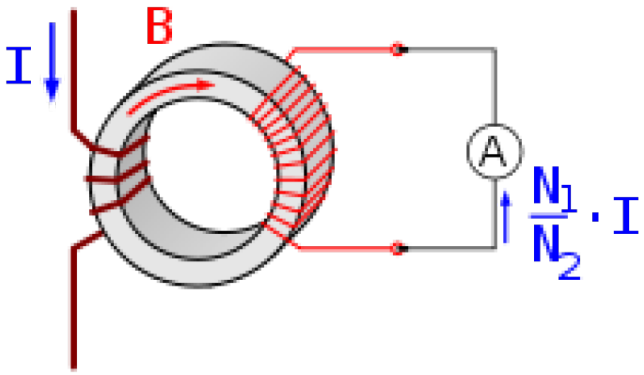
Remarque

Ainsi, la démonstration de la loi de Faraday a été faite dans le cadre de l'induction de Neumann, mais elle peut également être faite pour l'induction de Lorentz. Elle passe par exprimer la vitesse des porteurs de charge sous la forme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_C}$ (composition des vitesses en changeant de référentiel) et en posant le champ électromoteur $\overrightarrow{E_m} = \overrightarrow{v_C} \wedge \overrightarrow{B}$. c'est bien fait à la page 176 de ✍ Hprépa en partant d'un bilan énergétique. On ne va pas s'y attarder ici.

De façon générale, la variation d'un flux, que ce soit via la variation de $\overrightarrow{B}$ ou de S, génère une tension. On peut modéliser ça avec par un générateur parfait de tension e.

1.4 Application : la pince ampèremétrique

La pince ampèremétrique est un outil de mesure de courant en utilisant l'induction. Son grand avantage réside dans le fait qu'il n'y a pas besoin d'ouvrir le circuit pour y insérer l'instrument de mesure, contrairement à l'ampèremètre.



La pince est modélisée par un noyau ferromagnétique circulaire de rayon R, sur lequel sont bobinées N spires circulaires de rayon r_0 faible devant R. On mesure la tension aux bornes du bobinage et on la relie à l'intensité du courant qui traverse la boucle formée par la pince fermée. Le tout est donc équivalent à un générateur de tension en dérivation avec un voltmètre.

Il reste à établir le lien entre la fem $e(t)$ mesurée et l'intensité $I(t)$ dans le fil que l'on cherche à connaître. Pour cela, on suppose que le fil étudié passe au centre de la pince et est rectiligne infini. Il crée donc un champ magnétique dont le flux à travers la totalité du bobinage est

$$\Phi(t) = \frac{N\mu_0 r_0^2}{2R^2} I(t) \qquad \text{à l'ordre 1 en } \frac{r_0}{R}$$

On est donc dans le cadre de l'induction de Neumann.

La fem vaut d'après la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{N\mu_0 r_0^2}{2R^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Mesurer $e(t)$ permet donc de remonter à la valeur efficace de $I(t)$.

2 Couplage électromagnétique dans le cadre de l'induction de Neumann

2.1 Auto-induction

Considérons un circuit fixe indéformable, parcouru par un courant $i(t)$. Ce circuit créée alors, on vient de le voir, un champ magnétique, que nous appellerons *champ propre*, noté $\overrightarrow{B_p}(M,t)$. La loi de Biot et Savard nous garanti la proportionnalité entre B et i, puisque

$$\overrightarrow{B_M} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_\Gamma \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \tag{21.5}$$

Le flux de champ au travers du circuit lui même s'en trouve alors modifié, on y ajoute le *flux propre*, noté ϕ_p.

$$\phi_P(t) = \iint_S \overrightarrow{B_p}(M,t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{21.6}$$

Mais on vient de voir que ce genre de modification entraîne une variation de courant, donc une variation de B_p, donc une variation de ϕ_p, et ainsi de suite ! Certes les effets sont une cascade infini, mais dans le cadre de l'ARQS, qui et le cadre privilégié d'étude pour nous, on pourra noter une proportionnalité directe indépendante du temps entre le flux propre et l'intensité :

$$\phi_p(t) = Li(t) \tag{21.7}$$

Cette relation définit le coefficient L, coefficient d'inductance propre du circuit, pour un circuit indéformable. Elle s'exprime en Henry. L'inductance propre du circuit ne dépend que de μ et de la géométrie du circuit. Pour une bobine on a d'ailleurs une formule, avec N le nombre de spires, l la longueur, S la surface d'une spire : $L = \mu_0 N^2 S/l$. **OdG :** pour 100 spires et 10cm×3cm, on a 35mH.

Un rapide calcul avec la loi de Faraday donne :

$$e = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{21.8}$$

Ainsi pour tout circuit électrique il faudrait prendre en compte l'indutaance propre. L'énergie stockée dans un circuit avec L est $\frac{1}{2}Li^2$.

2.2 Inductance mutuelle

✍ Sanz page 301

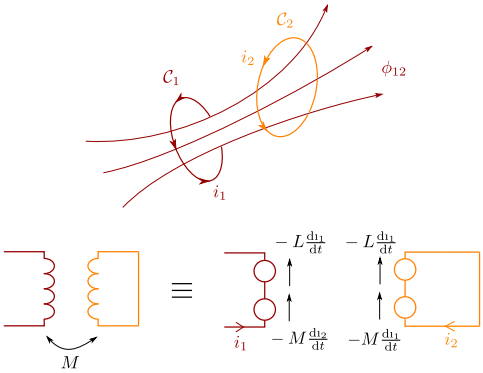


FIGURE 21.1 – Schématisation du phénomène d'inductance mutuelle.

Si on considère deux circuits proches, numérotés 1 et 2, parcourus respectivement par i_1 et i_2, ils émettent un champs magnétique B_1 et B_2 du fait des variations de i en leur sein, et vont donc créer de l'induction l'un dans l'autre. Il apparait ainsi un couplage par *inductance mutuelle*.

$$\begin{aligned}\phi_{1\to 2} &= \iint \overrightarrow{B_1}(P_2,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S_2}\\ \phi_{2\to 1} &= \iint \overrightarrow{B_2}(P_1,t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S_1}\end{aligned} \tag{21.9}$$

Dans le cadre de l'ARQS le champs magnétique est proportionnel à i, par conséquent le flux aussi, et on a finalement

$$\begin{aligned}\phi_{1\to 2} &= M_{1\to 2}i_1\\ \phi_{2\to 1} &= M_{2\to 1}i_2\end{aligned} \tag{21.10}$$

On nomme $M_{1\to 2}$ le coefficientd'induction mutuelle de 1 vers 2. Celui-ci ne dépend que de la géométrie des circuits. Lorsqu'ils sont fixes et indéformables, ce coefficient ne dépend pas du temps. Il s'exprime en Henry, comme L. Nous admettrons ici le théorème de Neumann :

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{21.11}$$

Ainsi on a le beau jeu d'équations suivantes :

$$\begin{cases}\phi_{12} = Mi_1\\ \phi_{21} = Mi_2\end{cases} \tag{21.12}$$

2.3 Application aux transformateurs

2.3.1 Principe

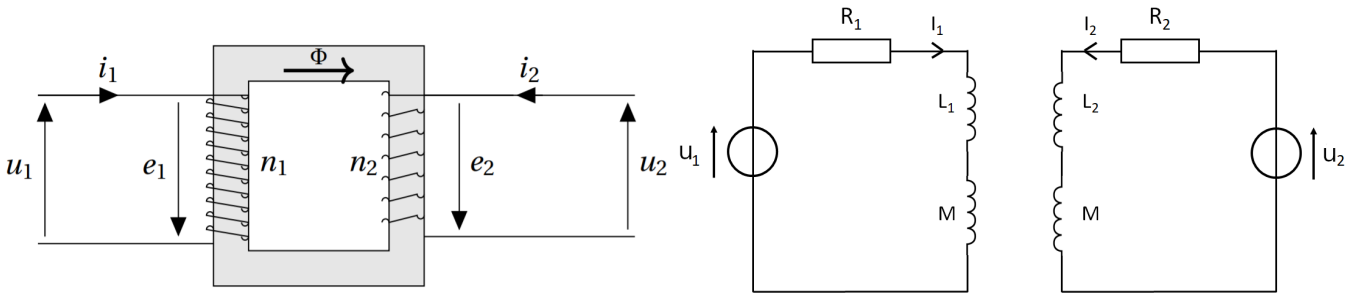


FIGURE 21.2 – Schéma d'un transformateur.

Pour étudier en détail la façon dont fonctionne cette belle paire d'équation, regardons le cas d'un transformateur.

Un transformateur c'est deux bobines que l'on couple en les enroulant soit l'une autour de l'autre, soit toutes les deux autour d'un noyaux ferreux. L'intérêt du noyau ferreux est de canaliser les lignes de champs magnétique pour maximiser le flux d'une bobine dans l'autre, et donc maximiser M.

Si on écrit les équations électriques du circuit, on a

$$\begin{cases}u_1(t) = R_1i_1 + L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\ u_2(t) = -R_2i_2 + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\end{cases} \tag{21.13}$$

Au total, en terme d'énergie, on a

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_2 i_2^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M i_1 i_2\right) \tag{21.14}$$

Les termes étant dans l'ordre la puissance fournie, la puissance récupérée, les pertes par effets joules, l'énergie emmagasinée par autoinduction et l'interaction par inductance mutuelle.

2.3.2 Le transformateur idéal

Dans le cadre du transformateur idéal, on a un couplage parfait, avec $R_1 = R_2 = 0$ et $M^2 = L_1 L_2$. On considère deux bobines avec respectivement N_1 et N_2 spires, et on considère que le flux magnétique passe parfaitement, *i.e.* $\phi_1 = \phi_2$.

$$e_i = -n_i \mathrm{d}_t \phi \tag{21.15}$$

Par conséquent on a directement

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

On nomme m le rapport de transformation du transformateur. Pourquoi ? Parce que c'est le rapport entre la tension qu'on lui fournit et celle qu'il restitue ! Avec un transformateur 500-1000, on récupère une tension deux fois plus élevée ! (et une intensité divisée par deux parce qu'on ne fabrique pas de la puissance de rien.)

On montre ainsi que $\frac{i_2}{i_1} = -\frac{1}{m}$.

Question de Timéo qui dormait : *Mais pourquoi on voudrait élever la tension ?*

C'est très pratique parce que si on écrit la puissance $\mathcal{P}_p$ produite et la puissance $\mathcal{P}_j$ perdue par effet Joule, on a

$$\frac{\mathcal{P}_p}{\mathcal{P}_j} = \frac{Ui}{Ri^2} = \frac{U}{Ri} = \frac{U^2}{RUi} = \frac{U^2}{R\mathcal{P}_p} \tag{21.16}$$

Ainsi on voit que pour une même puissance produite, on a tout intérêt à la transporter en élevant la tension ! C'est d'ailleurs le principe des lignes à haute tension.

2.4 Expérience

Dans le cadre du transformateur parfait, on a $u_1 i_1 = -u_2 i_2$, on préserve toute la puissance. Dans la vraie vie c'est évidement pas le cas.

Évaluer les performances d'un trnasformateur

✍ MP21 ⏲

Faire une manip du MP21.

3 Courants de Foucault

3.1 Principe

✍ Hprépa p220, Salamito p1087

On considère un matériau conducteur **non parfait**, par exemple un ferromagnétique, de conductivité σ finie et soumis à un champ magnétique $\overrightarrow{B_e}(t)$ dépendant du temps et créé par des sources **extérieures**. Un champ électrique induit est alors créé dans le matériau et s'exprime avec Maxwell-Faraday comme

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E_i} = -\frac{\partial \overrightarrow{B_e}}{\partial t} \tag{21.17}$$

On peut alors définir un vecteur densité volumique de courant induit $\overrightarrow{j_F}$ par $\boxed{\overrightarrow{j_F} = \sigma \overrightarrow{E_i}}$. Ces courants induits sont appelés **courants de Foucault**. Ils interviennent dans la loi d'Ohm qui s'écrit alors $\overrightarrow{j} = \sigma(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{E_i})$.

Prenons un exemple. On considère un conducteur cylindrique de rayon R et de hauteur h, soumis à un champ extérieur $\overrightarrow{B_e}(t) = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$. Les symétries et invariances du problème nous permettent déjà d'écrire que $\overrightarrow{E_i}$ est de la forme $\overrightarrow{E_i} = E_i(r)\overrightarrow{e_\theta}$. On peut alors appliquer Maxwell-Faraday et trouver

$$\overrightarrow{E_i} = -\frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B_e}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{e_\theta}$$

On en déduit l'expression des courants de Foucault :

$$\overrightarrow{j_F} = -\sigma \frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B_e}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{e_\theta} = \sigma \frac{1}{2} r \omega B_0 \sin(\omega t) \overrightarrow{e_\theta}$$

Remarques

- On peut représenter les courants de Foucault qui sont notamment plus importants loin de l'axe.
- Le champ magnétique créé par ces courants est dans le sens opposé au champ extérieur B_e : rôle du signe - et loi de Lenz !
- Le calcul réalisé l'a été à l'ordre 1, *i.e.* on ne prend pas en compte le champ magnétique crée par les courants de Foucault (négligeable mais qui a le mérite d'exister).

On peut calculer la puissance dissipé $\mathcal{P}$ par ces courants (effet Joule) :

$$\begin{aligned} <\mathcal{P}> &= < \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{j_F} \cdot \overrightarrow{E_i} \mathrm{d}\tau > \\ &= \frac{1}{\sigma} \iiint_{\mathcal{V}} < \overrightarrow{j_F}^2 > \\ &= \frac{\mathcal{V}}{8} \sigma \omega^2 B_0^2 R^2 < \sin^2(\omega t) > \end{aligned} \tag{21.18}$$

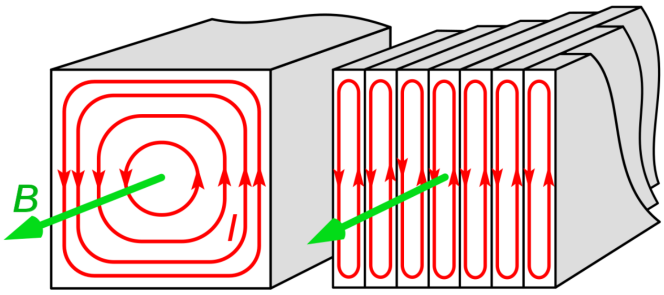
La puissance volumique dissipée par les courants de Foucault vaut donc :

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{V}} = \frac{\sigma \omega^2 B_0^2 R^2}{16}}$$

Notons qu'il s'agit bien d'une énergie dissipée et qu'elle peut être un problème, typiquement dans les transformateurs où les courants de Foucault représentent une source de perte non négligeable (cf la biblio de la LP46). On peut les contrôler de deux manières pour un métal donné :

- on peut jouer sur ω puisque la puissance en dépend en ω^2. Il faut cependant faire attention car ω intervient aussi dans l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{1}{\sigma\mu_0\omega}}$ qui détermine la pénétration du champ électromagnétique dans le conducteur

- jouer sur la surface sur laquelle les courants de Foucault peuvent se développer. Pour limiter les courants de Foucault on peut donc limiter cette surface, comme c'est fait dans les transformateurs : c'est le *feuilletage*.



3.2 Chauffage par induction

3.2.1 Par élévation d'intensité

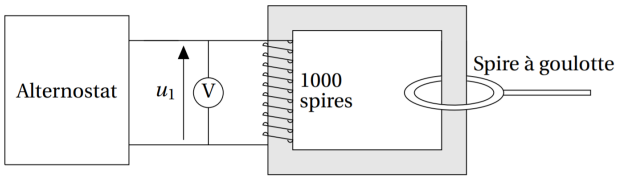


FIGURE 21.3 – Le chauffage par induction schématisé.

On a vu que les courants de Foucault dans un matériaux créent des pertes par effet Joule. Si le but est de récupérer de la puissance thermique, on a tout intérêt à maximiser ces "pertes", par exemple dans le cas du chauffage par induction en cuisine !

Chauffer la goulotte

Pour montrer le principe, on peut construire un transformateur très élévateur de courant avec 1000 spires au primaire et une seule au secondaire : la goulotte. Le courant très élevé circulant dans la spire en forme de goulotte peut provoquer la fusion de l'étain placé dedans.

ATTENTION : Ce transformateur est très abaisseur de tension donc le risque d'électrisation en touchant la spire est inexistant. En revanche, le risque de brûlure est grand !

Toute la puissance qui entrera dans le circuit primaire sera disipée par effet Joule dans le secondaire !

3.2.2 Par courants de Foucault

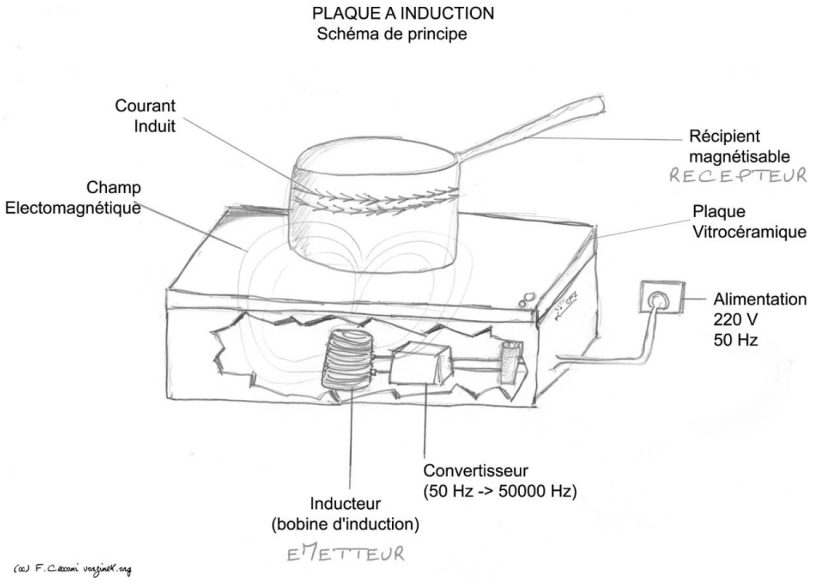


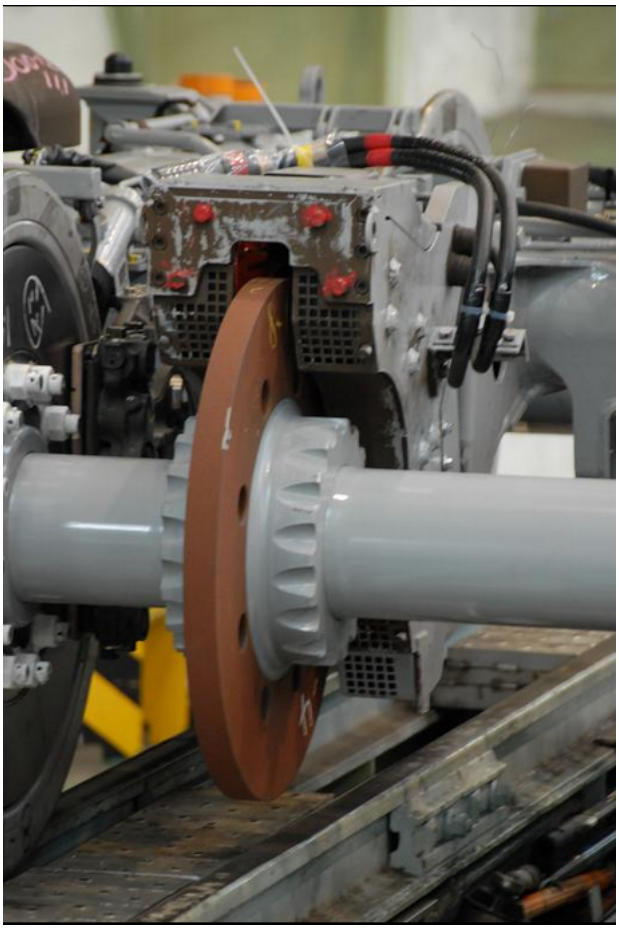
Figure 21.4 – Chauffage par courants de Foucault.

Une bobine située dans la plaque crée un champ magnétique, c'est l'inducteur. Le fond de casserole, qui doit être en métal conducteur, est donc parcouru par des courants de Foucault qui réchauffent l'eau en disspisant de la puissance par effet Joule.

Remarques :

- ces plaques nécessitent donc une casserole en métal conducteur et ont un fond épais pour maximiser l'intensité des courants de Foucault et donc l'échauffement
- la plaque en elle-même n'est pas chauffée mais attention le est contact avec le fond de la casserole donc chaude quand même..
- les plaques actuelles détectent le champ induit par les courants de Foucault pour détecter la présence d'une casserole et ainsi arrêter de produire le champ magnétique quand il n'y a plus de casserole
- même principe par les chargeurs sans fils de portable (on récupère juste le courant)
- fort rendement (80 à 90%) baissé par l'effet Joule dans la bobine de l'inducteur

3.3 Freinage par courants de Foucault



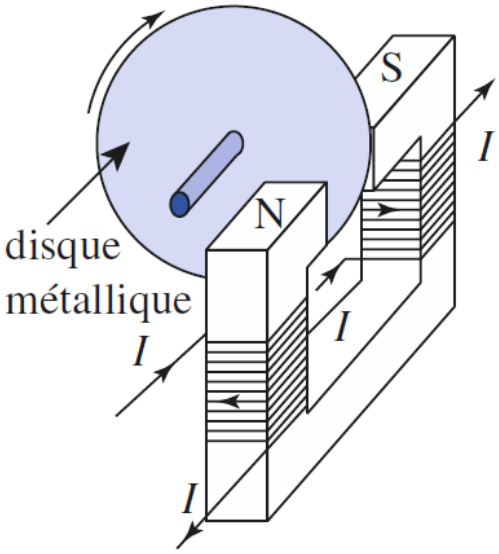


FIGURE 21.5 – Freinage par courant de Foucault

On change d'induction, cette fois-ci c'est le conducteur qui bouge dans un champ constant. Mais le principe reste le même et il va y avoir création de courants de Foucault. La force de Laplace sur ces courants va donc produire une force qui va ralentir le mouvement du disque (faire le raisonement qualitatif ou juste invoquer Lenz Raiton ! La loi de modération de Lenz !)

Remarques :

- breveté depuis 1903 et première réalisation 1936
- dépend de la vitesse instantannée du disque donc ne permet pas un ralentissement total, ce système doit être utilisé en parallèle d'un autre système de freinage classique
- pas de contact = pas d'usure mécanique !
- par contre l'énergie perdue par échauffement (effet Joule toujours...) est perdue en pure perte, on peut pas la récupérer comme cela est fait dans les freinages par conversion electro-mécanique de puissance

Chute d'aimant dans un tube de cuivre

Tu sais quoi faire. La chute est ralentie par l'établissement de courants de Foucault dans le tube conducteur.

4 Couplage électromécanique

4.1 Conversion électromécanique de puissance

✍ LP20

4.2 Étude du haut-parleur

✍ http://olivier.granier.free.fr/Seq15/co/rappels-de-cours-ind-EM-ind-haut-parleur.html

✍ CCP PC 2016, http://cpgedupuydelome.fr/IMG/pdf/d8-c-prive.pdf

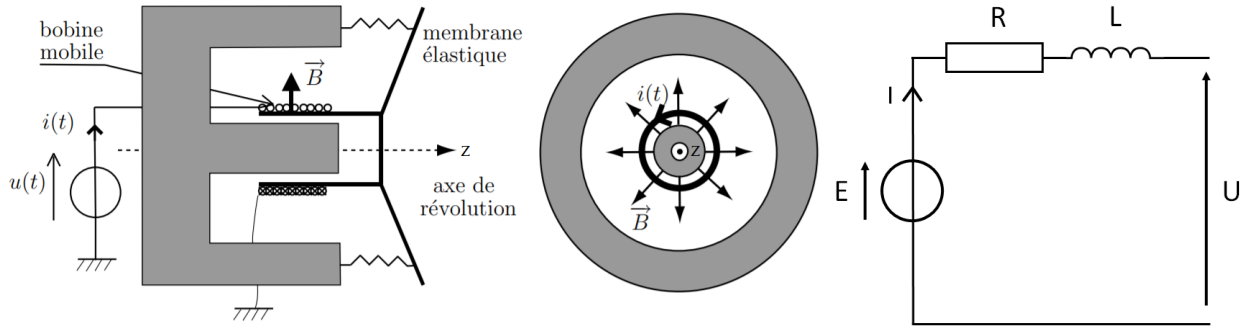


FIGURE 21.6 – Le haut parleur et son schéma équivalent

LP 22

Rétroaction et oscillations

Niveau : L2-PSI

Extraits du programme (PSI)

Rétroaction	quelques propriétés relatives à la rétroaction sur l'exemple de l'amplificateur linéaire intégré. L'identification de certains montages à des systèmes bouclés permet de faire le lien avec le cours d'automatique de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur. L'étude des circuits est strictement limitée à des situations pouvant être facilement abordées avec les outils introduits en première année (loi des mailles, loi des nœuds, diviseur de tension). La vitesse limite de balayage de l'ALI est uniquement évoquée en TP afin d'identifier les distorsions harmoniques traduisant un comportement non linéaire. Les limitations associées aux courants de polarisation et la tension de décalage ne sont pas étudiées.
Modèle de l'ALI défini par une résistance d'entrée infinie, une résistance de sortie nulle, une fonction de transfert du premier ordre en régime linéaire, une saturation de la tension de sortie, une saturation de l'intensité de sortie.	Citer les hypothèses du modèle et les ordres de grandeur du gain différentiel statique et du temps de réponse.
Montages amplificateur non inverseur et comparateur à hystérésis.	Représenter les relations entre les tensions d'entrée et de sortie par un schéma fonctionnel associant un soustracteur, un passe-bas du premier ordre et un opérateur proportionnel. Analyser la stabilité du régime linéaire.
Compromis gain/bande passante d'un système bouclé du premier ordre. Limite en fréquence du fonctionnement linéaire.	Établir la conservation du produit gain-bande passante du montage non inverseur. Identifier la manifestation de la vitesse limite de balayage d'un ALI dans un montage.
Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de probable stabilité du régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Exprimer les impédances d'entrée de ces montages. Expliquer l'intérêt d'une forte impédance d'entrée et d'une faible impédance de sortie pour une association en cascade.

Cas limite d'un ALI idéal de gain infini en régime saturé.	Identifier l'absence de rétroaction ou la présence d'une unique rétroaction sur la borne non inverseuse comme l'indice d'un probable comportement en saturation. Établir la relation entrée-sortie d'un comparateur simple. Pour une entrée sinusoïdale, faire le lien entre la non linéarité du système et la génération d'harmoniques en sortie. Établir le cycle d'un comparateur à hystérésis. Décrire le phénomène d'hystérésis en relation avec la notion de fonction mémoire.
Oscillateurs	étude non exhaustive des oscillateurs en électronique. Les exemples sont choisis à l'initiative du professeur et les fonctions de transfert des filtres utilisés sont fournies. En TP, on complète l'étude par une analyse spectrale des signaux.
Oscillateur quasi-sinusoïdal réalisé en bouclant un filtre passe-bande du deuxième ordre avec un amplificateur.	Exprimer les conditions théoriques (gain et fréquence) d'auto-oscillation sinusoïdale d'un système linéaire bouclé. Analyser sur l'équation différentielle l'inégalité que doit vérifier le gain de l'amplificateur afin d'assurer le démarrage des oscillations. Interpréter le rôle des non linéarités dans la stabilisation de l'amplitude des oscillations. Réaliser un oscillateur quasi-sinusoïdal et mettre en évidence la distorsion harmonique des signaux par une analyse spectrale. Approche documentaire : en relation avec le cours sur les ondes, décrire le fonctionnement d'un oscillateur optique (laser) en termes de système bouclé auto-oscillant. Relier les fréquences des modes possibles à la taille de la cavité.
Oscillateur de relaxation associant un intégrateur et un comparateur à hystérésis. Générateur de signaux non sinusoïdaux.	Décrire les différentes séquences de fonctionnement. Exprimer les conditions de basculement. Déterminer la période d'oscillation. Réaliser un oscillateur de relaxation et effectuer l'analyse spectrale des signaux générés.

Commentaires du jury

- **2015 :** Dans le cas des oscillateurs auto-entretenus, les conditions d'apparition des oscillations et la limitation de leur amplitude doivent être discutées. Le jury souhaiterait que le terme de résonance soit dûment justifié sans oublier une discussion du facteur de qualité. Il n'est pas indispensable de se restreindre à l'électronique.
- **2009-2013 :** Le jury n'attend pas une présentation générale et abstraite de la notion de système bouclé. Il estime indispensable de s'appuyer sur au moins un exemple concret et détaillé avec soin.
- **2007 :** La stabilité des systèmes bouclés est mal comprise. Le bouclage ne se limite pas uniquement à une fonction d'asservissement. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important.

Bibliographie

- ✍ *Electronique PSI, Précis Bréal*, **Brenders** ⟶ Contenu
- ✍ *Electronique I (pas juste Electronique)*, **Brébec** ⟶ Compléments et exercices
- ✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait** ⟶ Un peu d'asservissement et d'oscillateur à pont de Wien
- ✍ *Electronique expérimentale*, **Krob** ⟶ Compléments sur l'asservissement, très bien pour les oscillateurs et le critère de Nyquist
- ✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** ⟶ LASER
- ✍ *Introduction à l'optique quantique*, **Fox** ⟶ Compléments pour le laser
- ✍ http://www.lirmm.fr/~chemori/Temp/Leila/automatique-systemes-lineaires-et-non-lineaires.pdf, **Guyon** ⟶ Très utile pour bien comprendre la leçon

Prérequis

- AO
- fonction de transfert
- un cours de SI
- transformées de Laplace et de Fourier

Expériences

☕

1 Systèmes bouclés linéaires . . . 300
1.1 Fonction de transfert . . . 300
1.2 Exemple : l'amplificateur non inverseur . . . 302
2 Effets de la rétroaction . . . 303
2.1 Stabilité . . . 303
2.2 Gain et bande passante . . . 305
2.3 Réponse dynamique . . . 305
2.4 Influence quantitative du facteur de qualité sur le dépassement . . . 306
2.5 Sensibilité aux fluctuations . . . 307
3 Oscillateurs quasi-sinusoïdaux . . . 307
3.1 Critère de Barkhausen . . . 308
3.2 Laser et système bouclé . . . 308
3.3 Naissance des oscillations : le pont de Wien . . . 309
3.4 Principe de l'oscillateur . . . 309
3.5 Étude en boucle ouverte (facultatif) . . . 310
3.6 Condition d'oscillation du système bouclé (rapide) . . . 310
3.7 Croissance des oscillations . . . 311
3.8 Différents oscillateurs . . . 312

Introduction

Pour l'instant, nous nous sommes restreints à l'étude de systèmes linéaires en électronique. La sortie dépend linéairement de l'entrée via une équation différentielle et on peut transformer cette équation en notation complexe pour obtenir une fonction de transfert, donnée en notation de Laplace par

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} \qquad \text{avec} \qquad p = j\omega$$

Ainsi, une entrée donnée donne en théorie une sortie unique si on suppose que H est parfaitement connue, ce qui n'est pas forcément le cas. Par exemple, la fonction de transfert reliant la puissance fournie par le moteur d'une voiture à la vitesse de rotation des roues dépend de nombreux paramètres (pente de la route, état de la route,...) et il est donc difficile de la connaître précisément.

Ces imprécisions sur la connaissance de H impliquent que de tels systèmes ne puissent pas garantir une sortie conforme à ce que l'on veut. Pour remédier à ce problème, on utilise souvent des **boucles de rétroaction** qui fait réagir le système si la sortie n'est pas conforme à ce qu'on attend. Dans le cas de la voiture, un exemple de système rétroactif est le régulateur de vitesse.

Rappels sur l'AO

Déjà, il faut l'appeler "amplificateur linéaire intégré" (ALI) pour faire plaisir au jury.

Fonctionnement de l'animal

✍ Bréal PSI

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Amplificateur_opérationnel

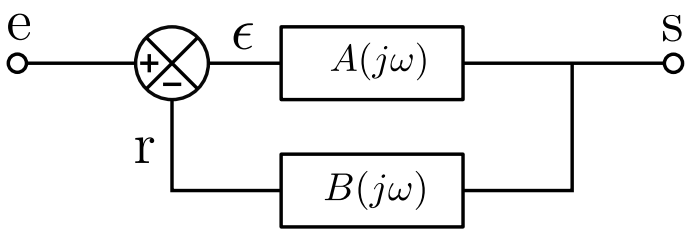
Les montages de base

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Montages_de_base_de_l'amplificateur_opérationnel

1 Systèmes bouclés linéaires

✍ Guyon chap5

1.1 Fonction de transfert



Un système bouclé est constitué d'une chaîne linéaire donc la sortie est récupérée et envoyé dans la boucle de retour pour être comparée à l'entrée.

Remarque

Les signes - et + montrent qu'on a un comparateur et non pas un additionneur. Cependant, on peut quand même utiliser un additionneur si on inverse la boucle de retour pour faire apparaître un facteur -1.

Avec les mains, on peut expliquer la rétroaction en supposant qu'on a une sortie trop grande par rapport à ce qu'on attend. $A(p)$ et $B(p)$ induiront alors une rétroaction négative importante via la boucle de retour, ce qui va alors diminuer la sortie et la stabiliser à une valeur inférieure, plus conforme à ce qu'on attend.

Ce qu'on veut, c'est la fonction de transfert du système. Puisqu'on attend toujours que s soit linéaire en e même avec la rétroaction, on peut modéliser le système bouclé par une seul fonction de transfert $H(p)$ et donc le considérer comme une boîte noire de gain $H(p)$.

$$s(p) = A(p)\epsilon(p) = A(p)[e(p) - B(p)s(p)] \Rightarrow s(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}e(p) \tag{22.1}$$

avec $A(p), B(p) \in \mathbb{C}$. La fonction de transfert vaut donc

$$\boxed{H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}} \tag{22.2}$$

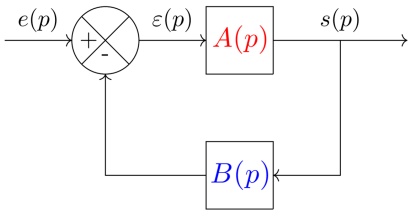
Notons que $H(p)$ correspond à la boucle fermée tandis que $A(p)B(p)$ correspond à la boucle ouverte. On peut écrire $H(p)$ sous la forme

$$\begin{aligned} H(p) = &\quad \{\text{chaîne directe (sans retour)}\}\times \quad \{\text{correction du retour}\} \\ = &\quad A(p)\times \quad \frac{1}{1 + A(p)B(p)} \end{aligned} \tag{22.3}$$

Pour un retour faible, $B(p)s(p) \ll e(p)$ donc $H(p) \simeq A(p)$.

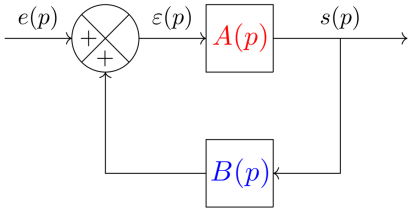
Une dernière remarque, il existe 2 types de rétroactions :

- la rétroaction **négative** : c'est le cas qu'on vient d'étudier, à savoir $\epsilon(p) = e(p)$-$B(p)s(p)$



$$H(p) = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

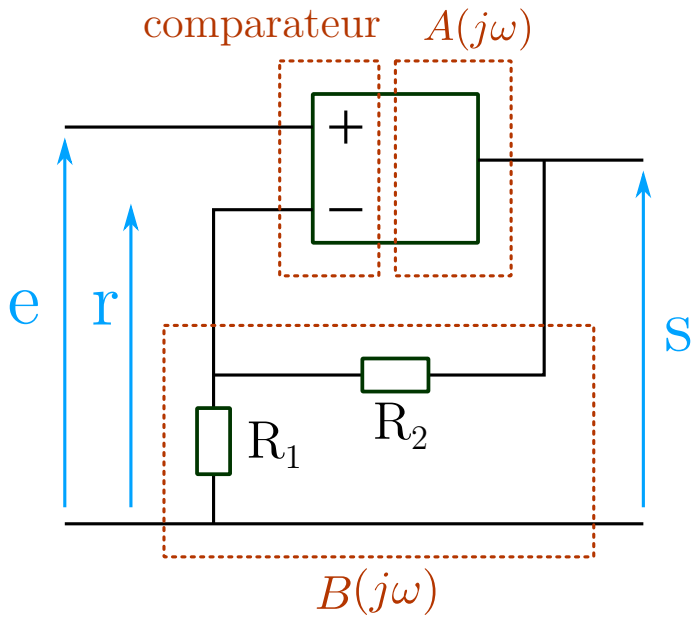
- la rétroaction **positive** : c'est le cas où $\epsilon(p) = e(p)+B(p)s(p)$



$$H(p) = \frac{A(p)}{1\text{-}A(p)B(p)}$$

Prenons un exemple.

1.2 Exemple : l'amplificateur non inverseur



Pour commencer, rappelons qu'en fonctionnement, la réponse de l'ALI est :

$$s(p) = \frac{\mu_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}} [e_+(p) - e_-(p)] \tag{22.4}$$

L'ALI peut donc être vu comme un comparateur $[e_+(p) - e_-(p)]$ suivi d'un passe bas $\dfrac{\mu_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}}$ de gain statique μ_0 et de pulsation de coupure ω_{ALI}.

Ordres de grandeurs

$\mu_0 = 2 \times 10^5$ et $\omega_{\text{ALI}} = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ (donc $f_{\text{ALI}} = 8$ Hz), ce qui donne un produit gain-bande d'environ 10^6.

Intéressons-nous maintenant au système bouclé. Le théorème de Millman nous permet de calculer la sortie en fonction de l'entrée, mais on n'en a pas besoin ici. En effet, on identifie l'ALI à la châine directe de gain $A(p)$ et les 2 résistances à la chaîne de retour de gain $B(p)$. On a donc

$$A(p) = \frac{\mu_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}} \qquad \text{et} \qquad B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

On remplace $A(p)$ et $B(p)$ dans l'expression de $H(p)$ démontrée précédemment pour obtenir

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)} \\ &= \frac{\dfrac{\mu_0}{1+\dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}}}{1+\dfrac{\mu_0}{1+\dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}}\dfrac{R_1}{R_1+R_2}} \\ &= \frac{\mu_0}{1+\dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}}+\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}} \\ &= \frac{\dfrac{\mu_0}{1+\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}}}{1+\dfrac{p}{\omega_{\text{ALI}}\left[1+\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}\right]}} \end{aligned} \tag{22.5}$$

Finalement, on écrit $H(p)$ sous la forme

$$\boxed{H(p)=\frac{H_0}{1+\dfrac{p}{\omega_0}} \qquad \text{avec} \begin{cases} H_0 = \dfrac{\mu_0}{1+\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}} \\ \omega_0 = \omega_{\text{ALI}}\left[1+\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1+R_2}\right] \simeq 10^5\text{-}10^6 \text{ Hz} \end{cases}} \tag{22.6}$$

Quelles sont les conséquences de la boucle de rétroaction sur les caractéristiques du système ?

2 Effets de la rétroaction

2.1 Stabilité

Considérons un système bouclé général mais avec une rétroaction **positive**. Alors $H(p) = \dfrac{A(p)}{1-A(p)B(p)}$, ou plutôt $[1-A(p)B(p)]s(p) = A(p)e(p)$. On se place alors en **régime libre**, *i.e.* $e(p)=0$, l'équation de fonctionnement vaut

$$1-A(p)B(p)=0$$

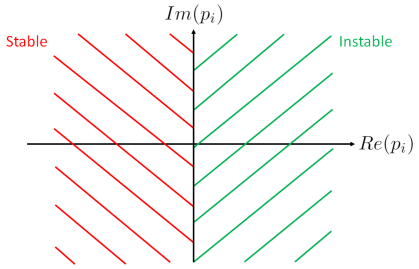
Les solutions p_i de cette équation peuvent être décrites comme étant les racines d'un polynôme qui vérifie

$$1-A(p)B(p)=\sum_{i=1}^{n} b_i(p-p_i)^{k_i}$$

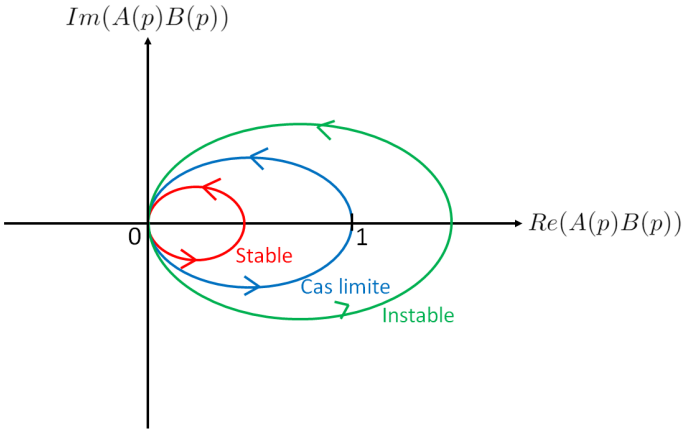
On peut alors exprimer la solution en temporel :

$$s(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(p_i t)$$

où les p_i sont les racines complexes de $1-A(p)B(p)$ et les $a_i(t)$ sont des polynômes de degré maximum k_i-1. La solution p_i est alors **instable** si $\Re(p_i)>0$.



Cependant, il peut être difficile de calculer les solutions p_i On utilise donc une représentation plus visuelle : le **diagramme de Nyquist**, donc lequel on trace $\Im[A(p)B(p)]$ en fonction de $\Re[A(p)B(p)]$ **en boucle ouverte**.



(22.7)

Quand on écrit $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$, on voit qu'on a un problème pour $A(p)B(p) = 1$. On peut donc établir un critère d'instabilité purement géométrique :

Un système à rétroaction **positive** est instable si sa trajectoire dans le diagramme de Nyquist entoure le point (1,0).

Vérification des conditions d'oscillation

✍ MP27 ⏲

reprendre en vitesse cette manip pour présenter les diagrammes de Nyquist.

On peut se demander ce qu'il se passe pour une rétroaction négative. Dans ce cas, $H(p) = \dfrac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$ et donc le problème a lieu quand $A(p)B(p)$. Ainsi, le système serait instable si sa trajectoire dans le diagramme de Nyquist entourait le point (-1,0). Cependant, cela reviendrait en pratique à avoir un gain négatif, ce qui n'est vraiment pas courant.

Dans le reste de cette section, on se placera dans le cadre de la rétroaction ***négative****.*

2.2 Gain et bande passante

Reprenons de nouveau l'exemple de l'amplificateur non inverseur. On avait établi

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + \dfrac{p}{\omega_0}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = \dfrac{\mu_0}{1 + \dfrac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \\ \omega_0 = \omega_{\text{ALI}} \left[1 + \dfrac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right] \simeq 10^5\text{-}10^6 \text{ Hz} \end{cases}$$

On remarque qu'on est dans le cas d'un système bouclé avec un grand gain en chaîne directe, *i.e.* au niveau de l'ALI. On a en effet $\mu_0 \simeq 2 \times 10^5 \gg 1$ donc on peut écrire

$$H(p) \simeq \frac{1}{B(p)}$$

Le gain ne dépend presque que de la boucle de retour. Comme son nom l'indique, l'amplificateur non inverseur sert à amplifier (thank you Captain Obvious) donc on choisit des résistances telle que $B(p) = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} \ll 1$.

Prenons par exemple $R_1 = 1$ kΩ et $R_2 = 100$ kΩ. Alors $B(p) \simeq \dfrac{1}{100}$ donc $H_0 \simeq 100$. En chaîne directe, on avait $\mu_0 \simeq 2 \times 10^5$. La rétroaction a donc réduit le gain d'un facteur $\dfrac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} = 2000$!
Remarquons cependant que la pulsation de coupure a été quant à elle multipliée par un facteur $1 + \dfrac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} = 2000$ pour atteindre $\omega_0 \simeq 10^5 \,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ (donc $f_0 = 16$ kHz).

Le produit gain × bande passante est **constant**.

La boucle de rétroaction permet donc d'augmenter la bande passante au prix d'une diminution de gain.

2.3 Réponse dynamique

Abandonnons l'amplificateur non inverseur 5 minutes, et demandons nous en toute généralité quelle influence peut avoir la rétroaction sur la réponse dynamique. Pour l'étudier, nous allons utiliser l'outils classique de la réponse à un échellon de tension comme commande.

On a vu que pour les systèmes d'ordre 1, le temps de réponse est donné par $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$. Le but de la rétroaction est de le réduire, et donc d'accroître la rapidité du système. Cependant, on l'a vu avec les filtres passifs d'ordre 2, la rapidité a un prix, que nous allons détailler.

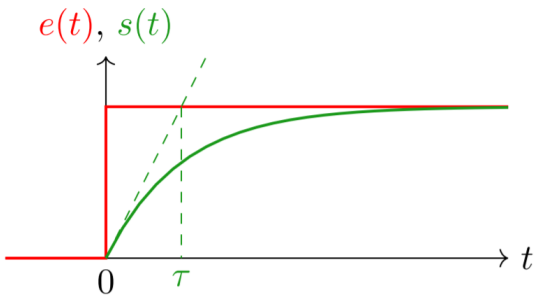


Figure 22.1 – Un régime transitoire typique d'un système d'ordre 1.

MCC asservie et dépassement

✍ MP27 ⏲

BUT : Illustrer le prix à payer, à savoir le **Dépassement de commande**.

On met un échellon de tension et on voit les oscillations du moteur.

On a vu, avec le RLC (✍ leçon électrocinétique) que plus la réponse est rapide (*i.e.* plus l'égalité commande=sortie est vite vérifiée), plus le dépassement est grand, il est d'ailleurs caractérisé par le facteur d'amortissement ξ. Cela peut bien sûr poser des problèmes en ingénierie, puisqu'un robot qui dépasse sa commande c'est potentiellement un danger pour la sécurité des travailleurs autour.

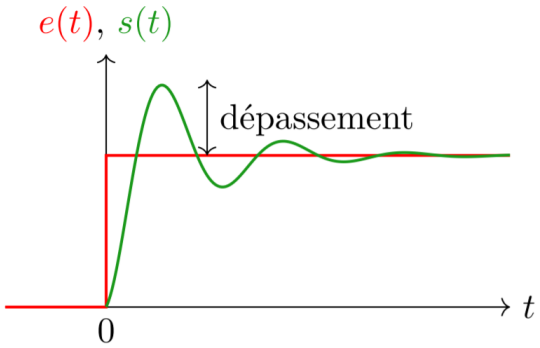


FIGURE 22.2 – Régime transitoire d'un système d'ordre 2.

L'exemple typique d'un système qu'on veut qu'il réagisse vite mais qu'on veut pas qu'il dépasse c'est le **régulateur de vitesse** d'une voiture.

2.4 Influence quantitative du facteur de qualité sur le dépassement

✍ LP00 – électrocinétique, filtres d'ordre 2

✍ http://www.lirmm.fr/~chemori/Temp/Leila/automatique-systemes-lineaires-et-non-lineaires.pdf

Pour résumer, on peut écrire l'équation différentielle d'un système bouclé linéaire d'ordre 2 à rétroaction négative comme

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t) \tag{22.8}$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi p}{\omega_0} + 1} \tag{22.9}$$

Le facteur d'amortissement ξ nous indique à quel point le système est amorti. On étudie la réponse indicielle, *i.e.* la réponse à $E(p) = \frac{1}{p}$, et par transformée de Laplace inverse on obtient directement :

✍ le poly p.70 (en réalité 84eme page du bouquin).

On peut alors définir trois régimes en fonction de la valeur de ξ :

- Régime amorti
- Régime critique

- régime oscillatoire amorti

C'est ce dernier qui nous intéresse dans le cadre d'une leçon sur les oscillations. On peut alors y définir la pseudo période :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \tag{22.10}$$

Pour plus de détails, regarder les références.

2.5 Sensibilité aux fluctuations

Une question que l'on peut également se poser sur ce type de système est sa capacité à répondre à une fluctuation. Par exemple on peut imaginer une voiture roulant au régulateur sur une route qui monte et descend. Est-ce que la vitesse va en être fortement affectée ? Est-ce que les dépassements sont toujours faibles ?

On suppose que ce qui fluctue c'est $A(p)$, et que ses fluctuations sont de la forme $\Delta A(p)$. On suppose que B ne fluctue pas. On a toujours $H = \dfrac{A}{1+AB}$

$$\frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta A(1+AB-AB\Delta A)}{(1+AB)^2} \times \frac{1+AB}{A} = \frac{\Delta A}{A}\frac{1}{1+AB} \tag{22.11}$$

Comparons ceci aux fluctuations en chaine directe : on a $H_d = A$, et par conséquent $\Delta H_d/H_d = \Delta A/A$. On a donc ici réduit les fluctuations de la commande par un facteur $1+AB$. Pour un système avec un grand gain en chaine directe (*i.e.* un amplificateur, 2000 pour l'ali), on a une forte réduction des fluctuation, ce qui est plutôt pratique !

Dans le cadre des grandes fluctuations, qui est un cas limite toujours intéressant, pour une chaine directe on a de grandes fluctuation, pour un système bouclé on a une très forte atténuation. Pour un ali avec une chaine directe $|AB| \sim 2000$, $\Delta H/H \simeq 0.05\%$.

3 Oscillateurs quasi-sinusoïdaux

On se place dans cette section dans le cadre de la rétroaction **positive**.

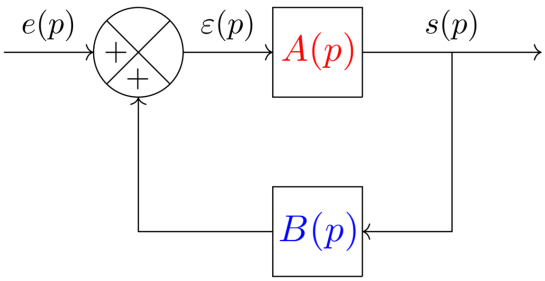


FIGURE 22.3 – Rétroaction positive

La fonction de transfert est donc

$$H = \frac{A}{1-AB} \tag{22.12}$$

3.1 Critère de Barkhausen

Le critère de Barkhausen est une évaluation rapide de la stabilité d'un système. On cherche les racines imaginaires pures de $1 - AB$ afin de faire diverger H, c'est à dire les pôles imaginaires purs de H.

$$A(j\omega)B(j\omega) = 1 \tag{22.13}$$

Le critère de Barkhausen est alors

$$\begin{cases} |A||B| = 1 \\ \arg(A) + \arg(B) \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases} \tag{22.14}$$

Il s'agit du critère à satisfaire pour obtenir un oscillateur. On peut l'appliquer par exemple au laser.

3.2 Laser et système bouclé

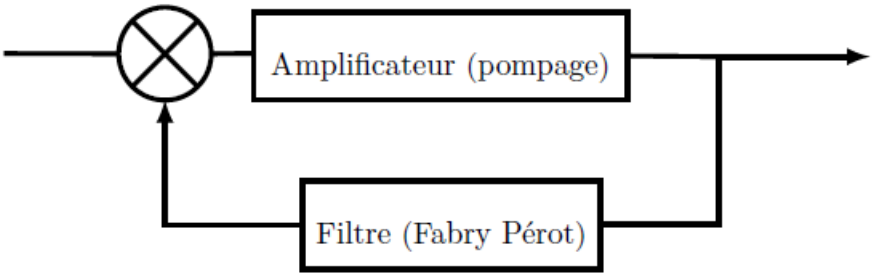


FIGURE 22.4 – Schéma block du laser

On rappelle vite fait le principe : avec une source d'énergie extérieure on effectue un échange de population entre deux niveaux énergétiques pour forcer l'émission stimulée à une certaine fréquence sélectionnée par un filtre (un FP). Le rayonnement émis par émission stimulée continue ensuite à forcer l'échange de population ce qui entretient le fonctionnement du LASER.

Définition : *Oscillateur auto-entretenu*

Un oscillateur auto-entretenu est un générateur (filtre + milieu amplificateur) délivrant un signal périodique tout en étant alimenté par une source d'énergie continue, et en l'absence de tout signal périodique extérieur.

Bien expliquer en quoi le LASER illustre parfaitement ça et dire que grâce au filtre on a même un oscillateur quasi-sinusoïdal. Mais d'ailleurs c'est quoi le signal d'entrée d'un LASER avant qu'une première boucle ne soit lancée et que le filtre ait agit en rétroaction ? Et bien ce sont les émissions spontanées qui vont lancer la boucle ! Ces émissions spontanées créent un signal d'une très faible amplitude (on parle de bruit), bien plus faible que le signal que l'on veut en sortie du LASER.

Les fonctions de transfert du laser sont les suivantes :

- milieu amplificateur, atomes excité électriquement, $G = g(\omega)\exp\left(i\frac{\omega\ell_a}{c}\right)$ avec ℓ_a la largeur de la cavité. Un aller-retour fera donc

$$A = g^2 \exp\left(2i\frac{\omega\ell_a}{c}\right) \tag{22.15}$$

- cavité optique FP de largeur ℓ avec un miroir parfait et un semi réfléchissant (r).

$$B = r \tag{22.16}$$

On a alors pour la condition de Barkhausen

$$\begin{cases} rg^2 = 1 \\ \omega = n\dfrac{\pi c}{\ell} \end{cases} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z}. \tag{22.17}$$

✍ courbes sympas dans le Fox p73, LP37

Le bouclage du système est donc à l'origine de la quasi-monochromaticité du laser, donc de sa cohérence temporelle.

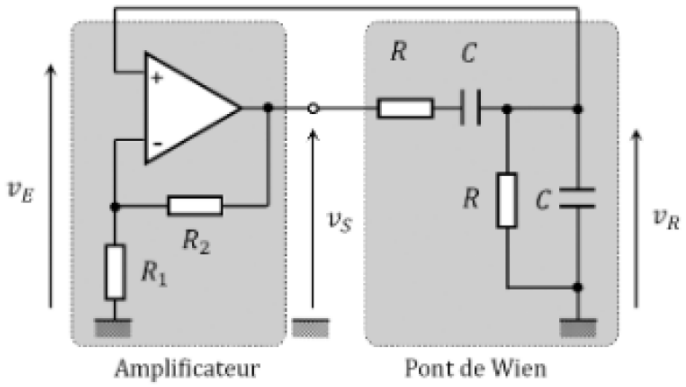
Remarque : dans la vraie vie on a pas une divergence, parce qu'on n'a pas une énergie infinie, qu'on a des phénomène de non linéarité, de saturation. On a illustrer ce principe un peu mieux avec le pont de Wien.

Mettons ce critère en application avec cet oscillateur électronique. Puisqu'on n'apporte pas de périodicité en entrée, comment se forment les oscillations ? Sous quelles conditions ?

3.3 Naissance des oscillations : le pont de Wien

✍ MP27

3.4 Principe de l'oscillateur



La fonction de transfert de l'amplificateur et du filtre sont respectivement :

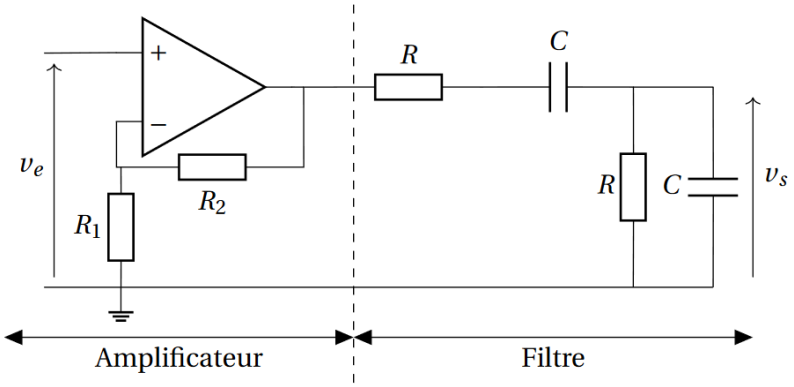
$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{\dfrac{1}{Q} + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{22.18}$$

Pour le choix des paramètres, on a $Q = \dfrac{1}{3}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$, et globalement, pour que ça marche bien on prend $R_1 = R = 1$ kΩ, et $C = 1$ μF. Il est malin de mettre une boite à décades sur R_2.

On voit que la boucle de retour c'est le filtre, et la rétroaction est positive.

3.5 Étude en boucle ouverte (facultatif)

Objectif : tracer le diagramme de Bode du circuit en boucle ouverte pour caractériser ω_0 et Q. Easy ?



$$H = AB = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{22.19}$$

☕

Diagramme de Bode (facultatif)

✍ 🕒 3mn

On trace en préparation le diagramme, devant le jury on fait juste un vieux sweep des familles.

Bode pour $R_2 = 2.1$ et 1.9 kω.

Remonter à ω_0 et Q par régression. La bande passante à -3dB donne Q, la phase nulle donne ω_0.

3.6 Condition d'oscillation du système bouclé (rapide)

Pour établir les conditions d'oscillation du système bouclé, on annule le dénominateur de sa fonction de transfert : AB = -1, de manière à faire diverger le gain et ainsi permettre l'apparition des oscillations - le système est rendu instable. La résolution de cette équation mène à deux conditions (dites de Barkhausen) :

$$s = A(e + Bs) \Rightarrow s = \frac{A}{1 - AB}e$$

$$\begin{cases} R_2 = 2R_1 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La première impose que les oscillations ne sont possibles que si la chaîne directe amplifie suffisamment le signal pour avoir un gain de 1. En pratique, cette condition est nécessaire pour que les oscillations naissent mais n'est pas suffisante pour qu'elles se maintiennent ; on retiendra que pour qu'elles s'établissent durablement il faut : $R_2 > 2R_1$.

La deuxième condition stipule que les oscillations qui s'établissent dans le système bouclé sont les oscillations du régime libre de la chaîne de retour, elles ont donc une fréquence égale à la fréquence de résonance du filtre passe-bande. On peut vérifier expérimentalement ces deux conditions.

☕

Vérification des conditions d'oscillation

✍ ⏲

Enlever le GBF du circuit et boucler la sortie sur l'entrée.

- Condition n°1 : Pour $R_2 < 2$ kΩ, constater que les oscillations peinent à s'établir, puis augmenter R_2 jusqu'à ce qu'elles se maintiennent. Déterminer un encadrement à l'ohm près de la valeur de la résistance critique qui correspond à la condition d'oscillation. Mesurer les valeurs de R_c^+ et R_c^- à l'ohmmètre en les sortant du circuit. En déduire $R_c = (R_c^+ + R_c^-)/2$. L'incertitude sur R_c s'obtient en sommant quadratiquement le demi- écart $(R_c^+ - R_c^-)/2$ et l'incertitude de l'ohmmètre. Comparer à la valeur attendue $R_c = 2R_1$ (la valeur attendue a elle aussi une incertitude qui provient de la mesure de R_1 à l'ohmmètre).
- Condition n°2 : Pour une valeur de R_2 supérieure à R_c , visualiser les oscillations à l'oscilloscope. On peut alors soit directement mesurer la fréquence au fréquence-mètre, soit la déduire d'une mesure de période à l'aide des curseurs sur l'oscilloscope. Dans le premier cas l'incertitude est celle du fréquence-mètre, dans l'autre elle est dominée par l'incertitude sur le positionnement des curseurs.

Comparer ces deux valeurs aux valeurs attendues, ça doit rentrer dans les barres d'incertitudes.

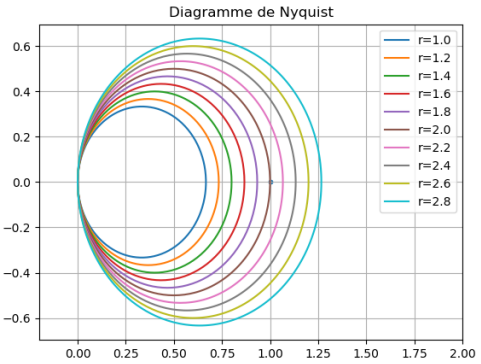
Une autre manière de formuler la condition d'oscillation consiste à utiliser le critère d'instabilité de Nyquist, qui stipule qu'un système bouclé est instable si le diagramme de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte entoure le point (-1 ; 0). **(Aller voir les hypothèses !)**

Numérique : tracer les diagrammes de Nyquist

✍ ⏲ 2mn

Avec les points déjà acquis pour le diagramme de Bode, on trace les diagrammes de Nyquist correspondant aux trois valeurs de résistance précédentes.

On trace Im(H) fonction de Re(H), et bam. CF ci-dessous, r est le rapport des résistances.



3.7 Croissance des oscillations

✍ Benders p.244, Krob p.133

But : Retrouver la croissance exponentielle des oscillations naissantes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3 - A}{RC}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 \exp\left(-\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right)\omega_0 t\right)\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{22.20}$$

On retrouve bien des oscillation naissante pour $R_2 > 2R_1$. En vrai le signal ne continue pas à diverger car le gain de l'ampli op est limité... La saturation des oscillations correspond à la saturation de l'ampli.

Croissance des oscillation

✍ 5mn

Après avoir introduit le détecteur de crête en sortie du montage, faire une acquisition de la croissance des oscillations sous Latis-Pro. Pour cela, court-circuiter R_2 avec un fil, régler le seuil de déclenchement à 10 mV avec un pré-trig à 0% et ôter le court circuit après avoir lancé l'acquisition.

Cela revient à introduire instantanément R_2 dans le circuit et donne un signal plus propre. Faire une modélisation affine de $\ln s(t)$. On obtient $-\alpha\omega_0 t$, avec $\alpha = 2 - \dfrac{R_2}{R_1}$.

Répéter ceci pour plusieurs valeurs de $R_2 > 2R_1$ et tracer α en fonction de R_2 . Comparer la pente de la droite obtenue à $1/2R_1$.

3.8 Différents oscillateurs

On voit très vite que si on dépasse le critère de Barkhausen, les oscillations ne sont plus sinusoïdales. La sortie est enrichie spectralement. Ceci est possible grâce aux non-linéarités : elles permettent de dépasser le critère de Barkhausen en compensant les pertes énergétiques mais alors on perd en précision spectrale. Notons que le formalisme précédent avec les fonctions de transfert et les blocs n'a plus aucun sens si c'est plus linéaire.

Enrichissement spectral

✍

Montrer que l'on a un enrichissement spectral.

Un bon oscillateur c'est donc un truc qui créer un signal bien monochromatique, donc caractérisé par un bon facteur de qualité (il porte pas son nom pour rien le bougre !). Ici on a $Q = 1/3$, c'est bof, dès qu'on dépasse un tout petit peu le critère de Barkhausen les oscillations sont dégueu. Mais avec d'autres oscillateurs on peut atteindre de bien meilleurs facteurs de qualité.

3.8.1 Colpitts

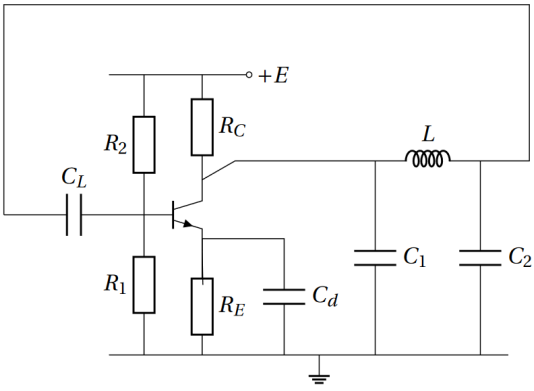


FIGURE 22.5 – Oscillateur de Colpitts, de facteur de qualité réglable, croissant avec L.

3.8.2 Quartz

On peut alors utiliser du quartz qui peut être assimilé à une inductance propre L $\sim$ 100 H, ce qui va nous donner un facteur de qualité $Q \sim 50000$.

3.8.3 PLL

Parler de la PLL (boucle à verrouillage de phase) si il reste du temps. ✍ Hprépa exo 5 p.175 ou alors ne pas en parler parce que c'est ÉCLATÉ AU SOL et parce que de toutes façons, monter une PLL par visio c'est pas facile

Conclusion

Asservissement en rétroaction négative, oscillations en rétroaction positive.

Minimum ordre 2 pour faire des oscillations.

LP 23

Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal, étude spectrale

Niveau : MP

Extraits du programme (MP)

Signaux périodiques.	Savoir que l'on peut décomposer un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
Filtrage analogique d'un signal périodique.	
Échantillonnage : fréquence d'échantillonnage, théorème de Nyquist-Shannon.	
Filtrage numérique.	Mettre en oeuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ; utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.
Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.	
Synthèse spectrale d'un signal non périodique. ($\mathcal{TF}$)	

Commentaires du jury

- **2017 :** Ce n'est pas une leçon sur le filtrage qui est attendue ; il ne faut pas se réduire à l'étude d'un ou plusieurs filtres électroniques.
- **2016 :** Cette leçon ne peut en aucun cas se réduire à la simple étude de la théorie de Fourier.
- **2015 :** Cette leçon ne doit pas se réduire à un catalogue de systèmes de traitement analogique du signal. Elle peut aussi mettre en exergue des méthodes numériques enseignées notamment dans les programmes de CPGE.

Bibliographie

- ✍ *Tout-en-un Physique MPSI*, **Sanz** ⟶ Rappels sur les filtres
- ✍ *Tout-en-un Physique PSI*, **Cardini** ⟶ chp5 "Electronique numérique"
- ✍ *Cap Prépa PSI*, **Renvoizé** ⟶ Partie 1 (DSF) et filtrage
- ✍ *L'essentiel en théorie et traitement du signal*, **Duroc** ⟶ Assez succinct, pas mal pour le définitions
- ✍ *Traitement des signaux et acquisition de données*, **Cottet** ⟶ Plus complet que le Duroc, partie 2
- ✍ *Mathématiques pour la physique*, **Appel** ⟶ Pour l'aspect mathématique, définition et propriétés de la $\mathcal{TF}$
- ✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Partie 3, détection synchrone

Prérequis

➢ Distributions, symbole de Kronecker

Expériences

☕

1 Étude spectrale d'un signal . . . 317
1.1 Décomposition de Fourier . . . 317
1.2 Transformée de Fourier . . . 319
1.3 Le bruit d'ses morts . . . 320
1.4 SLIT . . . 321
2 Traitement . . . 322
2.1 Filtrage analogique . . . 322
2.2 Hétérodynage . . . 322
2.3 Mise en pratique . . . 322
3 Numérisation . . . 322
3.1 Motivation . . . 323
3.2 Échantillonage . . . 323
3.3 Temps d'acquisition . . . 325
3.4 Quantification . . . 325
3.5 Vers un filtrage numérique . . . 325
4 Télécommunication . . . 325
4.1 Motivation . . . 325
4.2 Modulation et démodulation d'amplitude/fréquence . . . 325

Introduction

Dans la vie courante, on croise une multitude de signaux analogiques continues sous forme de son, d'onde électromagnétique ou encore d'électricité ainsi que de plus en plus de signaux numériques qui, eux, sont discrets. Ces signaux le support d'informations, c'est pourquoi il est primordial de savoir comment les traiter pour récupérer ces informations. Cela implique donc de savoir les caractériser, les créer et les modifier. Cette leçon a pour but de donner des outils qui nous permettent d'étudier les signaux analogiques et numériques.

1 Étude spectrale d'un signal

Commençons par nous donner les outils mathématiques nécessaires pour comprendre le traitement d'un signal analogique ou numérique. On illustrer ça, on peut réaliser une petite expérience introductive avec un diapason.

Faire sonner un diapason seul en faisant l'acquisition du son sur un oscillo et montrer le signal obtenu : on obtient une sinusoïde parfaite. On ajoute alors un diapason avec une masselote pour avoir des battemnts et on regarde le signal, qui est moins sinusoidal. On distingue une deuxième fréquence. On peut aussi s'enregistrer et voir que le signal est complètement aléatoire.

Avec cette manip, on se rend compte qu'il est difficile d'identifier les fréquences temporelles d'un signal qui en a plusieurs. C'est à ce moment là que Jean-Baptiste Joseph Fourier entre en scène.

1.1 Décomposition de Fourier

Considérons un signal **périodique**. Prendre un sinus serait trop simple, donc on prend par exemple un signal créneau, noté $s_\tau(t)$, de période $\tau = \dfrac{1}{\nu_0}$. Le physicien et mathématicien français J. Fourier a montré qu'un telle fonction, sous réserve qu'elle soit en plus de carré intégrable, pouvait être décomposée comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} s_\tau(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\right] \quad &\text{avec} \quad a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau s_\tau(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\mathrm{d}t \\ &\text{et} \quad b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau s_\tau(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{\tau}t\right)\mathrm{d}t \end{aligned}} \tag{23.1}$$

C'est ce qu'on appelle la **décomposition en série de Fourier** du signal $s_\tau(t)$. Dans cette décomposition,

- $\dfrac{a_0}{2}$ est la **moyenne** du signal, typiquement la composante continue d'un signal alternatif en électricité.
- le mode $n = 1$ est le **mode fondamental**, il oscille à la même fréquence que le signal lui-même.
- les modes $n > 1$ sont les **harmoniques** du signal.
- les coefficients a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** et peuvent être vus comme étant le poids du mode n dans la construction du signal, un peu comme une projection sur une base de fréquences discrètes.

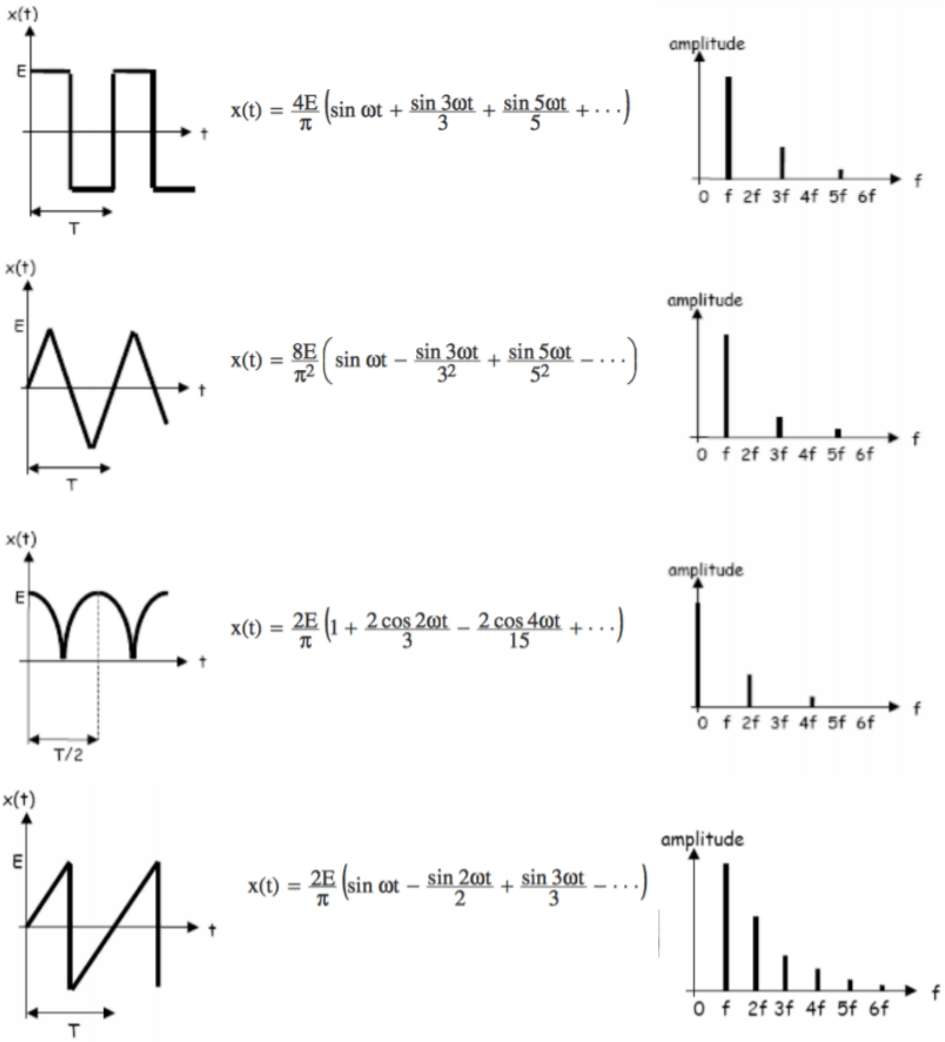
Le **spectre d'un signal** correspond alors à l'ensemble des fréquences qui le composent, *i.e.* à l'ensemble des modes n tels que $a_n, b_n \neq 0$. On représente le spectre d'un signal en traçant l'amplitude de chaque mode n en fonction de n. Ce spectre est donc discontinu puisqu'il ne représente pas toutes les fréquences.

Pour le signal issu d'un diapason, sa décomposition de Fourier ne fera apparaître que le mode fondamental à une fréquence de 440 Hz.

Pour le signal en créneau, sa décomposition de Fourier est plus complexe et les coefficients de Fourier valent :

$$a_n = 0 \qquad \forall n > 0$$
$$b_n = \frac{1}{2n+1} \qquad \forall n > 0$$

Pour un signal triangle, on a $b_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \qquad \forall n > 0$



Tout signal de période τ peut alors être approché par une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ quand $n \to +\infty$ dont les termes valent :

$$C_n(t) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \left[a_p \cos\left(p\frac{2\pi}{\tau}t\right) + b_p \sin\left(p\frac{2\pi}{\tau}t\right) \right] \tag{23.2}$$

Plus n est grand, plus $C_n(t)$ est proche du signal. On peut illustrer ça avec un code python ou bien avec Géogébra [1].

> *La décomposition de Fourier ne concerne que les signaux périodiques. Cependant, on a bien vu que le son émis par une voix humaine par exemple n'est pas vraiment périodique... On a donc besoin d'aller plus loin.*

1. https://www.geogebra.org/m/vzh8emTb

1.2 Transformée de Fourier

La **transformée de Fourier** $\mathcal{TF}$ est un peu comme le prolongement de la décomposition de Fourier pour les signaux non-périodiques. Cependant, comme pour la décomposition de Fourier, on ne peut faire la $\mathcal{TF}$ d'un signal $s(t)$ que si ce signal est de carré intégrable. On définit alors la $\mathcal{TF}$ de $s(t)$, notée $\widetilde{s}(f)$, par

$$\boxed{\widetilde{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp\left(-2i\pi\nu t\right) \mathrm{d}t} \tag{23.3}$$

Convention

Cette formule est un convention parmi les autres. Il existe autant de formules pour calculer la $\mathcal{TF}$ d'un signal que de conventions.

On obtient donc une fonction qui à chaque fréquence ν associe son poids dans la reconstruction du signal d'origine. Contrairement à la décomposition de Fourier, on n'a plus un spectre discret mais continu, un peu comme si on projetait le signal sur une base de fréquences continue. Il est également courant de voir des $\mathcal{TF}$ sur l'espace des pulsations $\omega = 2\pi\nu$ mais c'est analogue. Ce résultat est très fort : il nous dit qu'un signal quelconque non-périodique peut être décomposé en une somme des signaux périodiques !

Par exemple, prenons une fonction porte définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa $\mathcal{TF}$ vaut alors

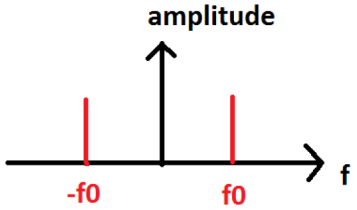
$$\widetilde{\Pi}(\nu) = T\mathrm{sinc}(\pi\nu T)$$

Une fonction porte, qui n'est pas période, a une $\mathcal{TF}$ qui est une fonction périodique. Elle peut donc reconstruite en sommant une infinité continue de fréquences pondérées par un sinus cardinal... Il faut cependant garder en tête que dans le cas général, la $\mathcal{TF}$ d'un signal n'est pas connue et on n'a pas un beau spectre.

On peut également essayer de calculer la $\mathcal{TF}$ d'un sinus, comme dans le cas du diapason. Un matheux peut faire la remarque qu'un sinus n'est pas de carré intégrable mais on peut lui répondre qu'on peut étendre la définition de la $\mathcal{TF}$ au cas des distributions (ce qui est dans les pré-requis *cheh*). Ainsi, le signal est de la forme $s(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ et sa $\mathcal{TF}$ vaut alors

$$\widetilde{s}(\nu) = \frac{A}{2i}\left[\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu - \nu_0)\right]$$

où δ est le symbole de Kronecker et représente la distribution de Dirac.



Les plus observateurs repéreront sans doute l'apparition d'une fréquence négative, qui ne représentent rien physiquement mais qui sont utiles en traitement de signal, ce qu'on verra par la suite. On peut aussi remarquer que jusqu'à maintenant on a calculé les $\mathcal{TF}$ de signaux connus pour tout t, ce qui n'est évidemment pas la cas en pratique. Encore une fois, on verra un peu plus tard comment on remédie à ce problème.

Aspect énergétique

L'énergie d'un signal $s(t)$ est définie par

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \mathrm{d}t$$

En passant, on comprend bien pourquoi on aime les signaux à carré intégrable.

On peut relier cette énergie à une notion appartenant un domaine spectrale, appelée la **densité spectrale d'énergie** $\widetilde{e_\nu}$, par l'équation

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{e_\nu} \mathrm{d}\nu$$

Le **théorème de Parseval** permet d'exprimer cette densité spectrale d'énergie grâce à la $\mathcal{TF}$ du signal :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{s}(\nu)|^2 \mathrm{d}\nu \Rightarrow \text{on identifie } \widetilde{e_\nu} = |\widetilde{s}(\nu)|^2$$

La $\mathcal{TF}$ conserve donc l'information sur l'énergie du signal.

On peut finir cette partie en donnant quelques propriétés générales de la $\mathcal{TF}$:

Propriété	Fonction	Transformée de Fourier
Linéarité	$a\mathrm{x(t)} + b\mathrm{y(t)}$	$a\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega) + b\mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}](\omega)$
Contraction	$\mathrm{x}(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)$
Translation temporelle	$\mathrm{x(t)e}^{i\omega_0 t}$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}]\,(\omega - \omega_0)$
Modulation	$\mathrm{x\,(t - t_0)}$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)\mathrm{e}^{i\omega t_0}$
Produit de convolution	$(\mathrm{x} * \mathrm{y})(\mathrm{t})$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)\mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}](\omega)$
Produit	$(\mathrm{xy})(\mathrm{t})$	$(\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}] * \mathcal{TF}[\mathrm{y(t)}])(\omega)$
	$\mathrm{x(t)}$ réel $\forall \mathrm{t}$	$\mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](-\omega) = \mathcal{TF}[\mathrm{x(t)}](\omega)^*$

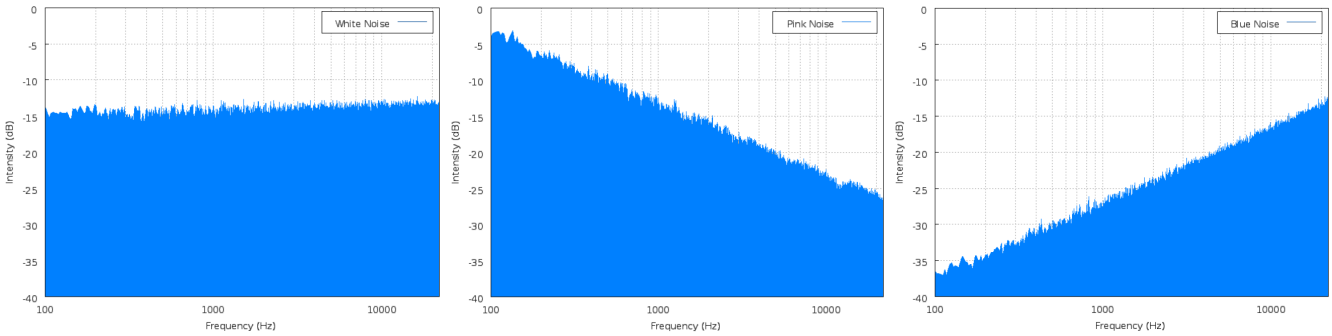
On s'est esquinté la santé pour mettre en place un outil mathématique pour étudier des signaux mais en fait on n'a pas tenu compte d'un léger détail : le bruit d'ses morts !!

↓

1.3 Le bruit d'ses morts

Le **bruit** est un signal **aléatoire** parasite qui se retrouve mélangé au signal étudié. Pour s'en affranchir au mieux, il est nécessaire de différencier les types de bruits qu'on peut rencontrer dans des signaux réels. Les bruits ont beau être des variables aléatoires, ils peuvent être distingués par leur densité spectrale d'énergie, définie comme le carré du module de leur $\mathcal{TF}$.

Dans cette section, on ne traitera que les bruits dits **colorés**. Ils sont caractérisés par une densité spectrale non-nulle sur tout la bande passante d'intérêt (par exemple entre 20 Hz et 20 kHz pour un son) et leur couleur est donnée par l'évolution de cette densité en fonction de la fréquence.



Par exemple,

- le bruit est dit **blanc** si la densité spectrale d'énergie est constante en fonction de la fréquence.
- le bruit est dit **rose** si la densité spectrale d'énergie décroît linéairement en fonction de la fréquence.
- le bruit est dit **bleu** si la densité spectrale d'énergie croît linéairement en fonction de la fréquence.

Intéressons-nous maintenant à un exemple de système particulier.

1.4 SLIT

On appelle **système linéaire invariant dans le temps** (SLIT) un système tel que

- le signal de sortie est relié au signal d'entrée par une équation différentielle linéaire
- les coefficients de la-dite équation différentielle ne varient pas dans le temps

On écrit donc cette fameuse équation différentielle sous la forme

$$\sum_{n=0}^{p} \alpha_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = \sum_{m=0}^{q} \beta_m \frac{\mathrm{d}^m s}{\mathrm{d}t^m} \tag{23.4}$$

On peut prendre la $\mathcal{TF}$ de cette équation différentielle parce que la $\mathcal{TF}$ a le bon goût de transformer les dérivées temporelles en produits par $(-i\omega)$:

$$\left[\sum_{n=0}^{p} \alpha_n (-i\omega^n)\right] \widetilde{s}(\omega) = \left[\sum_{m=0}^{q} \beta_m (-i\omega^m)\right] \widetilde{e}(\omega) \tag{23.5}$$

$$\boxed{\widetilde{s}(\omega) = H(\omega)\widetilde{e}(\omega) \qquad \text{avec } H(\omega) = \frac{\left[\sum_{m=0}^{q} \beta_m (-i\omega^m)\right]}{\left[\sum_{n=0}^{p} \alpha_n (-i\omega^n)\right]}} \tag{23.6}$$

Dans le domaine spectral, l'étude d'un SLIT est donc ramenée à l'étude d'une fonction de transfert, sans passer par la résolution d'un équation différentielle.

On a tout défini, on peut donc s'attaquer à la partie pratique.

2 Traitement

Une fois qu'on a un signal, on peut avoir envie de le modifier, afin par exemple d'en extraire une fréquence en particulier.

✍ MP23, MP24 et MP25, et également ✍ LP00 pour le filtrage.

2.1 Filtrage analogique

Filtrage simulé

✍ `LP23_filtre_futur.py`

Montrer quelques effets du filtrage, notamment la sélection de fréquences et l'élimination de fréquence.

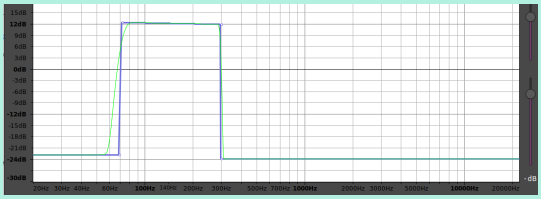
2.2 Hétérodynage

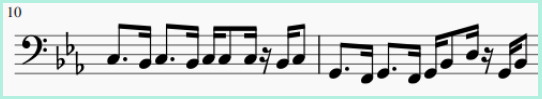
Montrer le principe de la détection synchrone.

2.3 Mise en pratique

✍

Prendre les deux fichiers audio, l'un d'eux a subit un filtrage passe bande entre 70 et 300 Hz, c'est à dire dans les gammes de la basse, ce qui permet d'isoler avec précision cet instrument et de plus facilement déterminer ce qu'il joue, si par exemple on voulait retranscrire cela sur une partition.





3 Numérisation

✍ Maneville tome 1 p.98

3.1 Motivation

Aujourd'hui, les signaux sont essentiellements étudiés grâce à l'outil informatique. L'information y est codée sous forme combinaison de bits, c'est-à-dire des cases qui sont en nombre limité (souci de mémoire) et qui ne peuvent prendre qu'un certain nombre de valeur (de 0 à 256 $= 2^8$ pour un octet). Ainsi, il est impossible de retrouver toute la richesse d'un signal continu (tout les signaux en physique, le son, une intensité lumineuse...) dès lors qu'on veut le numériser. Cependant on peut développer des outils afin de maximiser la fidélité du signal, afin de l'emporter partout sous format MP3 par exemple.

Il nous faut donc des protocoles précis de conversion Analogique-Numérique ! Au laboratoire cette étape est effectuée par un CAN, convertisseur analogique numérique.

3.2 Échantillonage

La première considération à avoir est celle de la quantité d'information stockée. Celle-ci ne peut en effet qu'être finie, par conséquent il est impossible d'enregistrer exactement toutes les variations d'un signal avec exactitude, qui serait infinie non dénombrable. Nous allons devoir effectuer un échantillonage.

3.2.1 Approche empirique

Définition : L'échantillonage c'est la prise (généralement) régulière de mesures dans un signal physique. Cela revient à représenter un signal $x(t)$ par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}]}$, avec $x_n = x(t_0 + n\tau)$. On nomme **fréquence d'échantillonage** $T_e = \dfrac{1}{\tau}$ la fréquence de prise de point.

Intuitivement on se dit que plus la fréquence est grande, mieux c'est pour la fidélité du signal, cependant il faut prendre en compte la limite de stockage, et si on prend un point de poids 1 octet toute les nanosecondes, en une seconde on en a un gigaoctet. Il existe un critère pour choisir une fréquence d'échantillonage, et nous allons l'approcher de manière empirique.

Critère de Shannon et simulation numérique

✍ `LP23_shannon.py` ⏲

Montrer que le signal de sortie a des soucis et passe pour un autre si $f > f_e/2$. En déduire que c'est là le critère pour avoir non ambiguité de la représentation échantillonée.

Petite expérience marrante

✍ ⏲

`critere_shannon_1.png`

3.2.2 Approche mathématique

Critère de Shannon :
La fréquence d'échantillonage doit être le double de la fréquence maximale de l'échantillon.

Exemple : l'oreille humaine entend jusqu'à 20 000 Hz, il faut donc au moins une fréquence d'échantillonage de 40 kHz. Pour un CD c'est d'ailleurs standard d'être à 44 100 Hz.

On se place à $t_0 = 0$ sans perte de généralité et on note le signal échantillonée en fonction du temps comme

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \begin{cases} x_n \delta(t - n\tau) \text{ si } t = n\tau \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ x_e(t) &= x(t) \sum_n \delta(t - n\tau) \end{aligned} \tag{23.7}$$

En appliquant la formule de Poisson, qui dit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + na) = \frac{1}{a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}[f] \left(\frac{2\pi n}{a}\right) \exp\left(\frac{2i\pi nt}{a}\right)$$

et en sachant que

$$\begin{aligned} \delta_{t_0}(t) &= \delta(t - t_0) \\ \mathcal{TF}[\delta_{t_0}](\nu) &= e^{-2i\pi\nu t_0} \end{aligned} \tag{23.8}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{TF}[x_e](\nu) &= \mathcal{TF}[x](\nu) * \mathcal{TF}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - n\tau)\right](\nu) \\ &= \mathcal{TF}[x](\nu) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}\left[\delta(t - n\tau)\right](\nu) \\ &= \mathcal{TF}[x](\nu)\nu_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - n\nu_e) \qquad \text{d'après l'équation 23.8} \\ &= \nu_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{TF}[x](\nu - n\nu_e) \end{aligned} \tag{23.9}$$

Ainsi on a ce que l'on appelle un repliement du spectre :

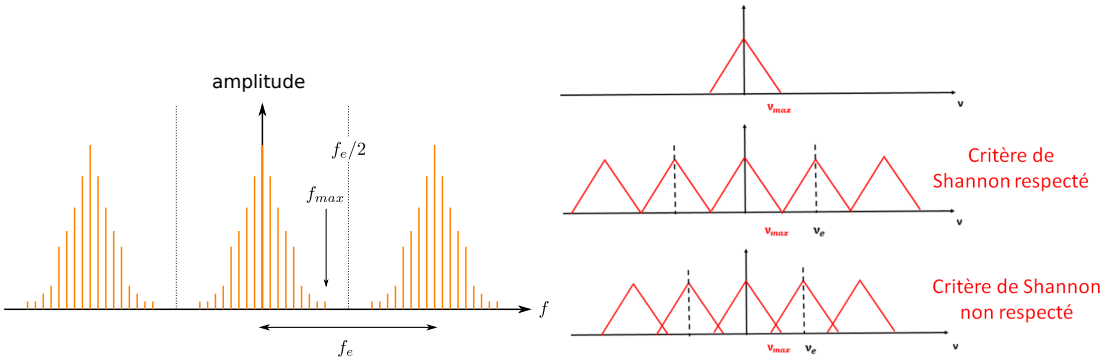


FIGURE 23.1 – Du respect du critère de Shannon.

Critère de Shannon :
La fréquence d'échantillonage doit au moins être le double de la fréquence maximale de l'échantillon.

Remarques :

- Ce critère est un critère exact, on peut totalement reconstruire le signal si il est échantillonné à $2f_{\text{max}}$.
- Il faut faire un filtrage porte pour reconstruire le bazard
- On ne prend pas en compte ici la quantification et le bruit, qui peuvent ruiner tout ce que l'on a fait

3.3 Temps d'acquisition

On peut retrouver sur regressi par exemple que les fréquences obtenues dans le spectre sont dicré- tisées... Mais alors ça veut dire que le signal de départ est périodique ! ? En fait, l'algorithme de calcul de FFT (Fast Fourier Transform) duplique automatiquement le signal enregistré et considère qu'il est périodique, de période T_{ac} le temps d'acquisition... Ainsi, il apparait dans le spectre une discrétisation de période $1/T_{\text{ac}}$.

3.4 Quantification

On a un deuxième problème pour la numérisation des signaux : le temps varie continuement, mais la variable aussi, et stocker une valeur avec une infinie précision, c'est faire face à un porblème de taille !

La solution pour laquelle on opte est la quantification. On tronque la valeur mesurée à un nombre de décimale donné. Par exemple on peut imaginer un tronquage à 4 chiffres significatifs : $\pi = 3,14159265358979323846264338 3 \cong 3.141$

En pratique on ne code pas en décimal dans les ordinateurs, mais en binaire. Cela signifie que l'on subdivise un intervale $[a, b]$ en 2^N intervales où N est le nombre de bits à disposition.

Quantification d'une sinusoïde

✍ `LP23_quantification.py` ⏲

Montrer l'influence du nombre de bits et de la largeur de l'intervalle de quantification sur le signal de sortie.

Dans le cas où on fait mal les choses, cela peut compromettre l'intégrité du son !

3.5 Vers un filtrage numérique

Pour la culture : https://fr.wikipedia.org/wiki/Filtre_numérique

4 Télécommunication

✍ MP23 - Mise en forme, transport et détection de l'information

4.1 Motivation

À quoi bon stocker de l'information si on ne peut pas la transmettre, l'échanger ? On est bien content d'avoir de la musique dans la voiture via la radio par exemple. On peut naïvement penser qu'émettre directement le signal via une antenne suffit mais ça pose un problème : les signaux utilisés ont très souvent des fréquences telles que les antennes doivent mesurer 100 km de long pour être capable de les émettre et les recevoir...

On va donc ruser on passant par la modulation/démodulation.

4.2 Modulation et démodulation d'amplitude/fréquence

✍ MP23

LP 24

Ondes progressives, ondes stationnaires

Commentaires du jury

- 2015 : Les candidats doivent être attentifs à bien équilibrer leur exposé entre ces deux familles d'ondes qui, d'ailleurs, ne s'excluent pas entre elles.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples de phénomènes de propagation unidimensionnels. Ondes progressives, ondes stationnaires. Aspects énergétiques.
- 2009 : Il est important de savoir justifier la forme générale d'une onde progressive et d'une onde stationnaire. Si la notion d'impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d'onde elle s'applique.
- 2008 : Les notions d'impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n'envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.
- 2006 : Pour éviter de répéter de lourds calculs, il est recommandé de développer les analogies entre les différents exemples. Il faut également consacrer du temps à des notions plus concrètes ainsi qu'à l'aspect énergétique, souvent sacrifié. 2005 : Une onde stationnaire n'est pas forcément résonante. 1999 : Les notions d'onde progressive, d'onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l'onde stationnaire de l'onde stationnaire résonante dans un système fermé.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ N'importe quel livre de prépa ⟶ la base de la leçon
- ✍ *Ondes*, **Brébec, Hprépa** ⟶ Le câble coaxial
- ✍ *Berkeley, cours de physique, 3. Ondes*, **Crawford** ⟶ Pour une vision plus générale.
- ✍ *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome 1. Mécanique*, **Quaranta** ⟶ Référence pour la corde de Melde (Garing sinon)

Prérequis

- ➢ Électronique
- ➢ Mécanique du point
- ➢ Fourier

Expériences

☕

1 Équation de propagation par l'exemple . . . 329
1.1 Définition d'une onde . . . 329
1.2 Exemple de la corde vibrante . . . 329
1.3 Équation des télégraphistes . . . 331
1.4 Câble coaxial modèle . . . 331
1.5 Points communs et analogies . . . 332
2 Onde progressive . . . 333
2.1 Définitions . . . 333
2.2 Résolution de l'équation d'onde . . . 333
2.3 Les ondes planes progressives harmoniques . . . 335
2.4 Retour au câble coaxial : notion d'impédance propagative . . . 335
2.5 Aspect énergétique . . . 335
2.6 Ondes sphérique . . . 336
3 Onde stationnaire . . . 337
3.1 Des ondes progressives aux ondes stationnaires . . . 338
3.2 Lien mathématique entre les deux types d'ondes . . . 338
3.3 Propriétés de l'onde stationnaire . . . 339
3.4 Instruments de musique . . . 339
3.5 Aspect énergétique . . . 340
3.6 Application à la musique . . . 340

Introduction

Cette leçon se place au niveau PC, mais on peut aussi la placer au niveau L1 si on s'y prend bien.

On a déjà étudié en terminale/première les ondes de manière qualitative. On a notamment vu la propagation à une vitesse connue de proche en proche comme transfert d'énergie sans transport de matière. Aujourd'hui nous allons cadrer proprement les mathématiques des ondes et montrer que cette notion couvre de nombreux domaines de la physique.

1 Équation de propagation par l'exemple

1.1 Définition d'une onde

Mathématiquement, une onde est un champs dont l'évolution est décrite par une équation aux dérivées partielle. Usuellement, c'est la propagation d'une perturbation dans l'espace au fil du temps.

La deuxième définition est (à peu près) celle de Wikipédia, et en fait elle correspond à l'intuition qu'on en a, mais le but de cette leçon est (entre autre) justement de montrer qu'une telle définition est trop restrictive car elle ne prend pas en compte un type d'onde, les ondes stationnaires.

1.2 Exemple de la corde vibrante

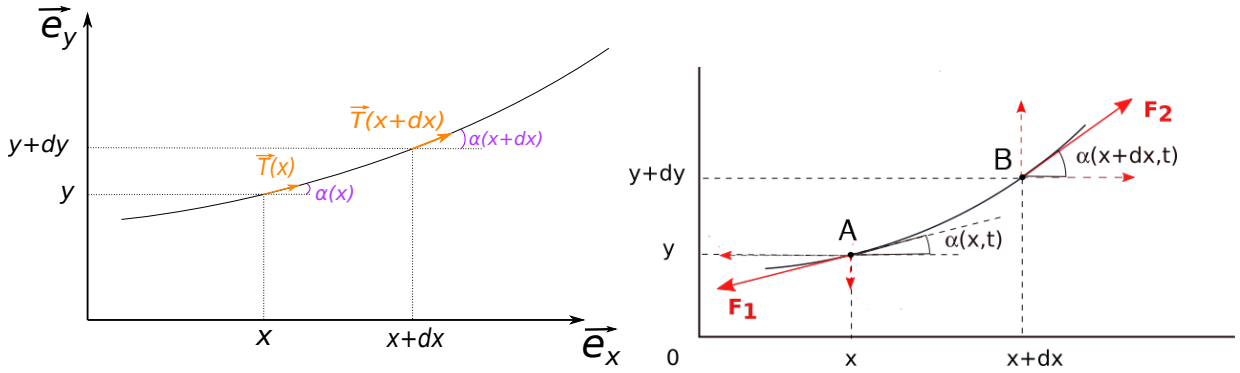


FIGURE 24.1 – Tronçon d'une corde.

Étudions le système {tronçon de longueur dx} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le modèle que l'on prend ici est très simplifié :

- 1D, sans raideur, inextensible, inélastique
- suffisamment tendue pour négliger son poids
- homogène, avec une masse linéique $\mu = \dfrac{m}{L}$
- dans la limite des petites perturbations autour du repos ($y(x,t) \ll L$)

OdG : L de l'ordre du m, $\mu \sim 1$ g/m, et la tension vaut quelques Newton. (on vérifie bien que $T \gg mg$.)

PFD :

$$\vec{T}_A + \vec{T}_B = \mu \mathrm{d}x \vec{a}$$

où $\overrightarrow{a}$ est l'accélération.

Projection sur l'axe x :

$$-T_A \cos\alpha(x,t) + T_B \cos\alpha(x+\mathrm{d}x,t) = 0$$

car il n'y a pas de déplacement horizontal donc pas accélération.

Projection sur l'axe y (avec $a_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ la composante verticale de l'accélération).

$$-T_A \sin\alpha(x,t) + T_B \sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t) = \mu \mathrm{d}x a_y$$

Comme on s'intéresse à de petites variations d'angles, on peut linéariser à l'ordre 1. Les deux équations précédentes deviennent alors

$$\begin{cases} -T_A + T_B = 0 \\ -T_A\alpha(x,t) + T_B\alpha(x+\mathrm{d}x,t) = \mu \mathrm{d}x a_y \end{cases} \implies \begin{cases} T_A = T_B = T \\ -T\alpha(x,t) + T\alpha(x+\mathrm{d}x,t) = \mu \mathrm{d}x \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \end{cases}$$

Or comme les angles sont faibles, alors on a alors à l'ordre 1 : $\alpha = \tan\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$. D'où :

$$-T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) + T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t) = \mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t).$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\mathrm{d}x,t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y(x+\mathrm{d}x,t) - y(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}x\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}x$$

d'où

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \iff \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

On reconnaît une équation de d'Alembert (1746) de la forme $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0$, où $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ est homogène à une vitesse et correspond à la célérité de l'onde mécanique sur la corde. Cette équation émerge du couplage entre deux grandeurs, ici la tension et la position.

Cette équation est linéaire, elle respecte donc le principe de superpostition. Elle est de plus réversible, c'est à dire qu'une inversion de t en $-t$ garde l'équation inchangée.

OdG : Pour une corde de guitare, on a $\mu \sim$25 g/m, $T \sim 100$ N, $c \sim$200 m/s.

Remarque sur les approximations

On a écrit que T ne dépend pas de x en simplifiant $\cos(\alpha) = 1$. Cependant, on devrait si on ne fait pas cette approximation avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right) &= 0 \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(T\alpha\right) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(T\alpha\right) &= 0 \end{cases} \tag{24.1}$$

Mais cette équation, on la retrouve ailleurs !

1.3 Équation des télégraphistes

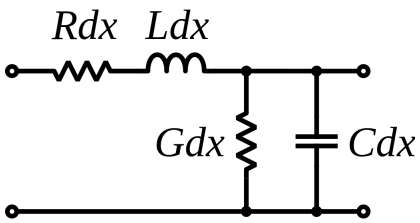


FIGURE 24.2 – Le câble coaxial modélisé avec pertes.

Une portion infinitésimale de ligne électrique peut être représentée par un quadripole où :

- la résistance linéique R du conducteur est représentée par une résistance série (exprimée e ohms par unité de longueur)
- l'inductance linéique L est représentée par une bobine (Hpar unité de longueur)
- la capacité linéique C entre les deux conducteurs est représentée par un condensateur (F par unité de longueur)
- la conductance linéique G du milieu diélectrique séparant les deux conducteurs (siemens par unité de longueur). Le schéma électrique du modèle représente cette conductance par une résistance de valeur de $1/G$ ohms.

La résistance et la conductance croîssent avec la fréquence et l'inductance varie dans de moindres proportions, à cause de l'effet de peau et, dans les lignes bifilaires, de l'effet de proximité.

Soient $U(x,t)$ la tension et $I(x,t)$ le courant en un point éloigné d'une distance x du début de la ligne à un instant t, on peut écrire deux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,t) = -L\frac{\partial I}{\partial t}(x,t) - RI(x,t)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x,t) = -C\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - GU(x,t)$$

De cette formulation, on peut tirer deux équations ne faisant chacune intervenir qu'une variable :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = LC\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) + (RC+GL)\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) + GRU(x,t) \\ \dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}(x,t) = LC\dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2}(x,t) + (RC+GL)\dfrac{\partial I}{\partial t}(x,t) + GRI(x,t) \end{cases} \tag{24.2}$$

Ces équations sont de la forme dite de l'équation des télégraphistes. Elles prédisent la propagation des grandeurs avec pertes, mais nous allons voir qu'on peut en tirer une équation plus simple.

1.4 Câble coaxial modèle

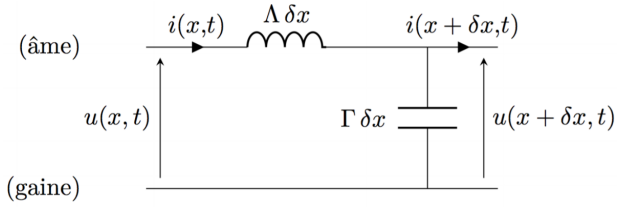


FIGURE 24.3 – Le cable coaxial.

Il s'agit du câble standard que l'on utilise pour transmettre de l'information en salle de tp, mais aussi entre une parabole et une télé ! Ici on négligera les pertes et résistances. On obtient alors en reprenant les même calculs et en changeant de notations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{24.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} \tag{24.4}$$

☕

Mesure de la vitesse de propagation

✍ ⏲

Mettre un T sur le GBF. Relier une extrémité au câble, l'autre à un oscilloscope. Envoyer au GBF un burst sinusoïdale de fréquence 5 MHz, d'amplitude 5 V, avec 1 cycle et 1ms entre chaque burst. Régler l'impédance de l'oscilloscope sur 50 Ω au lieu de 1 MΩ pour éviter les réflexions. On observe à l'oscilloscope les réflexions des bursts sur l'autre extrémité du câble. Mesurer l'intervalle de temps Δt entre un burst et sa réflexion. On en déduit la vitesse de propagation $v = \dfrac{2l}{\Delta t}$ avec $l = 100$ m. On doit trouver $2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. On utilise un burst sinusoïdal pour limiter la dispersion en fréquence dans le câble (visible avec un créneau). Le burst réfléchi est déformé à cause de cette dispersion (cf équation des télégraphistes)

1.5 Points communs et analogies

	Corde vibrante	Câble coaxial	Onde acoustique	Onde électromag.
Grandeurs couplées	T_y et v_y	i et u	$\overrightarrow{v_1}$ et p_1	$\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{E}$
Equations couplées	$\dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \dfrac{1}{T_0}\dfrac{\partial T_y}{\partial t}$ $\dfrac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial v_y}{\partial t}$	$\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$	$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v_1}) = \chi_S \dfrac{\partial p_1}{\partial t}$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(p_1) = \rho_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{H}) = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{E}) = -\mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t}$
Vitesse	$c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$	$c = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$	$c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$	$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$
Impédance	$Z = \mu c = \sqrt{\mu T_0}$	$Z = \lambda c = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}}$	$Z = \rho_0 c = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\chi_s}}$	$Z = \mu_0 c = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$
Densité d'énergie	$\dfrac{1}{2}\mu v_y^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{T_0}T_y^2$	$\dfrac{1}{2}\lambda i^2 + \dfrac{1}{2}\gamma u^2$	$\dfrac{1}{2}\rho_0 \overrightarrow{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}\chi_s p_1^2$	$\dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2 + \dfrac{1}{2}\mu_0 \overrightarrow{H}^2$
Puissance	$P = -v_y T_y$	$P = ui$	$\overrightarrow{P} = -p_1 \overrightarrow{v_1}$	$\overrightarrow{\pi} = \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{H}$

Une onde, c'est la propagation de deux grandeurs **couplées**. D'Alembert est vérifié pour les deux quantités couplées, à la même vitesse.

Valeurs de Γ et Λ

$\Lambda = \mu_0 \ln \frac{b}{a}$ avec a et b les rayons du cable. $\Gamma = \frac{\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$. Le principal défaut reste la résistance de l'inductance.

La question que l'on peut se poser cependant c'est celle-ci : un onde ça se propage, mais sur une corde de guitare, ça bouge pas. Pourquoi ?

2 Onde progressive

2.1 Définitions

On définit une **onde** comme étant un champ (scalaire ou vectoriel) $F(M,t)$ défini dans un domaine de l'espace et dépendant du temps, représentant une grandeur physique et obéissant à une équation aux dérivées partielles couplant l'espace et le temps : la fameuse **équation de d'Alembert** (ou équation d'onde)

$$\boxed{\Delta F(M,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(M,t) = 0} \tag{24.5}$$

On peut alors définir une onde **progressive** comme étant une onde décrite par un champ du type

$$F(M,t) = A(M) f(t - \tau(M)) \tag{24.6}$$

où $A(M)$ est l'amplitude, $\tau(M)$ est un terme de retard dépendant de l'espace et f est une fonction à la fois du temps et de l'espace (via $\tau(M)$) et est donc responsable de la propagation.

Un cas particulier d'onde progressive est décrit par une fonction $F(M,t)$ qui prend la même valeur en tout point d'un plan orthogonal à la **direction de propagation** définie par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. Ce plan est appelé **plan d'onde** ou **surface d'onde**, et les ondes vérifiant cette condition sont appelées **ondes planes**. Pour ces ondes, on peut donc choisir un système d'axes cartésien judicieux pour que F ne dépendent que d'une coordonnée spatiale.

De manière générale, on définit une surface d'onde comme étant la surface de l'ensemble de points dans le même état vibratoire.

2.2 Résolution de l'équation d'onde

Reprenons l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. On a donc

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{24.7}$$

On cherche donc une solution $\psi(x,t)$ qui décrit forcément une onde plane pour laquelle les plans d'ondes sont les plans à x constant. On effectue les changements de variable $u = x - ct$ et $v = x + ct$ pour obtenir après une dérivation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial u} + c\frac{\partial \psi}{\partial v} \tag{24.8}$$

On dérive une seconde fois pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - 2c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \tag{24.9}$$

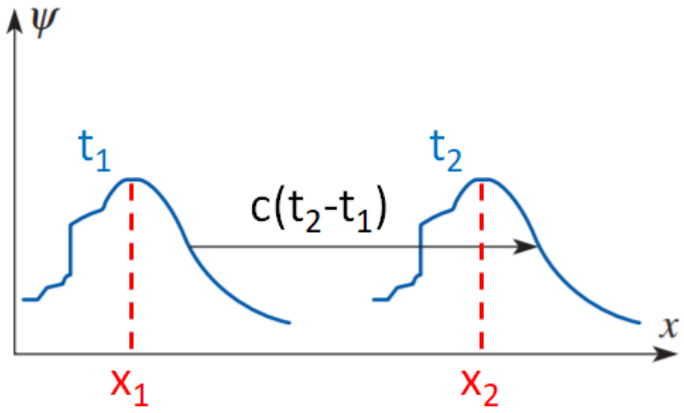
On injecte ces expressions dans l'Alembert pour obtenir

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0 \tag{24.10}$$

On intègre selon u puis v en prenant des constantes d'intégration nulles (car elles ne représentent pas une onde) puis on réexprime ψ selon x et t pour finalement obtenir

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{24.11}$$

Tâchons de comprendre pourquoi on caractérise ces solutions d'ondes "progressives". Pour cela, regardons le terme $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$.



Si on suppose que l'onde de se déforme pas au cours du temps, on a

$$f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right) = f\left(t_2 - \frac{x_2}{c}\right) \Rightarrow t_1 - \frac{x_1}{c} = t_2 - \frac{x_2}{c} \Rightarrow x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)$$

Tout se passe comme si l'onde avait parcouru la distance $x_2 - x_1$ pendant une durée $t_2 - t_1$ à la vitesse c. Le terme $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ correspond donc à une onde se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c.
Pour le terme $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$, on trouve $x_2 - x_1 = -c(t_2 - t_1)$. Le terme $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ correspond donc à une onde se propageant dans le sens des x décroissants à la vitesse c.

En conclusion, la solution générale en terme d'ondes planes de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle peut s'écrire commme la superposition de deux OPP se propageant à la même vitesse c, l'une dans le même sens que l'axe Ox et l'autre en sens opposé.

Dans le cas général à 3 dimensions, une **onde plan progressive** qui est décrite par une fonction de la forme

$$\boxed{\psi\left(\vec{x}, t\right) = f(\vec{u} \cdot \vec{x} - ct) + g(\vec{u} \cdot \vec{x} + ct)} \tag{24.12}$$

Une telle onde se propage dans la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ à la vitesse c et ses surfaces d'onde sont les plans orthogonaux à $\vec{u}$. La fonction f décrit une OPP se propageant dans le même sens que $\vec{u}$ tandis que g décrit les ondes se propageant dans le sens opposé à $\vec{u}$.

Remarque

Toute solution de l'équation de d'Alembert est une superposition d'OPP dont les directions $\vec{u}$ couvrent tout l'espace. Cette superposition est justifiée par la linéarité de l'équation de propagation. Il faut cependant faire attention au fait qu' **une superposition d'OPP ne garantit pas forcément une onde résultante ni plane, ni progressive**, comme le montrent les ondes stationnaires, ondes guidées).

2.3 Les ondes planes progressives harmoniques

On définit une **onde plane progressive harmonique** une OPP se propageant dans le même sens qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est décrite sous la forme

$$\psi(\overrightarrow{x},t) = a_0 \cos\left(\omega t - \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}{c}\right) = a_0\cos(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}) \tag{24.13}$$

avec $\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u}$ le **vecteur d'onde**. Notons que les OPPH **ne sont pas physiques** car elles sont d'extension spatiale et temporelle infinies. Cependant, elles ont une forte utilité pour étudier les OPP.
En effet, les OPP sont périodiques sont de par leur nature périodiques, de période notée T. La linéarité de l'équation d'onde et le théorème de la décomposition de Fourier concernant les fonctions T-périodiques nous permettent alors d'affirmer que toute OPP peut être décomposée en une série de fonctions sinusoïdales, *i.e.* **toute OPP peut être décomposée en une série d'OPPH**. Les OPPH constituent donc une base d'étude pour les ondes planes, déjà elles-mêmes une base d'étude pour les solutions générales de d'Alembert.

2.4 Retour au câble coaxial : notion d'impédance propagative

L'utilisation d'OPP dans le cas du câble coaxial va nous permettre de définir l'**impédance** de ce câble. On avait établi pour cet exemple que les grandeurs u et i étaient couplées par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{24.14}$$

Supposons maintenant qu'i soit un OPP se propageant selon les x croissants. Alors $i(x,t) = f(x-vt)$ et la première équation devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Lambda v f'(x-ct) \tag{24.15}$$

On intègre pour obtenir $u(x,t) = \Lambda v f(x-ct) + F(t)$. Cependant, $F(t)$ doit satisfaire à l'équation de d'Alembert donc $F(t)$ s'écrit sous la forme $F(t) = at+b$. Pour obtenir une solution non divergente, on prend $a=0$ et puisque la solution est une onde, on prend également $b=0$. On se retrouve finalement avec

$$u(x,t) = \Lambda v f(x-ct) = \Lambda v i(x,t) \tag{24.16}$$

On définit alors l'impédance caractéristique par $\boxed{Z = \dfrac{u}{i} = \Lambda v = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}}$. **C'est une impédance de nature propagative et non pas résistive**. Avec les valeurs de Λ et Γ trouvées précédemment, on trouve $Z = 50\ \Omega$. Cette valeur est tout sauf un hasard puisqu'elle correspond à l'impédance d'entrée des GBF. Les dimensions du câble ont en effet été choisies pour réaliser cette adaptation d'impédance.

2.5 Aspect énergétique

Restons sur l'exemple du câble coaxial. Son énergie linéique est la somme de la contribution de la bobine et celle du condensateur, on a donc

$$e = \frac{1}{2}\Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2}\Gamma u^2(x,t) \tag{24.17}$$

La puissance circulant dans le câble est quant à elle donnée par

$$\mathcal{P} = u(x,t)i(x,t) \tag{24.18}$$

La grandeur $\mathcal{P}\overrightarrow{e_x}$ représente donc le flux d'énergie à travers le câble en un point x par unité de temps puisque nous sommes dans une description linéique.

Prenons à nouveau une OPP : $i(x,t) = f(x-vt)$ et $u(x,t) = Zi(x,t)$. On obtient alors

$$e(x,t) = \Lambda i^2(x,t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}(x,t) = \Lambda i^2(x,t)$$

On peut alors écrire

$$\langle \mathcal{P} \rangle = v \langle e \rangle \tag{24.19}$$

L'énergie se propage donc à la vitesse v (selon la direction de propagation, évidemment).

Finalement, dressons un bilan d'énergie linéique pendant un intervalle $\mathrm{d}t$ sur une longueur $\mathrm{d}x$. La variation d'énergie linéique est égale au flux linéique entrant en x moins le flux sortant en $x + \mathrm{d}x$. On peut alors retrouver une équation bien connue, l'équation locale de conservation de l'énergie

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0} \tag{24.20}$$

Cette équation peut être trouvée pour n'importe quel OPP avec un bilan énergétique unidimensionnel sur un tronçon du milieu de propagation. On remarque qu'elle ne contient aucune source de dissipation (pour ça il faudrait rajouter par exemple une résistance dans le circuit équivalent au câble). Le terme $\dfrac{\partial e}{\partial t}$ représente la variation locale d'énergie tandis que $\dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$ représente la variation d'énergie due à son transport.

Cas de la corde de Melde

$$e = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{T}(Ty)^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P} = \frac{\partial y}{\partial t} Ty$$

Dans le cas de l'OPPH,

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \int_0^{+\infty} \langle e \rangle \, \mathrm{d}x \quad \text{avec } \langle e \rangle = \frac{1}{2}\mu \left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle = \frac{\mu}{4} \tag{24.21}$$

On voit donc que $\langle \mathcal{E} \rangle$ diverge !! Les OPPH contiendrait donc une infinité d'énergie, ce qui bien sûr n'est pas physique.

Toutes les ondes progressives ne sont pas planes...

2.6 Ondes sphérique

On cherche maintenant l'expression d'une onde progressive non-plane dont l'énergie est conservée plan par plan. Pour cela, cherchons une solution à d'Alembert :

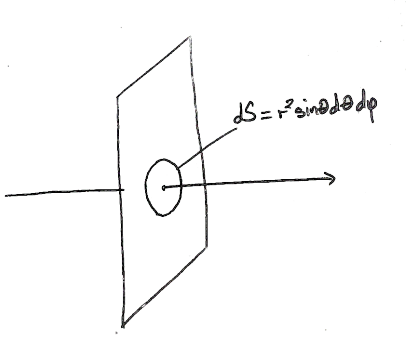
$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{24.22}$$

telle que

$$\psi(r,t) = A(r)\left[f(r-ct) + g(r+ct)\right]$$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'au terme en $f(r-ct)$. L'énergie de l'onde vaut alors $|\psi^2| = |A^2(r)||f^2(r-ct)|$ et sa valeur moyenne vaut $\left\langle |\psi^2| \right\rangle = \dfrac{1}{2}\left\langle |A^2(r)| \right\rangle$. On intègre cette valeur moyenne sur un plan et on veut obtenir une constante :

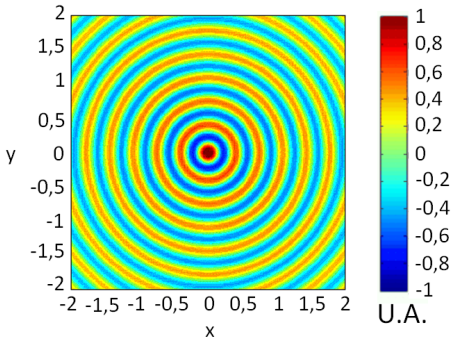
$$\begin{aligned} \iint \left\langle |\psi^2| \right\rangle \mathrm{d}S = \text{constante} &\iff \iint \frac{1}{2}\left\langle |A^2(r)| \right\rangle r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \text{constante} \\ &\iff \left\langle |A^2(r)| \right\rangle r^2 = \text{constante} \end{aligned} \tag{24.23}$$



On choisit $A = \dfrac{1}{r}$ pour écrire

$$\boxed{\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[f(r-ct) + g(r+ct)\right]}$$

Une onde décrite par une telle fonction est appelée une **onde sphérique**. Ses surfaces d'ondes sont des sphères et son énergie est conservée plan par plan [1]. Cependant, le facteur $\dfrac{1}{r}$ lui fait perdre sa périodicité spatiale.



Symétrie sphérique

En symétrie sphérique, cette onde est la solution naturelle de l'équation d'Alembert où

$$\Delta\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Les ondes progressives ne peuvent pas tout expliquer, comme par exemple l'expérience de la corde de Melde. Il faut donc introduire un nouveau type d'ondes : les ondes stationnaires.

3 Onde stationnaire

On l'a vu, sur une guitare, l'onde est là, on l'entend, elle transmet de l'énergie à l'air, mais elle bouge pas vraiment. Pareil sur une corde de Melde d'ailleurs, ça ne se propage pas ce truc !

1. On peut montrer le gif correspondant à une onde sphérique.

Corde de Melde
Amazing, une corde de Melde. Montrer les harmoniques, et si possible le montrer aussi avec une corde de guitare.

3.1 Des ondes progressives aux ondes stationnaires

Définition : Une onde est dite **stationnaire** si son expression fait intervenir de manière découplée une fonction du temps $t \mapsto f(t)$ et une de l'espace $\overrightarrow{r} \mapsto g(\overrightarrow{r})$. On note alors la grandeur transportée par l'onde

$$s(\overrightarrow{r}, t) = f(t) \times g(\overrightarrow{r}) \tag{24.24}$$

On voit clairement que pour la corde de Melde c'est ce que l'on a : un profil $g(x)$ qui ressemble ici à une sinusoïde, qui est modulé par une variation temporelle oscillante elle aussi.

Cherchons alors une solution de la forme $g(x)f(t)$ à l'équation générale de d'Alembert 24.7 :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(t)g(x)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(t)g(x)) = 0 \\ \text{d'où} \quad &\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} - c^2\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \tag{24.25}$$

On a donc deux fonctions de deux variables différentes qui sont égales, les deux sont donc égales à une constante. Si cette constante est nulle alors l'onde n'existe pas... Et si cette constante est positive les solutions en exponentielles croissantes ne peuvent pas vérifier les CL. La constante est donc négative et homogène à des s^{-2}, on la notera donc $-\omega^2$. Il vient donc un système de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -\omega^2 & \Rightarrow g(t) = \alpha\cos(\omega t + \phi) \\ \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} & \Rightarrow f(x) = \beta\cos(kx + \varphi) \end{cases} \quad \text{avec } k = \pm\frac{\omega}{c} = \pm\frac{2\pi}{\lambda} \tag{24.26}$$

Et comme on s'y attendais, pour le bilan, on obtient avec les conditions aux limites la magnifique forme de l'onde de la corde de Melde :

$$y(x,t) = y_0 \sin(kx)\cos(\omega t + \varphi) \tag{24.27}$$

3.2 Lien mathématique entre les deux types d'ondes

On peut utiliser un peu de trigonométrie astucieuse pour se rendre compte que

$$y(x,t) = \frac{y_0}{2}\left[\cos(kx + \omega t + \phi + \varphi) + \cos(kx - \omega t + \varphi - \phi)\right] \tag{24.28}$$

Ainsi, une onde stationnaire peut toujours s'écrire comme la somme de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude, de même pulsation mais de sens opposés. Par un raisonnement analogue, toute onde progressive harmonique peut s'écrire comme la somme de deux ondes stationnaires.

À la vue de l'équivalence entre les deux descriptions, il est donc naturel de se demander quel type de description choisir. Pour cela, il faut se baser sur les CL. Si les CL imposent un noeud de vibration quelque part, on choisira la description en ondes stationnaires dont la forme en produit facilite la prise en compte du noeud de vibration.

3.3 Propriétés de l'onde stationnaire

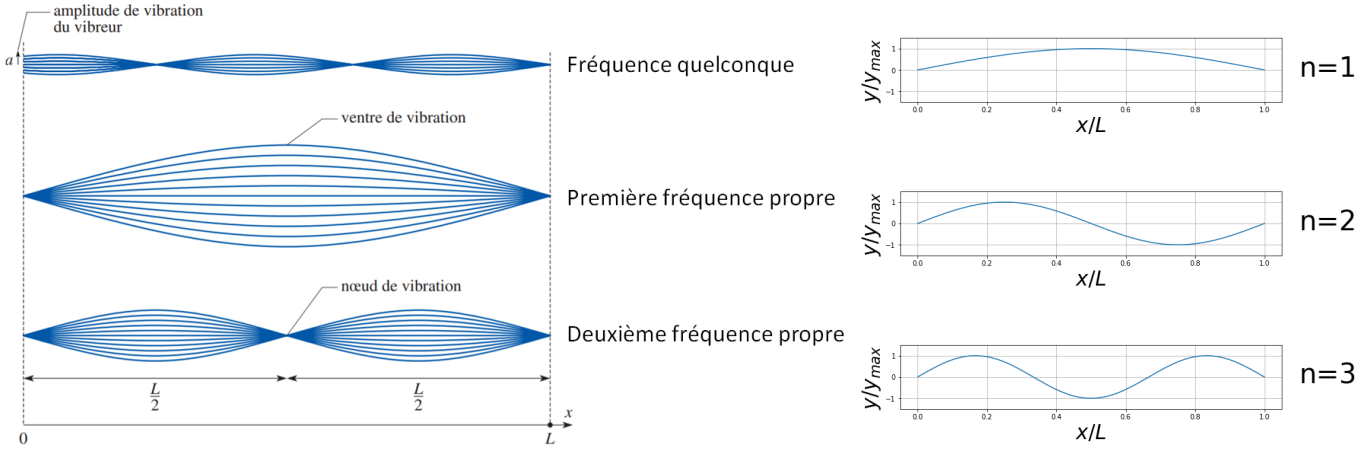


FIGURE 24.4 – Les noeuds et ventres de différents modes.

Je viens de parler de noeud de vibration...

Définition : On nomme noeud de vibration un 0 de la partie spatiale d'une onde stationnaire. En ce lieu l'onde est toujours nulle. On nomme de la même façon un ventre de vibration un maximum ou minimum de la partie spatiale.

On remarque que l'existence de noeuds de vibration ompose un comportement particulier et un lien avec les conditions aux limites. En effet dans le cas de la corde de Melde, le 0 et le L sont des noeuds de vibration forcés. On a dont forcément

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}* \tag{24.29}$$

Cela impose directement $\lambda_n = \frac{2}{n}L$ et $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$.

Définition : On nomme **mode de vibration** indicé par n chacune de ces possibilités.

Un mode de vibration n'est alors possible que si la longueur d'onde associée est un sous multiple de la longueur de la corde. Il est important de noter que l'origine de cette structure en modes provient directement des conditions aux limites, ces mêmes conditions qui ont nécessité l'utilisation des ondes stationnaires. On peut généraliser ce résultat : **toute onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert possède une structure en modes**.

Scruter les modes de la corde de Melde

✍ ⏲

Tu sais quoi faire non ?

Sans exciter sinusoïdalement la corde en une extrémité, si on est assez précis, on peut l'attacher des deux côtés et constater que si on pince la corde en L/2, qu'on excite la corde, le mode 2 reste même après avoir relâcher entièrement la corde. Pareil si on pince en L/3 et 2L/3, mais là il faut trois bras, donc ça devient compliquer.

Si il y a une guitare disposition, montrer les harmoniques et expliquer le lien avec le Fabry-Perrot.

3.4 Instruments de musique

✍ MP29

3.5 Aspect énergétique

On peut exprimer l'énergie contenue dans une onde stationnaire.

$$e(x,t) = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{24.30}$$

Pour un mode donné y_n on a directement

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \omega_n^2 y_{0,n}^2 \sin^2(k_n x)\sin^2(\omega_n t + \phi_n) \\ \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = k_n^2 y_{0,n}^2 \cos^2(k_n x)\cos^2(\omega_n t + \phi_n) \end{cases} \tag{24.31}$$

On peut donc écrire l'énergie linéique puis l'énergie totale du mode :

$$E_n = \frac{T_0}{4L}(n\pi)^2 y_{0,n}^2 = \mathrm{cst}_n \tag{24.32}$$

Le fait que l'on ait ici une énergie constante nous montre bien qu'il y a des phénomènes que l'on a pas pris en compte. En effet notre onde finit par s'arrêter ! D'ailleurs on n'entendrait pas les guitares si son énergie était constante, puisqu'il n'y aurait pas de transmission à l'air !

D'ailleurs l'hypothèses des petits angles à résonnance, c'est pas super juste non plus. Et le module d'Young entre en jeu en plus !

3.6 Application à la musique

On peut s'amuser à calculer l'évolution de la forme de la corde et la décroissance des harmoniques en fonction de la condition initiale dans différents instrument à corde. ✍ https://perso.crans.org/chapon/tipe0.9.pdf

LP 25

Ondes acoustiques

Niveau :

Commentaires du jury

- 2017 : La contextualisation et des applications de la vie courante ne doivent pas être oubliées dans cette leçon qui se résume souvent à une suite de calculs. De plus, les fluides ne sont pas les seuls milieux dans lesquels les ondes acoustiques peuvent être étudiées.

- 2014 : Cette leçon peut être l'occasion de traiter les ondes acoustiques dans les fluides ou dans les milieux périodiques, certes, mais elle peut aussi être l'occasion de traiter les deux cas qui donnent lieu à des phénoménologies très différentes.

- 2013 : [À propos du nouveau titre] Le candidat est libre d'étudier les ondes acoustiques dans un fluide ou dans un solide élastique.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Ondes acoustiques dans les fluides.

- 2011, 2012, 2013 : Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le modèle limite de l'onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l'onde sphérique.
  Jusqu'en 2008, le titre était : Ondes sonores dans les fluides.

- 2008 : L'aspect énergétique est trop souvent négligé. L'approximation acoustique est souvent mal dégagée. Pour

- 2009, le terme sonore est remplacé par le terme acoustique pour indiquer qu'on peut s'intéresser à des signaux non audibles par l'homme.

- 2007 : L'aspect énergétique est trop souvent négligé. On remarquera que les ondes sonores ne sont pas toutes planes progressives et harmoniques. Jusqu'en 2003, le titre était : Ondes sonores dans les fluides. Approximation acoustique. Aspect énergétique.

- 1999 : Est-il vraiment indispensable de se placer d'emblée dans le cadre formel de la mécanique des fluides ? Un modèle unidimensionnel et scalaire n'est pas sans intérêt pédagogique. Le développement de l'aspect énergétique doit faire apparaître une densité d'énergie et un vecteur de propagation.

Bibliographie

✍ *Cap prépa PSI*, **Renvoizé** ⟶ Base
✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit** ⟶ En complément
✍ *Mécanique du solide et des fluides*, **Boulomié** ⟶ Cisaillement.
✍ *Cours de Berkeley, 3.Ondes*, **Crawford** ⟶ Généralités
✍ *Cap prépa PC**, **Renvoisié** ⟶ Exo sur l'échographie

Prérequis

- Mécanique des fluides
- Ondes (d'Alembert et ses solutions)
- Module d'Young, coefficient de Poisson
- Impédance
- Électromagnétisme, vecteur de Poynting

Expériences

☕

1 Onde acoustique dans un milieu fluide . . . 343
1.1 Hypothèses de l'approximation acoustique . . . 343
1.2 Mise en équation . . . 343
1.3 Solutions de l'équation d'onde . . . 344
1.4 Vérifions les hypothèses . . . 344
2 Propriétés de l'onde . . . 345
2.1 Propagation . . . 345
2.2 Aspect énergétique . . . 345
2.3 Cas de l'OPPS : impédance . . . 346
2.4 Intensité sonore . . . 346
2.5 Effet Doppler . . . 347
3 Réflexion, transmission . . . 347
3.1 Impédance . . . 347
3.2 Conditions aux limites . . . 348
3.3 OPP en incidence normal sur un dioptre plan . . . 348
3.4 Applications . . . 349
4 Prise en compte de la viscosité . . . 349
4.1 Atténuation . . . 350
4.2 Ondes de cisaillement . . . 351
4.3 Ondes dans les solides . . . 351
5 Instruments de musique . . . 352
5.1 Rappels sur l'onde stationnaire . . . 352
5.2 Instruments à vent . . . 352
5.3 Instruments à percussions . . . 354
5.4 Instruments à cordes . . . 354

Introduction

On a vu les ondes en général, et on a parlé d'ondes acoustiques, mais ces ondes sont nettement plus riches que ce que l'on en a dit jusqu'à maintenant.

Phénoménologie

Il est aisé de se convaincre qu'un onde acoustique est créée par une vibration mécanique. On met une main sur la gorge et wa, ça vibre, cependant il faut aussi un milieu pour transmettre l'onde.

Cloche à vide

✍ ⏲

Mettre un bippeur dans une cloche à vide.

Une onde acoustique est donc une vibration d'un objet transmise dans un milieu.

1 Onde acoustique dans un milieu fluide

1.1 Hypothèses de l'approximation acoustique

- Fluide parfait
  Au repos il est caractérisé par une pression P_0, une vitesse globale $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{0}$, et une masse volumique ρ_0 uniforme.
- L'onde est une perturbation par rapport à l'état d'équilibre

$$\begin{cases} P(M,t) = P_0 & +p_1(M,t) & \text{avec } p_1 \ll P_0 \\ \rho(M,t) = \rho_0 & +\rho_1(M,t) & \text{avec } \rho_1 \ll \rho_0 \\ \overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{0} & +\overrightarrow{v_1}(M,t) & \text{avec } v_1 \ll V_T = \sqrt{\dfrac{RT}{M}} \text{ vitesse thermique} \end{cases} \tag{25.1}$$

- On néglige l'influence de $\overrightarrow{g}$

1.2 Mise en équation

On peut écrire la loi de conservation de la masse et la développer en ses deux premiers ordres. On peut alors égaler chaque ordre séparément.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}(\rho \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 \tag{25.2}$$

L'équation d'Euler pour les fluides parfaits donne ensuite

$$\rho \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} p_1 \tag{25.3}$$

De plus, l'évolution est supposée isentropique, ce qui signifie que l'on peut définir le coefficient de compressibilité isotrope comme

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1} \tag{25.4}$$

On combine ces trois équations et on tombe suuuuur...

$$\Delta p_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \tag{25.5}$$

Remarque :

- v_1 et ρ_1 vérifient aussi les mêmes équations.
- Pour un gaz parfait, $PV^\gamma = cst$, donc $\chi_S = \frac{1}{\gamma \rho_0}$. De plus $P = \frac{\rho RT}{M}$, donc $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. **OdG :** $\gamma = 1.4$ donc $c = 340$ m/s @ 20°C
- Pour les solides on prend juste $\chi_S = 1/Y$.
- Dans l'eau $c = 1500$ m/s

1.3 Solutions de l'équation d'onde

Les solutions de l'équation sont celles de la leçon ✍ LP24. On a les odnes propagatives et les ondes stationnaires selon les conditions étudiées.

1.4 Vérifions les hypothèses

Vitesse :

On pose U l'ordre de grandeur de vitesse, L celui de distance de variation (longueur d'onde). Alors on a

$$\frac{\left\| \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} = \frac{U^2/L}{U/T} = U/C \ll 1 \tag{25.6}$$

La vitesse particulaire est donc inférieure à celle des ondes.

☕

Mesure de la vitesse du son dans l'air

✍ ⏲

On utilise les émetteurs et récepteurs air/eau, en utilisant la partie air. Avec le GBF on envoie des burst de sinus à 40 kHz, 10 sinus par burst avec des burst de 10 ms.

Isentropie :

La vérification de l'isentropie se fait par vérification de vitesse, on trouve la bonne valeur avec $\gamma = 1.4$.

On peut remarquer qu'un hypothèse d'isothermie nous aurait donné $c = \sqrt{\frac{RT}{M}}$ ≃300m/s, et aurait donc été invalidée.

pesanteur :

$\rho_0 \partial_t \vec{v_1} \gg \rho_1 \vec{g}$

Vérification des hypothèses ($L = 120$ dB) :

- $P_1 = \sqrt{\mu_0 c I} = \sqrt{\mu_0 c I_0 10^{L/10}} = 20$ Pa $\ll P_0 = 1$ bar.
- $v_1 = \sqrt{\frac{\chi_S}{\mu_0}} P_1 = \frac{20}{410} = 5.10^{-2}$ m.s^{-1} $\ll c$ =340 m.s^{-1}
- $\mu_1 = \mu_0 \chi_S P_1 = \frac{20}{410^2} = 1.10^{-4}$ kg.m^{-3} $\ll \mu_0$
- $\mu_0 g = 12$ N.m^{-3} $\ll \left\| \overrightarrow{\text{grad}} P \right\| = \frac{P_0}{\lambda} = 3.10^5$ N.m^{-3} à 1 kHz

2 Propriétés de l'onde

2.1 Propagation

Simulation de l'onde

✍ `propagation.py` ⏲

Montrer la propagation de l'onde, et préciser que les approximations ne s'appliquent plus à 190dB, mais que ça aide à visualiser.

C'est ici une magnifique onde propagative ! on est heureux parce que tout le formalisme a été développé dans la leçon précédente ! ✍ LP24

La vitesse de propagation dépend donc grandement du matériaux considéré.

Vitesse du son dans le Dural

✍ MP30 ⏲

2.2 Aspect énergétique

On veut définir un vecteur de densité d'énergie, similaire au vecteur de Poynting en électromagnétiqme, que l'on nomme $\overrightarrow{\Pi}$, en W/m^2, tel que, pour une surface S, on a l'énergie dans le volume fermé par S

$$\iiint_V \frac{\partial e}{\partial t} \mathrm{d}V = \oiint_S \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{25.7}$$

D'où l'équation magique de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\Pi} \tag{25.8}$$

Il nous faut maintenant déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Pi}$ et de e. Un bilan des forces de pression sur la surface S donne immédiatement

$$\mathrm{d}P = \overrightarrow{\mathrm{d}F} \cdot \overrightarrow{v_1}(M,t) = \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{25.9}$$

Et on obtient naturellement, en injectant cette équation dans l'équation de conservation, et en se souvenant que $\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial t} &= -\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\Pi} \\ &= -(P_0 + p_1)\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{\nabla}(p_1) \cdot \overrightarrow{v_1} \\ &= (P_0 + p_1)\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) + \left(\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{v_1}\right) \\ &= P_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} + \chi_S p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \overrightarrow{v_1} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t}\end{aligned} \tag{25.10}$$

Finalement, on a :

$$e = \frac{1}{2}\chi_S p_1^2 + \frac{1}{2}\rho_0 \overrightarrow{v_1}^2 \tag{25.11}$$

2.3 Cas de l'OPPS : impédance

On sait que l'on peut écrire $p_1 = P_0 \cos(\omega_t - kx)$, et idem pour v. On a alors un couplage entre accélération et gradient de pression :

$$\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}(p_1) \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{k}}{\rho_0 \omega} p_1 \tag{25.12}$$

Ainsi on trouve $p_1 = \rho_0 c v_1$, et on peut assimiler ce résultat à $u = Zi$ en électricité. Ainsi on définit la notion d'impédance acoustique [1] comme $Z = \frac{p_1}{v_1}$, et ici elle vaut $\rho_0 c$.

remarque : Pour une OPPH, on a $e = e_c + e_p = 2e_c$, et $\overrightarrow{\Pi} = ce\overrightarrow{u}$

L'énergie se déplace à la vitesse c !

2.4 Intensité sonore

On définit l'intensité sonore comme la puissance moyenne reçue par unité de surface, en $\mathrm{W\,m^{-2}}$

$$I = < \overrightarrow{\Pi} \cdot \overrightarrow{n} > \tag{25.13}$$

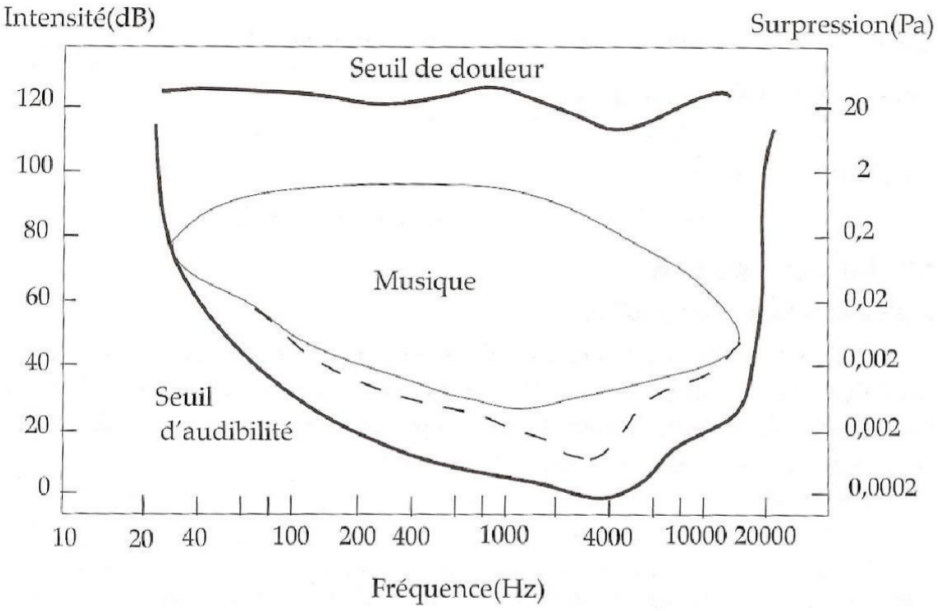
Cependant cette valeur n'est pas très intéressante, car elle varie d'un facteur 10^{12} entre le bruit fait par une mouche et celui fait par un avion au décollage. Il nous faut une échelle log, et c'est là qu'interviennent les décibels

$$L_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 20 \log \frac{P_1}{P_0} \tag{25.14}$$

Remarques : pour doubler l'intensité on ajoute 3 dB. On pose I_0 comme le seuil d'audibilité à 4000Hz. L'oreille humaine ne perçoit pas l'intensité pareil partout.

1. Définie plus proprement à la section 3.

Quelques niveaux sonores	
Pièce silencieuse :	30 dB
Lave-vaisselle silencieux :	50 dB
Rue animée :	75 dB
Bébé qui pleure :	80 dB
Scooter (en accélération) :	90 dB
Cantine scolaire :	100 dB
Balladeur à fond :	105 dB
Scooter sans pot en accélération :	115 dB
Avion :	120 dB
Chantier de marteaux piqueurs :	130 dB
Boîte de nuit :	130 dB
Fusée :	180 dB



2.5 Effet Doppler

✍ MP25, MP30

3 Réflexion, transmission

3.1 Impédance

Plaçons-nous dans le cas d'OPP se propageant selon $+\overrightarrow{e_x}$. On écrit alors $p_1 = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, ce qui donne $\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\rho_0 c} f\left(t - \frac{x}{c}\right)\overrightarrow{e_x} = \frac{1}{\rho_0 c} p_1 \overrightarrow{e_x}$. On peut alors définir l'**impédance acoustique** d'un milieu par :

$$Z = \frac{\text{cause}}{\text{conséquence}} = \frac{p_1}{v_1} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \tag{25.15}$$

On exprime Z en $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$ On peut faire une analogie avec le câble coaxial :

Câble coaxial	i	u	Γ	Λ	$c = \sqrt{\frac{1}{\Gamma\Lambda}}$	$Z = \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$
Onde acoustique	$\overrightarrow{v_1}$	p_1	ρ_0	χ_S	$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi_S}}$	$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$

OdG : $Z_{\text{eau}} = 1.4 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$

$Z_{\text{air}} = 410\,\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$

On retiendra $Z_{solide} \gtrsim Z_{liquide} \gg Z_{gaz}$.

Il est intéressant de noter que lorsque l'on crée un instrument de musique, on lui donne généralement un pavillon, ou une casse de résonance. Ce dernier élément est en réalité un dispositif d'adaptation d'impédance, visant à faire passer une quantité d'énergie bien étudiée au milieu, à savoir l'air.

3.2 Conditions aux limites

Lorsqu'un onde passe d'un milieu d'impédance Z_1 à un milieu d'impédance Z_2, elle doit satisfaire deux relations de continuité :

- **la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ de l'onde est continue à l'interface** car il ne peut y avoir de décollement de matière
- **la pression p_1 est continue à l'interface** car, si on considère une tranche de fluide à l'interface de section S, un PFD nous dit que la somme des forces extérieures est nulle, *i.e.* la force de pression avant l'interface se compense avec celle après l'interface

3.3 OPP en incidence normal sur un dioptre plan

Considérons que le milieu d'impédance Z_1 occupe le demi-espace $x < 0$ tandis que le milieu d'impédance Z_2 occupe le demi-espace $x > 0$, et on étudie une OPP se propageant dans le sens des x croissants. Quand l'onde incidente arrive à l'interface, elle se décompose en une onde réfléchie se propageant dans le milieu d'impédance Z_1 dans le sens des x décroissants et en une onde transmise se propageant dans le milieu d'impédance Z_2 dans le sens des x croissants. On écrit donc :

$$\begin{aligned}
&\textbf{Onde incidente} && \begin{cases} p_i(x,t) &= f\left(t - \dfrac{x}{c_1}\right) \\ \overrightarrow{v_i}(x,t) &= \dfrac{1}{Z_1} f\left(t - \dfrac{x}{c_1}\right) \overrightarrow{e_x} \end{cases} \\
&\textbf{Onde réfléchie} && \begin{cases} p_r(x,t) &= f\left(t + \dfrac{x}{c_1}\right) \\ \overrightarrow{v_r}(x,t) &= -\dfrac{1}{Z_1} f\left(t + \dfrac{x}{c_1}\right) \overrightarrow{e_x} \end{cases} \\
&\textbf{Onde transmise} && \begin{cases} p_t(x,t) &= f\left(t - \dfrac{x}{c_2}\right) \\ \overrightarrow{v_t}(x,t) &= \dfrac{1}{Z_2} f\left(t - \dfrac{x}{c_2}\right) \overrightarrow{e_x} \end{cases}
\end{aligned} \tag{25.16}$$

À partir de ces expressions, on définit les coefficients de réflexion et de transmission en pression :

$$r = \frac{p_r}{p_i} = -\frac{v_r}{v_i} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{p_t}{p_i} = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{v_t}{v_i} \tag{25.17}$$

On applique les relations de passage au niveau de l'interface à $x = 0$:

$$p_i(x=0,t) + p_r(x=0,t) = p_t(x=0,t) \Rightarrow f(t) + rf(t) = tf(t) \Rightarrow 1 + r = t \tag{25.18}$$

$$v_i(x=0,t) - v_r(x=0,t) = v_t(x=0,t) \Rightarrow \frac{1}{Z_1}f(t) - \frac{1}{Z_1}rf(t) = \frac{1}{Z_2}tf(t) \Rightarrow \frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} \tag{25.19}$$

On obtient donc, de façon analogue à l'optique,

$$\boxed{r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}} \tag{25.20}$$

On peut également définir les coefficients de réflexion et de transmission en énergie à partir des vecteurs de Poynting et trouver :

$$R = \frac{\left\|\overrightarrow{\Pi_r}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\Pi_i}\right\|} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\left\|\overrightarrow{\Pi_t}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\Pi_i}\right\|} = \frac{Z_1}{Z_2}t^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \tag{25.21}$$

On obtient la relation de conservation d'énergie $R + T = 1$.

Remarques

- lorsque $Z_1 = Z_2$, on a $r = 0$ (et $R = 0$) ainsi que $t = 1$ (et $T = 1$) : l'onde incidente est totalement transmise. C'est ce qu'on appelle l'**adaptation d'impédance**, utilisée par exemple en échographie ou pour la caisse de résonance d'un diapason.
- au contraire, si $Z_1 \ll Z_2$, l'onde incidente est totalement réfléchie. C'est le cas par exemple des ondes stationnaires.

3.4 Applications

3.4.1 Échographie

✍ exercice du Cap Prépa

L'échographie consiste à émettre et recevoir via une sonde des ultrasons dans le corps humain et d'analyser les ultrasons réfléchis en attribuant une couleur à la quantité d'ultrasons réfléchis sur un écran. Ainsi, les liquides laissent les ultrasons les traverser et ne renvoient pas d'écho donc ils apparaissent en noir sur lécran tandis que les parties solides du corps comme les os apparaissent en blanc (comme les gaz et l'air d'ailleurs). Les tissus mous apparaissent quant à eux en nuances de gris selon leur *échogénécité*.

Quand on veut faire une échographie en posant directement la sonde sur la peau, on considère qu'il existe une couche d'air entre la sonde et la peau. Or $Z_{\text{air}} = 440\,\text{kg}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}^{-1}$ et $Z_{\text{peau}} = 1.62 \times 10^6\,\text{kg}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}^{-1}$ à 20°C donc le $T = 1 \times 10^{-3}$. Une énorme partie des ultrasons est donc réfléchie sans entrer dans le corps.

Pour remédier à cela, on utilise un gel d'impédance acoustique $Z_{\text{gel}} = 2.42 \times 10^6\,\text{kg}\,\text{m}^{-2}\,\text{s}^{-1}$ (pour la glycérine) très proche de celle de la peau. Cette adaptation d'impédance entre la peau et la sonde nous permet d'obtenir $T = 0.2$, et donc de bien mieux transmettre les ultrasons.

3.4.2 Insonorisation par double vitrage

On utilise le double vitrage pour améliorer l'insonorisation d'une pièce. On effet, pour un simple vitrage, le son traverse une interface air-verre puis une interface verre-air alors qu'avec du double vitrage, elle doit traverser en plus une interface air-verre puis une interface verre-air. Ainsi, pour le simple vitrage, le son est atténué de 76 dB ($T_{\text{simple}} = 2.5 \times 10^{-8}$) alors que pour le double vitrage, il est atténué de 152 dB ($T_{\text{double}} = T_{\text{simple}}^2 = 1.6 \times 10^{-15}$).

3.4.3 Télémétrie acoustique, sonar

✍ MP26 - Mesure de longueurs

On envoie l'onde sur un corps massif d'impédance acoustique Z_2 bien plus grande que celle de l'air. L'onde est alors totalement réfléchie et en mesurant la temps nécessaire pour parcourir l'aller-retour et en connaissant sa vitesse, on peut calculer la distance au corps massif.

4 Prise en compte de la viscosité

✍ Boulomié

4.1 Atténuation

Dans un premier temps, on va voir l'impact de la viscosité sur l'atténuation de l'onde quand elle se propage dans un milieu. On peut montrer (cf ✍ GHP p170) que l'équation de Navier-Stokes pour un fluide compressible s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}P+\eta\Delta\overrightarrow{v}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{v}) \tag{25.22}$$

avec ξ le second coefficient de viscosité. Si on néglige cette seconde viscosité, on obtient

$$\rho\left(\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}P+\eta\Delta\overrightarrow{v}+\frac{\eta}{3}\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{v}) \tag{25.23}$$

Comme pour le début de cette leçon, on exprime ρ, P et $\overrightarrow{v}$ sous la forme d'un terme d'ordre 0 et d'un terme d'ordre 1. L'équation de Navier-Stokes, projetée sur $\overrightarrow{e_x}$, devient à l'ordre 1 :

$$\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{\partial p_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\eta}{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}=-\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{4\eta}{3}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \tag{25.24}$$

On rappelle que l'équation de conservation de la masse et la définition de χ_s donnent respectivement

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v_1}=0 \qquad \text{et} \qquad \chi_s\simeq\frac{1}{\rho_0}\frac{\rho_1}{p_1}$$

On relie donc p_1 et $\overrightarrow{v_1}$ par la relation :

$$\chi_S\frac{\partial p_1}{\partial t}+\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v_1}=0$$

On dérive donc Navier-Stokes linéarisée par rapport à x puis on insère cette expression pour remplacer v_1 par p_1 et on obtient :

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{\partial^2 v_1}{\partial t\partial x}&=-\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{4\eta}{3}\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}\\ \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]&=-\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{4\eta}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]\\ \rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left[-\chi_S\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]&=-\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+\frac{4\eta}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\chi_S\frac{\partial p_1}{\partial t}\right]\end{aligned} \tag{25.25}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}+\frac{4\eta}{3\rho_0 c^2}\frac{\partial^3 p_1}{\partial x^2\partial t}=0} \tag{25.26}$$

Pour une OPPH d'expression $p_1=p_{1,0}e^{i(kx-\omega t)}$, la relation de dispersion s'écrit

$$k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{1-i\omega\dfrac{4\eta}{3\rho_0 c^2}}}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{1-i\theta}} \qquad avec \qquad \theta=\frac{4\eta\omega}{3\rho_0 c^2} \tag{25.27}$$

Ordres de grandeur

- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'eau à 20°C, $c=1480$ m/s, $\eta=10^{-3}$ Pa s et $\rho_0=998\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ donc $\theta=3.8\times10^{-8}$
- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'air à 20°C, $c=340$ m/s, $\eta=10^{-6}$ Pa s et $\rho_0=1.2\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ donc $\theta=6.04\times10^{-8}$

Puisque θ est faible, on peut faire un développement limité pour trouver

$$k=\pm\frac{\omega}{c}\left(1+\frac{i\theta}{2}\right)=\pm\frac{2\pi}{\lambda}\left(1+\frac{i\theta}{2}\right) \tag{25.28}$$

On remplace l'expression de k dans celle de p_1 et on trouve :

$$p_1=p_{1,0}\exp\left(-\frac{\pi\theta}{\lambda}x\right)\exp\left(i\left(\frac{\omega}{c}x-\omega t\right)\right) \tag{25.29}$$

L'onde se propage toujours à la vitesse c mais on voit l'apparition d'un terme d'amortissement de longueur caractéristique $\boxed{\delta = \frac{\lambda}{\pi\theta} = \frac{3c^3\rho_0}{8\pi^2\eta f^2}}$

Ordres de grandeur

- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'eau à 20°C, $\delta = 1.2 \times 10^8$ m
- pour une onde de fréquence 1 kHz se propageant dans de l'air à 20°C, $\delta = 1.8 \times 10^6$ m

On peut donc considérer que la viscosité n'amortit pas l'onde à notre échelle. Bien sûr, il existe d'autres facteurs d'amortissement comme par exemple l'absorption dans le milieu, sa non-homogénéité, ou le fait qu'on ait des ondes sphériques.

4.2 Ondes de cisaillement

On revient à l'équation usuelle de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v} \tag{25.30}$$

Cette fois, on pose un champ de vitesse $\vec{v_1}(x,t) = v_x(x,t)\vec{e_x} + v_z(x,t)\vec{e_z}$ et on projette Navier-Stokes sur $\vec{e_z}$. On obtient

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \tag{25.31}$$

La relation de dispersion est donc $k_z^2 = i\frac{\omega\rho_0}{\eta}$ donc $k_z = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}$. On peut donc calculer une nouvelle longueur d'atténuation $\ell = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho_0\omega}}$. Pour l'eau à 20°C et une onde de 1000 Hz, on trouve $\ell = 18\,\mu$m.

De manière générale, **une onde de cisaillement ne se propage pas dans un fluide**.

4.3 Ondes dans les solides

Depuis le début, on parle des ondes acoustiques dans les fluides, mais on sait par expérience qu'elles se propagent également dans les solides. En théorie de l'élasticité linéaire, on montre que le champ de déformation dans un solide satisfait l'équation :

$$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\vec{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) \tag{25.32}$$

avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. On trouve 2 familles de solution :

- les ondes de compression (ou ondes P) : elles sont longitudinales et se propagent à la vitesse

$$c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

- les ondes de cisaillement (ou ondes S) : elles sont transversales et se propagent à la vitesse

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} < c_P$$

5 Instruments de musique

5.1 Rappels sur l'onde stationnaire

✍ LP24

5.2 Instruments à vent

On modélise un instrument à vent comme une colone d'air cylindrique (ou conique mais ici cylindrique) de longueur L, à section constante. Le milieu a des conditions au limites, à savoir des noeuds ou des ventres aux extrémités selon la façon de souffler. On pense donc à une descriptions en ondes stationnaires.

À une extrémité ouverte, on a forcément $P = P_0$, et à une extrémité fermée, on a forcément une vitesse particulaire nulle, donc une surpression maximale.

5.2.1 Cas du tuyau symétrique

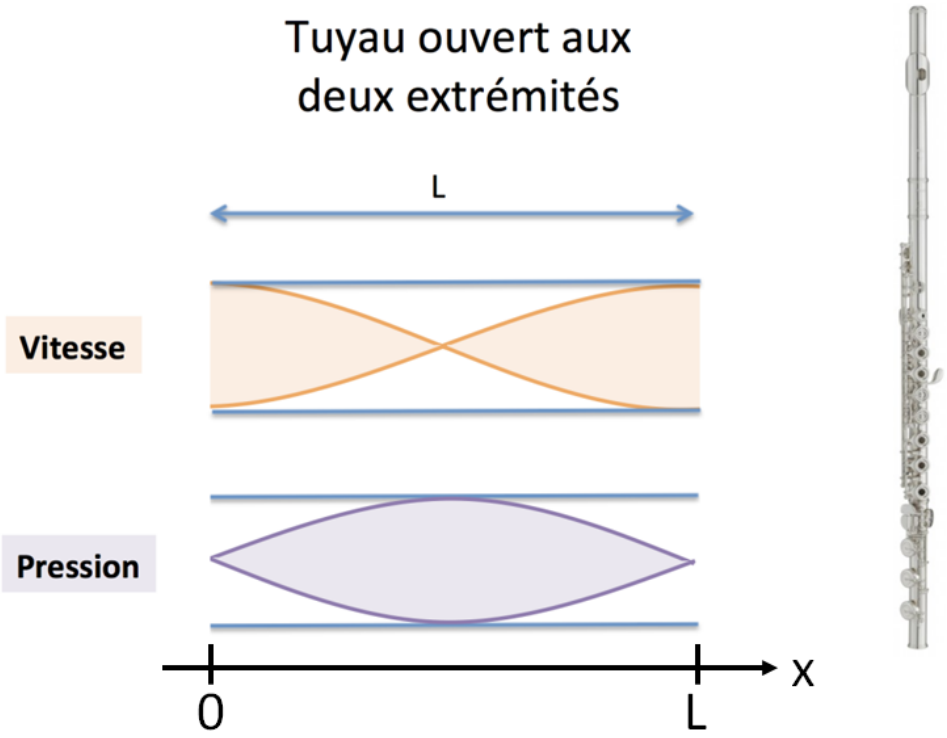


FIGURE 25.1 – Cas du tuyau symétrique, ici ouvert-ouvert

Si on prend un tuyau symétrique, par exemple un tube de PVC ouvert des deux côtés, et que l'on fait s'établir une onde stationnaire dedans, on a forcément des noeuds de chaque côté, et donc une simili-corde de Melde. On a toutes les fréquences ν_n telles que

$$\nu_n = n\frac{c}{2L} \tag{25.33}$$

Ce que l'on fait avec une flûte ou en tapant sur un tuyau en pvc avec une sandale, c'est d'exciter toutes les fréquences d'un coup avec un bruit blanc ou plus ou moins centré. Les fréquences qui ne sont pas de sν_n s'atténuent alors beaucoup plus vite que les autres, alors que les ν_n sont amplifiées et résonnent.

Acoustique des tubes

✍ MP30 ⏲

Prédire le son d'un tube de PVC ouvert-ouvert, et le montrer expérimentalement.

Un cuivre c'est essentiellement un tube que l'on excite avec un bruit Gaussien à la bouche, pour sélectionner une harmonique en particulier.

5.2.2 Cas du tube asymétrique

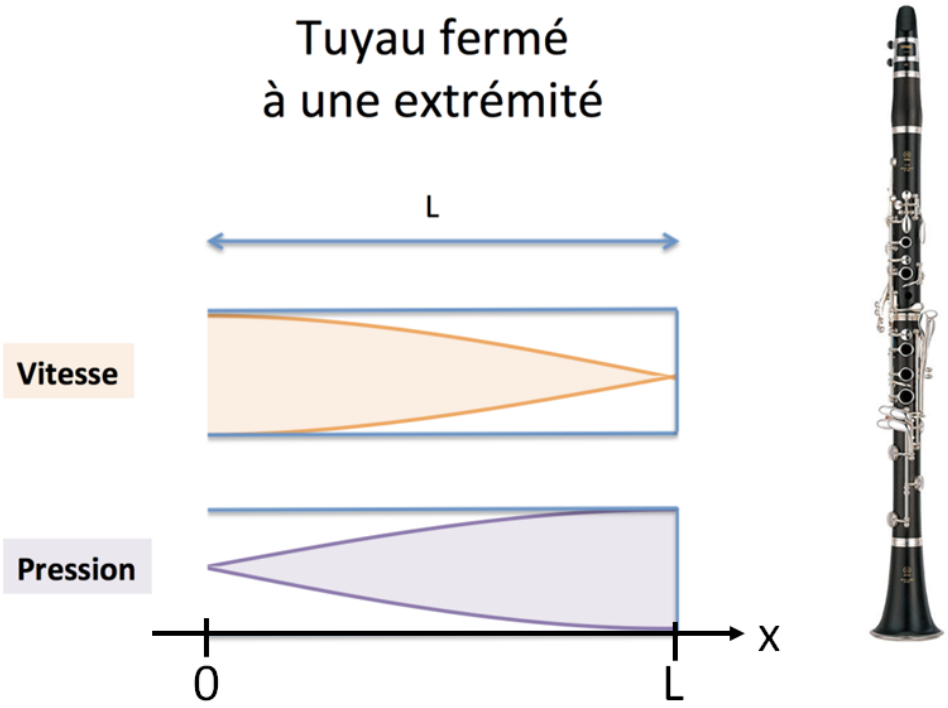


FIGURE 25.2 – Cas de la clarinette.

Si un tube est asymétrique cependant, comme par exemple si on bouche un côté du tube, ou si on met un système de vibration d'un côté (une anche), on a plus que les harmoniques impaires :

$$\nu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{c}{2L} \tag{25.34}$$

Ainsi une clarinette deux fois plus courte qu'une trompette aura la même tessiture. Elle n'aura pas les mêmes harmoniques cependant.

OdG : Trompette : 140cm, clarinette : 66cm.

Acoustique des tubes

✍ MP30 ⏲

Prédire le son d'un tube de PVC ouvert-fermé, et le montrer expérimentalement. C'est une octave en dessous du ouvert-ouvert.

5.2.3 Mécanisme d'octave/de douzième

Un mécanisme d'octave ou de douzième est une clé sur un instrument à vent qui permet de passer d'une note à une de ses harmoniques. Il fonctionne en perçant un trou dans la colonne d'air à un endroit très précis : pour une octave, à la moitié de la colonne, pour une douzième, à un tiers. Il est à noter que la douzième peut exister pour les tubes cylindriques et les tubes coniques, mais que l'octave n'existe que pour les tubes coniques. En effet leur forme leur donne une plus grande richesse d'harmoniques, faisant apparaître les harmoniques paires, dont l'octave.

5.3 Instruments à percussions

✍ Dunod p846

✍ http://olivier.granier.free.fr/Seq17/co/rappels-de-cours-ondes_meca-son-solide.html

Les instruments à percussion pour leur part répondent aux équation des membranes. C'est à dire que l'on excite avec un bruit blanc (choc) une membrane qui va osciller ensuite en réponse. Pour faire les calculs, il faut passer en calculs d'élasticité, et écrire, avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson :

$$\rho\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\vec{v} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{25.35}$$

On se retrouve alors à gère des ondes longitudinales et transverses, comme dans la section 4. $\Delta = \Delta_L + \Delta_T$. Après un calcul que je préfère ne pas détailler, on obtient :

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \simeq 3300\text{m}\,\text{s}^{-1} \qquad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \simeq 2000\text{m}\,\text{s}^{-1} \tag{25.36}$$

OdG : on prend $E \sim 10$ GPa et $\nu \sim 0.2$ pour un intrument tel qu'un xylophone **en bois**.

5.4 Instruments à cordes

Les instruments à corde sont très bien détaillés dans le sujet 2009 de composition de physique de l'agreg : http://www.agregation-physique.org/images/rapports/2009/05.pdf, et dans le ✍ MP30.

Ce qu'il faut en retenir, c'est que la décroissance des harmoniques dépend de la forme initiale de la corde et de son excitation de départ.

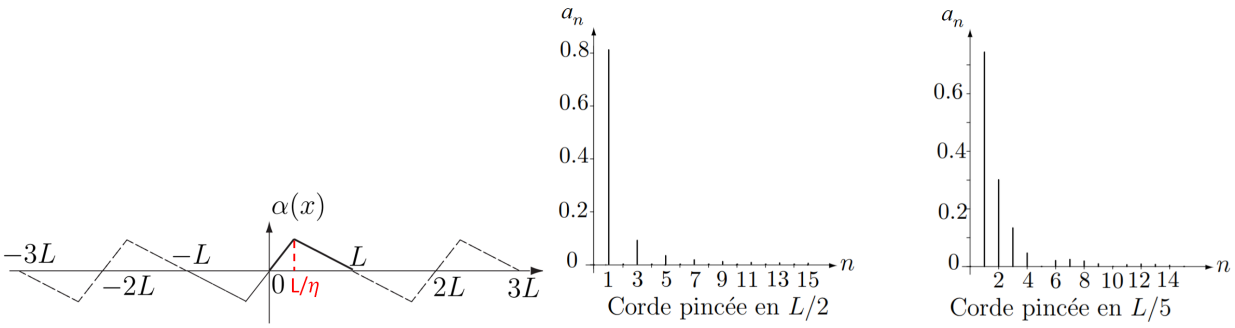


FIGURE 25.3 – La forme des harmoniques pour le clavecin, en $1/n^2$. La guitare est en $1/n^3$ et le piano en $1/n$.

Remarque : En fonction de l'endroit où on pince, on peut avoir que des harmoniques impaires, et épurer le son, comme par exemple quand on fait des hamoniques avec une guitare.

LP 26

Propagation avec dispersion

Niveau : L3

Commentaires du jury

- 2016 : Il s'agit d'une leçon qui porte sur la dispersion et non sur la propagation.

- 2015 : Le jury invite les candidats à réfléchir sur les notions de vitesse de groupe et de vitesse de l'énergie qui ne s'identifient pas forcément.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.

- 2012, 2013 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

- 2009, 2010 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.

- 2007, 2008 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

- 2001 : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sur s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.

- 2000 : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que kx, ky, kz et ω sont reliés par la relation de dispersion.

- 1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques, par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.

- 1998 : Un battement n'est pas un paquet d'ondes. Le choix d'une représentation de Fourier spatiale ou temporelle pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie.

Bibliographie

- ✍ Un bouquin de prépa au choix ⟶ La base
- ✍ *Hprépa, Ondes*, **Brébec** ⟶ La base et câble coaxial
- ✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon, Hulin, Petit (GHP)** ⟶ Ondes gravito-capillaires
- ✍ Poly de P. Lidon https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document ⟶ Ondes gravito-capillaires
- ✍ *BUP 649* ⟶ Des discussions et rappels interressants
- ✍ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** ⟶ Plasma et diélectrique si on a peur de manquer
- ✍ **Tec&Doc PC/PC***, **Olivier** ⟶ Modèle de l'électron élastiquement liée

Prérequis

- ➢ Équation de d'Alembert, relation de dispersion
- ➢ Analyse de Fourier
- ➢ Câble coaxial sans perte
- ➢ Plasma
- ➢ Mécanique des fluides
- ➢ Électromagnétisme, milieux diélectriques

Expériences

☕

1 Notion de dispersion (théorie utile) . . . 357
1.1 Vitesse de phase et relation de dispersion . . . 357
1.2 Notion de paquet d'onde . . . 358
1.3 Effet de la dispersion . . . 359
1.4 Bilan/résumé . . . 360
2 Dispersion dans un câble coaxial . . . 360
2.1 Équation des télégraphistes . . . 360
2.2 Condition de Heaviside . . . 362
3 Dispersion dans un diélectrique . . . 362
3.1 Équation de propagation . . . 362
3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 1 . . . 363
3.3 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 2 . . . 364
4 Dispersion dans un plasma . . . 366
4.1 Hypothèses . . . 366
4.2 Relation de dispersion : . . . 366
4.3 Vitesses . . . 368
5 Dispersion des ondes gravito-capillaires . . . 368
5.1 Ondes gravito-capillaires . . . 368
5.2 Expression du potentiel des vitesses . . . 369
5.3 Relation de dispersion . . . 369
5.4 Expérience . . . 370
5.5 Vitesse de phase, vitesse de groupe . . . 370

Introduction

En 1666 I.Newton fit traverser à un prisme un rai de lumière blanche et observa la séparation de la lumière blanche en plusieurs couleurs. Ainsi, en vertue de la loi de Snell-Descartes déjà connue à l'époque de cette expérience, il fut possible de déduire que la vitesse de la lumière dépendait, dans le verre, de sa couleur. C'est ce qu'on appelle la dispersion. Nous allons donc tenter d'appréhender le phénomène de dispersion dans un cas général, puis ensuite nous nous intéresserons à deux cas de dispersion ayant une application dans le domaines des télécommunications.

Dispersion du blanc par un prisme
Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur.

1 Notion de dispersion (théorie utile)

1.1 Vitesse de phase et relation de dispersion

✍ Physique tout en un MP-MP* p.555, Sanz.

On a déjà vu qu'une OPPH dans le vide suit l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{26.1}$$

On peut alors écrire l'onde comme $\overrightarrow{E} = E_0\exp(i(\omega t - kx))\overrightarrow{e_y}$. On notera $\overrightarrow{E} = E_0\exp(i\phi(x,t))\overrightarrow{e_y}$. Ce qui va nous intéresser aujourd'hui c'est l'évolution de cette phase dans l'espace et le temps !

Si on cherche les évènements équiphases de l'espace temps, on cherche (x,t) tel que $\phi(x,t) = C$ constante. On peut alors écrire l'égalité suivante en deux évènement équiphases :

$$\omega t_1 - xx_1 = \omega t_2 - kx_2 = C \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \tag{26.2}$$

On a ainsi défini la vitesse à laquelle une phase se déplace, la **vitesse de phase**

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \tag{26.3}$$

Si on réinjecte l'expression de E dans d'Alembert, on trouve la **relation de dispersion** de l'onde, ici

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{26.4}$$

Cette relation de dispersion nous permet de trouver l'expression de la vitesse de phase en fonction d'une seule variable, k ou ω. Dans le cas de l'OPPH on obtient même, miracle :

$$v_\phi = c \tag{26.5}$$

Définition : On dira d'un milieu qu'il est **dispersif** si sa vitesse de phase dépend de ω. Sinon il sera nommé non-dispersif. Le vide est, pour les ondes électromagnétiques, un milieu non dispersif !

1.2 Notion de paquet d'onde

Une OPPM, bien qu'utile mathématiquement, c'est pas génial du point de vue de la physique, parce que ça a une énergie et une extension infinis. Pour construire une onde qui a du sens physiquement, donc un début et une fin, on constitue un **paquet d'onde**.

Pour construire un paquet d'onde, il suffit de multiplier une OPPH nommée porteuse à une enveloppe, c'est à dire une *forme générale* de l'onde. Dit comme ça a n'a pas l'air cool, mais par décomposition de Fourier on peut décrire l'opération comme une intégrale d'OPPH, et donc profiter de la linéarité des équations.

$$f(x,t) = P \times G = \exp\left(i(\omega_0 t - k_0 x)\right) G(x,t) \tag{26.6}$$

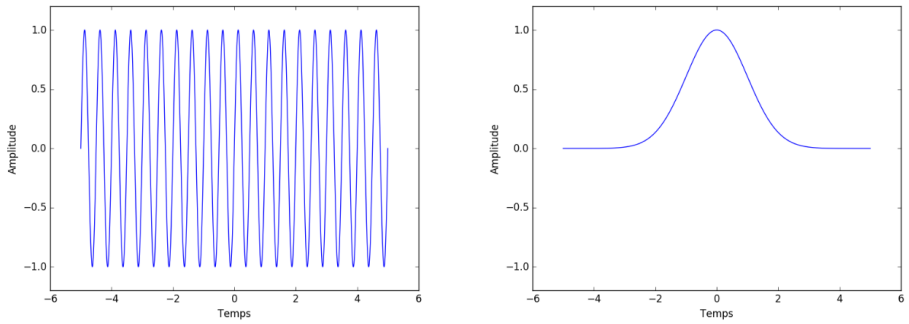


FIGURE 26.1 – Exemple de porteuse et d'enveloppe

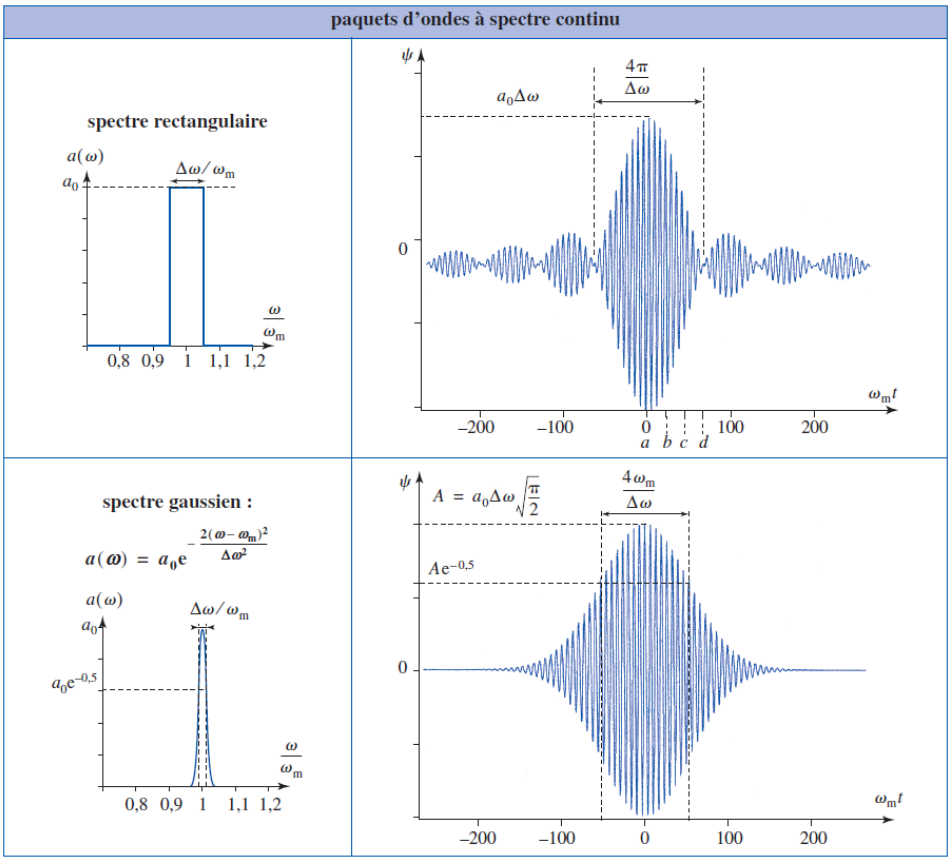


FIGURE 26.2 – Exemple de paquets d'ondes et leur spectre.

On rend ainsi au signal son énergie finie. Mais une question très importante se pose, est-ce que le paquet d'onde

va à la même vitesse que l'onde elle même ? Est-ce que l'on va voir défiler des franges à l'intérieur ? On va déterminer la vitesse du paquet !

1.3 Effet de la dispersion

Pour cela écrivons le paquet d'onde avec le formalisme de Fourier :

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \int_{\mathcal{R}} \exp\left(i(\omega t - k(\omega)x)\right) A(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \exp\left(i(\omega_0 t - k_0 x)\right) \int_{\mathcal{R}} \exp\left(i((\omega-\omega_0)t - (k-k_0)x)\right) A(\omega)\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{26.7}$$

On a ainsi directement l'expression de $G(x,t)$ comme d'une intégrale :

$$\int_{\mathcal{R}} \exp\left(i((\omega-\omega_0)t - (k-k_0)x)\right) A(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{26.8}$$

Afin de poursuivre les calculs, on va supposer que la distribution des fréquences est piquée autour de ω_0, ce qui revient à dire que le signal que l'on envoie ressemble bien à une sinusoïde. La dépendance de k en ω devient alors

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} \times (\omega - \omega_0)$$

E, réinjectant cela dans l'expression de l'enveloppe on trouve sa vitesse de propagation.

$$G(x,t) = G\left(x = 0, t - \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} x\right) \tag{26.9}$$

On nomme **vitesse de groupe** la vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe, que l'on assimilera à la vitesse de l'enveloppe (c'est la même à l'ordre 1, mais l'ordre 2 change beaucoup de choses...) :

$$v_g = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0}} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0} \tag{26.10}$$

On appelle cette vitesse la vitesse de groupe. C'est la vitesse du centre de l'enveloppe du paquet d'onde. On remarque qu'elle peut être différente de la vitesse de phase, on observe alors un phénomène de glissement de phase, l'enveloppe n'évolue pas dans l'espace à la même vitesse que la phase. Dans notre cas cependant, $v_g = v_\phi$, mais on va vite trouver un contre-exemple (cf partie suivante).

Si on effectue maintenant un développement plus précis, à l'ordre 2, on obtient :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0)\left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} + \frac{(\omega-\omega_0)^2}{2}\left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_{\omega_0} = k_0 + (\omega-\omega_0)\alpha(\omega) \tag{26.11}$$

Alors on a une nouvelle expression de l'enveloppe :

$$G(x,t) = \int_{\mathcal{R}} \exp\left(i(\omega-\omega_0)(t - \alpha(\omega)x)\right) A(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{26.12}$$

Alors on a une vitesse de groupe qui varie pour les différentes pulsations du groupe, ce qui a pour conséquence de l'étaler au cours de sa propagation !

Interessons nous en particulier au cas du paquet d'onde Gaussien, parce que la TF d'une Gaussienne est une Gaussienne, ce qui simplifie grandement nos calculs.

☕

Dispersion du paquet d'onde

✍ `dispersion_2_images.py` ⏲

On y voit que le paquet va moins vite que la porteuse, et que le paquet s'étale au fur et à mesure de son avancée, parce que ces différentes composantes ne vont pas à la même vitesse.

On utilise ici une relation de dispersion de type Klein-Gordon $k2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$. Ce type de relation de dispersion est présent dans les plasmas ou dans les métaux pour les hautes fréquences. On remarque qu'au cours de la propagation, les courtes longueurs d'onde "vont plus vite", et se retrouvent donc à l'avant du paquet d'onde. Au contraire, les grandes longueurs d'onde sont "à la traîne".

Justification de l'outil informatique : Ici, nous sommes à un point de la leçon où les formules sont des transformée de Fourier inverse, donc exprimées sous forme d'intégrale, qui sont des notions tout à fait nouvelles pour les élèves.

Je pense être très difficile de se représenter les effets de telles formules. J'ai donc codé en Python un programme calculant ces expressions dans un cas simple et connu pour pouvoir illustrer ces formules. En effet, le sujet de la leçon reste la propagation d'onde, qui est un phénomène très parlant et plein d'illustrations expérimentales dans la vie courante. Le résultat de ce programme, affichant deux images côte à côte, qui permet de "vérifier" que le paquet d'onde s'est effectivement propagé avec déformation est, à mon sens, beaucoup plus marquant qu'une formule générale qu'il faudrait particulariser en fonction de différentes relations de dispersion. J'ai également choisi de coder un programme qui calcule effectivement les intégrales du cours pour pouvoir changer la forme du paquet d'onde initial, la relation de dispersion, et pouvoir alors illustrer les effets d'autres relations de dispersion sur la propagation qui pourraient être vues pendant l'année (ce choix de calcul d'intégrale se ressent malheureusement sur la complexité du programme).

1.4 Bilan/résumé

À l'ordre 0, on obtient la vitesse de phase, qui correspond à la vitesse de l'onde monochromatique.

À l'ordre 1, on obtient la vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse de l'enveloppe sans déformations. On observe et explique le phénomène de glissement de phase.

Au ordres supérieurs, on obtient la dépendance en ω de la vitesse de groupe, et donc la dispersion et l'étalement du paquet d'ondes.

Effet Kerr optique

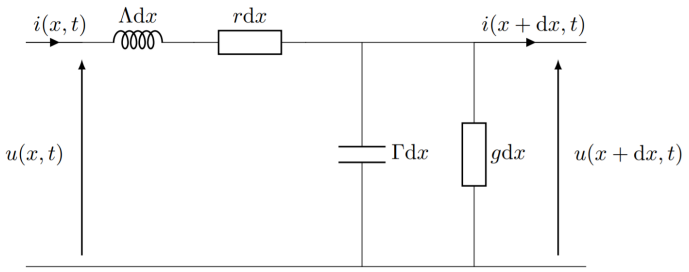
On introduit des non-linéarités pour compenser la dispersion. On retombe alors sur d'Alembert.

Définition : Lorsque $v_\phi > v_g$, on parle de dispersion **normale**. Dans le cas contraire, c'est de la dispersion anormale. On trouve de la dispersion anormale dans certaines vapeurs de mercure par exemple.

2 Dispersion dans un câble coaxial

2.1 Équation des télégraphistes

On modélise un tronçon de longueur dx de câble coaxial par le circuit suivant :



La loi des mailles dans la première maille du circuit permet d'écrire

$$u(x,t) = \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t} + r\mathrm{d}x i(x,t) + u_{\text{condensateur}} \tag{26.13}$$

Or la tension $u_{\text{condensateur}}$ aux bornes du condensateur est identique à celle de la résistance $\dfrac{1}{g\mathrm{d}x}$, qui est identique à $u(x+\mathrm{d}x,t)$. On obtient donc

$$u(x,t) = \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t} + r\mathrm{d}x i(x,t) + u(x+\mathrm{d}x,t) \tag{26.14}$$

On obtient donc une première équation intéressante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ri - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \tag{26.15}$$

On peut également établir deux lois des noeuds :

- au premier noeud, en notant I l'intensité dans le fil allant vers le second noeud, on a

$$i(x,t) = \Gamma \mathrm{d}x \frac{\partial u}{\partial t} + I \tag{26.16}$$

- au second noeud, en remarquant qu'on a une résistance $R = \dfrac{1}{g\mathrm{d}x}$, on a

$$I + g\mathrm{d}x u(x+\mathrm{d}x,t) = i(x+\mathrm{d}x,t) \tag{26.17}$$

On peut écrire $g\mathrm{d}x u(x+\mathrm{d}x,t) \simeq g\mathrm{d}x u(x,t)$ en en faisant qu'une erreur d'ordre 2.

On combine ces deux lois des noeuds pour obtenir une deuxième équation intéressante :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -gu - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \tag{26.18}$$

Les grandeurs u et i peuvent être découplées en écrivant l'équation

$$\partial_x(\text{1ère équation}) = -r(\text{2nde équation}) - \Lambda \frac{\partial}{\partial t}(\text{2nde équation})$$

On obtient alors l'équation de propagation dans le câble coaxial aussi appelée **équation des téélgraphistes** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (r\Gamma + g\Lambda)\frac{\partial u}{\partial t} + rgu \tag{26.19}$$

Injectons maintenant dans cette équation une OPPH avec $u(x,t) = u_0 e^{j(kx-\omega t}$. On a alors

$$k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 + j\omega(r\Gamma + g\Lambda) - rg \tag{26.20}$$

On trouve donc la relation de dispersion

$$\boxed{k^2 = \Gamma\Lambda\omega^2 \left(1 + j\frac{g}{\omega\Gamma}\right)\left(1 + j\frac{r}{\omega\Lambda}\right)} \tag{26.21}$$

2.2 Condition de Heaviside

On avait définit la vitesse de phase par

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

En réalité, cette formule n'est pas du tout la bonne. En effet, si on l'applique au cas du câble coaxial où à n'importe quel cas où k est complexe (donc tous les cas avec atténuation, comme par exemple les ondes évanescentes), on trouve une vitesse de phase complexe... La vraie formule de la vitesse de phase est en réalité

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{\Re(k)}} \tag{26.22}$$

On ne considère que $\Re(k)$ car la partie imaginaire de k ne participe pas à la phase de l'onde (et donc elle ne participe pas à sa propagation) mais à son amplitude (et donc à son atténuation).

On remarque que dans le cas où $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$, la relation de dispersion se simplifie et on obtient

$$k = \pm\omega\sqrt{\Gamma\Lambda}\sqrt{1 + j\frac{g}{\omega\Gamma}} \tag{26.23}$$

On en déduit immédiatement la vitesse de phase : $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$. On remarque qu'elle est indépendant de ω ou de k, ce qui signifie que le milieu est non-dispersif. La condition $\frac{r}{\Lambda} = \frac{g}{\Gamma}$ est alors appelée la **condition de Heaviside**. Remarquons cependant que l'onde continue à s'atténuer lors de sa propagation à cause de la partie imaginaire de k. Le câble coaxial a été largement utilisé au XXème siècle pour transmettre des signaux analogiques. Pour un signal analogique aussi bien la phase que la "forme" du signal est essentiel à l'information, d'où la nécessité de minimiser la dispersion quitte à s'accommoder d'un effet d'atténuation.

3 Dispersion dans un diélectrique

3.1 Équation de propagation

Une **matériau diélectrique** est un matériau qui possède un moment dipolaire permanent ou qui est susceptible d'en acquérir un lorsqu'il est soumis un champ électrique. Si on suppose le milieu diélectrique liénaire homogène et isotrope, les ondes électromagnétiques satisfont les très fameuses équations de Maxwell qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\overrightarrow{E} \quad \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{D} &= \rho = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} &= -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t} &= \overrightarrow{0} + \mu_0\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{26.24}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} - \Delta\overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla}\wedge(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B}) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\epsilon_r\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{26.25}$$

On trouve alors l'équation de propagation

$$\Delta\overrightarrow{E} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \tag{26.26}$$

La relation de dispersion correspondant est donc simplement $\boxed{k^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2 = \frac{n^2}{c^2}\omega^2}$

L'étude de la dispersion dans un milieu électrique nécessite donc de connaître l'expression de n^2. Pour obtenir cette expression, on va utiliser le modèle de l'électron élastiquement lié.

3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 1

✍ Tec&Doc p745-746

On considère l'action d'un champ électromagnétique sur un atome constitué d'un proton, supposé immobile, et d'un électron qui subit alors 3 forces :

- la force de Lorentz $\overrightarrow{F_L} = q\overrightarrow{E}(t)$, en supposant que $\overrightarrow{E}(t)$ est uniforme sur les dimensions d du dipôle (approximation des grandes longueurs : $\lambda \gg d$
- une force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ qui est valable si le système ne s'éloigne pas trop de sa position d'équilibre
- une force de frottement modélisée par $\overrightarrow{F_f} = -\dfrac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}}$

En appliquant le PFD à l'électron, on obtient :

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r} + q\overrightarrow{E}(t) - \frac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}} \tag{26.27}$$

En prenant comme solution une OPPH de la forme $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0}e^{i\omega t}$ et $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, on obtient

$$\overrightarrow{r} = \frac{\dfrac{q}{m}}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E_0}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{26.28}$$

On peut alors exprimer la polarisation $\overrightarrow{P}$ du milieu de 2 façons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = \varepsilon_0\chi_e\overrightarrow{E} & \text{où } \chi_e \text{ est la susceptibilité électrique} \\ \overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p} = n^*q\overrightarrow{r} = \dfrac{n^*q^2}{m}\dfrac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E} & \text{où } n^* \text{ est la densité électronique} \end{cases} \tag{26.29}$$

On peut donc en déduire

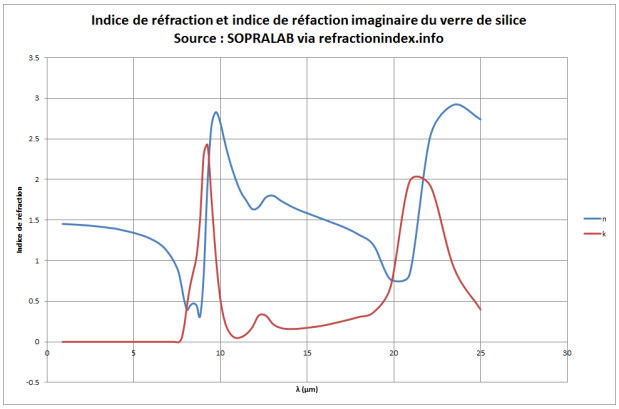
$$\chi_e = \frac{n^*q^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega}{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_p^2 = \frac{n^*q^2}{m\varepsilon_0} \tag{26.30}$$

On obtient finalement

$$\boxed{n(\omega)^2 = \varepsilon_r = 1+\chi_e = 1+\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega}{\tau}} = 1+\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}} - i\frac{\omega}{\tau}\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2\dfrac{\omega^2}{\tau^2}}} \tag{26.31}$$

On peut écrire $n(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega)$ où n'' est l'indice d'absorption car il n'intervient que dans la variation de l'amplitude (donc l'atténuation de l'onde) tandis que $n'(\omega)$ est l'indice de dispersion car il intervient dans la phase de l'onde (et donc sa propagation). Dans **l'approximation des milieux peu denses** (comme un gaz), $|\chi_e| \ll 1$ et on peut faire un DL de n pour obtenir $n = \sqrt{1+\chi_e} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}\chi_e$ et donc écrire

$$n'(\omega) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \tag{26.32}$$



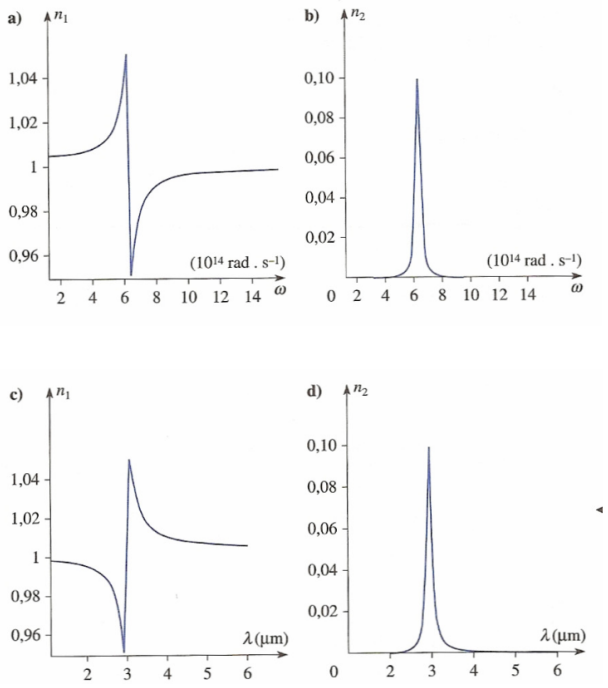


FIGURE 26.3 – Mesures de n' et n'' en fonction de λ et ω (à gauche, figure tirée du ✍ Maulas EM 2e année) et comparaison avec la théorie (à droite).

En dehors du domaine d'absorption, *i.e.* $\omega \ll \omega_0$, on a $n'' = 0$ donc $n = n'$. Tout se passe comme si n, ε_r et χ_e étaient réels et on retrouve la notion d'indice optique. Dans ce cas, on écrit

$$n^2 = (n')^2 = 1 + \chi_e' 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{26.33}$$

Un développement limité en $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ permet alors d'obtenir

$$n' \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) \iff \boxed{n' = A + \frac{B}{\lambda^2}} \tag{26.34}$$

On a retrouvé la **loi de Cauchy** ! Dans le domaine du visible,

$$n' = 1 + 1.36 \times 10^{-4} + \frac{1.06 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

Cela $\lambda_0 = 88$ nm donc loin de λ, ce qui valide l'hypothèse selon laquelle on était loin du domaine d'absorption. Cette loi est important car elle explique les observations expérimentales des réseaux et des arcs-en-ciel.

Remarque

Il faut ici préciser que les deux aspects que l'on a montré de la dispersion (étalement du paquet d'onde et dispersion par le prisme) ne proviennent que de la dépendance non linéaire de n' en ω, et donc traduisent tous deux bien la dispersion sans être contradictoires.

3.3 Modèle de l'électron élastiquement lié, version 2

Personnellement j'aime moins cette version... mais je la met quand même parce que c'est une autre façon de poser les choses.

Dans cette autre version, le but est de connaître n en exprimant le courant de déplacement dans le diélectrique $\overrightarrow{j_{\text{diélec}}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ sous la forme de la somme du courant de déplacement $\overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ dans le vide et d'un courant de polarisation $\overrightarrow{j_P}$.

Pour calculer $\overrightarrow{j_P}$, on se place dans un volume V pour pour voir écrire :

$$\overrightarrow{j_P} = \sum_{\text{électrons } \ell} \frac{-e}{V}\frac{\partial\overrightarrow{r_\ell}}{\partial t} \tag{26.35}$$

On suppose que ce $V \ll \lambda^3$ pour que tous les électrons soient soumis à un champ $\overrightarrow{E}$ de même intensité et de même direction. On considère que les électrons sont réunis dans des groupes où tous les électrons d'un groupe ont les mêmes propriétés (notamment la même vitesse). En notant N_α la densité électronique du groupe d'indice α et $\overrightarrow{r_\alpha}$ sa position, on obtient

$$\overrightarrow{j_P} = \sum_{\text{groupes } \alpha} (-eN_\alpha)\frac{\partial\overrightarrow{r_\alpha}}{\partial t} \tag{26.36}$$

Pour chaque électron, on applique le PFD on considérant qu'ils sont soumis à une force de Lorentz $-e\overrightarrow{E}$, une force de rappel $-K\overrightarrow{r}$ et une force de frottement $-f\overrightarrow{r}$:

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = -K\overrightarrow{r} - e\overrightarrow{E} - f\dot{\overrightarrow{r}} \tag{26.37}$$

En prenant une OPPH, on obtient $\overrightarrow{r} = \dfrac{-e}{K + i\omega f - m\omega^2}\overrightarrow{E}$. Quand on applique cette relation au groupe d'électrons, on obtient

$$\overrightarrow{j_P} = \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha\frac{e^2}{K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2}\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{26.38}$$

On obtient donc finalement

$$\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{j_{\text{diélec}}} = \overrightarrow{j_D} + \overrightarrow{j_P} = \left[\varepsilon_0 + \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha\frac{e^2}{K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2}\right]\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{26.39}$$

avec

$$n^2(\omega) = \varepsilon_r = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} N_\alpha\frac{e^2}{\varepsilon_0(K_\alpha + i\omega f_\alpha - m\omega^2)} \tag{26.40}$$

On peut simplifier l'équation de n^2 en posant :

$$\begin{aligned}\omega_{0,\alpha} = \sqrt{\frac{K_\alpha}{m}}\quad D_\alpha &= \frac{N_\alpha e^2}{\varepsilon_0 K_\alpha}\\ \Gamma_\alpha &= \frac{f_\alpha}{m\omega_{0,\alpha}}\end{aligned} \tag{26.41}$$

avec $\omega_{0,\alpha}$ la pseudo-pulsation l'oscillateur harmonique amorti formé par un électron du groupe α, D_α est un coefficient représentant la contribution du groupe d'électron α à l'indice du milieu, et Γ_α est le facteur rendant compte de l'importance des phénomènes dissipatifs dans le l'oscillateur. Ainsi on a :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{1 + i\Gamma_\alpha\dfrac{\omega}{\omega_{0,\alpha}} - \dfrac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2}} \tag{26.42}$$

Lorsque $\omega = \omega_{0,\alpha}$, on observe un pic pour la partie imaginaire de n. On en déduit que les $\omega_{0,\alpha}$ correspondent aux bandes d'absorption du milieu diélectrique. Sachant que $\Gamma \simeq 10^{-2}$, on peut encore simplifier l'expression de n en se plaçant aisément dans les cas où $|\Gamma| \ll |\dfrac{\omega_{0,\alpha}}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_{0,\alpha}}|$, *i.e.* dans les cas où on est loin des bandes d'absorptions. On obtient alors l'**équation de Sellmeier** :

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2}} \tag{26.43}$$

Il reste une hypothèse à faire pour obtenir la **loi de Cauchy** : on suppose que toutes les bandes d'absorption sont loin du domaine du visible, dans l'ultraviolet. On a donc $\frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2} \ll 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} n^2(\omega) &\simeq 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} D_\alpha \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{0,\alpha}^2}\right) \\ n^2(\omega) &\simeq 1 + \sum_{\text{groupes } \alpha} D_\alpha + \omega^2 \sum_{\text{groupes } \alpha} \frac{D_\alpha}{\omega_{0,\alpha}^2} \end{aligned} \tag{26.44}$$

$$\boxed{n \simeq A + B\omega^2} \tag{26.45}$$

Idées de manip/simulation

- **Dispersion de la lumière blanche par un prisme** Réaliser une image à l'infini (avec un achromat) d'un diaphragme éclairé par une lampe Quartz-Iode mettre un prisme sur le chemin du rayon sortant pour projeter la figure de dispersion sur un mur, maintenant discuter de la largeur de la bande rouge et de la bande violette.
- **Simulation de la dispersion de paquet d'onde dans le verre**
  Parler de la différence avec la propagation le câble coaxial, par exemple le paquet d'onde qui ne se déforme pas de manière symétrique.

4 Dispersion dans un plasma

✍ `plasma.pdf` : http://olivier.granier.free.fr/cariboost_files/PC-ondes-EM-plasma.pdf

4.1 Hypothèses

Un plasma est un milieu ayant les propriété suivantes :

- Il est constitué d'ions positifs supposés fixes dans un gaz d'électrons mobiles. Le tout est électriquement neutre
- Les vitesses sont non relativistes

On le suppose parcouru d'une onde $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)}$

4.2 Relation de dispersion :

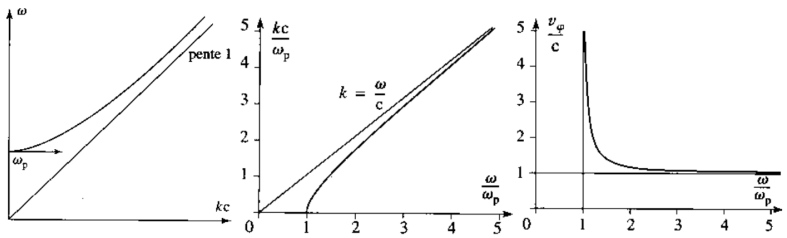


FIGURE 26.4 – La relation de dispersion dans les plasmas.

Afin d'arriver à la relation de dispersion, on passe par quelques étapes de calcul, en posant $\overrightarrow{j}$ la densité de courant électrique dans le plasma. En appliquant Maxwell-Ampère on a

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{26.46}$$

En notation complexe, on peut simplifier les $\overrightarrow{\nabla}\wedge$ et autre Nablaïsteries.

$$\overrightarrow{j} = i\left(\frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B_0}}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \overrightarrow{E_0}\right) e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{j_0} = i\left(\frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B_0}}{\mu_0} + \epsilon_0 \omega \overrightarrow{E_0}\right)$$

L'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ nous donne en notation complexe

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E}}{\omega}$$

Puisque le plasma est localement neutre, l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \Leftrightarrow i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{E} = 0$, traduit l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{E}$. Ainsi le trièdre $[\overrightarrow{k}, \overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}]$ est orthogonal direct. Nous pouvons donc en déduire : $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{B_0} = \overrightarrow{k} \wedge \left(\dfrac{\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{E_0}}{\omega}\right) = -\dfrac{k^2}{\omega}\overrightarrow{E_0}$ et obtenons :

$$\overrightarrow{j_0} = \frac{i\epsilon_0}{\omega}\left(\omega^2 - k^2c^2\right)\overrightarrow{E_0}$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à un électron de masse m, donne :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Or

$$\frac{|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}|}{|\overrightarrow{E}|} \simeq \frac{vB_0}{E_0} \simeq v\frac{k}{\omega} = \frac{v}{v_\phi} \leq \frac{v}{c} \ll 1$$

Nous pouvons donc négliger le terme du au champ magnétique dans l'application du PFD, soit :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -e\overrightarrow{E}$$

Les ions positifs considérés ont une masse largement plus grande que celle des électrons. Nous considérons alors que seuls les électrons sont en mouvement, et que les ions positifs du plasma restent fixes. De ce fait, nous pouvons exprimer la densité de courant $\overrightarrow{j}$:

$$\overrightarrow{j} = -ne\overrightarrow{v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{j}}{\mathrm{d}t} = \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{E}$$

Calculons alors la dérivée temporelle de la densité de courant.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{j}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{j_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)}\right) = \overrightarrow{j_0} i(\underbrace{\overrightarrow{k}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}}_{=0} - \omega)e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)} \quad \text{soit,} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{j}}{\mathrm{d}t} = -i\omega\overrightarrow{j}$$

Nous obtenons alors : $\overrightarrow{j} = i\frac{ne^2}{m\omega}\overrightarrow{E}$. Nous obtenons la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

- $\omega > \omega_p$: k réel positif, donc propagation sans atténuation. A très haute fréquence, le milieu est transparent car les variations du champ électrique sont trop rapides pour être ressenties par les électrons
- $\omega < \omega_p$: k imaginaire pur, pas de propagation, l'onde est totalement réfléchie à l'interface.

OdG : $n \sim 10^{10} - 10^{12}$ $e^-\text{m}^{-3}$ d'où $f_p \sim 900$ kHz $-$ 9 MHz

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \tag{26.47}$$

La fréquence de coupure $\omega_c^2/2\pi$ vaut environ 10^7 Hz pour l'ionosphère par exemple.

4.3 Vitesses

On peut alors établir les expressions des vitesses de groupe et de phase de ce plasma !

$$2k\mathrm{d}k = \frac{2\omega\mathrm{d}\omega}{c^2} \Rightarrow v_\phi v_g = c^2 \qquad \text{et } \frac{1}{v_\phi} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \tag{26.48}$$

D'où finalement

$$v_\phi = c\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{kc}\right)} \tag{26.49}$$

$$v_g = c\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)} \tag{26.50}$$

☕

Visualisation de la dispersion de KG

✍ `python3 paquet_d_onde_dispersion.py coupure` 🕓

Waaaaa.

On voit ici, et dans les équation aussi, que c'est de la dispersion Normale, c'est à dire que le paquet d'onde va moins vite que c. Les petites longueurs d'ondes vont plus vite que les grandes !

Pour communiquer avec les satellites, on utilise donc une fréquence supérieure à f_p (typiquement de l'ordre 1,5 GHz pour le GPS), et une fréquence inférieure pour utiliser les réflexions contre la ionosphère pour communiquer autour de la Terre (2.182 MHz est la fréquence internationale des urgences maritimes).

5 Dispersion des ondes gravito-capillaires

5.1 Ondes gravito-capillaires

✍ Poly de P. Lidon p12 + Guyon, Heulin, Petit

On détaille les calculs, mais à l'oral on peut se contenter de citer les étapes de calcul et les hypothèses.

5.2 Expression du potentiel des vitesses

On considère la propagation à 1 dimension d'ondes à la surface d'un fluide. La hauteur au repos du fluide est notée h et on note $\xi(x,t)$ la variation de hauteur en x à l'instant t. On fait les hypothèses suivantes :

- fluide parfait et incompressible
- fluide irrotationnel au repos et le reste à tout instant t, *i.e.* la perturbation ne crée pas de vorticité.
  On peut donc écrire $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi$ avec Φ qui vérifie l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$.
- l'onde est de faible amplitude donc le champ de vitesse est un terme d'ordre 1

On cherche une solution sous la forme d'onde propagative $\Phi(x,y,t) = \varphi(u = x_c t)\psi(y)$ à l'équation de Laplace. Ainsi,

$$0 = \delta\Phi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2}\psi + \varphi\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} \tag{26.51}$$

Par séparation des variables, on obtient donc

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2} = -k^2 = \frac{-1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}y^2} \tag{26.52}$$

Le potentiel des vitesse Φ doit également satisfaire deux conditions limites :

- la composante normale de la vitesse au fond du liquide est nulle
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$
- la composante normale de la vitesse à la surface du liquide est égale à la composante normale de la vitesse de l'interface (en supposant la normale de l'interface proche de la verticale, *i.e.* des petits angles)
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = v_{\mathrm{interf},y}(h+\xi) = \frac{\partial\xi}{\partial t}$$

On obtient alors l'expression de Φ :

$$\Phi(x,y,t) = Ae^{ik(x_c t)}\cosh(ky) \tag{26.53}$$

5.3 Relation de dispersion

On veut maintenant obtenir la relation de dispersion. Pour cela, on utilise deux relations :

• la relation de Bernoulli

On néglige le terme convectif devant la dérivée temporelle dans l'équation d'Euler ($\Longleftrightarrow$ longueur d'onde $\gg \xi$). On a alors un fluide parfait, incompressible et irrotationnel donc on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gy = \text{constante} \Longleftrightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{26.54}$$

• la loi de Laplace

À la surface du liquide, on obtient en faisant attention au signe et on considérant qu'on a un rayon de courbure infini dans le plan yz :

$$P(x,h+\xi,t) - P_0 = -\frac{\gamma}{R} = -\gamma\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{-1} \tag{26.55}$$

En combinant ces deux relations, on obtient à la surface du liquide :

$$\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=h+\xi} = 0 \tag{26.56}$$

On en déduit enfin la relation de dispersion

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right)\tanh(kh) \tag{26.57}$$

5.4 Expérience

Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires

✍ ⏲ 5 min

Observer la propagation des ondes capillaires avec une cuve à ondes. Un pot vibrant excite un vibreur qui crée des ondes.

Régler le stroboscope pour observer tout le temps le même profil, et mesurer la longueur d'onde directement sur l'écran de projection (attention au facteur de conversion).

Faire quelques points en préparation, le dernier en direct, et tracer $c^2 =\propto 1/\lambda$ ainsi que $c^2 = \frac{g}{k}\left(1 + \frac{\gamma k^2}{\rho g}\right)$. Remonter à l_c.

5.5 Vitesse de phase, vitesse de groupe

Dans le **régime d'eau profonde**, *i.e.* dans le cas où h est bien plus grand que toutes les autres longueurs caractéristiques du système, ce qui permet d'avoir $\tanh(kh) \simeq 1$. La relation de dispersion simplifiée permet ainsi d'obtenir la vitesse de phase de l'onde

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k} = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1 + l_c^2k^2\right)} \tag{26.58}$$

en faisant apparaître une longueur caractéristique, la **longueur capillaire**, donnée par $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Pour l'eau, elle vaut environ 3 mm. La vitesse de groupe vaut, quant à elle,

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{g + \frac{3\gamma}{\rho}k^2}{2\sqrt{gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3}} = \frac{g + 3l_c^2k^2}{2\sqrt{\frac{g}{k}\left(1 + l_c^2k^2\right)}} \tag{26.59}$$

La vitesse de groupe décroît quand k augmente, donc les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite que les petites, contrairement à ce qu'on peut avoir avec la relation de dispersion de Klein-Gordon. On peut observer ce phénomène via une simulation ou une vidéo. Dans le cas où la gravité domine la tension de surface, $l_ck \ll 1$ et on voit que $v_\phi = 2v_g$.

En eau peu profonde, on a $\tanh(kh) \approx kh$, on obtient alors $\omega = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho}k^3\right)kh$. Dans le cas où $l_ck \ll 1$, on remarque que $v_\phi = v_g = \sqrt{gh}$. La relation n'est alors plus dispersive.

Remarque

On peut revenir sur l'expression du rayon critique pour que le trombone flotte et qui a la même expression que la longueur capillaire, et donc le même ordre de grandeur, ce qui n'est pas étonnant puisqu'il s'agit d'une compétition entre gravité et tension de surface.

LP 27

Propagation guidée des ondes

Commentaires du jury

Les questions :

- Comment on transmet longue distance sachant qu'il y a de la perte ? *On met des répétiteurs*
- Intérêt de guider ? *Propagation sphérique, donc perte de puissance et d'énergie.*
- Prix du guidage ? *Limites d'info, dispersion, modes, argent, passe haut, il y a plein de limites en tous genres.*
- Quel est l'intérêt de la fibre à gradient d'indice ? *Gain x 100 en quantité d'info.*
- Qu'est-ce qu'on suppose pour utiliser optique géométrique en fibre ? *Lambda « a largeur de la fibre. C'est ok pour une 15 micron, mais une monomode non.*
- Défaut du plan plan ou des guides en alu ? *L'atténuation, parce que c'est pas un métal parfait. Quand on monte en fréquence, ça devient moins propre et la fibre est mieux.*
- Comment on gère les interfaces ? Pr exemple avec un coax ? *Il faut bien rentrer, bien adapter l'impédance pour ne pas avoir d'onde réfléchie.*
- Intermodal ou intramodal ? Lequel domine ? *Intermodal domine, c'est pour ça que les fibres monomodes sont bien.*
- Est-ce que $\overrightarrow{\beta}$ est un vecteur d'onde ? *Non, parce que l'onde n'est pas une OPPH !*
- C'est quoi un Laplacien vecteur ? *TMTC.*
- Différence entre onde évanescente et onde exponentiellement atténuée ? *Evanescente :* $Ee^{-kx}e^{i\omega t}$, *exp. att. :* $Ee^{-kx}e^{i(\omega t-\beta x)}$

Conseils :

- Mettre le tableau de fin au début, et en faire un fil directeur.
- Tableau, ligne coaxiale, mettre Hz, pas Ghz... (oulàlà la coquille)
- On parle d'onde *Acoustique*, pas sonore. Sonore c'est juste l'audible.
- Pour les manips, la fontaine de lumière c'est bien. Les manips introductives sont très bien cependant.
- Insister sur le fait que le guidage est dû uniquement aux conditions aux limites. Ne pas hésiter à utiliser l'analogie corde de Melde.
- L'aspect énergétique manque un peu...
- Les calculs sur projection, c'est top !
- Parler de l'onde TEM.
- Utiliser le Dunod PC/PSI, et le HPrépa, ce sont de bons bouquins.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Optique physique - Propagation de la lumière*, **Taillet** ⟶ (fibre optique)
- ✍ *Electromagnétisme*, **Pérez** (guide d'onde plan-plan) ⟶

Prérequis

- ➢ Optique géométrique
- ➢ Optique ondulatoire/interférences
- ➢ Electromagnétisme dans le vide
- ➢ Relations de passage

Expériences

- ☕ Guidage d'ultrasons

1 La fibre optique . . . 373
1.1 Conditions d'incidence . . . 373
1.2 Quantification . . . 375
1.3 Condition de phase et quantification, version foireuse . . . 375
1.4 Étude de la fibre . . . 376
2 Guide d'onde plan-plan . . . 377
2.1 Positionnement du problème . . . 377
2.2 Structure du champ électromagnétique . . . 378
2.3 Résolution et étude . . . 379
2.4 Guides réels . . . 380

Introduction : que signifie guider une onde ?

Les ondes constituent un phénomène physique que l'on peut trouver dans tous les domaines de la physique, que ce soit en mécanique des fluides avec les ondes acoustiques, en électromagnétisme avec les ondes électromagnétiques (ou bien en relativité générale avec les ondes gravitationnelles, mais en parler serait s'attirer les foudres du jury).

Une application concrète du guidage des ondes est la communication (que ce soit grâce au son ou bien grâce aux ondes électromagnétiques). Les distances sur lesquelles les ondes doivent être transmises peuvent être suffisamment grandes pour que celles-ci finissent par s'atténuer complètement et donc devenir inutilisables, de l'intérêt du guidage.

Guidage d'ultrasons
Matériel : Un GBF, un haut parleur, un microphone, un oscilloscope et un tube en PVC.

Avec le GBF et le haut parleur, on émet des ultrasons (par exemple à 40 kHz). On regarde la tension aux bornes d'un microphone placé à quelques mètres du haut-parleur et on compare son amplitude sans et avec un tube en PVC placé à la sortie du haut parleur. On a guidé les ultrasons.

Le guidage d'ondes est essentiel pour la communication. Dans cette leçon, nous ne nous intéresserons qu'au guidage d'ondes électromagnétiques par manque de temps et également puisque les applications dans ce domaine sont plus nombreuses.

1 La fibre optique

La fibre optique est l'exemple phare de guidage d'onde électromagnétique. Nous en proposons dans cette partie une modélisation simple dans laquelle intervient une approche géométrique en rayons de la lumière.

1.1 Conditions d'incidence

Notre fibre optique est modélisée par deux cylindres coaxiaux : le cylindre externe est appelé la gaine et a un indice optique n_g tandis que le cylindre interne est appelé le coeur (ou l'âme) et a un indice optique n_c.

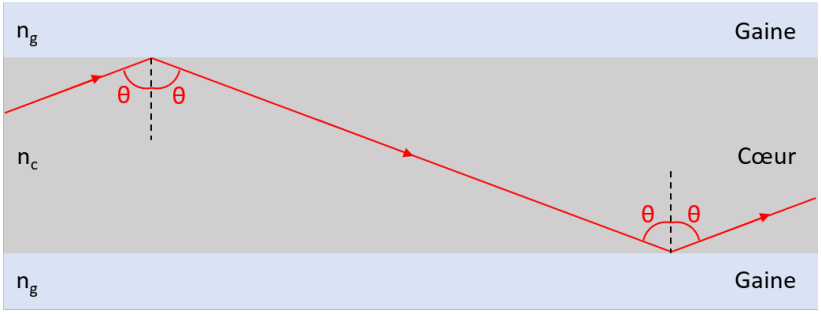


FIGURE 27.1 – Vue en coupe de la fibre optique (modèle simplifié).

Réflexion totale dans la fibre

Afin que la lumière soit guidée dans la fibre, il faut qu'on ait réflexion totale à l'interface entre la gaine et le coeur. En utilisant la loi de Snell-Descartes, cela revient à avoir :

$$\theta > \theta_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right) \tag{27.1}$$

On peut déjà remarquer que cette condition impose $n_g < n_c$.

Ordres de grandeur :

- fibre optique : $n_g = 1.475$ et $n_c = 1.515$ donc $\theta_{lim} = 13°$
- filet d'eau dans l'air : $n_g = 1$ et $n_c = 1.33$ donc $\theta_{lim} = 40°$

Entrée dans la fibre : angle d'acceptance

En entrée de la fibre, il faut que la lumière puisse pénétrer dans le coeur, et qu'après sa réfraction à l'interface entre l'air et le coeur, son angle de réfraction soit assez faible pour qu'il y ait réflexion totale sur l'interface entre le coeur et la gaine.

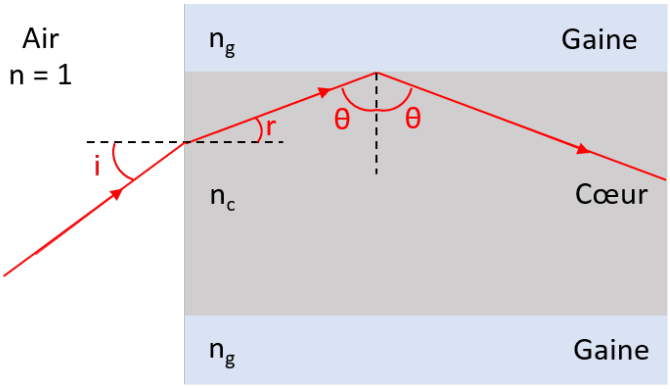


FIGURE 27.2 – Entrée du rayon lumineux dans la fibre optique.

On utilise encore une fois la loi de Snell-Descartes pour relier l'angle d'incidence i du rayon lumineux à l'angle de sortie r du rayon réfracté dans le coeur de la fibre :

$$\sin(i) = n_c \sin(r) = n_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{27.2}$$

$$\Rightarrow \sin(i) = n_c \cos(\theta) = n_c \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \tag{27.3}$$

Nous avons établi précédemment que θ devait être supérieur à un certain angle limite θ_{lim}. Cette condition se traduit alors par le fait que i doit être inférieur à un certain angle limite i_{lim} tel que

$$\sin(i_{lim}) = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \tag{27.4}$$

Ordres de grandeur :

- fibre optique : $i_{lim} = 20°$
- filet d'eau dans l'air : $i_{lim} = 60°$

Ces ordres de grandeur nous montrent à quel point il est plus difficile de guider de la lumière dans une fibre que dans un filet d'eau, ce qui sous-entend un réglage minutieux lorsque l'on veut utiliser une fibre.

1.2 Quantification

Dans cette partie, on utilise une approche interférentielle. Chaque rayon lumineux est associé à une onde monochromatique. On a donc la propagation dans la fibre d'une superposition de ces ondes, qui peuvent interférer. Il serait alors très intéressant de regarder comment faire en sorte que ces interférences soient constructives. Pour cela, on se réfère au schéma de la figure 27.3. Une onde se réfléchie sur le dioptre supérieur en A, puis sur le dioptre inférieur en B. Cependant, l'onde partant de B semble venir d'un point A', symétrique de A par rapport au dioptre inférieur. Cette onde peut alors interférer avec l'onde qui arrivait en A. D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires aux rayons lumineux, et le théorème inverse de la lumière permet d'affirmer que la phase de l'onde en A est identique à celle au point H, projeté orthogonal de A sur le rayon partant de B. On choisit la référence des phases en A pour le rayon avant les réflexions. Le stigmatisme du dioptre inférieur nous garantit alors que cela revient à choisir la référence des phases en A' pour le rayon après les 2 réflexions successives.

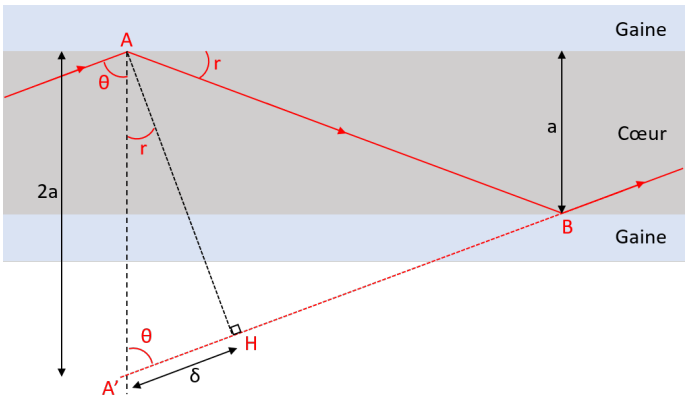


FIGURE 27.3 – Calcul de la différence de marche entre deux ondes réfléchies successives.

De ce raisonnement, on en déduit la différence de marche δ :

$$\delta = \mathrm{n_c A'H} = 2\mathrm{n_c a sin(r)} = 2\mathrm{n_c a cos}(\theta) \tag{27.5}$$

Le déphasage entre les rayons s'exprime alors $\Phi = \dfrac{2\pi}{\lambda'}\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda'} 2\mathrm{a\, n_c}\cos(\theta)$ où $\lambda' = \mathbf{n_c}\lambda$ **est la longueur d'onde dans le coeur**. Finalement,

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\mathrm{a}\cos(\theta)$$

Pour que la lumière se propage dans la fibre sans être atténuée, il suffit que les interférences soient constructives, *i.e.* $\Phi = 2\mathrm{p}\pi$ où p est en entier. On aboutit alors à la condition :

$$\frac{2\mathrm{a}\cos(\theta)}{\lambda} = \mathrm{p} \qquad \text{avec } \mathrm{p} \in \mathbb{Z} \tag{27.6}$$

Cette relation est très intéressante car elle montre que, pour une valeur de λ fixée, la valeur de θ doit être bien choisie pour qu'on puisse obtenir un entier (et inversement pour θ fixé). Cela signifie qu'il est possible de véhiculer plusieurs signaux différents dans la même fibre sous réserve d'avoir choisi pour chaque signal λ et θ tel qu'on obtient un entier p différent avec la relation ci-dessus. Ces signaux peuvent donc passer en même temps dans la même fibre sans interférer les uns avec les autres. On parle alors de modes.

1.3 Condition de phase et quantification, version foireuse

On aboutit au même résultat mais d'une autre façon. Je ne suis personnellement pas convaincu de cette méthode car, comme on peut le voir sur le schéma, on considère des rayons particuliers qui arrivent pile sur les dioptres coeur/gaine inférieur et supérieur. Il faudrait faire le calcul pour deux rayons random pour se convaincre que ça marche, ce que je n'ai pas fait. À utiliser à vos risques et périls donc...

Lorsqu'on faisceau de rayons parallèles cohérents entre dans la fibre, les rayons entrent en interférence. On peut alors calculer la différence de marche maximale entre ces rayons en calculant la différence de marche des rayons entrant dans le coeur juste en-dessous de l'interface supérieure avec la gaine et juste au-dessus de l'interface inférieure avec la gaine.

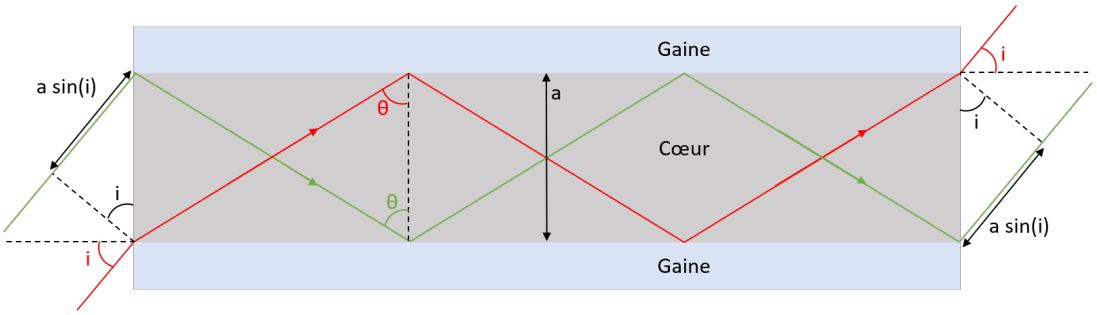


FIGURE 27.4 – Calcul de la différence de marche maximale entre des rayons incidents parallèles entrant dans la fibre.

À l'entrée de la fibre, la différence de marche entre les deux rayons vaut $\delta_{\text{entrée}} = \text{a}\sin(\text{i})$ où a est l'épaisseur du coeur de la fibre. Entre l'entrée et la sortie de la fibre, il n'y a aucune différence de marche entre les deux rayons. Enfin, les rayons émergent de la fibre avec le même angle i qu'à l'entrée et on obtient de nouveau une différence de marche $\delta_{\text{sortie}} = \text{a}\sin(\text{i})$. Au total, la différence de marche entre les deux rayons vaut alors

$$\delta = \delta_{\text{entrée}} + \delta_{\text{sortie}} = 2\text{a}\sin(\text{i})$$

Le déphasage entre les rayons s'exprime alors $\Phi = \dfrac{2\pi}{\lambda'}\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda'}2\text{a}\sin(\text{i}) = \dfrac{2\pi}{\lambda'}2\text{a}\,\text{n}_\text{c}\cos(\theta) = \dfrac{2\pi}{\lambda}2\text{a}\cos(\theta)$ où $\lambda' = \mathbf{n_c}\lambda$ **est la longueur d'onde dans le coeur**. Pour que la lumière se propage dans la fibre sans être atténuée, il suffit que les interférences soient constructives, *i.e.* $\Phi = 2\text{p}\pi$ où p est en entier. On aboutit alors à la condition :

$$\frac{2\text{a}\cos(\theta)}{\lambda} = \text{p} \qquad \text{avec } \text{p} \in \mathbb{Z} \tag{27.7}$$

Cette relation est très intéressante car elle montre que, pour une valeur de λ fixée, la valeur de θ doit être bien choisie pour qu'on puisse obtenir un entier (et inversement pour θ fixé). Cela signifie qu'il est possible de véhiculer plusieurs signaux différents dans la même fibre sous réserve d'avoir choisi pour chaque signal λ et θ tel qu'on obtient un entier p différent avec la relation ci-dessus. Ces signaux peuvent donc passer en même temps dans la même fibre sans interférer les uns avec les autres. On parle alors de modes.

1.4 Étude de la fibre

Passe-haut en fréquence

A p fixé, on remarque que si λ augmente, alors θ augmente également. Cependant, la valeur de θ est minoré par θ_{lim} afin d'avoir une réflexion totale dans la fibre. Cela impose donc que $\cos(\theta) < \cos(\theta_{\text{lim}})$, et donc :

$$\lambda < \lambda_{\text{lim}} = \frac{2\text{a}}{\text{p}}\cos(\theta_{\text{lim}}) \iff \nu > \nu_{\text{lim}} = \frac{\text{p}\,\text{c}}{2\text{a}\cos(\theta_{\text{lim}})} \tag{27.8}$$

Ainsi, la fibre se comporte comme un passe-haut en fréquences lorsque l'on s'intéresse à un mode p donné, ce qui est intéressant puisqu'il n'y a pas tant de passe-hauts physiques que ça. On peut interpréter cela comme une énergie minimale nécessaire pour entrée dans la fibre.

Vitesse de l'onde

Notons L la longueur de la fibre. La lumière traverse la vibre en une durée Δt. On a vu que la lumière se déplace en zig-zag avec des réflexions totales à l'interface entre la gaine et le coeur, si bien qu'elle parcourt dans la fibre une distance $L_{eff} > L$. Un peu de géométrie nous permet d'obtenir :

$$L_{eff} = \frac{L}{\sin(\theta)}$$

La présence de l'indice n_c se justifie par le fait que la lumière ne se propage pas dans vide. Il faut tenir compte du milieu de propagation.

On introduit la vitesse de l'information du point de vue de l'observateur $c_{eff} = \frac{L}{\Delta t}$. Il est possible d'exprimer cette vitesse en fonction de la vitesse de la lumière dans le vide c :

$$c_{eff} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L_{eff}}{\Delta t}\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad c_{eff} = \frac{c}{n_c}\sin(\theta) < c \tag{27.9}$$

On voit que c_{eff} dépend de θ, donc c_{eff} dépend également du mode que l'on considère. En utilisant l'expression de $\cos(\theta^p)$ et la relation $\sin^2 + \cos^2 = 1$, on obtient la vitesse de la lumière dans la fibre pour le mode p :

$$c_{eff}^p = \frac{c}{n_c}\sin(\theta^p) = \frac{c}{n_c}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda p}{2a}\right)^2} \tag{27.10}$$

On a là une relation de dispersion inter-modale. Elle nous montre que l'information se propage beaucoup plus lentement pour les modes où p est grand.

Ordres de grandeur : a=15 µm, λ=633 nm (laser Hélium-Néon)

- mode p=1 : $c_{eff}^{p=1} = 1.97 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = \frac{2}{3}$ c
- mode p=42 : $c_{eff}^{p=42} = 9.90 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} = \frac{1}{3}$ c

On peut également définir un ordre p_{max} qui correspond à l'entier maximal tel que $\frac{\lambda p}{2a} < 1$. Pour l'ordre de grandeur précédent, on obtient p_{max}=47. C'est une information importante puisqu'elle nous donne une limite sur la quantité d'information que l'on peut faire passer dans la fibre.

Cependant, on a de la dispersion intermodale puisque les modes parcourront des chemins optiques plus ou moins longs. Cependant, il est possible de limiter le nombre d'ordres avec la relation

$$\frac{n_c}{n_g} > \cos(\theta_p) = \sqrt{1 - \frac{p^2\lambda^2}{4a^2}} \iff p < \frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2}}{n_g}\frac{2a}{\lambda} \tag{27.11}$$

Nous avons pour l'instant étudié la fibre optique avec une approche géométrique. Il est cependant possible de s'intéresser à d'autres guides d'onde en utilisant une approche électromagnétique

2 Guide d'onde plan-plan

2.1 Positionnement du problème

Dans cette partie, nous considérons deux plans semi-infinis en z=0 et en z=h. Ces plans semi-infinis sont en métal, et entre ceux-ci il y a du vide. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- le métal est un conducteur parfait, *i.e.* il ne peut y avoir d'ondes évanescentes
- nous n'avons que des charges et des courants surfaciques en z=0 et en z=h

Les choix que l'on effectue sont les suivants :

- le problème est invariant par translation selon $\mathbf{e}_y$, donc toutes les dérivées selon y sont nulles
- l'onde se propage dans la direction $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{e}_x$

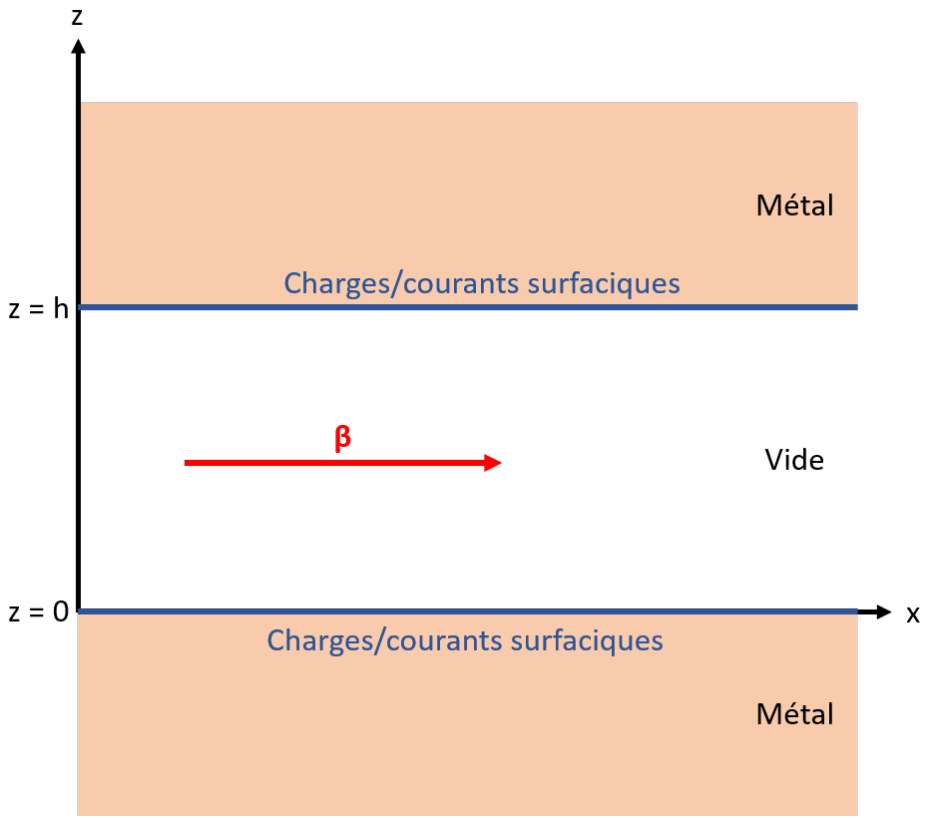


FIGURE 27.5 – Schéma du guide plan-plan.

Nous pouvons également écrire les conditions aux limites pour les champs **E** et **B** :

- $B_z(z=0) = B_z(z=h) = 0$ car $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ dans le métal et B_z est continu en z=0 et en z=h.
- $E_x(z=0) = E_x(z=h) = 0$ et $E_y(z=0) = E_y(z=h) = 0$ car $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ dans le métal et E_x et E_y sont continus en z=0 et z=h.

2.2 Structure du champ électromagnétique

Écrivons les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{27.12}$$

En sachant que les dérivées selon y sont nulles, on peut réécrire ces équations pour obtenir deux systèmes indépendants de 4 équations :

$$\begin{cases} \partial_x E_x + \partial_z E_z = 0 \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\partial_t B_y \\ -\partial_z B_y = \dfrac{1}{c^2}\partial_t E_x \\ \partial_x B_y = \dfrac{1}{c^2}\partial_t E_z \end{cases} \tag{27.13}$$

$$\begin{cases} \partial_x B_x + \partial_z B_z = 0 \\ \partial_z B_x - \partial_x B_z = \dfrac{1}{c^2}\partial_t E_y \\ -\partial_z E_y = -\partial_t B_x \\ \partial_x E_y = -\partial_t B_z \end{cases} \tag{27.14}$$

Le système 27.13 correspond aux ondes transverses magnétiques (TM), et le système 27.14 correspond aux ondes transverses électriques (TE). Dans la suite, nous allons uniquement étudier les ondes TE (l'étude des ondes TM se fait de manière analogue). Cela nous sera très utile puisqu'une onde électromagnétiquepourra toujours être décomposée comme étant une combinaison linéaire d'une onde TE et d'une onde TM.

2.3 Résolution et étude

On étudie une onde TE monochromatique, mais qui n'est pas forcément plane. Le champ électrique $\mathbf{E}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(z) e^{i(\omega t - \beta x)} \mathbf{e_y} \tag{27.15}$$

L'évolution de $\mathbf{E}$ est donnée par l'équation d'Alembert

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{27.16}$$

En appliquant cette équation au champ $\mathbf{E}$ donné ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) E(z) = 0 \iff \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} + K^2 E(z) = 0 \tag{27.17}$$

La résolution de cette équation dépend du signe de K^2 :

- Si $K^2 < 0$, la solution est une exponentielle réelle et l'onde est alors exponentiellement atténuée. On ne s'intéressera pas à ce cas.
- Si $K^2 > 0$, la solution est une combinaison linéaire d'un cosinus et d'un sinus, et l'onde est propagative. On se placera dans ce cas dans la suite de cette section.

Dans le cas où $K^2 > 0$, la solution à l'équation 27.17 s'écrit sous la forme

$$E(z) = A\cos(Kz) + B\sin(Kz) \quad \text{où A et B sont des constantes réelles} \tag{27.18}$$

On utilise ensuite les conditions limites énoncées précédemment :

$$\begin{cases} \mathrm{E(z{=}0)} = 0 & \iff \mathrm{A} = 0 \\ \mathrm{E(z{=}h)} = 0 & \iff \mathrm{Kh} = \mathrm{p}\pi \qquad \text{où p est un entier} \end{cases} \tag{27.19}$$

Finalement, le champ électrique s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{E}_\mathrm{p}(\mathrm{z}) = \mathrm{E}_0 \sin\left(\mathrm{p}\pi\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{h}}\right) e^{i(\omega t - \beta_\mathrm{p} \mathrm{x})} \mathbf{e_y}} \tag{27.20}$$

On voit de nouveau apparaître des modes, comme dans le cas de la fibre ! Ici, on a la condition Kh=pπ qui nous donne la relation de dispersion

$$\beta_\mathrm{p}^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \left(\mathrm{p}\frac{\pi}{\mathrm{h}}\right)^2 \tag{27.21}$$

L'onde se propage si et seulement si $\beta_\mathrm{p}^2 > 0$, c'est à dire si

$$\boxed{\omega > \mathrm{pc}\frac{\pi}{\mathrm{h}} = \omega_\mathrm{p}} \tag{27.22}$$

On retrouve, comme pour la fibre, un comportement passe-haut en fréquence !

Ordres de grandeur :

h= 5 mm donc $\omega_1 = 1.88 \times 10^{11}$ rad s^{-1} $\iff$ $\mathrm{f}_1 = 3.0 \times 10^{10}$ Hz

2.4 Guides rééls

Il est important de noter que ce guide est purement théorique. Dans la pratique, on peut par exemple utiliser un guide rectangulaire où un câble coaxial. Dans le cas du guide rectangulaire, on utilise deux paires de plaques pour fermer le guide et empêcher le rayonnement, ce qui rajoute un indice q. On obtient des modes décrits par le couple (p, q) avec la relation de dispersion

$$\beta_\mathrm{p}^2 = \frac{\omega^2}{\mathrm{c}^2} - \left(\mathrm{p}\frac{\pi}{\mathrm{h}}\right)^2 - \left(\mathrm{q}\frac{\pi}{\mathrm{b}}\right)^2 \tag{27.23}$$

La nouvelle pulsation de coupure devient alors

$$\omega_{\mathrm{p,q}} = \pi\mathrm{c}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{h}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{b}}\right)^2} \tag{27.24}$$

Ordres de grandeur :

h=6 cm et b=3 cm donc $f_{1,0} = \dfrac{\mathrm{c}}{2\mathrm{h}} = 2.5$ GHz, $f_{0,1} = \dfrac{\mathrm{c}}{2\mathrm{b}} = 5$ GHz et $f_{1,1} = \dfrac{\mathrm{c}}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{h}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{b}^2}} = 0.4$ GHz.

On peut noter qu'il est possible d'avoir un guidage monomode si

$$\omega_{0,1} < \omega < \omega_{1,0}$$

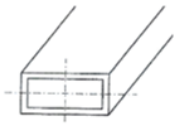
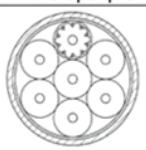
	Ligne bifilaire	Ligne coaxiale	Guide d'ondes	Fibre optique
Vue en coupe				
Fréquence d'utilisation	10^9 Hz	10^{10} GHz	3 - 90 GHz	10^{14} Hz
Bande passante	Très faible	12 - 60 MHz	10 GHz	1 GHz
Modes	-	TE, TM, TEM	TE, TM	-
Atténuation	-	-	-0.1 dB/m	-0.01 dB/m
Débit de données	1 communication téléphonique par ligne	Plusieurs centaines de communications	-	10^{10} bits/s

FIGURE 27.6 – Propriétés de différents guides d'ondes

Conclusion

Nous avons étudié la fibre optique et une guide plan-plan afin d'illustrer la notion de guide d'onde. Nous avons pu montrer l'existence de modes de propagation ainsi que démontrer le comportement passe-haut en fréquence de ces guides d'onde. Cependant, le modèle que nous avons utilisé pour la fibre est très simplifié et ne correspond pas à la réalité (gradient d'indice optique dans la fibre), et il existe d'autres guides d'onde qui n'ont pas été traités dans cette leçon (que ce soit pour les ondes électromagnétiqueou bien d'autres types d'onde). Cependant, peu importe le type d'onde étudié, les calculs et les raisonnements restent relativement analogues.

Ouverture : Cette leçon donne des conditions de propagation dans les différents guides d'onde mais ne propose aucun aspect énergétique. Cette étude fera l'aspect d'une prochaine leçon dans laquelle nous quantifierons les pertes en énergie dans les guides d'onde et comment amplifier le signal pour obtenir une information lisible en sortie.

LP 28

Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Commentaires du jury

- **2017 :** Cette leçon ne doit pas se limiter à un cours sur les milieux diélectriques ; cela n'en est pas l'objet.
- Jusqu'en 2013, le titre était : Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.
- **2009-2010 :** Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.
- **2006 :** Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.
- **2001 :** Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.
- **1999 :** Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.
- **1998 :** Cette leçon mérite une discussion physique des phénomènes de dispersion et d'absorption, supportée par des modèles de milieux matériels. Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans de longs calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.

Niveau : L2/L3

Bibliographie

✍ *Ondes (bleu)*, **Brébec**	⟶ Cours
✍ *Electromagnétisme 4* , **Bertin Faroux Renault**	⟶ Chapitre 9
✍ *EM*, **Mauras**	⟶
✍ *Physique des ondes*, **Olivier et Gié**	⟶
✍ *La physique par les objets quotidiens*, **Ray**	⟶ Micro-onde
✍ *Exercices et problèmes de physique*, **Olivier**	⟶ Four à micro-onde
✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet**	⟶ Intro
✍ *Milieux diélectriques*, **Garing**	⟶ Effets non linéaires

Prérequis

- Électromagnétisme dans le vide
- Moment dipolaire
- Polarisation dans la matière
- Équation d'onde
- Dispersion

Expériences

☕

1 Milieu diélectrique . . . 385
1.1 Définition . . . 385
1.2 Polarisation dans un milieu matériel . . . 385
1.3 Équations de Maxwell dans un milieu diélectrique . . . 386
1.4 Cas du milieu diélectrique linéaire homogène isotrope . . . 387
1.5 Rappels : étude énergétique . . . 387
2 Ondes électromagnétiques dans un diélectrique . . . 388
2.1 Équation de propagation et relation de dispersion . . . 388
2.2 Modèle de l'électron élastiquement lié (Lorentz, début du XXème siècle) . . . 389
2.3 Absorption : loi de Beer-Lambert . . . 392
2.4 Dispersion : loi de Cauchy . . . 393
3 Calcul : interface entre deux diélectriques . . . 394
3.1 Modèle de la couche . . . 394
3.2 Lien avec le modèle idéal . . . 395
3.3 Relations de passage . . . 395
4 Lois à l'interface . . . 397
4.1 Lois de Snell-Descartes . . . 397
4.2 Coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale . . . 398
4.3 Étude énergétique . . . 400

Introduction

Jusqu'à aujourd'hui, on a étudié essentiellement la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Mais commment expliquer certains phénomènes tels que l'absorption d'une onde EM dans la matière ? Pour répondre à cette question, on est amené à étudier des matériaux que l'on qualifie de diélectriques.

1 Milieu diélectrique

1.1 Définition

Définition : Un **diélectrique** est un matériaux qui possède un moment dipolaire permanent ou est susceptible d'en acquérir un sous l'action d'un camps électrique.

Exemple de milieux diélectriques : L'eau, les plasmas, etc.

Il existe une différence entre les milieux diélectriques et le milieux conducteurs. En effet dans un diélectrique les charges restent attachées à un point fixe, alors que dans un conducteur elles sont libres.

On se limitera, dans le cadre de cette leçon, à $\overrightarrow{j_{\text{libre}}} = \overrightarrow{0}$ et $\rho_{\text{libre}} = 0$, et l'aimantation est nulle.

1.2 Polarisation dans un milieu matériel

✍ BFR4

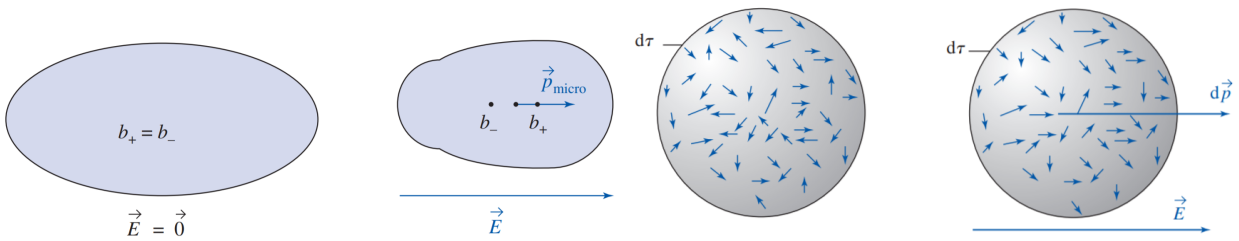


FIGURE 28.1 – Les schémas pour visualiser la polarisation. 1 : une polarisation microscopique. 2 : la polarisation à l'échelle mésoscopique

Dans le modèle du diélectrique, l'application d'un champs extérieur $\overrightarrow{E}$ induit un déplacement de charges liées. Il y a alors séparation des barycentres des charges positives et négatives, ce qui entraîne l'apparition d'un moment dipolaire $\overrightarrow{p}$, dont l'unité est le C m. Nous verrons plus tard un modèle de cette séparation.

L'existence de ce moment entraine la création d'un champs électrique dit **champs dipolaire**, que nous avons déjà étudié [1], $\overrightarrow{E_M}$. Dans la suite de ce cours on se place dans l'approximation des milieux dilués, où ce champs est négligeable devant les champs électriques propagés.

La traduction macroscopique de l'existence de moment dipolaire est l'apparition d'une densité de moment dipolaire, que l'on nomme **Vecteur polarisation** $\overrightarrow{P}$, s'exprimant en C m^{-2}, d'expression :

$$\overrightarrow{P} = \frac{\partial \overrightarrow{p}}{\partial \tau} \tag{28.1}$$

Dans le cas simple où cette densité est uniforme (mésoscopiquement), on peut écrire $\overrightarrow{P} = \frac{1}{V}\sum_i q_i \overrightarrow{r_i}$. On voit alors apparaître un courant, que l'on nomme **courant lié**, et que l'on exprime via son vecteur de densité de courant :

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Dipôle_électrostatique

$$\overrightarrow{j_{\text{liée}}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{28.2}$$

On peut alors lui associer une densité de charge liée telle que

$$\frac{\partial \rho_{\text{liée}}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{j_{\text{liée}}} = 0 \tag{28.3}$$

On obtient finalement l'expression suivante :

$$\rho_{\text{liée}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \tag{28.4}$$

On peut enfin exprimer une densité surfacique de chargen sur la surface orientée $\vec{S}$, comme illustré sur la figure qui suit :

$$\sigma_{\text{liée}} = \vec{P} \cdot \vec{n} \tag{28.5}$$

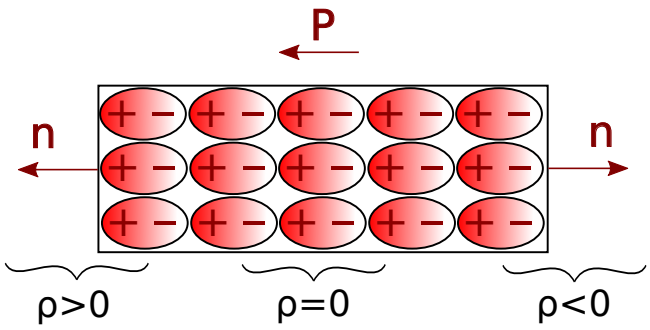


Figure 28.2 – Illustration de la densité de

1.3 Équations de Maxwell dans un milieu diélectrique

Maintenant qu'on a un nouveau vecteur à prendre en compte, on peut réécrire, dans le cadre de l'approximation des milieux diélectriques dilués, les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{\text{libre}}}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla} \cdot \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{cases} \tag{28.6}$$

Ainsi on peut poser les vecteurs naturels de l'électromagnétisme dans les milieux, à savoir $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. On a alors les "bonnes" équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{28.7}$$

Cependant ce système a 9 équations scalaires (car un rot ça ne compte que pour 2, et oui Gimli [2]), pour 12 inconnues. Il va falloir rajouter des conditions ou des équations pour résoudre ! La solution c'est de faire une hypothèse de plus.

1.4 Cas du milieu diélectrique linéaire homogène isotrope

On va se placer dans le cas des milieux linéaires, homogènes et isotropes. Ce que cela signifie c'est que :

- Il existe un lien linéaire EN ESPACE DE FOURIER entre $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{E}$, nommé "tenseur **susceptibilité électrique**".

$$\overrightarrow{\tilde{P}} = \varepsilon_0 \left[\chi_e\right](\omega) \overrightarrow{\tilde{E}} \tag{28.8}$$

- Le milieu étant isotrope, $[\chi_e]$ est en fait un scalaire.
- Le milieu est homogène, donc il n'y a pas de dépendance dans l'espace de cette relation.

Sous ces hypothèses on obtient avec joie de vivre et envie l'équation constitutive d'un DLHI :

$$\overrightarrow{\tilde{D}} = \varepsilon_0(1+\chi_e(\omega))\overrightarrow{\tilde{E}} = \overrightarrow{\tilde{D}} = \varepsilon_0\varepsilon_r \overrightarrow{\tilde{E}} = \varepsilon \overrightarrow{\tilde{E}} \tag{28.9}$$

Gaz (20°C – 1atm)	$10^6\chi_e$	Liquides (20°C)	ε_r	Solides	ε_r
Hélium	65	Eau	80, 36	Diamant	5, 5
Néon	127	CCl_4	2, 238	Silice pure	3, 78
Argon	517	Benzène	2, 284	Paraffine	2, 20
Hydrogène	254	Nitrobenzène	35, 74	Nylon	3, 5
Oxygène	495	Acide acétique	6, 15	Polyéthylène	2, 3
Azote	547	Éthanal	4, 34	Verres	4 à 7
Gaz carbonique	921	Éthanol	25.1	Plexiglass	3, 4
Air sec	537	Glycérol	43.5	Téflon	2, 1
		Acétone	21, 2	Titane de Baryum	~ 1500

TABLE 28.1 – Valeurs de ε_r et de χ_e pour des DLHI. Les valeurs sont ici statiques, donc réelles. (EM 2 éd. Dunod)

1.5 Rappels : étude énergétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique vaut, dans un milieu LHI, $w = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon E^2\right)$.

Le vecteur de Poynting, noté $\overrightarrow{\Pi}$ est défini par $\overrightarrow{\Pi} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$

2. https://youtu.be/KjsSvjA5TuE

Pour comprendre l'intérêt de ce vecteur, prenons sa divergence :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\overrightarrow{\Pi}) &= \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}) && (28.10)\\
&= \frac{1}{\mu_0}(\overrightarrow{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E}) - \overrightarrow{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{B})) && (28.11)\\
&= \frac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{B}.\left(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) - \overrightarrow{E}.\left(\varepsilon\mu\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\right) && (28.12)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}+\frac{\varepsilon E^2}{2}\right) && (28.13)\\
&= -\frac{\partial w}{\partial t} && (28.14)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\Pi}) + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad (28.15)$$

On voit alors que le vecteur de Poynting représente la propagation de l'énergie. La puissance $\mathrm{d}^2\mathcal{P}$ transportée par l'onde à travers une surface $\overrightarrow{\mathrm{d}^2S}$ vaut :

$$\mathrm{d}^2\mathcal{P} = \overrightarrow{\Pi}.\overrightarrow{\mathrm{d}^2S} \qquad (28.16)$$

La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting vaut

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \frac{\Re(\underline{\overrightarrow{E}}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}^*)}{2\mu_0} \qquad (28.17)$$

2 Ondes électromagnétiques dans un diélectrique

Lorsqu'on éclaire un DLHI dilué (par exemple de la vapeur de sodium) avec une pulsation ω_0 et qu'on trace le spectre de l'intensité diffusée en fonction de ω, on observe un pic pour la pulsation ω_0 : c'est ce qu'on appelle la résonance optique. Il existe également d'autres résultats expérimentaux traitant de l'interaction d'onde EM avec un diélectrique tels que la loi de Beer-Lambert ou la loi de Cauchy. On va tenter de comprendre ces phénomènes en étudiant la propagation d'une onde EM dans un diélectrique.

2.1 Équation de propagation et relation de dispersion

On se place dans le cas du milieu **DLHI parfait** et non magnétique. On a donc

$$\begin{cases}
\rho_{\text{libres}} = 0\\
\overrightarrow{j_{\text{libres}}} = \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{H}
\end{cases}$$

Dans ces conditions, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases}
\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{D} = 0\\
\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\\
\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B} = 0\\
\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \mu_0\dfrac{\partial\overrightarrow{D}}{\partial t}
\end{cases} \qquad (28.18)$$

Puisqu'on a supposé le milieu linéaire, homogène et isotrope, on peut passer dans le domaine de Fourier avec une OPPH $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)}$. On peut donc utiliser la relation $\overrightarrow{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r \overrightarrow{E}$, qui permet par ailleurs d'écrire grâce à l'homogénéité du milieu

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\overrightarrow{D}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{D} = 0$$

On utilise ensuite la formule d'analyse vectorielle valable pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V}) - \Delta\overrightarrow{V}$$

pour obtenir **2 expressions différentes** de $\overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\nabla}\wedge(-i\omega\overrightarrow{B}) = -i\omega\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = -\mu_0 i\omega\left(i\omega\overrightarrow{D}\right) = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega^2\overrightarrow{E} \end{cases} \tag{28.19}$$

On trouve alors l'équation de propagation dans le domaine de Fourier :

$$\Delta\overrightarrow{E} + \frac{\varepsilon_r\omega^2}{c^2}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \tag{28.20}$$

Cette équation est similaire à l'équation de propagation d'une onde EM dans le vide au facteur ε_r près. La relation de dispersion correspondante est alors simplement

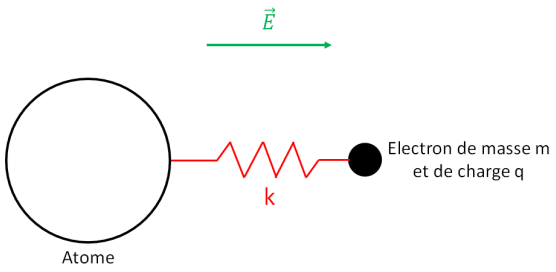
$$k^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2 = \frac{n^2}{c^2}\omega^2 \tag{28.21}$$

On arrive à un cul de sac : on ne connaît pas $n(\omega)$. Pour le déterminer, on va utiliser le modèle de l'électron électriquement lié.

2.2 Modèle de l'électron élastiquement lié (Lorentz, début du XXème siècle)

On étudie le modèle phénoménologique de l'électron élastiquement lié (pour l'hydrogène ou des atomes monoélectroniques). Pour cela, on suppose que le noyau est fixe (car il est 1000 fois plus massif que l'électron), et on suppose que l'électron subit les forces suivantes :

- la force de Lorentz $\overrightarrow{F_L} = -e\overrightarrow{E}(t)$, en supposant que $\overrightarrow{E}(t)$ est uniforme sur les dimensions d du dipôle, *i.e.* à l'échelle de l'atome (approximation des grandes longueurs : $\lambda \gg d$)
- une force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ qui est valable si le système ne s'éloigne pas trop de sa position d'équilibre. Il s'agit d'une modélisation **empirique** de l'interaction Coulombienne donc la forme est adaptée à l'étude de la résonance optique ($\nu_0 = 10^{14}$-10^{15} Hz, dans le domaine du visible).
- une force de frottement fluide modélisée par $\overrightarrow{F_f} = -\frac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}}$. Elle représente la perte d'énergie par rayonnement de l'électron accéléré



En notant $\overrightarrow{r}$ la position de l'électron par rapport au barycentre immobile des charges positives (la noyau), on peut appliquer le PFD et obtenir :

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r} - e\overrightarrow{E}(t) - \frac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}} \tag{28.22}$$

En prenant comme solution une OPPH de la forme $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0}e^{i\omega t}$ et $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})}$ et en passant dans le domaine de Fourier, on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{r} = -\frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E}} \tag{28.23}$$

Le moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ vaut alors $\overrightarrow{p} = -e\overrightarrow{r}$ et il peut être relié à la polarisation $\overrightarrow{P}$ du milieu diélectrique dans l'hypothèse des milieux dilués par $\overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p}$ où n^* est la densité électronique du milieu. On peut donc exprimer $\overrightarrow{P}$ de 2 façons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p} = -n^*e\overrightarrow{r} = \dfrac{n^*e^2}{m}\dfrac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{P} = \varepsilon_0\chi_e\overrightarrow{E} \end{cases} \tag{28.24}$$

Polarisabilité

On définit la **polarisabilité** $\alpha(\omega)$ du milieu diélectrique, exprimée en m^3, par $\overrightarrow{p} = \varepsilon_0\alpha(\omega)\overrightarrow{E}$. Or on a établi que

$$\overrightarrow{p} = -e\overrightarrow{r} = \frac{\frac{e^2}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E}$$

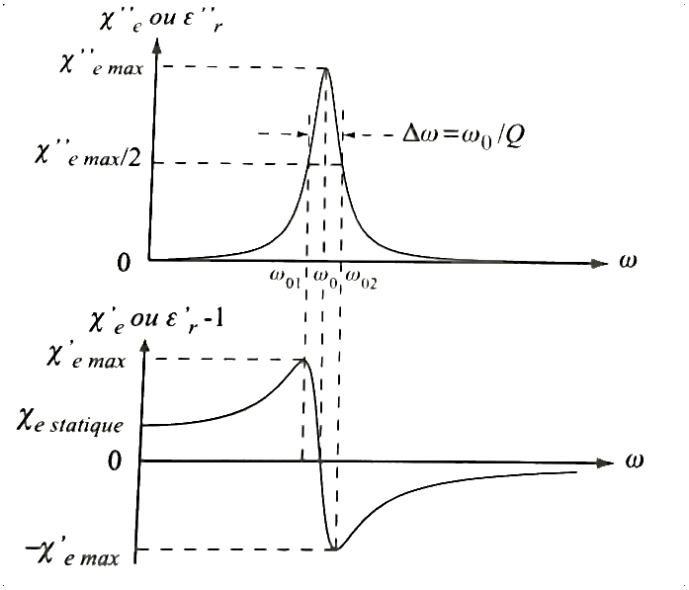
Par identification, on en déduit que

$$\alpha(\omega) = \frac{\frac{e^2}{m\omega_0}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}}$$

On peut donc exprimer à l'aide ces deux relations la susceptibilité électrique du diélectrique :

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega) &= \frac{n^*e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega}{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \omega_p^2 = \frac{n^*e^2}{m\varepsilon_0} \\ &= \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} - i\frac{\omega}{\tau}\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2\frac{\omega^2}{\tau^2}} \\ &= \chi_e'(\omega) - i\chi_e''(\omega) \end{aligned} \tag{28.25}$$

Notons que χ_e dépend de ω, donc son expression est **uniquement valable en Fourier**. On remarque également que χ_e est complexe. L'évolution de ses parties réelle et imaginaire en fonction de ω est montrée dans le ✍ Mauras :



On observe un pic de résonance à ω_0, qui correspond donc à une **bande d'absorption** du diélectrique.

Autre source de polarisation

La polarisabilité électronique n'est pas la seule source microscopique de polarisation. Il faut aussi citer la polarisabilité ionique, même phénomène mais changement d'échelle, ω correspond à de l'IR et la polarisabilité d'orientation qui concerne l'alignement des moments dipolaires permanents avec un champ extérieur.

On obtient finalement

$$\begin{aligned} n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega) &= 1 + \chi_e(\omega) \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} - i\frac{\omega}{\tau}\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2\dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \end{aligned} \tag{28.26}$$

On trouve donc que $n(\omega)$ est complexe et peut donc s'exprimer sous la forme $n(\omega) = n'(\omega) - in''(\omega)$. Dans le cas des milieux peu denses, $|\chi_e| \ll 1$ et donc on peut écrire

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \chi_e(\omega)} \simeq 1 + \frac{1}{2}\chi_e(\omega)$$

On peut donc écrire

$$\boxed{\begin{aligned} n'(\omega) &\simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \\ n''(\omega) &\simeq \frac{1}{2}\frac{\omega}{\tau}\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2\dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \end{aligned}} \tag{28.27}$$

De plus, puisque $k = \dfrac{n(\omega)}{c}\omega$, cela signifie que k ext également complexe et s'exprime sous la forme

$$\overrightarrow{k}(\omega) = \overrightarrow{k'}(\omega) - i\overrightarrow{k''}(\omega) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \left\|\overrightarrow{k'}\right\| = \dfrac{\omega}{c}n' \\ \left\|\overrightarrow{k''}\right\| = \dfrac{\omega}{c}n'' \end{cases}$$

Quand on insère cette expression dans l'OPPH, on trouve alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})} \\ &= \overrightarrow{E_0}\exp\left(-\overrightarrow{k''}\cdot\overrightarrow{r}\right)\exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k'}\cdot\overrightarrow{r})\right) \end{aligned} \tag{28.28}$$

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp\left(-\frac{\omega}{c} n'' \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r}\right) \exp\left(i(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{r})\right)} \tag{28.29}$$

On voit que n'' intervient dans l'amplitude de l'onde (et donc son atténuation) alors que n' intervient dans sa phase (donc sa propagation), c'est pourquoi n'' est appelé l'**indice d'absorption** tandis que n' est appelé l'**indice de dispersion**.

Remarque

Le signe - dans $\overrightarrow{k}(\omega) = \overrightarrow{k'}(\omega) - i\overrightarrow{k''}(\omega)$ est une convention qui permet d'avoir le terme $\exp\left(-\overrightarrow{k''} \cdot \overrightarrow{r}\right)$ et non pas $\exp\left(+\overrightarrow{k''} \cdot \overrightarrow{r}\right)$.

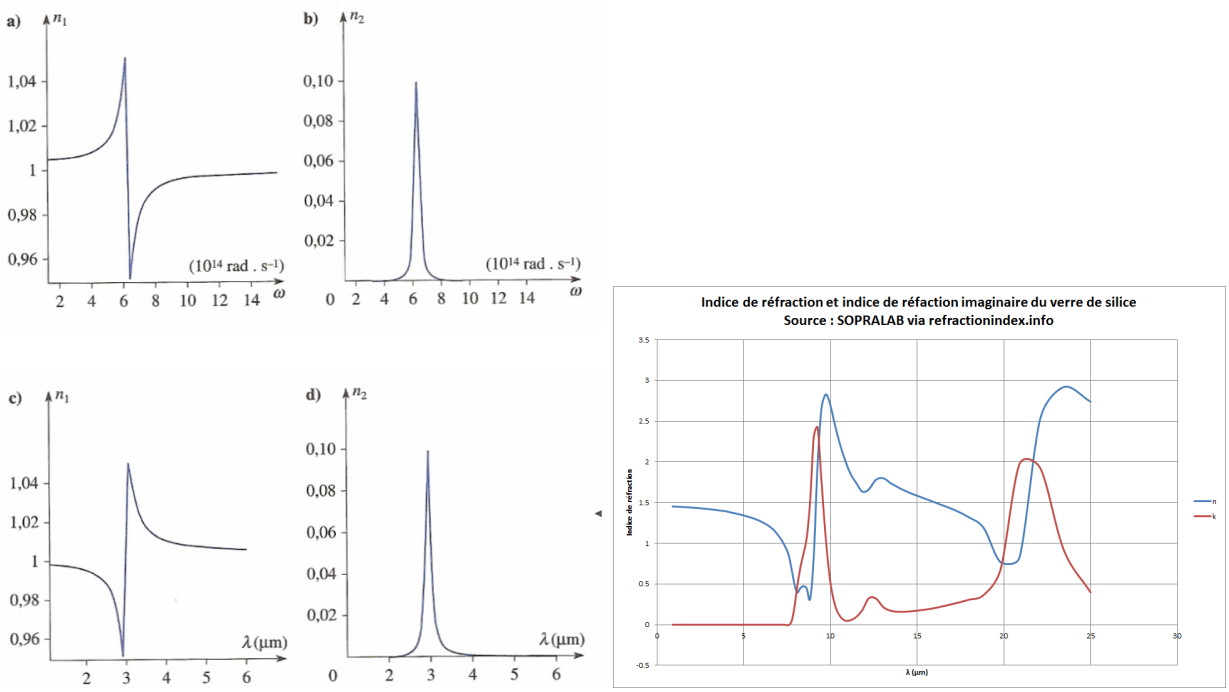


FIGURE 28.3 – Mesures de n' et n'' en fonction de λ et ω (à droite, figure tirée du ✍ Maulas EM 2e année) et comparaison avec la théorie (à gauche). Les valeurs à grand λ sont des phénomènes annexes.

2.3 Absorption : loi de Beer-Lambert

Intéressons-nous dans un premier temps à n''. On voit qu'il est présent dans le terme d'amplitude et qu'il est donc responsable de l'atténuation de l'onde lors de sa propagation dans le milieu. Celle-ci interagit avec la matière mais ne lui cède pas d'énergie. On parle alors d'**onde évanescente** : elle se propage en s'atténuant mais sa puissance est nulle en moyenne.

Considérons un cas en 1 dimension où une onde EM pénètre dans un DLHI dilué (milieu absorbant) de longueur L. On a alors $E = E_0 \exp(-k''x) \exp(i(\omega t - k'x))$. L'intensité de l'onde avant et après la traversée du DLHI s'exprime en fonction du vecteur de Poynting :

$$I_{\text{avant}} = \left\langle \left\| \overrightarrow{\Pi_{\text{avant}}} \right\| \right\rangle \qquad \text{et} \qquad I_{\text{après}} = \left\langle \left\| \overrightarrow{\Pi_{\text{après}}} \right\| \right\rangle$$

Pour calculer les vecteurs de Poynting, on a besoin des expressions de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ **en notation réelle** pour un OPPH :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &= \overrightarrow{E_0} \exp(-k''x) \cos(\omega t - k'x) \\ \overrightarrow{B} &= \frac{n}{c} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E} = \frac{1}{c} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{E_0} \exp(-k''x) \left[n' \cos(\omega t - k'x) - n'' \sin(k'x - \omega t)\right] \end{aligned} \tag{28.30}$$

Le vecteur de Poynting est alors donné par l'expression

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B} \\ &= \overrightarrow{u}\,c\varepsilon_0 E_0^2\exp\left(-2k''x\right)\left[n'\cos^2\left(\omega t-k'x\right)-n''\sin\left(k'x-\omega t\right)\cos\left(\omega t-k'x\right)\right]\end{aligned} \tag{28.31}$$

d'où, en moyennant sur une période et avec $k''=\dfrac{\omega}{c}n''$,

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \overrightarrow{u}\,c\varepsilon_0\frac{E_0^2}{2}n'\exp\left(-2\frac{\omega}{c}n''x\right) \tag{28.32}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}I_{\text{avant}} &= \left\langle\left\|\overrightarrow{\Pi}(x=0)\right\|\right\rangle = c\varepsilon_0\frac{E_0^2}{2}n' \\ I_{\text{après}} &= \left\langle\left\|\overrightarrow{\Pi}(x=d)\right\|\right\rangle = c\varepsilon_0\frac{E_0^2}{2}n'\exp\left(-2\frac{\omega}{c}n''d\right)\end{aligned} \tag{28.33}$$

On obtient la **loi de Beer-Lambert** :

$$\boxed{I_{\text{après}} = I_{\text{avant}}\exp\left(-2\frac{\omega}{c}n''d\right) \iff A = 10\log\frac{I_{\text{avant}}}{I_{\text{après}}} \propto d}$$

On peut s'assurer du fait que cette onde soit bien une onde absorbée en calculant la puissance cédée au milieu et en montrant qu'elle est reliée linéairement à χ_e'' et donc à n''. Pour cela, on se rappelle de la définition du vecteur densité de courant :

$$\overrightarrow{j} = -n^*e\,\ddot{\overrightarrow{r}} = -n^*e(i\omega\overrightarrow{r}) = i\omega\frac{\dfrac{n^*e^2}{m}}{(\omega_0^2-\omega^2)+i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{j} = i\omega\varepsilon_0(\chi_e'-i\chi_e'')\overrightarrow{E}$$

Alors la puissance volumique dissipée vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\Re(\left\langle\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}^*\right\rangle) = \cdots = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\chi_e''E_0^2 \tag{28.34}$$

Application au micro-ondes

Le principe du micro-ondes consiste à envoyer des EM pour fournir de l'énergie aux molécules d'eau dans les aliments/boissons. Pour cela, on envoie une onde dont la pulsation correspond exactement à la pulsation de résonance des modes rotationnels de l'eau. On cherche à déterminer cette pulsation.

L'eau est composée de moments dipolaires permanents qui vont ici s'orienter avec le champ : c'est la *polarisabilité d'orientation*. On peut montrer que le vecteur polarisation $\overrightarrow{P}$ obéit à l'équation suivante, avec pour l'eau $\tau = 1.5\times10^{-10}\,\text{s}$ et $\chi_0 = 7.9\times10^1$,

$$\tau\frac{\partial\overrightarrow{P}}{\partial t}+\overrightarrow{P} = \varepsilon_0\chi_0\overrightarrow{E}$$

On définit alors $\chi_e = \dfrac{\chi_0}{1+i\omega\tau}$ et on cherche la fréquence qui maximise χ_e'' (et donc n''). Ainsi, on a $\chi_e'' = \chi_0\dfrac{\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}$ qui est amximal dans le cas de l'eau pour une fréquence $\nu_0 = 3$ GHz.

2.4 Dispersion : loi de Cauchy

Intéressons-nous maintenant à l'indice de dispersion n'. On peut calculer la vitesse de phase et de groupe qui valent alors

$$\begin{aligned}v_\phi &= \frac{\omega}{\Re(k)} = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'(\omega)} \\ v_g &= \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Re(k)} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'} = \frac{c}{n'(\omega)+\omega\dfrac{\mathrm{d}n'}{\mathrm{d}\omega}(\omega)}\end{aligned} \tag{28.35}$$

La dépendance en ω de n' engendre donc une dépendance en ω de v_ϕ et v_g : le milieu est donc **dispersif** (d'où le fait que n' soit appelé indice de *dispersion*). Ainsi, chaque fréquence a sa propre vitesse de groupe et un paquet d'onde se propageant dans le milieu se retrouverait déformé.

En dehors du domaine d'absorption, *i.e.* $\omega \ll \omega_0$, on a $n'' = 0$ et $n = n'$. Tout se passe comme si n, ε_r et χ_e étaient réels et on retrouve la notion d'indice optique. Dans ce cas, on écrit

$$n^2 = (n')^2 = 1 + \chi_e' 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2}{\tau^2}} \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{28.36}$$

Un développement limité en $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ permet alors d'obtenir

$$n' \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) \iff \boxed{n' = A + \frac{B}{\lambda^2}} \tag{28.37}$$

On a retrouvé la **loi de Cauchy** ! Dans le domaine du visible,

$$n' = 1 + 1.36 \times 10^{-4} + \frac{1.06 \times 10^{-18}}{\lambda^2}$$

Cela $\lambda_0 = 88$ nm donc loin de λ, ce qui valide l'hypothèse selon laquelle on était loin du domaine d'absorption. Cette loi est important car elle explique les observations expérimentales des réseaux et des arcs-en-ciel.

Remarque

Il faut ici préciser que les deux aspects que l'on a montré de la dispersion (étalement du paquet d'onde et dispersion par le prisme) ne proviennent que de la dépendance non linéaire de n' en ω, et donc traduisent tous deux bien la dispersion sans être contradictoires.

3 Calcul : interface entre deux diélectriques

Maintenant qu'on a vu ce qui se passait pour une onde traversant un diélectrique, on peut regarder ce qui arrive à une onde à l'interface entre deux milieux diélectriques. Ça arrive tout le temps, c'est à la base de l'optique géométrique et de la propagation guidée.

3.1 Modèle de la couche

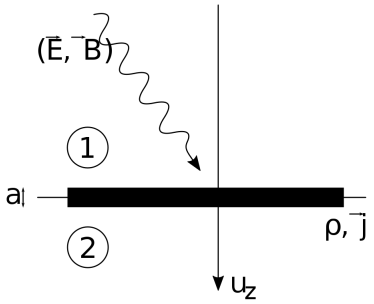


FIGURE 28.4 – Modèle de la couche.

On assimile la surface entre les deux milieux 1 et 2 étudiés à une couche d'épaisseur a très petite. Cette surface est le siège d'une densité volumique de charge ρ et d'un courant volumique $\vec{j}$.

Au voisinage du point O de la surface étudiée, on fera l'approximation que la surface est plane. On définit un axe $\overrightarrow{u}_z$ orthogonal à ce plan. La couche sera localisée entre les cotes $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$.

Le milieu 1 sera le milieu situé dans le demi-espace $z \leq 0$ et le milieu 2 sera le milieu situé dans le demi-espace $z \geq 0$.

3.2 Lien avec le modèle idéal

- $\sigma = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \rho \mathrm{d}z$
- $\overrightarrow{j_s} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \overrightarrow{j}\, \mathrm{d}z$

À la traversée d'une telle couche, en se déplaçant dans la direction O_z, on rencontre des sources très intenses qui ont pour cause, dans cette direction, des variations très importantes du champ. En effet, en pratique, a est de l'ordre de 10^{-9}m donc toute densité surfacique de charge ou de courant, même modeste, entraîne une distribution volumique de charge ou de courant très grande.

Ainsi, les intégrales $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_i}{\partial z}\mathrm{d}z = E_{i,2} - E_{i,1}$ et $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_i}{\partial z}\mathrm{d}z = B_{i,2} - B_{i,1}$ $(i \in \{x, y, z\})$ pourront avoir une valeur non nulle même pour a très petit.

En revanche, les dérivées par rapport à x, y ou t ne sont pas ainsi influencées par la géométrie du système. On pourra donc faire les approximations

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_i}{\partial x}\mathrm{d}z \approx 0 \; ; \; \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_i}{\partial y}\mathrm{d}z \approx 0 \; ; \; \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_i}{\partial t}\mathrm{d}z \approx 0$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_i}{\partial x}\mathrm{d}z \approx 0 \; ; \; \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_i}{\partial y}\mathrm{d}z \approx 0 \; ; \; \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_i}{\partial t}\mathrm{d}z \approx 0$$

3.3 Relations de passage

On suppose pour ce calcul être à la frontière de deux milieux ayant même permittivité diélectrique ε_0 et même perméabilité magnétique μ_0.

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{B}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{28.38}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_x}{\partial x}\mathrm{d}z + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_y}{\partial y}\mathrm{d}z + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_z}{\partial z}\mathrm{d}z = 0 \tag{28.39}$$

$$\Rightarrow B_{z2} - B_{z1} = 0 \tag{28.40}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{28.41}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_x}{\partial x}\mathrm{d}z + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_y}{\partial y}\mathrm{d}z + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_z}{\partial z}\mathrm{d}z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{28.42}$$

$$\Rightarrow E_{z2} - E_{z1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{28.43}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases} \tag{28.44}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_z}{\partial y}\mathrm{d}z - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_y}{\partial z}\mathrm{d}z = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_x}{\partial t}\mathrm{d}z \\ \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_x}{\partial z}\mathrm{d}z - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_z}{\partial x}\mathrm{d}z = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_y}{\partial t}\mathrm{d}z \end{cases} \tag{28.45}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(E_{y2} - E_{y1}) = 0 \\ E_{x2} - E_{x1} = 0 \end{cases} \tag{28.46}$$

(28.47)

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \tag{28.48}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_z}{\partial y}\mathrm{d}z - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_y}{\partial z}\mathrm{d}z = \mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} j_x \mathrm{d}z + \varepsilon_0\mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_x}{\partial t}\mathrm{d}z \\ \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_x}{\partial z}\mathrm{d}z - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_z}{\partial x}\mathrm{d}z = \mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} j_y \mathrm{d}z + \varepsilon_0\mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_y}{\partial t}\mathrm{d}z \\ \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_y}{\partial x}\mathrm{d}z - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial B_x}{\partial y}\mathrm{d}z = \mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} j_z \mathrm{d}z + \varepsilon_0\mu_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E_z}{\partial t}\mathrm{d}z \end{cases} \tag{28.49}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(B_{y2} - B_{y1}) = \mu_0 j_{sx} \\ B_{x2} - B_{x1} = \mu_0 j_{sy} \\ j_{sz} = 0 \end{cases} \tag{28.50}$$

(28.51)

Relations de passage pour les composantes

- La composante normale du champ magnétique se conserve

$$B_{z2} = B_{z1}$$

- Les composantes tangentielles du champ magnétique subissent une discontinuité qui s'exprime en fonction du courant surfacique

$$B_{y2} - B_{y1} = -\mu_0 j_{sx}$$
$$B_{x2} - B_{x1} = +\mu_0 j_{sy}$$

- La composante normale du champ électrique subit une discontinuité qui s'exprime en fonction de la densité surfacique de charge

$$E_{z2} - E_{z1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Les composantes tangentielles du champ électrique se conservent

$$E_{y2} = E_{y1}$$

$$E_{x2} = E_{x1}$$

Relations de passage vectorielles

Vectoriellement, on obtient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n}_{12} \\ \overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \overrightarrow{n}_{12} \end{cases} \tag{28.52}$$

On a également montré que la densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ n'a pas de composante suivant la direction orthogonale à la surface.

Relations de passage à partir des relations de Maxwell

On obtient en substituant : $\overrightarrow{E}$ par $\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}$, $\overrightarrow{B}$ par $\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}$, $\overrightarrow{\nabla}$ par $\overrightarrow{n}_{12}$, $\overrightarrow{j}$ par $\overrightarrow{j_s}$ et enfin $\overrightarrow{\rho}$ par $\overrightarrow{\sigma}$

$$\overrightarrow{n}_{12}(\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\overrightarrow{n}_{12}(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}) = 0$$

$$\overrightarrow{n}_{12} \wedge (\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1}) = 0$$

$$\overrightarrow{n}_{12} \wedge (\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}) = \mu \overrightarrow{j_s}$$

4 Lois à l'interface

4.1 Lois de Snell-Descartes

On étudie le comportement d'une onde électromagnétique : plane, progressive, se propageant dans la direction $\overrightarrow{u}_i$, monochromatique, de pulsation ω, polarisée rectilignement.

Considérons deux milieux diélectriques 1 et 2, linéaires, homogènes et d'indices n_1 et n_2 séparés par une surface plane (localement à l'échelle de λ). On se place en zone de transparence, c'est à dire $n_i \in \mathbb{R}$.

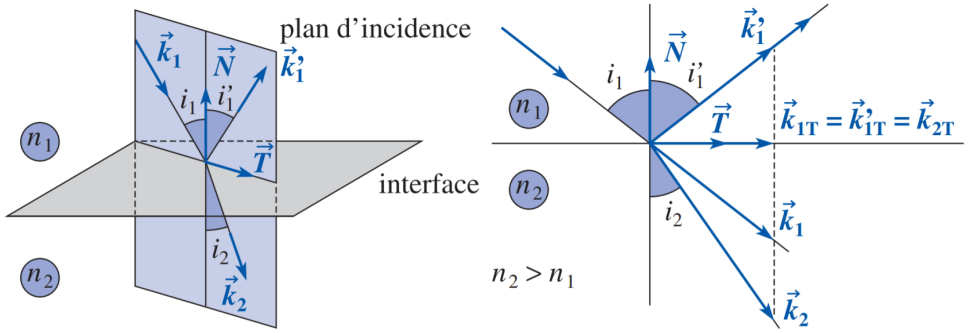


FIGURE 28.5 – Les ondes incidente, transmise et réfléchie à l'interface

On note :

- $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$ le nombre d'onde dans le vide de cette onde
- $k_1 = n_1 k_0$ le nombre d'onde de cette même onde dans le milieu 1
- $k_2 = n_2 k_0$ le nombre d'onde de cette même onde dans le milieu 2
- $\overrightarrow{n}$ la normale au dioptre au lieu d'incidence

L'onde incidente a pour vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_i = k_1 \overrightarrow{u}_i$. L'angle d'incidence que $\overrightarrow{k}_i$ forme avec la normale au dioptre est noté i_1. À la surface elle donne naissance à une onde transmise et à une onde réfléchie.

L'onde transmise a pour vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_t = k_2 \overrightarrow{u}_t$. L'angle d'incidence que $\overrightarrow{k}_t$ forme avec la normale au dioptre est noté i_2. L'onde réfléchie a pour vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_r = k_1 \overrightarrow{u}_r$. L'angle d'incidence que $\overrightarrow{k}_r$ forme avec la normale au dioptre est noté i'_1

Au niveau du dioptre, les champs électrique et magnétique, incident, réfléchi et transmis s'écrivent sous la forme générale :

$$\begin{cases} \overrightarrow{s_i}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{s_{0i}} e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}_i \cdot \overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{s_r}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{s_{0r}} e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}_r \cdot \overrightarrow{r})} e^{j\varphi_r} \\ \overrightarrow{s_t}(\overrightarrow{r},t) = \overrightarrow{s_{0t}} e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}_t \cdot \overrightarrow{r})} e^{j\varphi_t} \end{cases} \tag{28.53}$$

φ_t et φ_r ne dépendent pas de $\overrightarrow{r}$.

Le déphasage entre l'onde transmise et l'onde incidente vaut $(\overrightarrow{k}_i - \overrightarrow{k}_t) \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_t$. Les milieux étant supposés homogènes, il est alors nécessaire que cette valeur soit indépendante de $\overrightarrow{r}$. De même, le déphasage entre l'onde réfléchie et l'onde incidente vaut $(\overrightarrow{k}_i - \overrightarrow{k}_r) \cdot \overrightarrow{r} + \varphi_r$, qui doit être indépendant de $\overrightarrow{r}$.

On aboutit alors au système suivant :

$$\begin{cases} \forall \overrightarrow{r},\ (\overrightarrow{k}_i - \overrightarrow{k}_t) \cdot \overrightarrow{r} = 0 \\ \forall \overrightarrow{r},\ (\overrightarrow{k}_i - \overrightarrow{k}_r) \cdot \overrightarrow{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \overrightarrow{r},\ (n_1 \overrightarrow{u}_i - n_2 \overrightarrow{u}_t) \cdot \overrightarrow{r} = 0 \\ \forall \overrightarrow{r},\ (\overrightarrow{u}_i - \overrightarrow{u}_r) \cdot \overrightarrow{r} = 0 \end{cases} \tag{28.54}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (n_1 \overrightarrow{u}_i - n_2 \overrightarrow{u}_t) \ // \ \overrightarrow{n} \\ (\overrightarrow{u}_i - \overrightarrow{u}_r) \ // \ \overrightarrow{n} \end{cases} \tag{28.55}$$

(28.56)

On retrouve ainsi les loi de Snell-Descartes, par le calcul, et franchement, c'est super classe.

Loi de Descartes

- 1ere loi de Descartes : $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{u}_i$, $\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{u}_t$ sont dans un même plan
- 2eme loi de Descartes de la réfraction : $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$
- 2eme loi de Descartes de la réflexion : $i_1 = -i'_1$

4.2 Coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale

On s'intéresse maintenant au cas de la réflexion sur une interface normale à la direction de propagation.

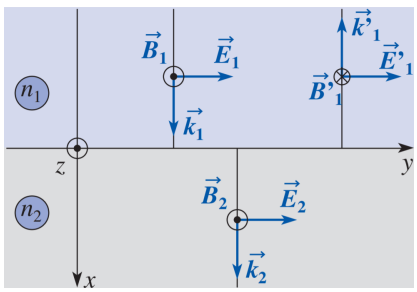


FIGURE 28.6 – Schématisation de la situation, en mode TEM.

On a alors :

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_1' = 0 \\ i_2 = 0 \end{cases}$$

On se place dans la base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ telle que l'onde incidente soit polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u}_x$, et le vecteur d'onde de l'onde incidente ait même sens et même direction que $\overrightarrow{u}_z$.

Onde incidente : vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_i = n_1 k_0 \overrightarrow{u}_z$, pour champ électrique $\overrightarrow{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - n_1 k_0 z)} \overrightarrow{u}_x$, champ magnétique $\overrightarrow{B}_i = B_{0i} e^{j(\omega t - n_1 k_0 z)} \overrightarrow{u}_y$, où $B_{0i} = n_1 \dfrac{E_{0i}}{c}$.

Onde réfléchie : vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_r = -n_1 k_0 \overrightarrow{u}_z$, champ électrique $\overrightarrow{E}_r = \overrightarrow{E}_{0r} e^{j(\omega t + n_1 k_0 z)} e^{j\varphi_r}$, champ magnétique $\overrightarrow{B}_r = \overrightarrow{B}_{0r} e^{j(\omega t + n_1 k_0 z)} e^{j\varphi_r}$ avec $\overrightarrow{B}_{0r} = -\dfrac{n_1}{c} \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}_{0r}$.

Onde transmise : vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_t = n_2 k_0 \overrightarrow{u}_z$, champ électrique $\overrightarrow{E}_t = \overrightarrow{E}_{0t} e^{j(\omega t - n_2 k_0 z)} e^{j\varphi_t}$, champ magnétique $\overrightarrow{B}_t = \overrightarrow{B}_{0t} e^{j(\omega t - n_2 k_0 z)} e^{j\varphi_t}$ avec $\overrightarrow{B}_{0t} = \dfrac{n_2}{c} \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}_{0t}$.

Dans l'hypothèse de deux milieux sans charges ni courants, ni volumiques ni surfaciques, les équations de passage du champ électrique donnent

$$E_{0i} \overrightarrow{u}_x + \overrightarrow{E}_{0r} e^{j\varphi_r} = \overrightarrow{E}_{0t} e^{j\varphi_t}$$

Les équations de passage du champ magnétique donnent

$$n_1 E_{0i} \overrightarrow{u}_y - n_1 \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}_{0r} e^{j\varphi_r} = n_2 \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}_{0t} e^{j\varphi_t}$$

En remplaçant $\overrightarrow{E}_t$ par sa valeur dans la deuxième équation, celle-ci devient :

$$-(n_2 + n_1) \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{E}_{0r} e^{j\varphi_r} = (n_2 - n_1) E_{0i} \overrightarrow{u}_y$$

On fait alors le produit vectoriel par $\overrightarrow{u}_z$

$$\overrightarrow{E}_{0r} e^{j\varphi_r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{0i} \overrightarrow{u}_x$$

L'équation de passage du champ électrique permet alors d'exprimer le champ transmis

$$\overrightarrow{E}_{0t} e^{j\varphi_t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{0i} \overrightarrow{u}_x$$

Coefficients de réflexion et transmission du champ électrique

$$\begin{aligned} \underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{E_{0i}} &= \frac{E_{0r} e^{j\varphi_r}}{E_{0i}} = \rho e^{j\varphi_r} \\ \underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{E_{0i}} &= \frac{E_{0t} e^{j\varphi_t}}{E_{0i}} = \tau e^{j\varphi_t} \end{aligned} \tag{28.57}$$

En fonction des indices optiques

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\ \varphi_r &= \begin{cases} 0 \text{ si } n_1 > n_2 \\ \pi \text{ si } n_1 < n_2 \end{cases} \\ t = \tau &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \\ \varphi_t &= 0 \end{aligned} \tag{28.58}$$

4.3 Étude énergétique

Les vecteurs de Poynting des ondes considérées sont :

- Pour l'onde incidente, $\overrightarrow{\Pi}_i = \dfrac{\overrightarrow{E}_i \wedge \overrightarrow{B}_i}{\mu} = \dfrac{n_1 E_{0i}^2}{\mu c} e^{2j\omega t} \overrightarrow{u}_z$
- Pour l'onde réfléchie, $\overrightarrow{\Pi}_r = \dfrac{\overrightarrow{E}_r \wedge \overrightarrow{B}_r}{\mu} = -\dfrac{n_1 E_{0r}^2}{\mu c} e^{2j\omega t} e^{2j\varphi_r} \overrightarrow{u}_z$
- Pour l'onde transmise, $\overrightarrow{\Pi}_t = \dfrac{\overrightarrow{E}_t \wedge \overrightarrow{B}_t}{\mu} = \dfrac{n_2 E_{0t}^2}{\mu c} e^{2j\omega t} e^{2j\varphi_t} \overrightarrow{u}_z$

Définition : On définit respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en énergie/puissance de l'interface comme la proportion d'énergie réfléchie/transmise par l'interface. La puissance surfacique étant reliée directement à la norme du vecteur de Poynting, on aboutit rapidement aux expressions suivantes.

$$\begin{cases} R = \dfrac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i} & = r^2 & = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \\ T = \dfrac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i} & = \dfrac{n_2}{n_1} t^2 & = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \end{cases} \tag{28.59}$$

Dans l'hypothèse faite où il n'y a aucune perte, on retrouve tout à fait logiquement la relation $R + T = 1$

Ces résultats sont évidement valides en incidence normale seulement. Lorsque l'incidence varie, les résultats changent considérablement.

Conclusion

Une ouverture est possible sur les modes TM, TE et TEM. Il est également possible de parler de mécanique quantique.

LP 29

Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Commentaires du jury

- 2017 : Les analogies et différences observées entre les différents milieux étudiés méritent d'être clairement soulignées. Il est intéressant d'évoquer les aspects énergétiques.

- 2015 : Cette leçon ne doit pas se réduire à la présentation exclusive du modèle de Drude. Les métaux ne sont pas les seuls milieux conducteurs.

- 2014 : Cette leçon ne doit pas être confondue avec la leçon 47 [qui était Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.].
  Jusqu'en 2013, le titre était : Effet de peau. Comportement d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur.

- 2010 : Il faut s'interroger sur la dépendance en fréquence de la conductivité. L'étude peut également être menée en haute fréquence. Jusqu'en 2003, le titre était : Effet de peau. Réflexion des ondes électromagnétiques planes à la surface d'un milieu conducteur.

- 2001 : Il faut bien caractériser le métal parfait comme limite du métal réel.

- 1997 : Le jury attend que les candidats sachent exprimer le facteur de réflexion d'un métal réel et soient capables d'expliquer la couleur orangée du cuivre.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Physique tout-en-un PC*, **Sanz** ⟶
- ✍ *Cap prépa Physique PC*, **Renvoizé** ⟶
- ✍ *Électromagnétisme*, **Mauras** ⟶
- ✍ *Hprépa Ondes*, **Brébec** ⟶
- ✍ *Physique du solide*, **Ashcroft** ⟶ Complément sur Drude
- ✍ *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, **Garing** ⟶
- ✍ *Solid State Basics*, **Simon** ⟶ Pour les modèles de Drude, Sommerfeld
- ✍ https://www.f-legrand.fr/scidoc/srcdoc/sciphys/elecmag/conducteurs/conducteurs-pdf.pdf ⟶ Réflexion sur un métal

Prérequis

- Maxwell
- EM dans le vide
- Dispersion
- Libre parcours moyen
- Conductivité
- Force de Lorentz
- Diffusion
- (...)

Expériences

1 Modèle de la conduction : Drude . . . 403
1.1 Cadre . . . 403
1.2 Mise en équations . . . 403
1.3 Approche renversée (et renversante) . . . 404
1.4 Loi d'Ohm locale . . . 404
1.5 Aspect énergétique . . . 405
1.6 Électroneutralité et pulsation plasma . . . 405
1.7 ARQS . . . 406
2 Comportement à basse fréquence : les métaux . . . 407
2.1 Mise en équation . . . 407
2.2 Effet de peau . . . 408
2.3 Applications . . . 409
2.4 Réflexion sur les métaux . . . 409
3 Comportement en haute fréquence, cas des plasmas . . . 412
3.1 Mise en équations . . . 412
3.2 Discussion . . . 412
3.3 Réflexion sur un plasma . . . 413
3.4 Application aux plasmas . . . 413

Introduction

Les diélectriques ne sont pas l'unique milieu de propagation. Il y a aussi les conducteurs ! *On nomme* **conducteur** *un milieu qui permet des transfert de charges.* On va aujourd'hui s'intéresser à ces bestioles là, et à la propagation ou non propagation des OEM là dedans.

On peut aussi orienter l'introduction vers les télécommunications : on veut pouvoir faire un blindage, ou au contraire passer au delà du blindage que représentent nos pantalons !

1 Modèle de la conduction : Drude

Il est bon de noter que les métaux sont de bons conducteurs, mais qu'ils ne sont pas les seuls. On peut noter l'exemple du graphite et des semi-conducteurs bien sûr, mais aussi les plasmas dont le cas sera traité plus tard dans cette leçon.

1.1 Cadre

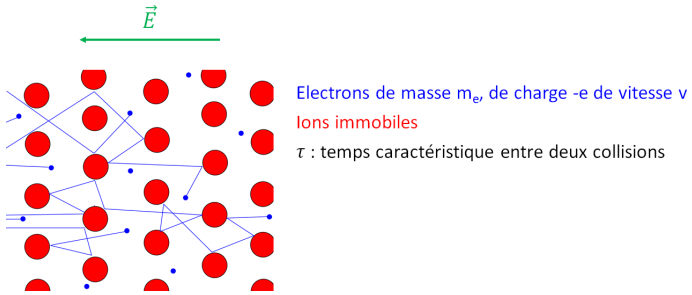


FIGURE 29.1 – Le modèle de Drude (1900) en une image.

L'enjeu ici est d'expliquer la conduction. les hypothèses que nous allons faire sont les suivantes :

On considère le milieu comme un gaz d'électrons, libres, circulant librement dans un gaz d'ions positifs, beaucoup plus lourd et à mobilité que l'on supposera nulle.

On néglige toute intéraction à distance, et on respecte la neutralité globale du système.

La seule interaction possible entre les électrons et les ions se fait par des collisions instantanées, espacées en moyenne d'un temps τ ($\sim 10^{-14}$ s). On considère qu'après la collision, la vitesse de l'électron est redistribuée selon les lois de la physique statistique, à la température du milieu.

On supposera évidemment toutes les vitesses non relativistes, ce qui revient à négliger l'influence de B du fait que $\frac{\left\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right\|}{\left\|\overrightarrow{E}\right\|} \lesssim \frac{v}{c}$, et la température uniforme.

1.2 Mise en équations

On considère que le champs électrique $\overrightarrow{E}$ est appliqué au milieu. Considérons un électron avec une quantité de mmouvement $\overrightarrow{p}$ à l'instant t. À $t + \mathrm{d}t$ il a deux possibilités :

Évènement	Probabilité	$\overrightarrow{p}(t+\mathrm{d}t)$
Choc(apic)	$\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$	$\overrightarrow{p_a}$
Pas Choc	$1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$	$p(t)-e\overrightarrow{E}\mathrm{d}t$

La quantité de mouvement $\overrightarrow{p}_a$ est aléatoire et suit la loi de Boltzmann ; $\langle\overrightarrow{p}_a\rangle=\overrightarrow{0}$. On peut ainsi en déduire une équation pour la quantité de mouvement, que l'on va bien vite transformer en PFD.

$$\langle\overrightarrow{p}(t+\mathrm{d}t)\rangle=\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\overrightarrow{0}+\left(1-\frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right)\left(\langle\overrightarrow{p}(t)\rangle-e\overrightarrow{E}\mathrm{d}t\right) \tag{29.1}$$

D'où par un merveilleux procédé appelé le développement limité des physiciens :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\overrightarrow{p}\rangle=-e\overrightarrow{E}-\frac{1}{\tau}\langle\overrightarrow{p}\rangle \tag{29.2}$$

On retrouve une équation de mouvement électrique avec frottements, ce qui donne une solution simple :

$$\langle\overrightarrow{v}\rangle_{lim}=-\frac{e\tau\overrightarrow{E}}{m_e} \tag{29.3}$$

1.3 Approche renversée (et renversante)

Supposons que la conduction électrique soit le fait uniquement d'électrons. Ce sont des porteurs de charge $q=-e\simeq 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ et de masse $m_e\simeq 9.109\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Alors, d'un point de vue dynamique, l'électron obéit à la loi suivante :

$$m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{F}_\mathrm{v}-\Gamma\overrightarrow{v}$$

- v est la vitesse de l'électron
- F_v est la force de Lorentz, $\overrightarrow{F}_\mathrm{v}=q(\overrightarrow{E}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B})$ E étant le champ électrique et B le champ magnétique
- Γ est un coefficient de frottement empirique exprimé en kilogrammes par seconde.

Notons que ceci reste vrai pour d'autres types de porteurs de charge, comme les trous d'électrons dans un cristal ou bien les ions dans une solution saline.

Supposons que l'électron ait une vitesse initiale v_0, et que le champ électrique soit uniforme et constant, E_0. Alors, la résolution de l'équation différentielle ci-dessus mène à :

$$\overrightarrow{v}(t)=\overrightarrow{v}_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}+\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\frac{q}{\Gamma}\overrightarrow{E}_0$$

Avec $\tau=\frac{m_\mathrm{e}}{\Gamma}$ est la constante de temps, caractéristique d'amortissement du système, $\overrightarrow{v}_1=\frac{q}{\Gamma}\overrightarrow{E}_0$ est la vitesse limite vers laquelle tend l'électron.

1.4 Loi d'Ohm locale

Cette équation peut être utilisée pour trouver une loi d'Ohm locale. La loi d'Ohm relie usuellement les mouvements de charges à leur cause, le champs électrique. On cherche donc quelque chose de la forme $\overrightarrow{j}=\sigma\overrightarrow{E}$. $\overrightarrow{j}$ ici c'est pas le plus compliqué. On a supposé que seuls les électrons bougents, par conséquent on a $\overrightarrow{j}\underset{\mathrm{def}}{=}-ne\langle\overrightarrow{v}\rangle$.

On se place dans un cadre similaire à celui de la mécanique des fluides, c'est à dire dans une particule de fluide dans laquelle le champ extérieur varie peu, et qui se place à l'échelle mésoscopique.

On peut, grâce au fait que l'équation est linéaire et que la physique des champs est généralement périodique, se placer en régime variable périodique, c'est à dire considérer une OPPH ! On se place en variables complexes, et alors l'équation prend une toute autre forme :

$$(1+i\omega\tau)\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} \tag{29.4}$$

Oh le beau ! C'est une loi d'Ohm locale, un poil cheloue, mais on s'en sort en posant une conductivité complexe !

Loi d'Ohm locale pour un conducteur :

$$\vec{j} = \underline{\sigma}\vec{E} \qquad \text{avec} \quad \underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau} \qquad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{29.5}$$

OdG

Pour le cuivre, on a $n \sim 10^{29}$, et on connaît la conductivité statique du cuivre, $5.96 \times 10^7\,\mathrm{S\,m^{-1}}$. On en déduit immédiatement $\tau \sim 10^{-14}$ s. C'est peu.

1.5 Aspect énergétique

On peut écrire la puissance dissipée par effet Joules :

$$\langle P \rangle = \left\langle \vec{j}_{re} \cdot \vec{E}_{re} \right\rangle = \frac{1}{2}\Re\left(\vec{j} \cdot \vec{E}^*\right) = \frac{1}{2}\Re(\underline{\sigma})\left\|\vec{E}\right\|^2 \tag{29.6}$$

Et là, c'est le drâme. À $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, le milieu est purement absorbant, et on a la loi d'Ohm classique. À $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, la puissance absorbée devient nulle du fait de l'imaginarité de $\underline{\sigma}$, et pouf, le milieu est transparent !

Mais Jamy, les métaux c'est pas transparent si ? Et bien si, mais dans les bonnes conditions, à savoir $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, et pour le cuivre on l'a vu, il est de l'ordre de 10^{14}, et le visible c'est de l'ordre de 10^{14} au plus !

Oui, mais il y a quand même des limites au modèle de Drude, on les verra plus tard.

1.6 Électroneutralité et pulsation plasma

L'électroneutralité globale est toujours vraie, mais on peut en plus essayer de voir ce que l'électroneutralité locale donne. On perturbe un peu la densité de porteurs de charges, et on se demande combien de temps il lui faut pour revenir à son point d'origine.

On utilise pour cela l'équation précédente, on ajoute $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$, et l'ingrédient secret, Maxwell-Gauss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. On obtient :

$$-\omega^2\tau + i\omega + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\rho = 0 \tag{29.7}$$

C'est un oscillateur harmonique amorti ! ! On ressort les loi de l'électrocinétique et boom, on a une pulsation limite, la pulsation plasma (teaser) :

Pulsation plasma :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \qquad \frac{\omega_p}{Q} = \frac{1}{\tau} \tag{29.8}$$

OdG

On trouve $Q \sim 100$ et $\omega_p \sim 2 \times 10^{16}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ pour le cuivre.

Influence de ω_p : simulation

✍ `w_inferieur/superieur_a_wp.py`

Deux pulsations

La pulsation plasma, que l'on vient de définir, et la **pulsation d'électroneutralité**, $\frac{1}{\tau} = \omega_{EN}$. Cette dernière donne la limite entre les cas où on a électroneutralité et les cas où il y a polarisation du métal, et donc effets capacitifs. Elle est plus utile en électricité qu'en ondes, mais passons.

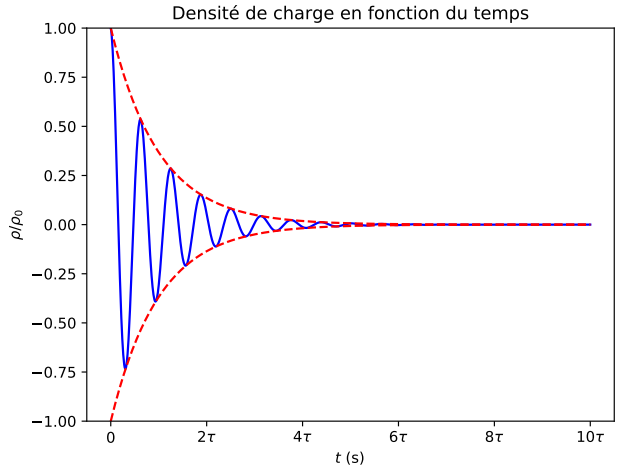


FIGURE 29.2 – Relaxation de la densité de charge en fonction du temps.

1.7 ARQS

Pour l'instant, il n'y a pas d'approximation autres que le modèle de Drude, mais maitenenant on veut se débarasser du courant de déplacement, dans Maxwell-Ampère. Pour cela il faut avoir

$$\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \sigma_0 \vec{E} \right\| \tag{29.9}$$

Cela revient à l'équation $\omega\varepsilon_0 \ll \left| \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \right|$.

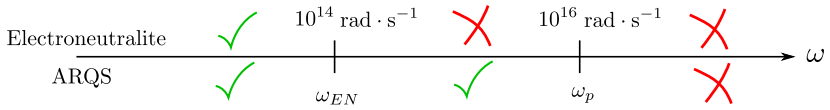
Et là, c'est le drâme, car il faut considérer deux régimes, selon ω et $\frac{1}{\tau}$. La plus restrictive est celle où $\omega \ll \omega_{EN}$.

$$\omega^2 \ll \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \tau} = \omega_p^2 \tag{29.10}$$

OdG

On vérifie bien que les OdG collent avec ce qui est proposé, puisqu'on a alors $\omega_p \sim 1.0 \times 10^{17}\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \ll \frac{1}{\tau}$

On voit alors qu'on perd l'électroneutralité avant l'ARQS !



2 Comportement à basse fréquence : les métaux

2.1 Mise en équation

Dans le régime basse fréquence, la loi d'Ohm locale s'exprime simplement par $\overrightarrow{j}(t) = \sigma_0 \overrightarrow{E}(t)$. En effet, on peut écrire cette loi dans le domaine temporel car σ_0 ne dépend pas de la fréquence. De plus, les équations de Maxwell s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0 & \text{(électroneutralité)} \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 & \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} & \text{(ARQS)} \end{cases} \tag{29.11}$$

On utilise ensuite la formule d'analyse vectorielle valable pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}) - \Delta \overrightarrow{V}$$

pour obtenir **2 expressions différentes** de $\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}) = \overrightarrow{0} - \Delta \overrightarrow{E} = -\Delta \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}) = -\overrightarrow{\nabla} \wedge (\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}) = -\mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t} = -\mu_0 \sigma_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{29.12}$$

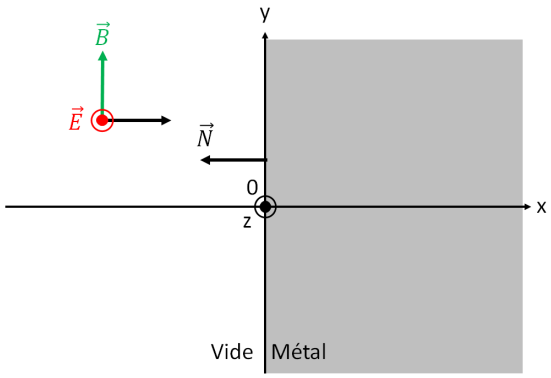
On obtient finalement l'équation satisfaite par $\overrightarrow{E}$

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}} \tag{29.13}$$

Remarque

C'est une équation de diffusion ! !

2.2 Effet de peau



Comme d'habitude, on prend une OPPH transverse se propageant selon les x croissants de la forme

$$\overrightarrow{E}(x,t) = E(x)e^{i\omega t}\overrightarrow{e_z}$$

On suppose que cette onde rencontre une interface vide/métal en $x = 0$. On injecte cette expression dans l'équation de diffusion pour trouver l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2}(x) = i\omega\mu_0\sigma_0 E(x) \tag{29.14}$$

Le polynôme caractéristique de cette équation a pour racines $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\sigma_0\omega}$ donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$E(x) = A\exp\left[+(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{2}}x\right] + B\exp\left[-(1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{2}}x\right] \tag{29.15}$$

On trouve A et B avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} E(x\to+\infty,t) \text{ ne diverge pas} \Rightarrow A = 0 \\ E(x=0,t) = E_0\exp^{i\omega t} \Rightarrow B = E_0 \end{cases} \tag{29.16}$$

On obtient donc *in fine* l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ en notation réelle

$$\boxed{\overrightarrow{E}(x,t) = E_0\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \qquad \text{avec} \qquad \delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}}} \tag{29.17}$$

Cette expression décrit une onde amortie sur une longueur caractéristique $\delta(\omega)$), appelée **épaisseur de peau** (ou longueur de Kelvin), d'autant plus faible que le métal est conducteur (donc σ_0 est grand) et la fréquence ω est élevée. Le conducteur s'oppose donc à la pénétration du champ. On peut calculer un coefficient de diffusion à l'aide de cette longueur :

$$D = \frac{\delta^2}{T} = \frac{2}{\mu_0\sigma_0\dfrac{2\pi}{T}}\frac{1}{T} = \frac{1}{\pi\mu_0\sigma_0}$$

Numérique : effet de peau

✍ `Effet de peau.py` ⏲

Dans le modèle du métal parfait, $\sigma_0 \to +\infty$ donc $\delta \to 0$. **Il n'y a donc pas de propagation dans un métal parfait**, et on écrit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{B}$.

Aspect énergétique

La moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée vaut

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2}\Re(\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}^*) = \frac{\sigma_0}{2} E_0^2 \exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right) > 0$$

Cette puissance est strictement positive : l'onde est bien absorbée par le matériau.

2.3 Applications

- **Courant dans un fil de cuivre de diamètre $a = 0.5$ mm :**
  - pour $f = 50$ Hz, $\delta = 9.8$ mm $\Rightarrow$ effet de peau non visible
  - Pour $f = 100$ kHz, $\delta = 0.2$ mm $\Rightarrow$ on est à la limite d'uniformité
  - Pour $f = 100$ MHz, $\delta = 6.6$ μm $\Rightarrow$ le courant circule sur une très faible épaisseur du fil

  Dans le troisième cas, la résistance du fil est modifiée par rapport à l'expression $R = \dfrac{L}{\sigma_0 S}$ pour obtenir $R' = \dfrac{L}{\sigma_0 \Sigma}$. En effet, il ne faut plus prendre en compte la section $S = \pi\dfrac{a^2}{4}$ du fil mais la section Σ *effectivement* traversée par le courant : $\Sigma \simeq 2\pi a\delta \ll S$, donc $R' \gg R$. L'effet de peau augmente donc la résistance d'un fil à haute fréquence et accentue l'effet Joule. La dépendance en fréquence de $R' \propto \dfrac{1}{\delta} \propto \sqrt{\omega}$ caractérise les pertes cuivre.

- **Faites taire ce Talkie-Walkie !**
  Pour l'aluminium, $\delta = 4$ μm pour 440 MHz, ce qui explique pourquoi envelopper un Talkie-Walkie dans une feuille d'aluminium l'empêche d'émettre ou de recevoir un signal.

- **Épaisseur des parois d'un micro-ondes :**
  Dans un micro-ondes, les ondes ont une fréquence de l'ordre de $f \simeq 10^5$ Hz, d'où $\delta \simeq 10$ μm. En pratique, les parois sont donc largement assez épaisses pour qu'on n'ait rien à craindre. Il est à noter que la paroi de la porte du micro-onde possède une grille métallique qui fait office d'isolant. Le plexiglas de la vitre seul ne suffit pas à atténuer les ondes EM.

2.4 Réflexion sur les métaux

2.4.1 Incidence normale

On considère une interface vide/métal en $x = 0$. On s'intéresse à une OPPH en incidence normale se propageant dans le vide (donc $\omega = ck$) de la forme

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_i} = E_0 \exp(j(\omega t - k_i x)\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{B_i} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{E_i} = \dfrac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - k_i x)\overrightarrow{e_z} \end{cases} \tag{29.18}$$

Cette onde, en arrivant sur à l'interface, va se décomposer en une onde réfléchie et une onde transmise dans le métal (et absorbée). On écrit alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_i} + \overrightarrow{E_r} = \overrightarrow{E_t} \\ \overrightarrow{B_i} + \overrightarrow{B_r} = \overrightarrow{B_t} \end{cases} \tag{29.19}$$

On pose les coefficients de réflexion et de transmission complexes $r = \dfrac{E_r}{E_i}$ et $t = \dfrac{E_t}{E_i}$. La première équation donne directement

$$1 + r = t$$

. La seconde équation nécessite un peu plus de travail :

$$\overrightarrow{B_i} + \overrightarrow{B_r} = \overrightarrow{B_t} \iff \frac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E_i} + \frac{\overrightarrow{k_r}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E_r} = \frac{\overrightarrow{k_t}}{\omega} \wedge \overrightarrow{E_t}$$

On a vu qu'à basse fréquence, une OPPH dans le métal s'écrit sous la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp(i(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{x})$ en posant

$$\overrightarrow{k} = \frac{1-i}{\delta}\overrightarrow{e_x} = n\frac{\omega}{c}\overrightarrow{e_x}$$

On a définit ici l'indice complexe

$$n(\omega) = n'(\omega) - in''(\omega) = \frac{1-i}{\delta\omega}c$$

. Ainsi $\dfrac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{e_x}$, $\dfrac{\overrightarrow{k_r}}{\omega} = -\dfrac{\overrightarrow{k_i}}{\omega} = -\dfrac{1}{c}\overrightarrow{e_x}$ et $\dfrac{\overrightarrow{k_t}}{\omega} = \dfrac{n}{c}\overrightarrow{e_x}$ donc on obtient

$$\frac{1}{c}\overrightarrow{e_x} \wedge (\overrightarrow{E_i} - \overrightarrow{E_r}) = \frac{n}{c}\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{E_t} \iff 1 - r = nt$$

Finalement, on écrit (attention, r, t et n sont toujours complexes)

$$\begin{cases} r = \dfrac{1-n}{1+n} \\ t = \dfrac{2}{1+n} \end{cases} \tag{29.20}$$

Pour un métal parfait, $\delta \to 0$ donc $|n| \to +\infty$. On a alors $r = -1$ et $t = 0$: le métal parfait réfléchit totalement une onde EM en ajoutant à l'onde réfléchie un déphasage de π.

Ondes stationnaires

Pour un métal parfait, l'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent pour donner :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_i} + \overrightarrow{E_r} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - kx)} + (-\overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t + kx)}) = 2\overrightarrow{E_0}\sin(kx)\sin(\omega t)$$

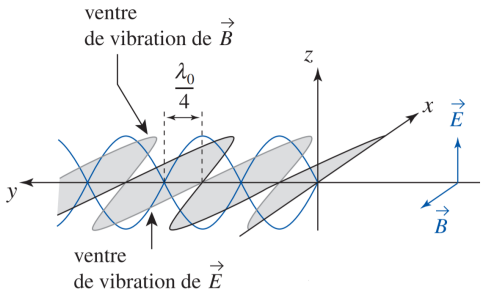
$$\overrightarrow{B} = \frac{2}{c}\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{E_0}\cos(kx)\cos(\omega t)$$

On a donc une onde stationnaire avec $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ en quadrature de phase. La valeur moyenne du vecteur de Poynting est alors nulle vu qu'une onde stationnaire ne propage pas d'énergie en moyenne.

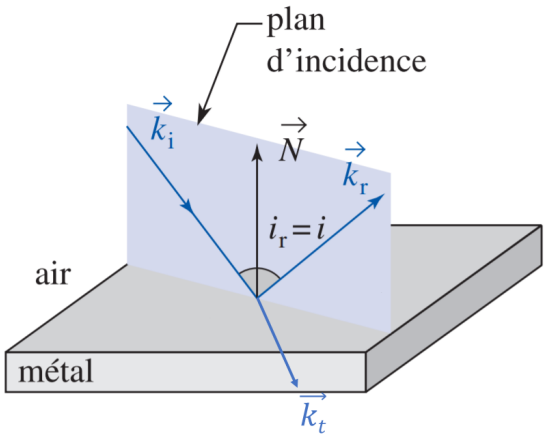
On peut également appliquer les relations de passage en sachant que $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{B}$ dans un métal parfait :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E}(x=0) - \overrightarrow{0} = \dfrac{\sigma_S}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{B}(x=0) - \overrightarrow{0} = \mu_0\overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{e_x} \end{cases} \tag{29.21}$$

On trouve donc que $\sigma_S = 0$ et que $\overrightarrow{j_S} = \dfrac{2}{c}\overrightarrow{E_0}e^{i\omega t} \neq \overrightarrow{0}$ et de même sens que $\overrightarrow{E_i}$.



2.4.2 Incidence quelconque



Cette fois, on considère une OPPH ayant un angle d'incidence par rapport à la normale noté α_i. On note α_r l'angle de réflexion et α_t l'angle de réfraction. On a alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_i} = \overrightarrow{E_{0,i}} \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{x}) \\ \overrightarrow{E_r} = \overrightarrow{E_{0,r}} \exp(j(\omega t + \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{x}) \\ \overrightarrow{E_t} = \overrightarrow{E_{0,t}} \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{x}) \end{cases} \tag{29.22}$$

On décompose alors chaque vecteur dans la base $\{\overrightarrow{e_\perp}, \overrightarrow{e_\parallel}\}$ composée du vecteur unitaire normal à l'interface et du vecteur unitaire à la fois parallèle à l'interface et dans le plan d'incidence. On applique alors la continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ à l'interface pour écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_{\parallel,i}} \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{E_{\parallel,r}} \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{E_{\parallel,t}} \exp(j(\omega t - \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{x}) \\ \iff \overrightarrow{E_{\parallel,i}} + \overrightarrow{E_{\parallel,r}} \exp(j(\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_r}) \cdot \overrightarrow{x}) &= \overrightarrow{E_{\parallel,t}} \exp(j(\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_t}) \cdot \overrightarrow{x}) \end{aligned} \tag{29.23}$$

Cette relation est vraie pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ (car vraie en tout point de l'interface) donc on déduit que

$$\begin{cases} (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_r}) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{k_i} = \overrightarrow{k_r} \\ (\overrightarrow{k_i} - \overrightarrow{k_t}) \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{k_i} = \overrightarrow{k_t} \end{cases} \tag{29.24}$$

Si on projette ces équations sur $\overrightarrow{e_\parallel}$, il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\omega}{c} \sin \alpha_i = -\dfrac{\omega}{c} \sin \alpha_r \\ \dfrac{\omega}{c} \sin \alpha_i = -n \dfrac{\omega}{c} \sin \alpha_t \end{cases} \tag{29.25}$$

$$\begin{cases} \alpha_i = \alpha_r & \text{(condition de réflexion)} \\ \sin \alpha_i = n \sin \alpha_t & \text{(condition de réfraction)} \end{cases} \tag{29.26}$$

On retrouve donc les lois de Snell-Descarte ! !

Bon on a parlé dans les applications de hautes fréquences dans un modèle à basses fréquences... mais que se passe-t-il quand on est ***vraiment*** *à hautes fréquences ?*

3 Comportement en haute fréquence, cas des plasmas

3.1 Mise en équations

Maintenant, on se place à $\omega > \dfrac{1}{\tau}$. On perd alors l'hypothèse d'électroneutralité, donc *a priori* $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} \neq 0$ et c'est la merde. Cependant, on va cacher le problème sous le tapis comme les bons physiciens que nous sommes et considérer des OPPH **transverses** donc pour lesquelles on a quand même $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0$. Dans le régime hautes fréquences, la loi d'Ohm locale s'exprime $\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$ avec une conductivité $\sigma = -i\dfrac{ne^2}{m\omega}$ **complexe** qui met en quadrature de phase $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{j}$ (donc tension et intensité). Cela signifie que la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée est nulle car $\left\langle \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \right\rangle = 0$. On ne sait pas encore comment se placer vis-à-vis de l'ARQS donc pour l'instant on s'en passe. Les équations de Maxwell s'écrivent alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0 & \text{(onde transverse)} \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} & \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 & \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} & \text{(pas d'ARQS dans le doute)} \end{cases} \tag{29.27}$$

En calculant $\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E})$, et en écrivant la loi d'Ohm local en notation réelle, *i.e.* $\overrightarrow{E} = \dfrac{m}{ne^2}\dfrac{\partial \overrightarrow{j}}{\partial t}$, on tombe sur l'**équation de Klein-Gordon**

$$\boxed{\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\overrightarrow{E} \qquad \text{avec} \qquad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}} \tag{29.28}$$

On prend une OPPH pour obtenir la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \tag{29.29}$$

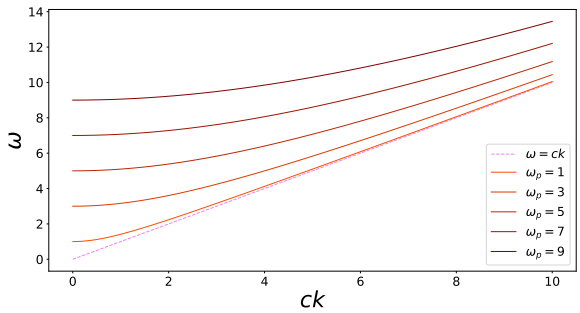


FIGURE 29.3 – Relation de dispersion de Klein-Gordon

3.2 Discussion

On distingue alors 2 cas :

- $\omega > \omega_p$: alors $k^2 > 0$ donc $k = \pm\sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ est réel.

La vitesse de phase s'écrit alors

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

tandis que la vitesse de groupe vaut

$$v_g = c\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega}} < c$$

Le milieu est donc dispersif (mais on rappelle qu'il est non absorbant).

- $\omega < \omega_p$: alors k est imaginaire pur donc on n'a pas de propagation. L'onde est décrite par une exponentielle stationnaire décroissante, et on peut l'appeler par abus de langage *onde évanescente* (les puristes diront qu'une onde est évanescente uniquement si l'atténuation est dans la direction transverse à la propagation). En dehors du milieu, on a une onde stationnaire.

Le milieu se comporte comme un passe-haut.

3.3 Réflexion sur un plasma

- Dans le cas $\omega > \omega_p$, on a $k = n\frac{\omega}{c}$ avec $n(\omega) = \sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < 1$ qui est un réel. On a donc une onde réfléchie et une onde transmise, et on n'observe pas de déphasage. Les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par

$$\begin{cases} r = \dfrac{1-n}{1+n} \\ t = \dfrac{2}{1+n} \end{cases} \tag{29.30}$$

  Si $\omega \gg \omega_p$, $n \to 1$ et $r \to 0$ donc toute l'onde est transmise. On parle d'adaptation d'impédance.

- Cependant, si $\omega < \omega_p$, on a cette fois un indice imaginaire pur $n = -j\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-1}$. Le coefficient de transmission en énergie étant défini par $T = \frac{\Re(n_2)}{\Re(n_1)}|t|^2$, on en déduit qu'il est nul : toute l'énergie est réfléchie.

3.4 Application aux plasmas

Un plasma est un milieu composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés mais qui reste globalement électriquement neutre ; ainsi, un plasma d'hydrogène est composé d'atomes d'hydrogène, de protons (les noyaux d'hydrogène) et d'électrons libres, en proportions différentes selon la nature du plasma (plasma peu ou au contraire complètement ionisé).

Les exemples de plasmas dans la nature sont nombreux ; on peut citer : La magnétosphère et l'ionosphère terrestres, le coeur des étoiles, exemple de plasma chaud et très dense, les tubes à néon et le phénomène de la foudre (décharges électriques).

On trouve dans l'ionosphère terrestre $n \sim 1 \times 10^{11}\,\mathrm{m}^{-3}$, et cela donne une fréquence plasma de l'ordre de $\nu_p \sim 1 \times 10^7$ Hz.

Ainsi à $\nu \ll \nu_p$, les ondes sont réfléchies sur l'ionospère, ce qui explique la très grande distance de détection des ondes AM (Marconi 1901).

En revanche, à $\nu \gg \nu_p$, l'ionosphère est transparente, ce qui permet de la traverser pour, par exemple, communiquer avec les satellites.

✍ Centrale MP Physique 2012, Centrale PC Physique 1 2018, E3A PSI Physique 2007.

✍ Pour aller plus loin : Thèse du Docteur LI Feng [1].

1. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00689864/document

LP 30

Rayonnement dipolaire électrique

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Cap prépa MP*, **Renvoizé** ⟶ Structure générale
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ lait p273, Brewster p270
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Ciel bleu polarisé p256
- ✍ *Electromagnétisme*, **Perez** ⟶ Calcul des champs

Prérequis

- ➢ Dipôle électrostatique
- ➢ Electrostatique, magnétostatique, ARQS
- ➢ Équations de Maxwell
- ➢ Polarisation

Expériences

☕

1 Le dipôle rayonnant . . . 416
1.1 Cadre d'étude . . . 416
1.2 Calcul des potentiels . . . 416
1.3 Calcul des champs électrique et magnétique . . . 418
1.4 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée . . . 420
1.5 Puissance dissipée par le mouvement cyclotron . . . 420
2 Application aux antennes . . . 421
2.1 Antenne rectiligne . . . 421
2.2 Une seule antenne en distribution sinusoïdale de courant . . . 422
2.3 Antenne sectionnée . . . 424
2.4 Cas particulier de l'antenne sectionnée demi-onde . . . 425
3 Diffusion de Rayleigh . . . 425
3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié . . . 425
3.2 Puissance rayonnée . . . 426
3.3 Le ciel est bleu . . . 427

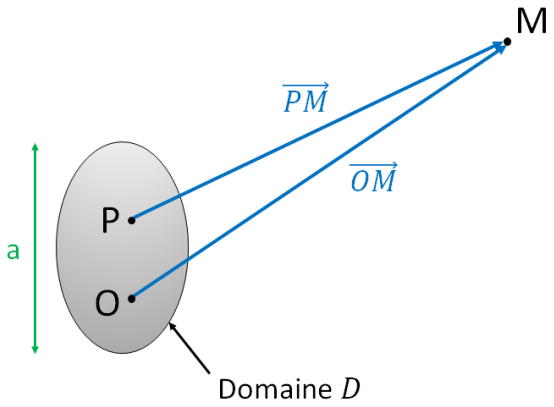
Introduction

Les ondes électromagnétiques, mise en évidence par Maxwell au cours de la seconde moitié du 19e siècle ont aujourd'hui d'innombrables applications, allant de la télécomunication, à l'imagerie médicale en passant par les microondes et les GPS ou encore bien d'autres... Nous avons déjà parlé de ces types d'onde dans les leçons précédentes, mais nous ne savons toujours pas comment générer physiquement de telles ondes, c'est ce que nous allons essayer de voir dans cette leçon.

1 Le dipôle rayonnant

1.1 Cadre d'étude

On a déjà abordé dans des leçons précédentes le cas du dipôle en électrostatique, *i.e.* quand les deux charges sont immobiles l'une par rapport à l'autre. On va maintenant s'intéresser à ce qu'il se passe quand on met en mouvement l'une des charges.



On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la particule chargée négativement est immobile dans ce référentiel et que la particule chargée positivement oscille dans une direction $\overrightarrow{e_z}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0}\cos(\omega t)$ avec $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_z}$. En plus du champ électrique crée dans le cadre du dipôle statique, ce mouvement de charges va alors créer un courant $\overrightarrow{i} = q\overrightarrow{v}$ qui va engendrer un champ magnétique. Pour étudier ce phénomène, on fait les hypothèses suivantes :

- $a \ll r$ (approximation dipolaire)
- $v \ll c$ et $T \gg \dfrac{a}{c}$ (ARQS des sources et charge non relativiste)
- $cT = \lambda \ll r$ (champ lointain)

1.2 Calcul des potentiels

On peut exprimer $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ à l'aide d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ et d'un potentiel scalaire V qui vérifient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} & \text{car } \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V - \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \end{cases} \tag{30.1}$$

Cependant, ces potentiels ne sont pas définis de manière unique Ainsi, prenons ϕ une fonction quelconque et posons

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\phi \\ V' = V - \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases} \tag{30.2}$$

Alors après calculs on retombe sur les mêmes champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$: c'est ce qu'on appelle l'**invariance de jauge**. On peut limiter le choix de ϕ en choisissant une jauge. Dans cette leçon, on prendra la **jauge de Lorentz** qui impose que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} = 0$$

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{30.3}$$

On peut alors exprimer $\overrightarrow{\nabla}B\wedge\overrightarrow{B}$ de deux manières :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \mu_0\overrightarrow{j} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla}V - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\wedge(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}) - \Delta\overrightarrow{A} \end{cases} \tag{30.4}$$

En utilisant la jauge de Lorentz, la deuxième expression donne

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}) - \Delta\overrightarrow{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla}V - \Delta\overrightarrow{A}$$

On combine avec la première équation pour obtenir

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \Delta\overrightarrow{A} = \mu_0\overrightarrow{j}} \tag{30.5}$$

On peut aussi écrire :

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\cdot(\overrightarrow{\nabla}V) - \overrightarrow{\nabla}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A} \tag{30.6}$$

Avec la jauge de Lorentz, on obtient donc pour V une équation similaire à celle obtenue pour $\overrightarrow{A}$:

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{30.7}$$

Ces deux équations prennent en compte l'état de ρ et de $\overrightarrow{j}$ avant la propagation. On peut donc en déduire les solutions au point M en appliquant les formules de **potentiels retardés** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{A}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{P\in\mathcal{D}}\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{1}{c}\left\|\overrightarrow{PM}\right\|\right)}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' \\ V(M,t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\|}{c}\right)}{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{P\in\mathcal{D}}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{1}{c}\left\|\overrightarrow{PM}\right\|\right)}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' \end{cases} \tag{30.8}$$

Dans ces solutions, $\frac{\|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}'\|}{c}$ correspond à la durée de propagation. On peut appliquer l'approximation dipolaire pour remplacer $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}$ par $\frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$ et l'ARQS des sources pour écrire remplacer terme de retard $\frac{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|}{c}$ par $\frac{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}{c}$. On obtient donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{A}(M,t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{P\in\mathcal{D}}\frac{\overrightarrow{j}\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{1}{c}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' \\ V(M,t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{P\in\mathcal{D}}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r}', t - \dfrac{1}{c}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}' \end{cases} \tag{30.9}$$

Pour calculer $\vec{A}$, on se place dans le cas d'un courant ponctuel :

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\left(t-\frac{1}{c}\left\|\overrightarrow{OM}\right\|\right)}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv_0\cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{r}\vec{e_z} \tag{30.10}$$

On peut donc exprimer $\vec{A}$ en fonction du moment dipolaire $\vec{p} = q\vec{r}$:

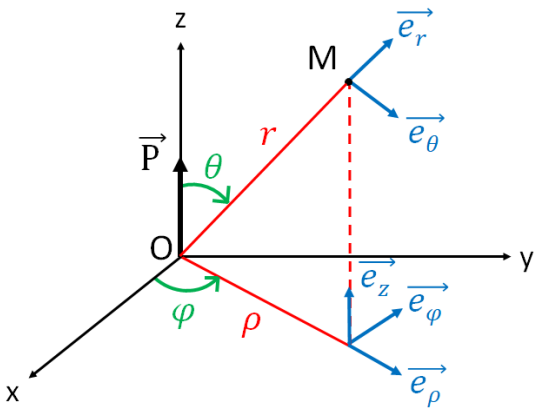
$$\boxed{\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t')}{\mathrm{d}t'}} \qquad \text{avec } t' = t - \frac{r}{c} \tag{30.11}$$

Plusieurs charges

Si il y a plusieurs charges, on peut généraliser l'expression de $\vec{A}$ en écrivant

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}\vec{p}(t')}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left[\sum_i q_i\vec{r_i}(t')\right]$$

1.3 Calcul des champs électrique et magnétique



On accède en premier au champ magnétique $\vec{B}$ créé par le dipôle oscillant dans la direction $\vec{e_z}$. Pour cela, on applique la définition de $\vec{A}$:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\overrightarrow{OM},t) &= \vec{\nabla}\wedge\vec{A}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\vec{e_z}\right)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\right)\wedge\vec{e_z} \qquad \text{en utilisant } \vec{\nabla}\wedge[f(\vec{r})\vec{u}] = \vec{\nabla}f\wedge\vec{u}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\right)\vec{e_r}\wedge\vec{e_z}\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t'^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\right)(-\sin\theta\vec{e_\varphi})
\end{aligned} \tag{30.12}$$

où $\vec{e_\varphi}$ est un vecteur de la base $\{\vec{e_\varphi},\vec{e_\theta},\vec{e_\varphi}\}$ des coordonnées sphériques.

Remarque

Pour calculer $\vec{\nabla}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}$, il ne faut pas oublier que $t' = t - \frac{r}{c}$ et donc que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \iff -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}$.

On trouve donc

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\right)\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}} \tag{30.13}$$

Le champ $\overrightarrow{E}$ peut être alors calculé à partir de cette expression via Maxwell-Ampère en prenant $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ pour obtenir :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \left[\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c r^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\right][2\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}} \tag{30.14}$$

On reconnaît dans cette expression le champ du dipôle électrostatique en $\frac{1}{r^3}$. Si on suppose que le dipôle oscille sinusoïdalement avec la pulsation ω, on a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'} \approx \omega p \approx \frac{c}{\lambda}p \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2} \approx \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 p$$

On peut alors distinguer deux régimes de rayonnement :

- **le régime de champ proche $r \ll \lambda$:**
  On retrouve dans ce régime l'expression du champ électrostatique avec le retard dû à la propagation mais sans effets d'induction. On est alors dans un régime quasi-électrostatique :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}] \\ \overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \end{cases} \tag{30.15}$$

- **le champ de rayonnement lointain $r \gg \lambda$:**
  Les termes en $\frac{1}{r^3}$ et en $\frac{1}{r^2}$ sont négligeables, donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\sin\theta\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi c r}\dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \end{cases} \tag{30.16}$$

  Le champ de rayonnement lointain possède plusieurs propriétés remarquables :

  - une onde n'est émise que si les charges sont accélérées (*i.e.* $\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2} \neq 0$)
  - rayonnement anisotrope à cause de $\sin\theta$ et polarisé
  - structure locale d'onde plane (champs localement $\perp$)
  - décroissance lente de l'amplitude en $\frac{1}{r}$
  - le champ créé à grande distance se propage à la vitesse c suivant $\overrightarrow{e_r}$ (dépendance en t')

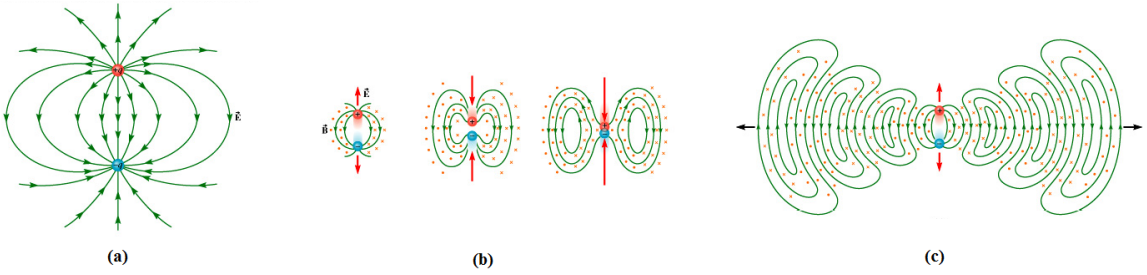


FIGURE 30.1 – **(a)** Rayonnement du dipôle électrostatique. **(b)** Rayonnements de 3 dipôles électrostatiques de dimension différente. **(c)** Rayonnement du dipôle électrique oscillant.

1.4 Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting se calcule via la formule

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}$$

En champ de rayonnement lointain, cette expression donne

$$\boxed{\overrightarrow{Pi} = \frac{\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2 c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\right)^2 \overrightarrow{e_r}} \tag{30.17}$$

On voit donc que

- $\overrightarrow{\Pi} \parallel \overrightarrow{e_r}$
- l'énergie est rayonnée de façon anisotrope : elle n'est pas rayonnée dans l'axe du dipôle
- la puissance rayonnée à travers une sphère de centre 0 est constante (**formule de Larmor**) :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\right)\right\rangle}$$

1.5 Puissance dissipée par le mouvement cyclotron

Prenons l'exemple du mouvement cyclotron. Un électron (par exemple), de vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, est soumis à une champ $\overrightarrow{B_0} \perp \overrightarrow{v_0}$. En l'absence de dissipation, l'électron a un mouvement circulaire de pulsation $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m_e}$. On veut s'intéresser à l'énergie que l'électron perd par rayonnement et voir à quel point cette perte d'énergie atténue la rotation de l'électron.

L'électron a une accélération centripète $a = \omega_c v_0 = \dfrac{eB_0}{m_e}v_0$. Il n'est soumis qu'à la force de Lorentz en $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ qui ne travaille pas : le mouvement est donc conservatif et $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2}m_e v_0^2$.
On peut également adapter la formule de Larmor au cas d'une charge isolée accélérée :

$$\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\right)^2\right\rangle = \langle e^2 a^2(t)\rangle = \frac{1}{2}(ea)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{(ea)^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^4 B_0^2 v_0^2}{12\pi\varepsilon_0 m_e^2 c^3}$$

On obtient donc un temps typique d'amortissement

$$\tau = \frac{E}{\mathcal{P}_{\text{ray}}} = \frac{6\pi\varepsilon_0 m_e^3 c^3}{e^4 B_0^2} \simeq 5.2000 \times 10^4\,\text{s}$$

Avec un champ $B_0 = 1 \times 10^{-2}\,\text{T}$, la particule a le temps de faire 1.4×10^{13} tours. On peut donc admettre que dans ce cas la puissance dissipée par le rayonnement a une influence marginale sur le mouvement de la particule.

Plus généralement, les effets de rayonnement sont toujours négligeables devant les effets mécaniques.

2 Application aux antennes

2.1 Antenne rectiligne

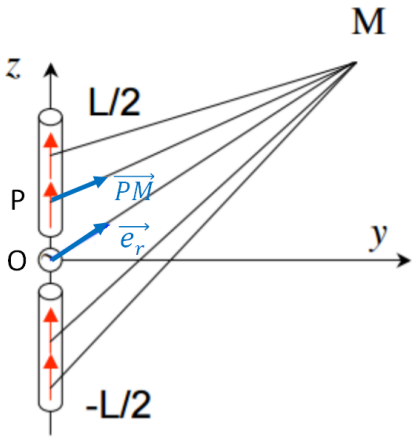


FIGURE 30.2 – Schéma d'une antenne rectiligne.

Une antenne est un conducteur cylindrique suffisamment fin pour le considérer unidimensionnel. On peut alors écrire, avec ℓ la longueur de l'antenne :

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{\ell S}\sum_i q_i \overrightarrow{v_i} \tag{30.18}$$

On en déduit le lien entre I et le moment dipolaire $\overrightarrow{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i}$:

$$\overrightarrow{I} = \int_S \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\ell}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} \tag{30.19}$$

Ce qui nous intéresse bien sûr ce sont les variations de cette intensité :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{I}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\ell}\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t^2} \tag{30.20}$$

Pour bien vérifier les hypothèses du dipôle, il faut avoir $v \ll c$, donc I qui varie assez lentement, il faut se placer en champs lointain pour avoir l'approximation dipolaire, et on veut $\ell \ll \lambda$ pour avoir l'ARQS. Cependant beaucoup d'antennes sont dites quart d'onde, ou demi onde, ce qui signifie que leur longueur est un demi ou un quart de la longueur d'onde à laquelle elles émettent.

Pour palier à ce problème, il va falloir considérer des morceaux infinitesimaux d'antenne. L'élément élémentaire de champ électrique créé par un morceau d'antenne de longueur $\mathrm{d}z$ est $\mathrm{d}\overrightarrow{E}$, avec $\tau(z)$ le temps de propagation, qui dépend de z, et $r'(z)$ la distance entre la source, ici le bout d'antenne en z, et le récepteur, situé en $\overrightarrow{r}$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{E} = \frac{\mathrm{d}z\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r'(z)c^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(z, t-\tau(z))\overrightarrow{e_\theta} \tag{30.21}$$

On peut alors intégrer et trouver le champs global :

$$\overrightarrow{E} = \int \mathrm{d}\overrightarrow{E} = \int_{z=-\ell/2}^{z=+\ell/2} \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r'(z)c^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}(z, t-\tau(z))\overrightarrow{e_\theta}\mathrm{d}z \tag{30.22}$$

Il faut maintenant y mettre une distribution de courant d'une forme adaptée, et calculer τ et r'.

2.2 Une seule antenne en distribution sinusoïdale de courant

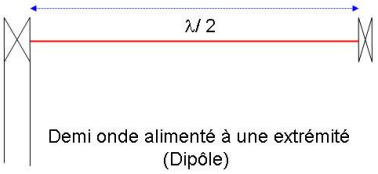


FIGURE 30.3 – Schéma de l'antenne que l'on utilise.

On définit le courant $I(z)$ que l'on impose dans l'antenne, et le plus simple est encore de choisir une onde stationnaire. Les conditions aux limites sont alors celles d'une corde de Melde, les courants aux extrémités sont nuls. Les conditions aux limites imposent que $\ell = \dfrac{n\lambda}{2}$ avec $n \in \mathbb{N}$, ce qui quantifie les valeurs possibles de k.

$$I = I_0 e^{i\omega t}\cos(k_n z) \qquad k_n = \frac{n\pi}{\ell},\ n \in \mathbb{N}^* \tag{30.23}$$

On notera par la suite k en se souvenant que c'est un objet qui est quantifié, ce qui nous aidera bien un peu plus tard.

Lorsque l'on intègre, il faut prendre en compte la propagation, qui se fait à la vitesse c.

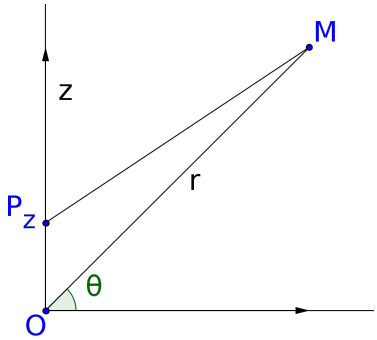


FIGURE 30.4 – Schéma pour le calcul du temps de propagation.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{OM} - z\overrightarrow{e_z} \\
\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 &= r^2 + z^2 - 2zr\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}\cdot\overrightarrow{e_z} \\
&= r^2 + z^2 - 2zr\sin\theta \\
PM &\simeq r - z\sin\theta
\end{aligned} \tag{30.24}$$

Pour la propagation on fait un ordre 0 en $\dfrac{z}{r}$ dans l'amplitude, et un ordre 1 pour la phase, qui est plus sensible du fait de sa 2π-périodicité.

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\overrightarrow{e_\theta}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} I_0 i\omega e^{i\omega(t-\frac{r}{c}+\frac{z}{c}\sin\theta)}\cos(kz)\mathrm{d}z \tag{30.25}$$

En posant un magnifique $\overrightarrow{E_0} = i\dfrac{I_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\overrightarrow{e_\theta}$, on peut écrire

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^{i\omega\frac{z}{c}\sin\theta}\cos(kz)\mathrm{d}z \tag{30.26}$$

Et c'est là qu'on fait de la magie Vaudou sur l'intégrale. On prend l'exponentielle complexe et on en fait une somme, comme en terminale :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\cos\left(\omega\frac{z}{c}\sin\theta\right) + i\sin\left(\omega\frac{z}{c}\sin\theta\right)\right)\cos(kz)\mathrm{d}z \tag{30.27}$$

Or en faisant ça, on fait apparaître une intégrale paire, car le produit de deux fonctions paires est pair, et une intégrale impaire, car impair×pair=impair ! On pose $k'(\theta) = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta$, et on fait ENCORE PLUS de magie Vaudou :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = &\quad 2\overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\int_0^{\ell/2}\cos\left(\omega\frac{z}{c}\sin\theta\right)\cos(kz)\mathrm{d}z \\
= &\quad \overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\int_0^{\ell/2}\left[\cos\left((k'-k)z\right)+\cos\left((k'+k)z\right)\right]\mathrm{d}z \\
= &\quad \overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}\left[\frac{1}{k'-k}\sin\left((k'-k)\frac{\ell}{2}\right)+\frac{1}{k'+k}\sin\left((k'+k)\frac{\ell}{2}\right)\right] \\
= &\quad \overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2-k^2)}\left\{k'\left[\sin\left((k'-k)\frac{\ell}{2}\right)-\sin\left((k'+k)\frac{\ell}{2}\right)\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\,k\left[\sin\left((k'-k)\frac{\ell}{2}\right)+\sin\left((k'+k)\frac{\ell}{2}\right)\right]\right\} \\
= &\quad 2\overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2-k^2)}\left(k'\sin\left(\frac{-k\ell}{2}\right)\cos\left(\frac{k'\ell}{2}\right)-k\sin\left(\frac{k'\ell}{2}\right)\cos\left(\frac{-k\ell}{2}\right)\right) \\
= &\quad -2\overrightarrow{E_0}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r(k'^2-k^2)}\left(k'\sin\left(\frac{k\ell}{2}\right)\cos\left(\frac{k'\ell}{2}\right)+k\sin\left(\frac{k'\ell}{2}\right)\cos\left(\frac{k\ell}{2}\right)\right)
\end{aligned} \tag{30.28}$$

Or par une chance, on a pris $k = k_n$ tel qu'aux extrémités de l'antenne, on a $\cos k_n z$ qui s'annule bien gentiment en $\dfrac{\ell}{2}$, et $\sin k_n\ell/2 = (-1)^n$. On se rappelle également que $k' = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta$.

Champs électrique produit par une antenne en régime sinusoïdal :

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = -i\frac{I_0\omega}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r((k')^2-k_n^2)}k'(-1)^n\cos\left(k'\frac{l}{2}\right)\overrightarrow{e_\theta} \tag{30.29}$$

Avec $k' = \dfrac{\omega}{c}\sin\theta$ et $k_n = \dfrac{n\pi}{\ell},\ n\in\mathbb{N}^*$.

✍ **Ferrand, Electromagnétisme**

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = i\frac{I_0\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}\mathcal{F}(\theta)\overrightarrow{e_\theta} \tag{30.30}$$

Avec $\mathcal{F}(\theta) = \displaystyle\int_{\text{antenne}} \mathrm{d}z\sin\theta f(z)e^{i\frac{2\pi z}{\lambda}\cos\theta}$ la transformée de Fourier de la répartition de courant $f(z)$.

Bon, on va pas se mentir, c'est indigeste, mais on a une façon *"simple"* d'exprimer le bousin. On va l'appliquer maintenant à un cas plus réel, celui de l'antenne sectionnée.

2.3 Antenne sectionnée

L'astuce de l'antenne sectionnée, c'est de séparer l'antenne en deux, et de mettre une fonction symétrique entre les deux côtés, comme décrit dans la figure suivante.

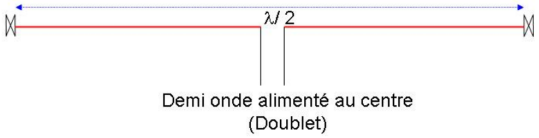


FIGURE 30.5 – Schéma de l'antenne demi-onde en mode doublet.

On peut alors écrire l'expression du courant comme

$$I(z,t) = I_0 e^{i\omega(t-\tau(\theta))} \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(|z| - \frac{\ell}{2}\right)\right] \qquad \text{avec } \ell = \frac{n\pi}{\lambda},\ n \in \mathbb{N} \tag{30.31}$$

Notez la valeur absolue, qui diffère du calcul précédent, et va permettre de s'en sortir. On trouve :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = i\dfrac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 cr}\dfrac{\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} & e^{i(\omega t - r/c)}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{si } n \text{ est impair} \\ \overrightarrow{E} = i\dfrac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 cr}\dfrac{(-1)^{n/2} - \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} & e^{i(\omega t - r/c)}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \tag{30.32}$$

Attention cependant, ces résultats semblent supposer qu'il existe un lien entre le $k = \dfrac{\omega}{c}$ propagatif de l'onde et k_n, ce qui me semble faux. C'est à vérifier, mais soyons honnêtes, on ne vérifiera jamais et on ne présentera jamais l'intégralité des calculs, qui seront cachés dans un "après quelques manipulations triviales" (ou "on obtient aisément").

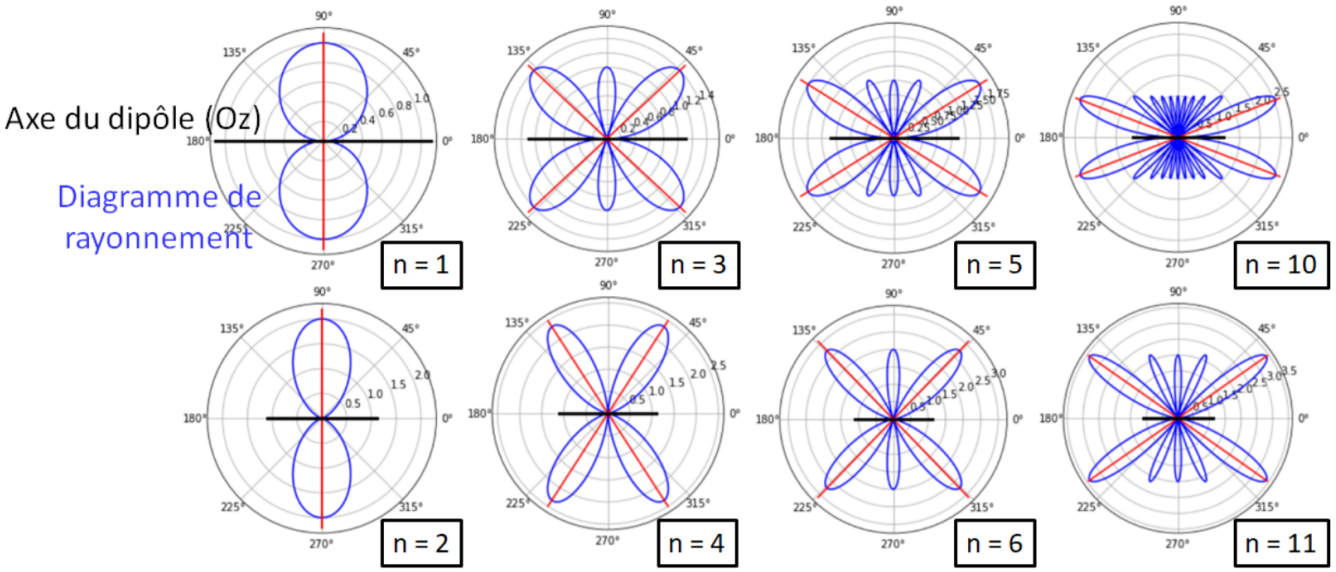


FIGURE 30.6 – Diagrammes de rayonnement de l'antenne demi-onde sectionnée.

2.4 Cas particulier de l'antenne sectionnée demi-onde

Une antenne demi-onde, on la règle à $n = 1$. Cela revient à avoir une demi-longueur d'onde émise dans l'antenne. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = i\dfrac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 cr}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} & e^{i(\omega t - r/c)}\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{B} = i\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi cr}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} & e^{i(\omega t - r/c)}\overrightarrow{e_\phi} \end{cases} \tag{30.33}$$

Le calcul donne alors un vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{I_0^2}{4\pi^2 cr^2}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}\sin^2(\omega t - r/c)\overrightarrow{e_z} \tag{30.34}$$

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 cr^2}\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta}\overrightarrow{e_z} \tag{30.35}$$

Et finalement on a

$$\langle\mathcal{P}_{ray}\rangle = \int\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 35.54 I_0^2 \tag{30.36}$$

On peut aussi calculer la résistance de rayonnement, définie comme $\langle\mathcal{P}_{ray}\rangle = R_{ray}I_{eff}^2 = R_{ray}\dfrac{I_0^2}{2}$. On trouve alors $R_{ray} = 7.3\times10^1\,\Omega$.

3 Diffusion de Rayleigh

La diffusion de Rayleigh est un modèle expliquant la diffusion de la lumière à travers des atomes en suspension dans un milieu transparent. C'est notamment le phénomène qui explique la couleur du ciel ainsi que la polarisation apparente de la lumière du ciel alors que la lumière du Soleil n'est pas polarisée. Le lien avec les dipôles ? Les molécules de l'atmosphère se comportent comme des dipôles et donc réémettent, comme des dipôles, de la lumière de façon anisotrop (donc partiellement polarisée).

Diffusion de Rayleigh

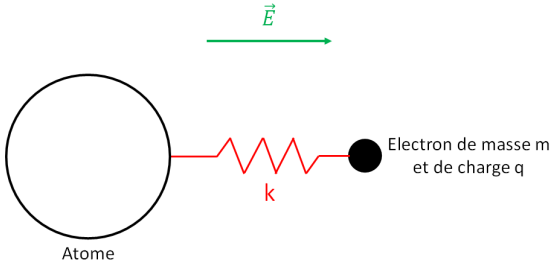
✍ Sextant p273 ⏲ 5 min

On éclaire une cuve avec du lait, et patati et patata, tout est bien détaillé dans le Sextant... Au pire si ça marche pas, on peut regarder https://youtu.be/rA0vLouZ0gg.

3.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

Afin de connaître le moment dipolaire d'un atome soumis à un champ extérieur $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$, on utilise le modèle phénoménologique de l'électron élastiquement lié. Pour cela, on suppose que le noyau est fixe (car il est 1000 fois plus massif que l'électron), et on suppose que l'électron subit les forces suivantes :

- la force de Lorentz $\overrightarrow{F_L} = -e\overrightarrow{E_{\text{ext}}}(t)$, en supposant que $\overrightarrow{E_{\text{ext}}}(t)$ est uniforme sur les dimensions d du dipôle, *i.e.* à l'échelle de l'atome (approximation des grandes longueurs : $\lambda \gg d$)
- une force de rappel élastique $\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$ qui est valable si le système ne s'éloigne pas trop de sa position d'équilibre. Il s'agit d'une modélisation **empirique** de l'interaction Coulombienne donc la forme est adaptée à l'étude de la résonance optique ($\nu_0 = 10^{14}$-10^{15} Hz, dans le domaine du visible).
- une force de frottement fluide modélisée par $\overrightarrow{F_f} = -\dfrac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}}$. Elle représente la perte d'énergie par rayonnement de l'électron accéléré



En notant $\overrightarrow{r}$ la position de l'électron par rapport au barycentre immobile des charges positives (la noyau), on peut appliquer le PFD et obtenir :

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r} - e\overrightarrow{E_{\text{ext}}}(t) - \frac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}} \tag{30.37}$$

En prenant comme solution une OPPH de la forme $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0}e^{i\omega t}$ et $\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = \overrightarrow{E_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ et en passant dans le domaine de Fourier, on obtient

$$\overrightarrow{r} = -\frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E_{\text{ext}}} \tag{30.38}$$

Le moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ vaut alors $\overrightarrow{p} = -e\overrightarrow{r}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}} \tag{30.39}$$

Polarisation

Le moment dipolaire $\overrightarrow{p}$ peut être relié à la polarisation $\overrightarrow{P}$ du milieu dans l'hypothèse des milieux dilués par $\overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p}$ où n^* est la densité électronique du milieu. On a donc :

$$\overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p} = -n^*e\overrightarrow{r} = \frac{n^*e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$$

3.2 Puissance rayonnée

Pour comprendre la diffusion de Rayleigh, on se place dans le régime de Rayleigh (thank you Captain Obvious), *i.e.* pour des pulsations $\omega \ll \omega_0 = 10^{16}$ rad/s. Cela revient à ne considérer que des longueurs d'ondes supérieures à l'ultraviolet. Dans ce cadre, le moment dipolaire de l'atome **pour un électron** vaut

$$\overrightarrow{p} = \frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\dfrac{\omega}{\tau}}\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2}\frac{1}{1 + i\dfrac{\omega}{\omega_0^2\tau} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$$

$$\simeq \frac{e^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$$

Pour un atome **avec Z électrons**, on a donc un moment dipolaire $\overrightarrow{p} = \dfrac{(Ze)^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$. Pour un champ extérieur issu d'un OPPH de pulsation ω, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t'^2} = -\omega^2\frac{(Ze)^2}{m\omega_0^2}\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = -\frac{(Ze)^2}{m}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\overrightarrow{E_{\text{ext}}}$$

La formule de Larmor nous donne donc la puissance rayonnée par l'atome :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left\langle\left(\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t'^2}\right)\right\rangle$$

donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ray}} = -\frac{(Ze)^2}{6\pi\varepsilon_0 mc^3}\left\langle\overrightarrow{E}^2_{\text{ext}}\right\rangle\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \propto \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}$$

3.3 Le ciel est bleu

On a maintenant tous les outils pour expliquer ce qu'on voit :

- **le ciel est bleu :** la puissance rayonnée (donc diffusée) est en ω^4 donc les faibles longueurs d'onde (le violet et le bleu) sont plus diffusées que les grands longueurs d'onde (le rouge). Dans l'expérience de la cuve avec les particules de lait en suspension dans l'eau, on voit au début de la cuve de la lumière bleue.

  Cela explique aussi pourquoi on voit le Soleil jaune alors qu'il est blanc : le bleu étant diffusé, il ne reste que la couleur complémentaire de bleu qui nous parvient, donc le jaune.

- **le ciel devient orangé au coucher du Soleil :** plus l'épaisseur du milieu traversé est grande, plus la lumière perd ses hautes fréquences (donc son bleu). Lors d'un coucher de Soleil, l'incidence de la lumière est rasante donc elle traverse une plus grande distance dans l'atmosphère avant de nous parvenir, donc elle n'a quasiment plus de bleu. Dans la cuve, on voit donc que la lumière tend de plus en plus vers le rouge.

- **la lumière est partiellement polarisée :** on a vu au cours de la leçon que le champ rayonné était anisotrope donc partiellement polarisé. La puissance rayonnée est maximale en $\theta = \pi/2$, angle pour lequel $\overrightarrow{E} \parallel \overrightarrow{p}$. Un dipôle excité selon une direction donnée rayonnera donc un champ partiellement polarisé dans cette même direction.

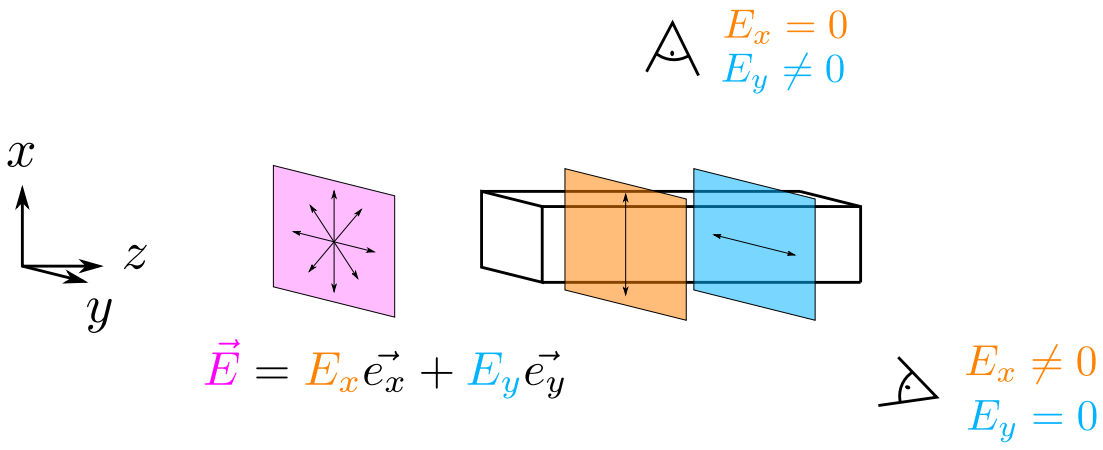


FIGURE 30.7 – Polarisation du champ rayonné dans la cuve.

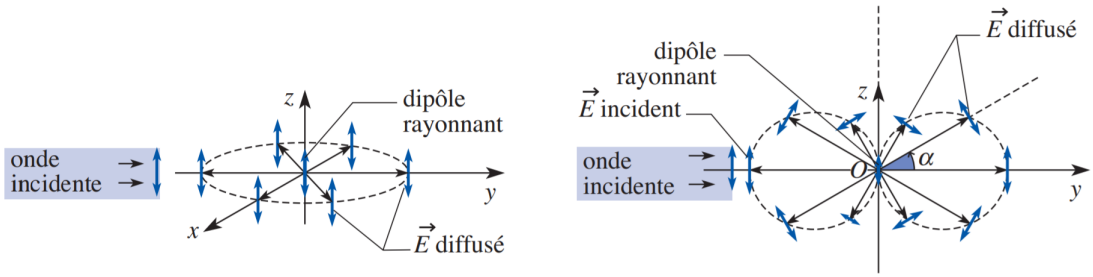


FIGURE 30.8 – Polarisation du champ rayonné.

On peut également constater ce phénomène en comparant une photo du ciel avec et sans analyseur.

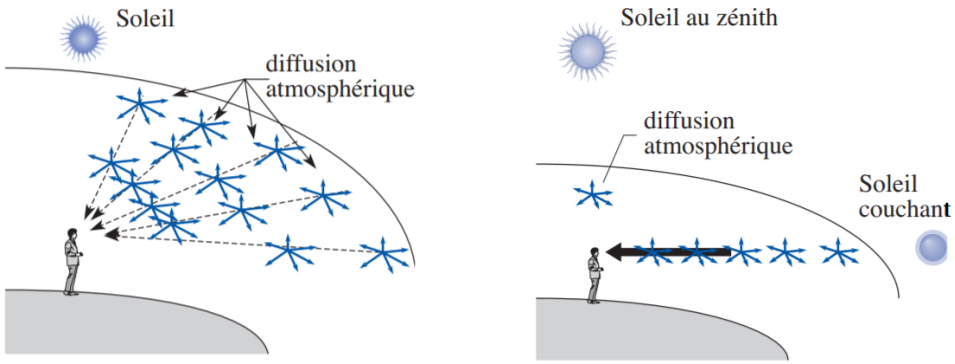


FIGURE 30.9 – Polarisation de la lumière du ciel.

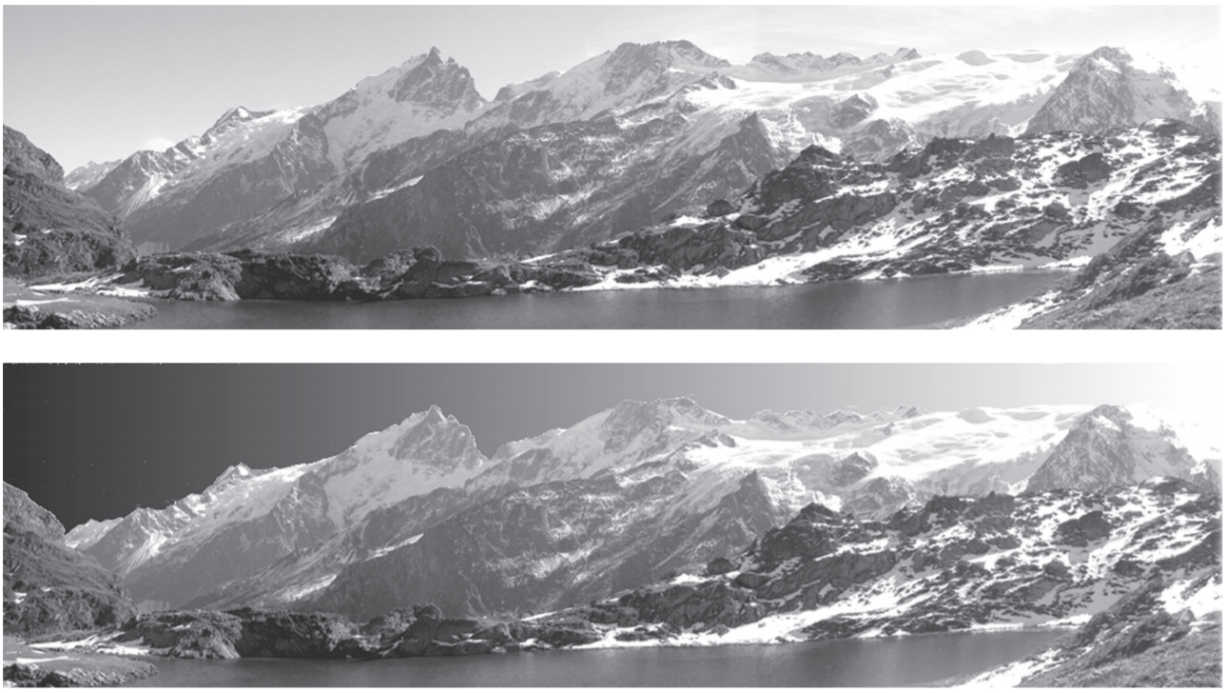


FIGURE 30.10 – Photo prise sans (en haut) et avec (en bas) analyseur.

LP 31

Présentation de l'optique géométrique, principe de Fermat

Commentaires du jury

- 2017 : Les applications à des systèmes optiques réels sont trop souvent absentes de cette leçon.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat. Exemples.

- 2014 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion. Les analogies avec d'autres principes variationnels sont appréciées.

- 2013 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion.

- 2010 : Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences et applications.

- 2010 : Le caractère variationnel du principe de Fermat doit clairement ressortir. Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le théorème de Malus.

- 2009 : Le caractère variationnel du principe de Fermat doit clairement ressortir.

- 2008 : L'intérêt de l'introduction de la notion de chemin optique est central dans cette leçon.

- 2005 : La notion de rayon lumineux reste imprécise. L'expression mathématique du principe de Fermat mettant en avant l'expression de l'infiniment petit du premier ordre mis en jeu est souvent ignorée. Par ailleurs, l'interprétation du stigmatisme est une application intéressante du principe de Fermat.
  Jusqu'en 2004, le titre était : Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences.

- 2000 : Cette leçon nécessite d'avoir réfléchi au lien existant entre la notion de rayon lumineux et l'optique ondulatoire.

- 1999 : Pour que cette leçon soit complète et afin de faire correctement le lien avec le théorème de Malus il est nécessaire de savoir relier chemin optique et phase d'une onde et de comprendre à la lumière de la théorie ondulatoire la concentration de l'énergie sur un rayon lumineux. On peut discuter sans calcul comment le principe de Fermat intervient dans la formation des images.

- 1996 : Il est bon d'expliquer comment on est conduit à ne rechercher les courbes de chemin optique stationnaire que parmi les lignes brisées, et de souligner que le principe de Fermat ne fait que sélectionner les trajectoires possibles pour la lumière – sans préciser comment la répartition du flux s'effectue entre elles.

Niveau : L1-L3

Bibliographie

- ✍ *Optique géométrique*, **Bertin, Faroux, Renault**(bleu) ⟶ Base de la leçon
- ✍ *Principes variationnels et Dynamique*, **Basdevant** ⟶ Détails historiques et interessant
- ✍ *Qu'est-ce que l'optique géométrique*, **Dettwiller** ⟶ Pour les définitions propres et les questions.
- ✍ *Physique PCSI*, **Sanz** ⟶ Définition rayon lumineux
- ✍ *La physique par la pratique*, **Portelli et Barthes** ⟶ Analogie et Mirages
- ✍ *Optique*, **Perez** ⟶ Fibre à gradient d'indice
- ✍ *Dico*, **Taillet** ⟶ Toujours utile
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Expérience de mirage

Prérequis

- ➢ Optique géométrique
- ➢ Mécanique analytique (Euler-Lagrange)

Expériences

☕

1 Principe de Fermat . . . 431
- 1.1 Notion de rayon lumineux et cadre de l'optique géométrique . . . 431
- 1.2 Principe de Fermat et notion de chemin optique . . . 432
- 1.3 Analogie avec la mécanique analytique . . . 433

2 Lois de l'optique géométrique . . . 433
- 2.1 Dans un milieu homogène isotrope . . . 434
- 2.2 Principe de retour inverse de la lumière . . . 434
- 2.3 Loi de Snell-Descartes . . . 434
- 2.4 Retour à l'optique ondulatoire . . . 436
- 2.5 Théorème de Malus . . . 437
- 2.6 Fibre optique à saut d'indice . . . 438

3 Propagation en milieu non-homogène continu . . . 438
- 3.1 Équation eikonale (ou iconale) . . . 438
- 3.2 Les mirages . . . 439
- 3.3 Fibre optique à gradient d'indice . . . 441

Introduction

L'optique est le domaine de la physique qui décrit les phénomènes relatifs à la lumière, et est apparue dès l'Antiquité avec l'optique géométrique. Ainsi, certaines lois de l'optique géométrique datent de cette période comme par exemple la réflexion sur un miroir plan.
D'autres lois au contraire, comme celle de la réfraction sur un dioptre séparant deux milieux, ont été découvertes plus tard au 17ème siècle par Snell et Descartes. Ces lois sont connues en France sous le nom de lois de Snell-Descartes.
Quelques années après, Pierre de Fermat, un mathématicien et physicien français, arrive à retrouver différentes lois de l'optique géométrique ainsi que les lois de Snell-Descartes en faisant appel à un principe variationnel portant sur le chemin emprunté par la lumière. Ce principe est aujourd'hui connu sous le nom de principe de Fermat et permet de retrouver de nombreux résultats de l'optique géométrique.

Au cours de cette leçon nous commencerons par établir ce principe, puis nous verrons comment, à partir de celui-ci, nous retrouvons certaines lois et on s'intéressera à la propagation de la lumière dans un milieu d'indice variable.

Petite anecdote

On parle du même Fermat qui énonce un 'théorème' (il n'existe pas d'entiers x, y, z strictement positifs tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que $n > 2$) sans apporter de démonstration à part un petit "trivial" dans la marge... Alors que ce théorème ne fut démontré que 400 ans plus tard en nécessitant 800 pages de raisonnements.

Optique géométrique "façon prépa"

✍ version complète : https://femto-physique.fr/optique/pdf/book-optgeo.pdf

✍ version rappel : https://www.tsisoa.com/spip/IMG/pdf/03_fiche-methode_sp3.pdf

1 Principe de Fermat

1.1 Notion de rayon lumineux et cadre de l'optique géométrique

Nous avons tous déjà observé que lorsqu'on éclaire un objet, son ombre correspond à un agrandissement ou une réduction de cet objet, *i.e.* c'est une homothétie. Cela suggère que les faisceaux de lumière issus de la source est constitués de rayons lumineux rectilignes. Un très bon moyen de visualiser ces rayons et d'utiliser un laser traversant de la fumée ou de la poussière en suspension : le faisceau laser constitue une bonne approche du rayon lumineux (on peut aussi voir les rayons du Soleil passant à travers une ouverture).

Cependant, même le faisceau d'un laser est constitué de rayon lumineux. Pouvons-nous isoler un seul de ces rayons lumineux ? La réponse est non, puisque si on place un diaphragme après le laser pour réduire le faisceau, on observe un élargissement de l'image sur l'écran à cause du phénomène de diffraction.
On définit donc un **rayon lumineux** comme une *idéalisation* de la région de l'espace traversé par un fin pinceau de lumière et dans laquelle tout phénomène de diffraction est négligée. C'est donc la ligne de lumière selon laquelle l'énergie se propage ($\Longleftrightarrow$ vecteur de Poynting en ondulatoire).

L'optique géométrique consiste alors à formuler les 2 hypothèses suivantes :

- la lumière émise dans une direction donnée à partir d'un point fixe suit une courbe unidimensionnelle analogue à une trajectoire.
- le comportement ondulatoire de la lumière est négligé : les variations des amplitudes de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ ainsi que les variations de $\varepsilon_0\varepsilon_r$ et $\mu_0\mu_r$ sont faibles devant λ.

Dans la suite de la leçon, on considérera des milieux diélectriques linéaires et on supposera que les approximations de l'optique géométrique sont vérifiées. Tout caractère ondulatoire de la lumière sera donc négligé et on utilisera la notion de rayon lumineux.

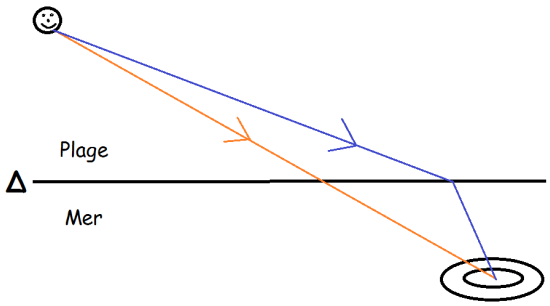
1.2 Principe de Fermat et notion de chemin optique

Pierre de Fermat, un physicien et mathématicien français du XVIIème siècle, proposa en 1657 un principe basé sur la fait que "la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples" [1]. Ce principe, qu'il appelait *principe d'économie naturelle* et qui est de nos jours appelé **principe de Fermat**, est le fondement de l'optique géométrique et s'énonce de la manière suivante :

> Le trajet suivi par la lumière d'un point A à un point B correspond à une courbe dont le temps de parcours est stationnaire par rapport aux courbes voisines

Ce principe est valable dans un milieu **isotrope** et peut être réinterprété comme étant un principe variationnel qui minimise le temps de parcours.

Puisqu'on a admis que la lumière se propageait sous forme de rayons lumineux, il s'agit maintenant de se demander quel chemin la lumière doit emprunter pour aller d'un point A à un point B en minimisant le temps de parcours. Pour mieux visualiser la situation, on fait une analogie entre la lumière et un nageur.



Le nageur, initialement sur la plage, doit se rendre le plus vite possible au niveau de la bouée qui se trouve dans la mer afin que gagner un pari qu'il a fait avec ses amis. On suppose que la démarcation entre la plage et la mer est repérée par une droite Δ. Enfin, on suppose que la nageur, aussi bon soit-il, est plus lent quand il nage dans la mer que lorsqu'il court sur la plage. Intuitivement, on comprend donc qu'afin de minimiser le temps de parcours, le nageur doit faire un compromis entre minimiser la distance à parcourir dans la mer et celle à parcourir sur la plage. On peut s'amuser à calculer le temps de parcours pour différents chemins via une simulation sur Géogébra [2].

Il en est de même pour la lumière. Le rayon lumineux allant de A vers B suit la courbe qui minimise le temps de parcours. Cependant, il est bien plus difficile de calculer le temps de parcours pour la lumière vu qu'on y a pas accés directement. En effet,

$$\Delta t = \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}l(M)}{v(M)} = \frac{1}{c}\int_A^B n(M)\mathrm{d}l(M)$$

On voit apparaître dans l'expression de Δt la notion de **chemin optique** définie par

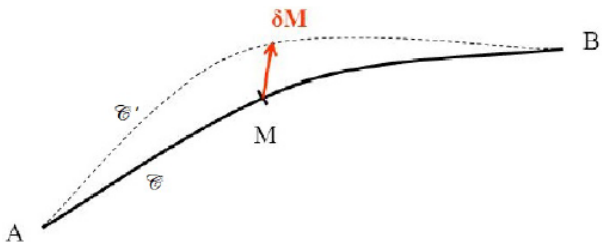
$$\mathcal{L}(AB) = \int_A^B n(M)\mathrm{d}l(M)$$

On peut réécrire cette expression en nommant s l'abscisse curviligne le long de la courbe $\mathcal{C}_{AB}$ reliant A et B pour obtenir :

$$\boxed{\mathcal{L}(AB) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} n\mathrm{d}s} \tag{31.1}$$

1. Par opposition à René Descartes qui, dans *La Dioptrique*, expliquait les lois de l'optique en faisant l'analogie entre les rayons lumineux et les trajectoires d'une balle envoyée par un joueur de paume. Apparemment, Fermat accusait Descartes de manquer de rigueur dans ses démonstrations qui, entre autres, supposaient que la lumière allait plus vite dans un milieu matériel que dans le vide.
2. cf Maitre-nageur.html

Le chemin optique correspond donc à la distance que parcourrait la lumière si elle se propageait dans le vide pendant Δt. Ainsi, chercher la courbe $\mathcal{C}_{AB}$ minimisant Δt revient à chercher la courbe $\mathcal{C}_{AB}$ minimisant le chemin optique : **le principe de Fermat est donc analogue à un principe variationnel de minimisation du chemin optique**.



Ainsi, si on considère une trajectoire $\mathcal{C}'_{AB}$ obtenue en déformant $\mathcal{C}_{AB}$ par un déplacement élémentaire δM en chaque point M de $\mathcal{C}_{AB}$ excepté A et B. On nomme alors $\mathcal{L}$ le chemin optique le long de $\mathcal{C}_{AB}$ et $\mathcal{L}'$ celui le long de $\mathcal{C}'_{AB}$. Le chemin optique le long de $\mathcal{C}_{AB}$ est dit stationnaire si la quantité $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ est infiniment petite devant la plus grande valeur de déplacement $\|\delta M\|$. Si c'est le cas, alors le principe de Fermat assure que le rayon lumineux suivra la courbe $\mathcal{C}_{AB}$.

1.3 Analogie avec la mécanique analytique

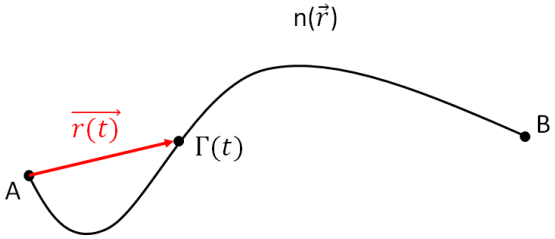
On a dit que le principe de Fermat était un principe variationnel qui visait à minimiser le temps de parcours en minimisant le chemin optique. On a également vu l'analogie entre la lumière et le nageur dans ce cadre de minimisation du temps de parcours.

Cependant, le principe de Fermat est également à analogue à un autre type de principe variationnel, celui qui minimise l'action S d'un système via l'équation d'Euler-Lagrange satisfaite par le Lagrangien L du système. En effet,

$$\mathcal{L} = \int_A^B n\mathrm{d}s = \int_{t_A}^{t_B} n(\overrightarrow{r}(t)) \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\| \mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} n(\overrightarrow{r}(t))\sqrt{\dot{\overrightarrow{r}}^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$\iff S = \int_{t_A}^{t_B} L(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, t)\mathrm{d}t$$

où $\overrightarrow{r}$ est le vecteur position qui parcourt la courbe entre A et B.



Tâchons de retrouver les lois de l'optique géométrique à partir de ce principe.

2 Lois de l'optique géométrique

✍ Pérez

Nous allons, dans cette section, retrouver les lois de l'optique géométrique que nous connaissons.

2.1 Dans un milieu homogène isotrope

On a vu plus haut l'expression du chemin optique :

$$\mathcal{L}(AB) = \int_{\mathcal{C}_{AB}} n\mathrm{d}s \tag{31.2}$$

Dans le cadre d'un milieu homogène et isotrope, on a n indépendant de l'espace. Par conséquent on peut simplement écrire

$$\mathcal{L}(AB) = n\int_{\mathcal{C}_{AB}} \mathrm{d}s \tag{31.3}$$

Le principe de Fermat énonce que cette quantité est stationnaire, et la minimisation se fait simplement en considérant un segment de A à B.

$$\mathcal{L} = n \times \overline{AB} \tag{31.4}$$

Théorème : dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite.

2.2 Principe de retour inverse de la lumière

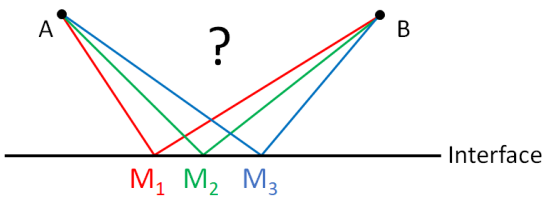
Considérons désormais le trajet inverse, à savoir le trajet $B \to A$. On pourrait tout à fait imaginer que le chemin dans un sens ne soit pas le même que dans le sens inverse, comme par exemple dans un graphe orienté, comme un réseau routier avec des sens interdit. Cependant dans le cas d'un rayon lumineux soumis au principe de Fermat, on peut calculer le chemin optique :

$$\mathcal{L}(BA) = \int_B^A n\mathrm{d}s = -\int_B^A n\mathrm{d}(-s) = \int_A^B n\mathrm{d}(-s) = \int_A^B n\mathrm{d}s' = \mathcal{L}(AB) \tag{31.5}$$

On a alors tout "bêtement" le principe de retour inverse de la lumière : extrémaliser $\mathcal{L}(AB)$ c'est aussi extrémaliser $\mathcal{L}(BA)$, la lumière suit le même chemin en sens inverse.

2.3 Loi de Snell-Descartes

Réflexion



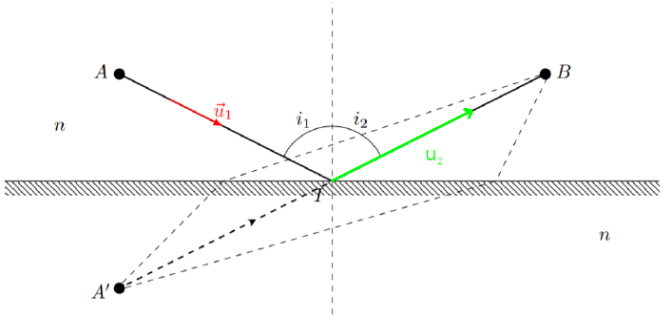


Figure 31.1 – Illustration de la réflexion et du petit schéma magique.

On se place (toujours) dans un milieu homogène et isotrope d'indice n dans lequel la lumière se pro- page donc de manière rectiligne.

Soit un rayon lumineux allant de A à B par réflexion sur un miroir en un point K quelconque à la surface du dit miroir.

On note $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ les vecteurs portant les rayons incident et réfléchi. Le chemin optique passant par le miroir, qui doit être stationnaire, peut se décomposer comme $\mathcal{L}(AKB) = \mathcal{L}(AK) + \mathcal{L}(KB)$.

La chose variable ici c'est la position de K, donc le vecteur $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{K}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{L}(AKB) = \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}K} - \overrightarrow{u_2} \cdot \mathrm{d}K &= 0 \\ = (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}K} &= 0 \end{aligned} \tag{31.6}$$

Du fait que K appartient au dioptre, on a directement que $\overrightarrow{\mathrm{d}K} \parallel$ au dioptre. On trouve ainsi la première loi de la réflexion :

1ere loi de la réflexion
La réflexion a lieu dans le plan formé par le rayon incident et la normale au dioptre.

On a donc que $(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \propto \overrightarrow{N}$ orthogonal au dioptre. Par un produit vectoriel par $\overrightarrow{N}$, on a directement que $i_1 = i_2$.

Remarque : Si on avait orienté $\overrightarrow{u_2}$ comme entrant, on aurait eu $i_1 = -i_2$.

2eme loi de la réflexion
Les angles d'incidence et de réflexion sont identiques et en sens inverse par rapport à la normale au dioptre.

Réfraction

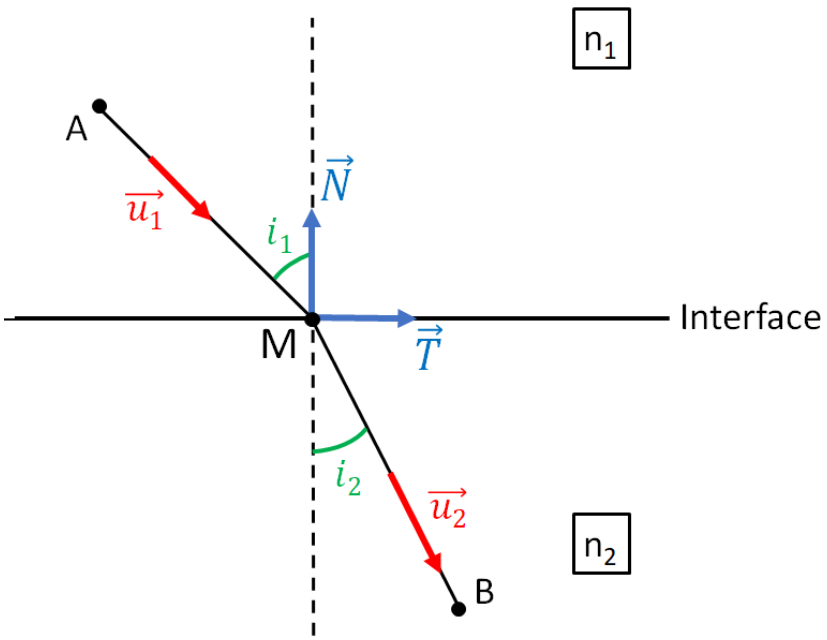


FIGURE 31.2 – Illustration de la réfraction.

Pour la réfraction c'est pas beaucoup plus vache, il faut cependant prendre en compte le changement d'indice. Prenons un rayon allant de A à B en passant par M, qui appartient à un plan de changement d'indice.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{L}(AMB) &= n_1 \mathrm{d}AM + n_2 \mathrm{d}MB = 0 \\ &= (n_1 \overrightarrow{u_1} - n_2 \overrightarrow{u_2}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} \qquad = 0 \end{aligned} \tag{31.7}$$

Ainsi on a, avec $\overrightarrow{N}$ normal à la surface

$$n_1 \overrightarrow{u_1} - n_2 \overrightarrow{u_2} \propto \overrightarrow{N} \tag{31.8}$$

1ere loi de la réfraction
La réfraction a lieu dans le plan formé par le rayon incident et la normale au dioptre.

Par un produit vectoriel par $\overrightarrow{N}$ on obtient directement

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{31.9}$$

2eme loi de la réfraction
La réflexion a lieu dans le plan formé par le rayon incident et la normale au dioptre.

Deuxième démonstration

Une deuxième démonstration est possible :
On considère deux points, $A(0,0,a)$ et $B(0,b,d)$, et un troisième $J(x,y,0)$. On veut aller de A à B en entrant dans le milieu 2 en J. Le milieu i a un indice n_i.
Le calcul de brutasse donne

$$\mathcal{L}(A_J B) = n_1 \sqrt{x^2+y^2+a^2} + n_2 \sqrt{x^2+(y-b)^2+d^2} \tag{31.10}$$

À y fixé cette fonction admet un minimum en $x=0$, on se place en $x=0$ et on retrouve la 1ere loi, celle du plan.
On minimise alors $\mathcal{L}(A_J B)(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}(A_J B)}{\mathrm{d}y} = n_1 \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} - n_2 \frac{b-y}{\sqrt{(y-b)^2+d^2}} = 0 \tag{31.11}$$

Et en fait, $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} = \sin i_1$, et l'autre c'est $\sin i_2$. On peut appliquer la même chose à un maitre nageur, et faire la parallele entre n et sa vitesse.
✍ `Maitre-nageur.html`

2.4 Retour à l'optique ondulatoire

Le chemin optique est intimement lié à la phase d'une onde. Les deux quantités ne diffèrent que d'une constante multiplicative qui est liée à la longueur d'onde. En effet, si on considère l'écriture du chemin optique donné par (1), il est possible de montrer que :

$$n \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\nabla} \mathcal{L} \tag{31.12}$$

Qui donne par multiplication par le nombre d'onde

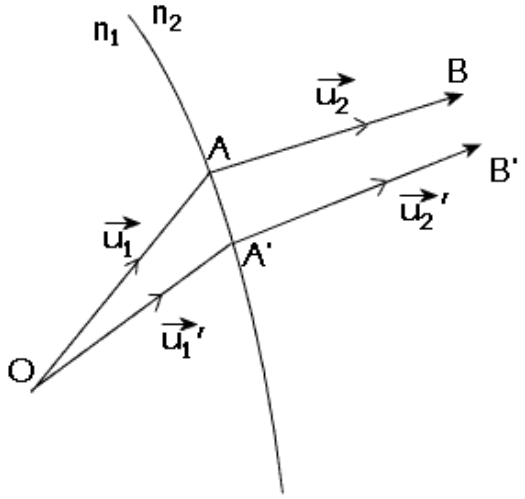
$$k_0 n \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\nabla}(k_0 \mathcal{L}) \tag{31.13}$$

D'où finalement, en prenant $\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\mathcal{L}$:

$$\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\nabla}\phi \tag{31.14}$$

Les surfaces d'ondes sont par définition des surfaces équiphase, et correspondent à des chemins optiques constants.

2.5 Théorème de Malus



Pour démontrer ce théorème, il faut d'abord se rendre compte que dans un milieu homogène, il est forcément vrai. En effet, dans un tel milieu les rayons partant en ligne droite du centre O forment une onde sphérique. Les surfaces d'ondes sont alors perpendiculaires aux rayons.

Dans un milieu non-homogène, ce n'est pas aussi évident. Pour simplifier, on va montrer que le théorème est vrai pour une succession de dioptres (un milieu dont l'indice varie par paliers). Ensuite il suffira de supposer que ces dioptres sont infiniment proches pour obtenir un milieu dont l'indice varie continûment. Mais d'abord, considérons le cas où l'on place un seul dioptre sur le trajet d'un rayon. On note A le point d'incidence du rayon sur le dioptre, et B un point que ce rayon atteint après le dioptre avec un chemin optique $\mathcal{L}$. On note également $\overrightarrow{u_1}$ le vecteur directeur de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{u_2}$ le vecteur directeur de $\overrightarrow{AB}$. Le chemin optique s'écrit :

$$\mathcal{L} = n_1 OA + n_2 AB = n_1\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{OA} + n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{AB}$$

Prenons alors un autre rayon infiniment proche passant par O, A' et B'. On note $\overrightarrow{u_1'}$ et $\overrightarrow{u_2'}$ ses vecteurs directeurs. Pour trouver la différence de chemin optique entre ces deux rayons, on calcule la différentielle de L :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathcal{L} &= n_1\overrightarrow{u_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OA} + n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{AB} \\
&= n_1\overrightarrow{u_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OA} - n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OA} + n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OB} \\
&= \underbrace{(n_1\overrightarrow{u_1} - n_2\overrightarrow{u_2})\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}_{=0 \text{ par Descartes}} + n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OB} \\
&= n_2\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{BB'}
\end{aligned} \tag{31.15}$$

Donc finalement, si B et B' font partie de la même surface d'onde ($\mathrm{d}\mathcal{L} = 0$ par définition), alors les vecteurs $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont perpendiculaires. Autrement dit, le rayon est perpendiculaire à la surface d'onde.

On a ainsi démontré le théorème de Malus pour un seul dioptre. Pour terminer la démonstration, une récurrence serait nécessaire, mais les étapes sont identiques à cette dernière.

2.6 Fibre optique à saut d'indice

✍ LP27

✍ `fibre.pdf` https://www.tsisoa.com/spip/IMG/pdf/02_la_fibre_optique.pdf

3 Propagation en milieu non-homogène continu

Pour l'instant, on n'a traité que les milieux homogènes. Voyons maintenant ce qu'il se passe avec des milieux inhomogènes.

Mirage inférieur

✍ Houard p47-48 ⏲ 10 min

Remplir une cuve avec de l'eau, jusqu'à une hauteur de 7-8 cm. Ajouter à la surface 2 cm d'éthanol. Les deux couches vont diffuser et créer un gradient d'indice ($n_{\text{eau}} = 1,33$ et $n_{\text{alcool}} = 1.36$). Avec un laser, viser en incidence normale la parois de la cuve. Observer la déviation du faisceau laser.

On peut aussi le faire avec de l'eau et de l'eau salée.

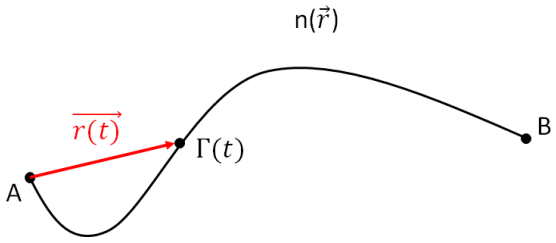
3.1 Équation eikonale (ou iconale)

Eikonal est un mot allemand dérivé du grec εἰκών qui signifie "image".

On a déjà dit au cours de cette leçon de le principe de Fermat était un principe variationnel et qu'on pouvait faire une analogie entre le chemin optique et l'action d'un système :

$$\mathcal{L} = \int_{t_A}^{t_B} n\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \sqrt{\dot{\overrightarrow{r}}^2(t)} \mathrm{d}t \iff S = \int_{t_A}^{t_B} L\left(\overrightarrow{r}, \dot{\overrightarrow{r}}, t\right) \mathrm{d}t$$

où $\overrightarrow{r}$ est le vecteur position qui parcourt la courbe entre A et B.



Si on continue de suivre l'analogie avec la mécanique analytique, les coordonnées généralisées sont donc les 3 coordonnées x, y, z du vecteur position $\overrightarrow{r}$; les vitesses généralisées sont les 3 coordonnées $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ du vecteur vitesse $\dot{\overrightarrow{r}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$, et le paramètre est le temps t. Le Lagrangien correspondant au chemin optique est donc

$$L = n(x,y,z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{31.16}$$

Il ne nous reste plus qu'à résoudre Euler-Lagrange, ce qu'on va faire pour x par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n(x,y,z)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\frac{\partial n}{\partial x}(x,y,z) \tag{31.17}$$

Le calcul est le même pour y et z, et on obtient donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n(\overrightarrow{r}(t)\frac{1}{\left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\|}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\|\overrightarrow{\nabla}n(\overrightarrow{r}(t)) \tag{31.18}$$

Or on avait $\mathrm{d}s = \left\|\dot{\overrightarrow{r}}(t)\right\|\mathrm{d}t$, on obtient alors l'**équation eikonale** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \overrightarrow{\nabla}n} \tag{31.19}$$

Cette équation décrit la marche d'un rayon lumineux en fonction de la variation de l'indice optique du milieu dans lequel il se propage.

Milieu homogène

Dans le cas d'un milieu homogène, $\overrightarrow{\nabla}n = \overrightarrow{0}$ donc $n\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\text{cst}}$ donc $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{a}s + \overrightarrow{b}$: on retrouve la propagation rectiligne.

Pour interpréter l'équation eikonale, on se place dans la base de Frenet associée à l'abscisse curviligne s qui est composée de 2 vecteurs : le vecteur $\overrightarrow{T}$ tangent au point considéré et et le vecteur $\overrightarrow{N}$ normal à $\overrightarrow{T}$. On écrit alors

$$\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{N} = R\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

avec R le rayon de courbure de la courbe au point considéré. Dans cette base, l'équation eikonale se réécrit

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{T} + \frac{n}{R}\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\nabla}n \tag{31.20}$$

En projetant sur $\overrightarrow{N}$, on obtient $\frac{n}{R} = \overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{\nabla}n$ et on peut ainsi exprimer la courbure $\mathcal{C} = \frac{1}{R}$ par :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{n}\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{\nabla}n \geq 0 \tag{31.21}$$

Le rayon lumineux possède donc une courbure lorsqu'il traverse un milieu inhomogène, et cette courbure se fait dans le même sens que le gradient d'indice.

On peut ainsi expliquer ce qu'on voit dans la cuve : l'éthanol est moins dense que l'eau (donc il est au-dessus de l'eau) mais a un indice optique plus fort que l'eau : le gradient d'indice est donc dirigé vers le haut de la cuve et on doit observer un faisceau laser courbé vers le haut.
Si on a fait l'expérience avec de l'eau et de l'eau salée, c'est l'inverse. L'eau salée a un plus grand indice que l'eau (1.38 vs 1.33) mais est également plus dense. Le gradient d'indice est donc dirigé vers le bas et on doit observer un faisceau laser courbé vers le bas.

3.2 Les mirages

Lorsqu'on est en voiture pendant une journée d'été, on peut observer sur la route ce qui ressemble à une flaque d'eau sur le bitume. Cependant, au fur et à mesure que l'on avance, on se rend compte que la flaque n'existe pas. Il s'agit d'une illusion optique due à un phénomène appelé un **mirage** chaud.

On peut observer quelque chose de similaire quand il fait froid, c'est ce qu'on appelle un mirage froid.

Mirage supérieur exceptionnel (cf §3.1.2.) au-dessus de la ville de Salers, dans le Cantal (cliché réalisé par l'abbé Gély, vers 1900)

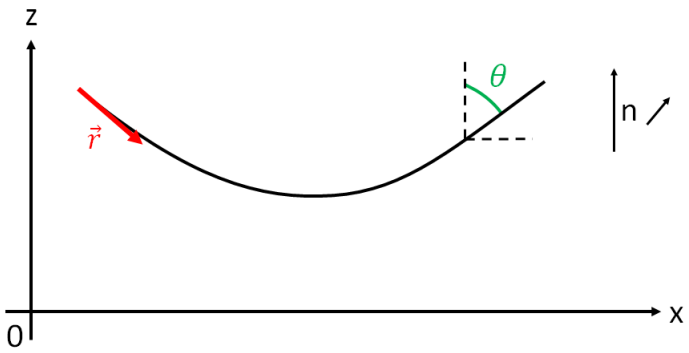
D'après "Qu"est-ce que l'optique géométrique ? " de L.Dettwiller chez Dunod (1990)

Un mirage se produit lorsque l'indice du milieu (dans nos exemples, l'air) varie de façon continue à cause d'une variation de température en fonction de l'altitude. Considérons ainsi un milieu dont l'indice optique varie avec l'altitude selon l'expression

$$n^2(z) = az + b$$

Considérons un rayon lumineux se propageant dans ce milieu en restant dans le plan xOz. On écrit alors

$$\overrightarrow{\nabla} n = \frac{\partial n}{\partial z}\overrightarrow{e_z} = \frac{a}{2n}\overrightarrow{e_z} \tag{31.22}$$



On peut également paramétrer le vecteur unitaire $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s}$ à travers l'angle θ qu'il fait avec la verticale pour obtenir

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}s} = \sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_z} \tag{31.23}$$

L'équation eikonale donne alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right) = \vec{\nabla}n \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(z)\sin\theta\right) = 0 & \text{(projection sur } \vec{e_x}\text{)} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(z)\cos\theta\right) = \dfrac{a}{2n(z)} & \text{(projection sur } \vec{e_x}\text{)} \end{cases} \tag{31.24}$$

La projection sur $\vec{e_x}$ nous dit donc que la quantité $n(z)\sin\theta$ est conservée le long de la trajectoire. Pour la projection sur $\vec{e_z}$, on remarque que

$$\cos\theta = \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)^{-1} = \sin\theta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(z)\cos\theta\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(z)\sin\theta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= n(z)\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \qquad \text{car} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n(z)\sin\theta\right) = 0 \\ &= n(z)\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= n(z)\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} \end{aligned} \tag{31.25}$$

Ainsi,

$$n(z)\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{a}{2n(z)} \tag{31.26}$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{a}{2}\frac{1}{n^2\sin^2\theta} = \text{constante}} \tag{31.27}$$

On trouve donc que le rayon lumineux se courbe dans le milieu pour suivre une parabole :

- courbée vers le haut si $a > 0$: il s'agit des mirages chauds (ou mirages inférieurs) pour lesquels la température au sol est plus chaude que celle de l'air. Les rayons du ciel sont donc redressés avant d'atteindre le sol pour atteindre nos yeux : la 'flaque d'eau' que l'on voit est en réalité l'image du ciel.
- courbée vers la bas si $a < 0$: il s'agit des mirages froids (ou mirages supérieurs) pour lesquels la température au sol est plus froide que celle de l'air. Les rayons allant vers le ciel sont ramenés vers le sol et donc vers nos yeux : on aperçoit donc une 'vue de dessus' du bateau au-dessus de ce bateau.

Remarque

SI on manque de temps, on peut expliquer les mirages avec les mains : la loi empirique de Galdstone donne pour un gaz

$$n - 1 \propto \rho$$

et si le gaz est parfait on a

$$\rho \propto \frac{1}{T}$$

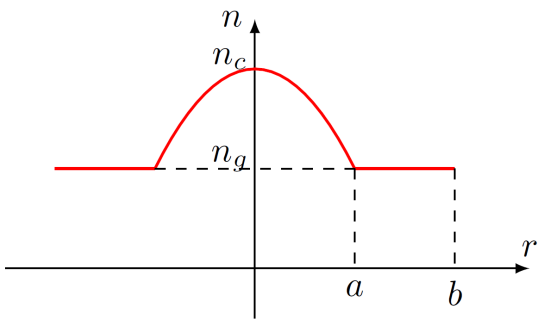
Le gradient d'indice est donc dans le sens opposé au gradient de température.

3.3 Fibre optique à gradient d'indice

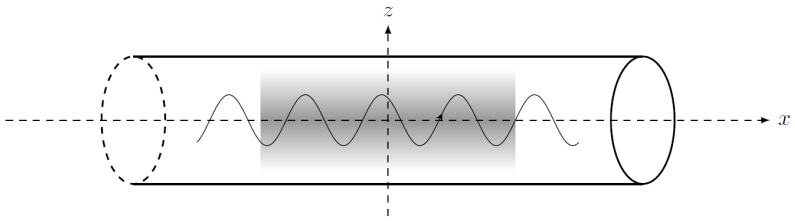
On a vu le principe de la fibre optique à saut d'indice, mais en réalité on utilise plutôt une fibre optique **à gradient d'indice**. Dans ce type de fibre, l'indice de la gaine reste constant mais celui du coeur suit la loi

$$n(r) = n_c\left(1 - \frac{r^2}{2r_0^2}\right)$$

avec r la distance au centre de la fibre.



Pour étudier ce type de fibre, on choisit le plan vertical xOz passant par l'axe x de la fibre.



Dans les conditions de Gauss (faibles angles), on a $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$ et en cartésien $r^2 = y^2 + z^2$. On réécrit l'eikonale pour avoir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = -\frac{n_c}{r_0^2}z \tag{31.28}$$

Le fait d'être dans les conditions de Gauss permet également de considérer que le rayon reste proche du centre et donc que $n \approx n_c$. On obtient donc l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{r_0^2}z = 0 \tag{31.29}$$

Cette équation se résout facilement pour trouver, avec les conditions aux limites $z(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(0) = \sin\theta_0$ par exemple,

$$\boxed{z(x) = r_0 \sin\theta_0 \sin\frac{x}{r_0}} \tag{31.30}$$

Dans tous les cas, on a bien un rayon qui suit une sinusoïde dans la fibre.

Ouverture numérique

On comprend que si l'angle d'arrivée est trop élevé, le rayon va sortir du coeur (et des conditions de Gauss). Il existe donc un cône qui contient tous les angles pour lesquels le rayon passe bien dans la fibre. Si, avant la fibre, on a un rayon incident faisant un angle θ_i avec la section de la fibre et se propageant dans un milieu d'indice n_i, on a :

$$n_i \sin\theta_i = n_c \sin\theta_0$$

On appelle alors $n_i \sin\theta_i$ l'**ouverture numérique** de la fibre. Pour que le rayon reste dans le coeur, il faut que

$$\forall x, |z(x)| < a = r_0\sqrt{2\Delta} \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \frac{n_c - n_g}{n_c}$$

donc l'ouverture numérique doit être inférieure à une certaine valeur critique

$$n_i \sin\theta_i < \frac{n_c a}{r_0} = n_c\sqrt{2\Delta} = \sqrt{2n_c(n_c - n_g)}$$

Comme on pouvait s'y attendre, pour que la fibre accepte le plus de rayons possible, il faut une grande différence entre n_c et n_g.

LP 32

Microscopies optiques

Niveau : L2/L3

Commentaires du jury

- 2017 : L'intérêt des notions introduites doit être souligné.
- 2016 : Une technique récente de microscopie optique à haute résolution doit être présentée.
- 2015 : Deux nouvelles leçons ont été ajoutées [dont] une leçon intitulée « Microscopies optiques », dans laquelle un développement rigoureux et suffisamment complet d'au moins une technique est souhaité.

Bibliographie

- ✍ *MP07*, **Instruments d'optique** ⟶
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Microscope à deux lentilles et historique
- ✍ *Fundamentals of Light Microscopy and Electronic Imaging*, **Murphy et Davidson** ⟶ Très bon d'après Clément
- ✍ *Agrégation épreuve A 2015* ⟶ Pour les améliorations des objectifs
- ✍ `https://cours.espci.fr/site.php?id=265` ⟶ Microscopie Palm
- ✍ `https://toutestquantique.fr/microscopes/` ⟶ plein d'animations.

Prérequis

- ➢ Optique géométrique et ondulatoire (diffraction)
- ➢ Bases de mécanique quantique (Heisenberg)
- ➢ Équations de Maxwell, ondes évanescentes

Expériences

☕

0.1 L'oeil . . . 444
1 Microscopie à deux lentilles . . . 445
1.1 Présentation . . . 445
1.2 Caractéristiques . . . 446
1.3 Limites . . . 448
2 Microscopie à fluorescence (ou à champ lointain) . . . 450
2.1 Principe . . . 450
2.2 Microscopie confocale . . . 450
2.3 Microscopie PALM . . . 451
2.4 Microscopie STED . . . 452
3 Microscopie à champ proche . . . 452
3.1 Nécessité des ondes évanescentes . . . 453
3.2 Microscope STOM . . . 454

Introduction

La microscopie est l'ensemble des techniques permettant d'observer des systèmes plus ou moins petits. Avec cette définition, le microscope le plus simple que nous ayons à disposition est l'oeil, qui permet d'observer des objets de notre vie quotidienne.

0.1 L'oeil

L'oeil peut être modélisé par une lentille mince convergente appelée cristallin, et la rétine située au fond de l'oeil. La distance cristallin-rétine est de 17 mm. Pour un oeil emmétrope (sans défaut), la focalisation se fait sur la rétine grâce à la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} \tag{32.1}$$

On a f' la focale de la lentille, ici du cristallin, O la position du cristallin sur l'axe optique, A et A' les positions respectives de l'objet et de l'image sur l'axe optique.

Pour que la focalisation se fasse toujours sur la rétine, l'oeil a des muscles qui épaississent le cristallin et changent sa focale. On appelle ce processus l'*accommodation*.

L'oeil emmétrope peut focaliser des objets situés en l'infini : à ce moment-là, les muscles ciliaires n'écrasent pas le cristallin qui a une focale maximale de $f_0 = 17$ mm pour focaliser directement sur la rétine. C'est le *punctum remotum* (PR) tel que PR $= \infty$. Àl'inverse, l'oeil peut focaliser au maximum des objets situés à 25 cm : à ce moment-là, les muscles ciliaires écrasent au maximum le cristallin qui a alors une focale $f_0 = 10$ mm. C'est le *punctum proximum* (PP) tel que PP $= 25$ cm.

Pour un oeil myope, la focalisation se fait en avant de la rétine, c'est pourquoi on corrige la vue avec des lentilles divergentes de vergence positive qui refocalisent les objets dans le plan de la rétine. À l'inverse, l'oeil hypermétrope focalise en arrière de la rétine, c'est pourquoi on utilise des lentilles convergentes pour corriger la vue. Lorsque les muscles ciliaires fatiguent avec l'âge, la vue baisse de manière générale : c'est la presbytie. Àce moment-là, on utilise la plupart du temps des verres progressifs qui combinent à la fois des lentilles convergentes et divergentes pour corriger la vue.

La rétine est tapissée de deux types de photorécepteurs : les bâtonnets et les cônes. Les bâtonnets sont majoritaires (95%) et constituent la vision nocturne en teintes de gris de l'oeil. Les cônes sont de trois types (bleu B, rouge R et vert V) et permettent la vision diurne trichromatique de l'oeil. Lorsque deux points proches de notre objet arrivent sur le même photorécepteur sur la rétine, l'oeil ne peut plus distinguer les deux points de l'objet : c'est la limite de résolution de l'oeil. Pour un oeil emmétrope classique, cette limite de résolution est exprimée par l'angle entre OA et OB et vaut une seconde d'angle, soit 2.9×10^{-4} rad. Pour donner un ordre de grandeur plus parlant, on peut dire qu'on peut apercevoir des détails de 1 mm pour un objet à 3 mètres de distance.

☕

Description de l'oeil sur Geogebra

✍ 🕘

Cette limite de résolution est la raison qui nous a poussés à inventer des systèmes optiques capables de dépasser les limitations de l'oeil : c'est l'avènement de la microscopie. Avec les découvertes faites dans les domaines physiques parallèles, notamment en physique quantique où la description de la matière s'est faite à des distances de l'ordre du nanomètre voire moins, il était impératif d'utiliser des dispositifs expérimentaux qui nous permettaient de caractériser des systèmes aussi petits. Le pouvoir de résolution des systèmes de microscopies optiques est donc au coeur de cette leçon : n'hésitez pas à le mettre en fil rouge tout au long de votre oral.

À noter que l'ensemble des calculs d'optique géométrique sont ici faits dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire avec des rayons lumineux peu inclinés par rapport à l'axe optique et proches de l'axe optique.

1 Microscopie à deux lentilles

Les premiers microscopes étaient simplement constitués d'une seule lentille pour obtenir d'un objet une image virtuelle agrandie : c'est la loupe. Inventée par les Grecs durant l'Antiquité, elle s'est perfectionnée au XVIIème siècle avec Galilée (1610), Hooke (1665) et surtout Van Leeuwenhoek (1674) qui a pérennisé son utilisation jusqu'au XIXème siècle. Àce moment-là, le microscope à deux lentilles fut nécessaire pour augmenter la résolution des instruments d'optique.

1.1 Présentation

Description via géogébra et sur paillasse

Matériel : Description du microscope à deux lentilles sur Geogebra. À présenter en parallèle d'un microscope commercial tout construit et d'un microscope de paillasse à construire soi-même.

Le microscope à deux lentilles est constituée d'une première lentille appelée objectif. Le but de l'objectif est de créer une image intermédiaire A_1B_1 réelle inversée agrandie de l'objet AB. Plus l'objet se rapproche du plan focal objet de l'objectif, plus l'image intermédiaire sera agrandie. En pratique, la focale de l'objectif est assez courte (entre 2 et 45 mm) pour limiter l'encombrement dans les microscopes commerciaux, ce qui nous oblige à placer l'objet très proche du plan focal objet de l'objectif.

La deuxième lentille est l'oculaire. Son but est de faire un effet loupe, c'est-à-dire d'obtenir une image finale virtuelle agrandie $A'B'$ de l'image intermédiaire A_1B_1. Le but d'un microscope étant avant tout d'observer des objets avec l'oeil, il faut que l'image finale soit située en l'infini pour que l'oeil n'ait pas besoin d'accommoder et ainsi ne fatigue pas ses muscles. Pour cela, l'image intermédiaire doit obligatoirement se former dans le plan focal objet de l'oculaire, tel que les points A_1 et F_2 soient confondus. La différence entre un microscope non réglé et réglé est montrée via géogébra. La focale de l'oculaire est située entre 12,5 et 50 mm.

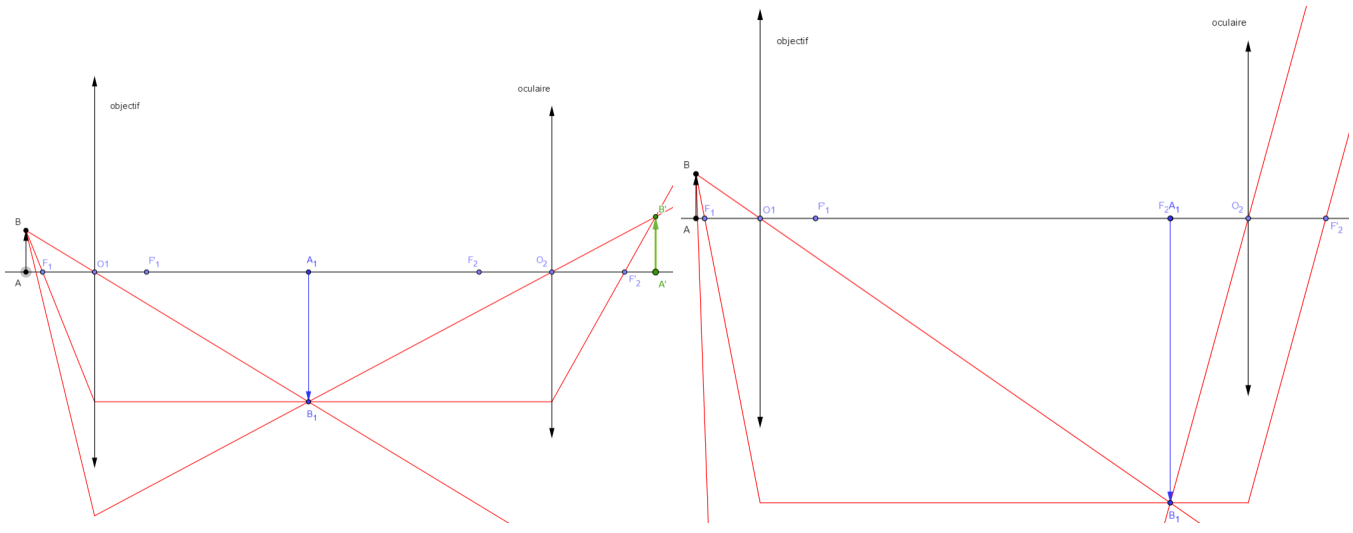


Figure 32.1 – **Gauche** : Schéma du microscope non réglé sur Geogebra. L'objet forme une image intermédiaire réelle renversée agrandie A_1B_1 après le passage de l'objectif et une image finale réelle agrandie $A'B'$ après le passage de l'oculaire. L'image finale n'étant pas située en l'infini, ce cas ne nous intéresse pas.
Droite : Schéma du microscope réglé sur Geogebra. L'objet forme une image intermédiaire réelle renversée agrandie A_1B_1 après le passage de l'objectif dans le plan focal objet de l'oculaire et une image finale virtuelle agrandie $A'B'$ après le passage de l'oculaire qui est donc située en l'infini. C'est le cas qui nous intéresse en pratique.

Maintenant que le microscope est réglé, voyons voir ce que l'on peut en faire.

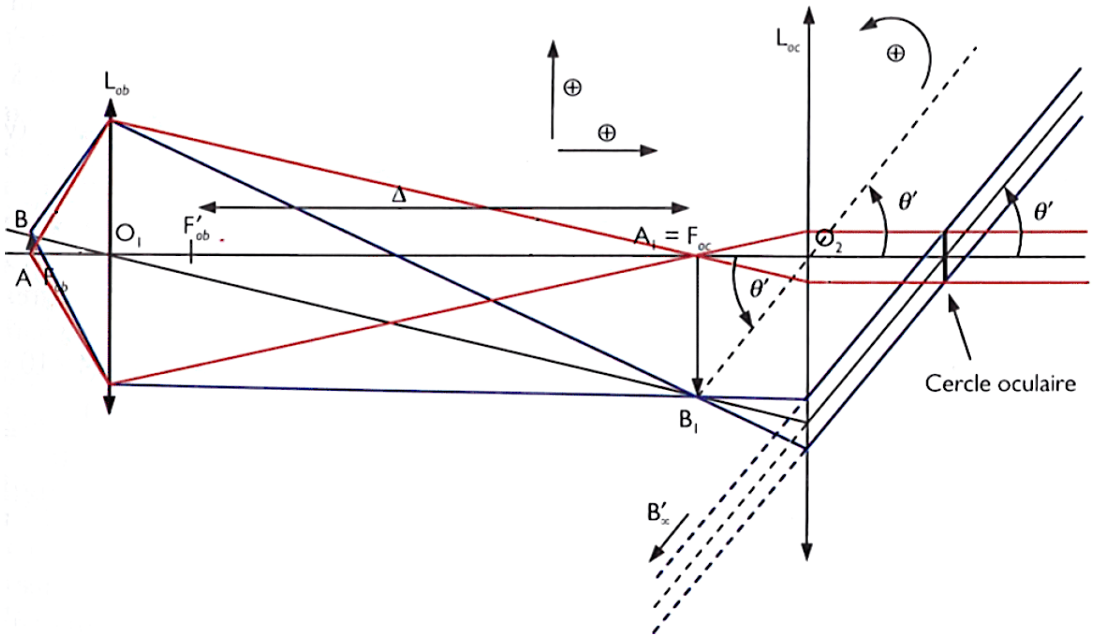


FIGURE 32.2 – Schéma du microscope réglé. L'image de la monture de l'objectif par l'oculaire définit le cercle oculaire. C'est la position privilégiée de l'oeil lors de l'observation.

Calcul de la position du cercle oculaire

Newton donne

$$F_2O_1 \times F_2'C = -{f_2'}^2 \iff F_2'C = \frac{-{f_2'}^2}{\Delta + f_1'} \tag{32.2}$$

On trouve $F_2'C$ de l'ordre de 3 mm pour $\Delta = 160$ mm, $f_1' = 25$ mm et $f_2' = 40$ mm. Confondre les deux points est donc justifié.

1.2 Caractéristiques

1.2.1 Puissance

On définit la **puissance** du microscope comme le rapport entre l'angle selon lequel on voit l'image de l'objet après grandissement et sa taille réelle. Il est donné en m^{-1}, ou plus communément en dioptries δ. C'est toujours une grandeur positive :

$$P = \frac{\theta'}{AB} \tag{32.3}$$

On peut, dans le cadre des conditions de Gauss, ré-exprimer sa valeur en fonction de la puissance de l'objectif et du agrandissement transversal de l'objectif :

$$P = \frac{\theta'}{AB} = \frac{\theta'}{A_1B_1}\frac{A_1B_1}{AB} = P_{\text{oculaire}} \times \gamma_{\text{objectif}} \tag{32.4}$$

On a de plus que $\theta' = \dfrac{A_1B_1}{F_2O_2}$, ainsi $P_{\text{ocu}} = \dfrac{1}{f_2'}$

De même on peut redéfinir $\gamma_{\text{obj}} = \dfrac{F_1'A_1}{O_1F_1} = \dfrac{\Delta}{f_1'}$. On se retrouve alors avec l'expression simplifiée de la puissance :

$$P = \frac{\Delta}{f_1' f_2'} \tag{32.5}$$

Celle-ci varie généralement entre 160 et 4000 δ, tandis que $\Delta = 160$ mm dans presque tous les microscopes commerciaux.

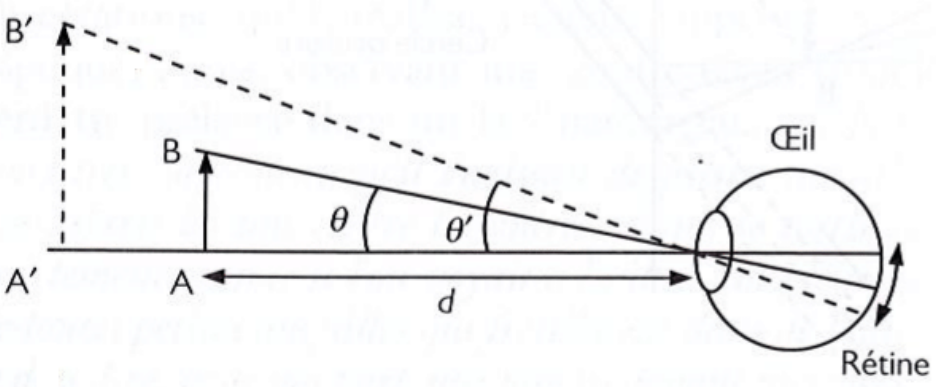


FIGURE 32.3 – L'oeil voit AB sous un angle θ' au lieu de θ.

1.2.2 Grossissement

On rappelle que le microscope a avant tout pour but de grossir notre objet : il nous faut donc inventer une grandeur qui permette de rendre compte de combien l'objet a été agrandi. On définit pour cela le **grossissement** comme le rapport des angles sous lesquel on voit l'objet avec ou sans appareil de grossissement.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} \tag{32.6}$$

Par définition, la grossissement est le rapport des tailles des images rétiniennes lorsque l'objet est vu à travers le microscope et l'oeil nu. Le grossissement caractérise donc bien de combien l'objet a été agrandi après être passé par le système optique. Le problème de cette définition est qu'on ne connaît pas la distance entre l'oeil et l'image finale puisque celle-ci est située en l'infini. Pour cela, on réécrit G comme :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\theta'}{\frac{AB}{d}} = \frac{\theta'}{AB} d = Pd \tag{32.7}$$

Avec d est la distance séparant l'oeil de l'objet initial : G est donc bien sans dimension et est également défini positif. Regardons comment on peut retrouver ces valeurs avec notre microscope.

Mesures de la puissance et du grossissement avec notre microscope

✍ ⏲

Pour construire notre microscope, on a utilisé un objectif de focale $f_1' = 10$ cm et un oculaire de $f_2' = 20$ cm. On éclaire avec une lampe Quartz-Iode (et son filtre anti-calorique, on oublie pas les amis !) une lettre T de 0,9 cm de hauteur. L'image intermédiaire se forme dans le plan focal de l'oculaire : on place un diaphragme à cet endroit pour le mettre en évidence. En sortie, l'image se focalise en l'infini : l'image finale est donc nette sur le mur situé à deux ou trois mètres que l'on suppose être l'infini. Pour modéliser notre oeil, on peut placer une lentille de focale 30 cm au niveau du plan focal image de l'oculaire que l'on approximme comme étant le cercle oculaire de notre microscope. En plaçant un écran à 30 cm de la troisième lentille (ce qui correspond à focaliser notre image sur la rétine de l'oeil), on retrouve bien une image agrandie dans l'oeil, objectif principal du microscope. Quantitativement, on peut calculer la puissance et le grossissement de notre microscope en mesurant la taille de l'image intermédiaire. Celle-ci

est de 2,5 cm de hauteur. On trouve alors $P = 13$ et $G = 12$ grâce aux équations ci-dessus (ce sont des ordres de grandeur, tout dépend des distances réelles de votre montage).

À noter ici que nous n'avons pas parlé d'aberrations car nous avons pris des achromats pour les lentilles : discuter rapidement des aberrations chromatiques et géométriques est cependant attendue sans avoir besoin d'être exhaustif.

1.2.3 Gossissement commercial

Pour savoir si les valeurs trouvées expérimentalement sont importantes (on peut déjà les comparer à celles de Van Leeuwenhoek qui atteignaient des grossissememements de 500), il faut les comparer à des valeurs données par les constructeurs. Dans le commerce, le grossissement n'est pas directement utilisé. En effet, on définit le **grossissement commercial** comme le grossissement lorsque la distance entre l'oeil et l'objet correspond au punctum proximum de l'oeil, c'est-à-dire 25 cm ou 1/4 de mètre.

$$G_c = \frac{P}{4} \tag{32.8}$$

Le grossissement commercial des microscopes de paillasse varient entre 40 et 1000 : on voit donc que la valeur trouvée expérimentalement est très faible devant celles du commerce, ce qui semble logique puisque les microscopes de paillasse ont des valeurs de focale spécifiques pour compenser un grossissement commercial acceptable et un encombrement minimal.

1.3 Limites

1.3.1 Profondeur de champs

Une première limitation du microscope à deux lentilles est la profondeur de champ ou latitude de mise au point. C'est la distance objet-objectif pour laquelle l'oeil, situé au niveau du cercle oculaire, obtiendra une image nette de l'objet. De manière plus concrète, la profondeur de champ est définie par les deux positions extrêmes qui correspondent à la formation des images au niveau du *punctum remutum* et du *punctum proximum* de l'oeil.

Les calculs sont détaillés ici http://www.chimix.com/an7/ing7/itpe70.htm

$$l = \frac{1}{4G_c^2} \tag{32.9}$$

On voit ici une première limitation technique de notre montage. En effet, le microscope est d'autant plus efficace que son grossissement commercial est grand, ce qui réduit considérablement sa profondeur de champ. Il est alors d'autant plus difficile d'effectuer la mise au point de notre microscope pour obtenir une image nette en sortie. Si l'on prend les valeurs de grossissement commercial données précédemment, on a $l = 0{,}16$ mm pour $G_c = 40$ et $l = 0{,}25$µm pour $G_c = 1000$. La profondeur de champ est donc une donnée essentielle pour allier performance et limites techniques du microscope.

1.3.2 Tâche d'Airy

Une autre limite purement physique est également à prendre en compte. En effet, si on s'intéresse maintenant au caractère ondulatoire de la lumière, on sait que tout système optique diffracte les rayons lumineux et diminue le pouvoir de résolution du microscope. Si celui de l'oeil a déjà été vu en introduction, il faut aussi regarder l'impact des lentilles d'ouverture circulaire qui diffractent chaque point de l'objet en une tâche que l'on appelle tâche d'Airy.

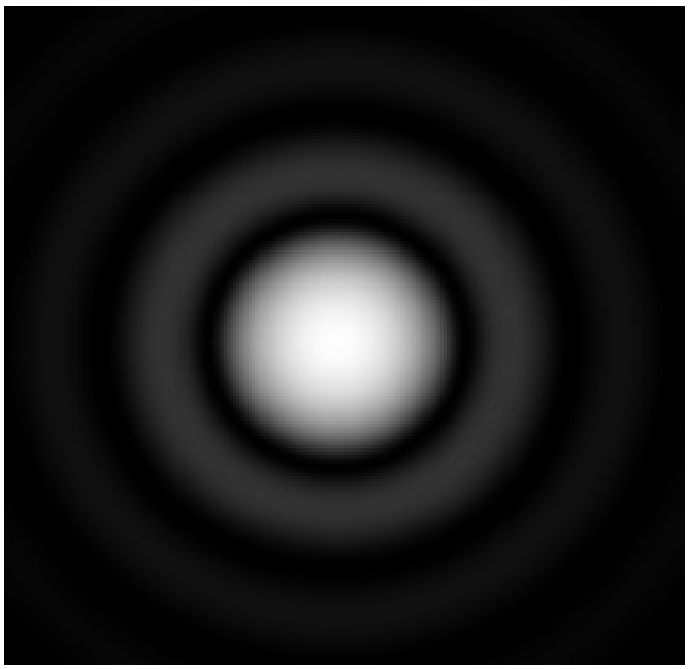


FIGURE 32.4 – Illustration de la tâche d'Airy. La première annulation rend compte de la limite de résolution du microscope.

La tâche d'Airy étant représentée mathématiquement par une fonction de Bessel, la première annulation de cette fonction est supposée égale au rayon total de la tâche d'Airy tel que :

$$r' = \frac{1.22\lambda L}{2R} \tag{32.10}$$

où λ est la longueur d'onde du rayon incident, R est le rayon des lentilles et L est la distance séparant l'écran de la sortie du système optique. On peut alors définir une limite de résolution généralisable sous le nom de critère de Rayleigh : deux pics sont séparables sur l'écran si la distance entre leur maxima est plus grande que le rayon de la tâche d'Airy.

Critère de Rayleigh

✍ `Critere_Rayleigh.ca.py` ⏲

Pour une fente, c'est pas 1.22, c'est juste 1, parce que c'est pas une fonction de Bessel dedans.

Dans le cas du microscope, le calcul de l'ouverture numérique donne, avec α l'angle maximal d'incidence des rayons incidents :

$$r = \frac{0.61\lambda}{n \sin \alpha} \tag{32.11}$$

On peut donc augmenter la résolution de deux manières :

1) en augmentant l'indice de réfraction. Ceci peut être réalisé en utilisant un objectif à immersion : on immerge la frontale de l'objectif dans un liquide dont l'indice de réfraction est proche du maximum de 1,5, celui du verre.

2) en diminuant la longueur d'onde. Toutefois, si on reste dans la lumière visible, il n'est pas possible de descendre en dessous de 400 nm.

La limite de résolution d'un microscope photonique classique est d'environ 0,2 µm. Le microscope électronique en transmission atteindra, lui, une limite 100 fois plus petite.

Cette expression finale sur la résolution maximale du microscope met en avant ses limitations. La résolution est certes améliorée d'un facteur 100 par rapport à l'oeil, mais elle est encore trop faible pour pouvoir observer des objets d'une taille inférieure au micron. Avec les avancées faites au XX ème siècle sur la structure de la matière, descendre au niveau du nanomètre était impératif dans de nombreux domaines de la physique, chose impossible à réaliser avec un microscope aussi simple que celui présenté dans cette première partie. Nous allons donc voir dans une deuxième partie une autre approche de la microscopie qui nous permet de dépasser le critère de Rayleigh : la microscopie en champ proche.

2 Microscopie à fluorescence (ou à champ lointain)

✍ http://toutestquantique.fr/fluorescent-et-confocal/

C'est une partie assez qualitative et peu répandue dans les leçons des années précédentes (on parle en général plus de la microscopie en champ proche). La littérature concise sur ce type de microscopie est assez rare mais on peut rester superficiel et s'en sortir.

2.1 Principe

Lorsqu'une molécule absorbe un photon, elle passe à un état excité. Cependant, pour retourner dans son état fondamental, la molécule ne réémet par toujours directement un photon de même énergie que le photon absorbé. En effet, elle peut perdre une partie de son énergie via une transition non radiative avant d'émettre un photon. Cela a pour conséquence le fait que le photon émis soit moins énergétique que le photon absorbé. Ainsi, une molécule peut absorber dans l'UV et émettre dans le visible : c'est ce qu'on appelle la **fluorescence**, et on dit que la molécule est un **fluorophore**.

Vu que les photons absorbés et émis ont des longueurs d'onde différentes, on peut ainsi filtrer les photons selon leur longueur d'onde et donc ne sélectionner que les photons émis par les fluorophores de plus faible longueur d'onde que les autres pour obtenir une cartographie de l'emplacement des fluorophores. On utilise beaucoup ce principe en biologie où on marque les tissus à observer (par exemple la membrane d'un virus) avec des fluorophores. Cependant, on a toujours les problèmes de profondeur de champ et de

2.2 Microscopie confocale

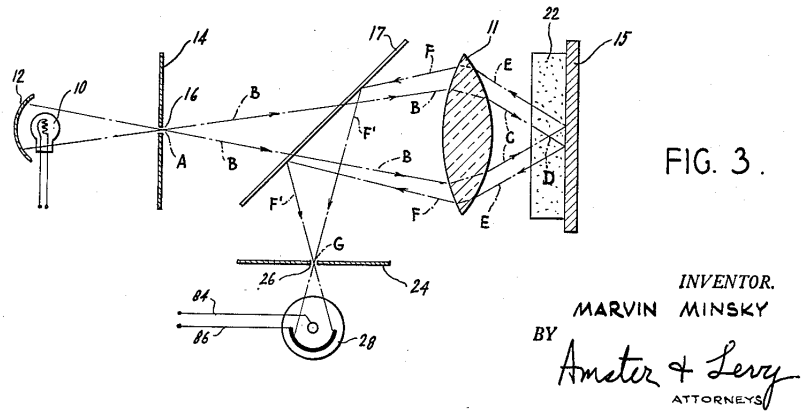


FIG. 3.

Le but du microscope confocal est de se débarrasser du problème de profondeur de champ. En effet, on est capable de focaliser le rayon sur une toute petite zone de l'échantillon et, à l'aide d'un second diaphragme appelé *sténopé*, on peut alors n'observer qu'un point de l'échantillon. Ainsi, puisque l'image observée ne correspond qu'à une toute petite partie de l'échantillon, on s'est affranchit du problème de la profondeur de champ.
On peut recommencer l'opération et faire un balayage 3D pour tous les points de l'espace. On obtient alors une image nette pour tout l'échantillon, observable en 3D.
Notons cependant deux choses :

- En diminuant le diaphragme de sortie, on peut ajuster l'épaisseur z de la tranche observée, mais il y a un compromis à trouver entre le flux lumineux reçu et la résolution axiale souhaitée. En effet, la largeur de la lentille diaphragmante induit une limite de résolution axiale. On peut montrer expérimentalement que cette limite est autour de 600 nm.

- On est toujours bloqué en résolution par la limite de diffraction donc le microscope confocal ne descend pas sous la centaine de nanomètres en résolution.

Remarque

En vrai il existe deux types de microscope confocal :

- le 'vrai' microscope confocal où il n'y a que le sténopé. La fluorescence provient de tout l'échantillon et on parle d'excitation monophotonique, puisqu'un seul photon arrive sur chaque fluorophore.
- le microscope confocal qui utilise l'excitation multiphotonique. C'est pour ce type de microscope confocal qu'on dirige le faisceaux d'excitation en un seul point.

Il n'y a pas de réels avantages pour l'un ou pour l'autre... Les grosses différences sont résident dans le fait que pour le deuxième cas on utilise des plus hautes longueurs d'onde, qui vont donc plus loin ; et qu'en excitant moins l'échantillon, on limite le photoblanchiment (le fluorophore peut perdre sa fluorescence en entrant dans une réaction chimique lorsqu'il est excité.

2.3 Microscopie PALM

✍ https://cours.espci.fr/site.php?id=265&fileid=982

La microscopie PALM (photo-activated localization microscopy) est un type de microscopie qui arrive à repousser la limite de diffraction. Cette technologie a valu le prix Nobel de 2014 à Eric Betzig, Stefan Hell et William Moerner.

Pour comprendre comment c'est possible, il faut se rappeler que le critère de Rayleigh est un critère à satisfaire pour distinguer 2 points sources différents. Cependant, si l'on sait avec certitude qu'il n'y a qu'un seul point source, on peut alors réussir à déterminer la position du centre de la figure d'Airy avec précision.
Pour prendre avantage de cette subtilité, on envoie un pulse très faible et délocalisé sur l'échantillon. Cela signifie qu'on envoie un petit nombre de photons qui vont donc exciter un petit nombre de fluorophores qui vont ensuite réémettre des photons de plus basses énergies. Sur l'image récupérée, on voit donc quelques taches d'Airy, chacune correspondant à un seul fluorophore parmi le petit nombre de fluorophores excités. Ainsi, on peut ignorer les taches d'Airy en retrouvant l'emplacement exact de chaque fluorophore par déconvolution d'une gaussienne en 2D. On répète l'opération et on obtient la position de tous les fluorophores avec une résolution pouvant descendre jusqu'à 20 nm.

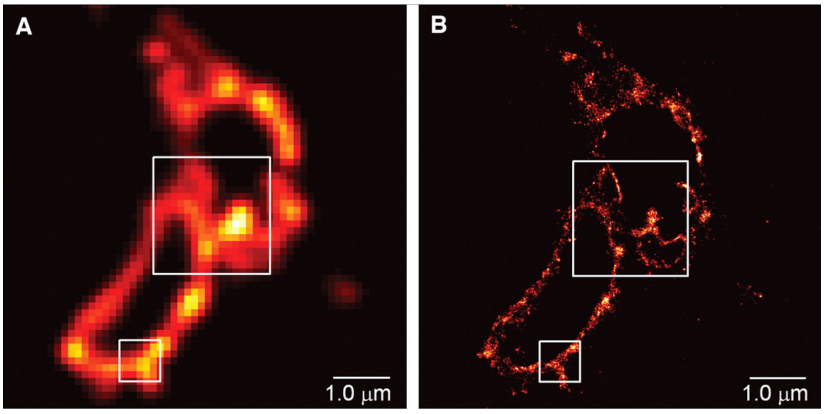


FIGURE 32.5 – Image par microscopie d'un lysosome : à gauche, on voit l'image obtenue avant traitement et à droit on voit l'image traitée (Betzig, Science 2006).

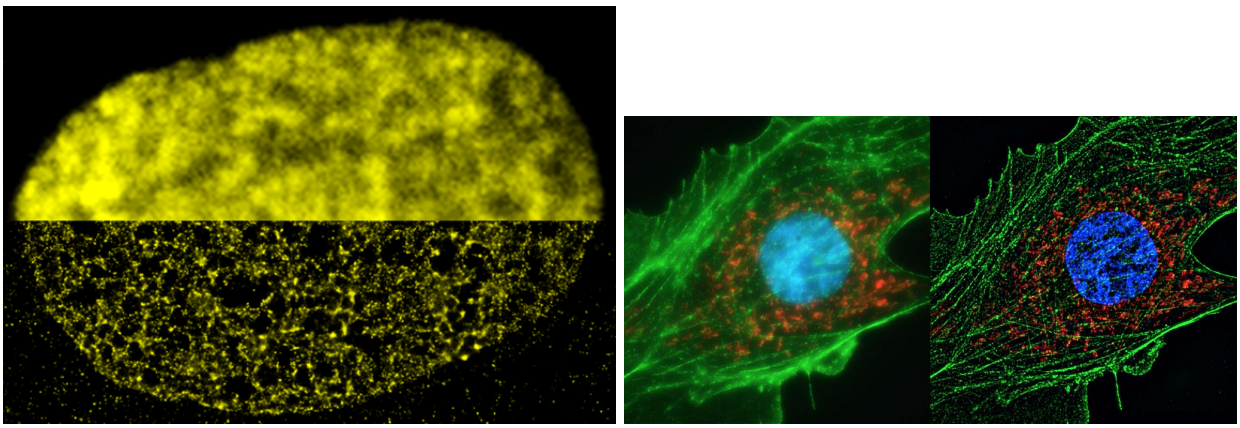


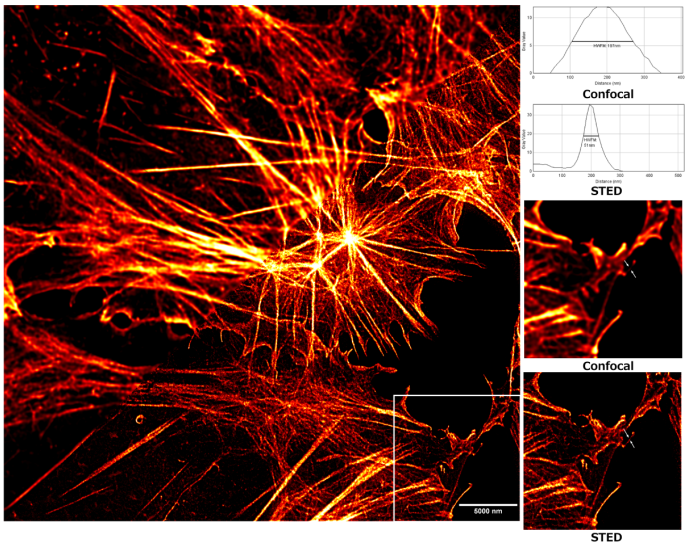
FIGURE 32.6 – Image par microscopie PALM de cellules.

La limite de résolution de la microscopie PALM vient alors des dérives du microscope qui ne doit absolument pas bouger entre les mesures. L'échantillon doit donc être immobile pendant toute l'acquisition qui peut être longue de temps de faire les N cycles.

2.4 Microscopie STED

✍ https://en.wikipedia.org/wiki/STED_microscopy

C'est semblable au PALM, mais on fait de photoblanchiment partout sauf au centre de l'image avec un deuxième laser. On peut préférer cette technique au PALM car elle nécessite directement le confocal.



3 Microscopie à champ proche

✍ Aigouy

En microscopie en champ proche, on suppose que la lumière est une onde électromagnétique. En partant de ce principe, le but est de récupérer l'information sur les détails les plus infimes de notre objet à analyser en s'intéressant aux ondes que l'on appelle évanescentes, par opposition aux ondes propagatives.

3.1 Nécessité des ondes évanescentes

Pour comprendre l'importance des ondes évanescentes dans l'imagerie des détails d'un objet, on repart des bases de l'optique ondulatoire en considérons une onde EM incidente monochromatique se propageant selon z et ayant la forme

$$E_i(x,y,z,t) = E_i(x,y,z)e^{j\omega t} \tag{32.12}$$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'à l'amplitude de l'onde. Quand l'onde rencontre un objet en $z = 0$ de transmittance $\tau(x,y)$, l'expression de l'onde devient

$$E_0(x,y) = E_i(x,y,z=0)\tau(x,y) \tag{32.13}$$

Ce facteur $\tau(x,y)$ dépend des caractéristiques de l'objet et contient donc les informations qui nous intéressent. On veux donc capter l'onde $E_0(x,y)$ et l'analyser. Or cela implique que l'onde doit se propager jusqu'au capteur, donc son expression est modifiée. Pour connaître cette expression, on applique Huygens-Fresnel en décomposant $E_0(x,y)$ en transformée de Fourier

$$E_0(x,y) = \iint F_0(k_x,k_y)e^{j(k_x x + k_y y)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{32.14}$$

E_0 est ainsi décomposée en une somme d'ondes planes d'amplitude $F_0(k_x,k_y)$. Lorsque l'onde se propage selon z, on écrit donc

$$E_0(x,y,z) = \iint F_0(k_x,k_y)e^{j(k_x x + k_y y + k_z z)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{32.15}$$

On a représenté la propagation dans l'espace selon z par l'ajout du terme $k_z z$ dans l'exponentielle. En ce plaçant dans l'air ($n = 1$ donc $k = \dfrac{\omega}{c}$, on obtient

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right) - k_x^2 - k_y^2} \tag{32.16}$$

On peut donc directement lier la propagation de l'onde à k_x et k_y. On distingue alors deux cas :

- $\dfrac{\omega}{c} \gg k_x, k_y$: k_z est réel et l'onde se propage via le déphasage $e^{jk_z z}$. L'onde est alors soumise à la limite de résolution de Rayleigh comme vu dans la première partie.
- $\dfrac{\omega}{c} \ll k_x, k_y$: k_z est imaginaire pur et l'onde est atténuée : on dit que l'onde est **évanescente**. Elle décroît exponentiellement sur un longueur caractéristique

  $$L = \frac{1}{k_z}$$

  Cette décroissance est d'autant plus forte que k_x, et k_y sont importants : les ondes évanescentes sont alors situées à une distance très faible de l'objet (typiquement la centaine de nanomètres). Cette zone pour laquelle les ondes évanescentes ne sont pas négligeables est appelée **champ proche**.

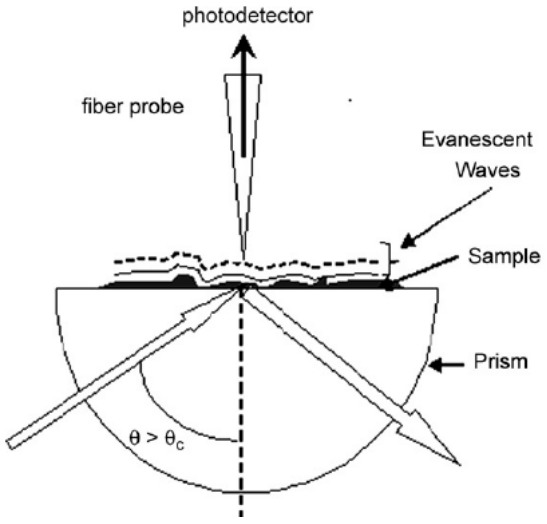


FIGURE 32.7 – Schéma de principe du microscope à ondes évanescentes.

Mise en évidence expérimentale des ondes évanescentes

on peut s'amuser à faire la manip suivante :

On considère un demi-hémisphère en plexiglas dans lequel on envoie un laser vert $\lambda = 532nm$. On se place en réflexion totale à la sortie de l'interface plexiglas-air tel que l'angle de réflexion totale soit $\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, où n_2 est l'indice de l'air et n_1 celui du plexiglas.

On peut alors montrer par le calcul que des ondes évanescentes sont présentes à la sortie de l'interface plexiglas-air. Les ondes évanescentes ne se propagent pas, mais on peut quand même les observer si on rapproche suffisamment près un demi-hémisphère en plexiglas de l'interface plexiglas-air. A ce moment-là, les ondes évanescentes se propagent dans le deuxième hémisphère de plexiglas par effet tunnel optique, analogue à l'effet tunnel quantique. On peut donc avoir une propagation des ondes évanescentes dans un milieu !

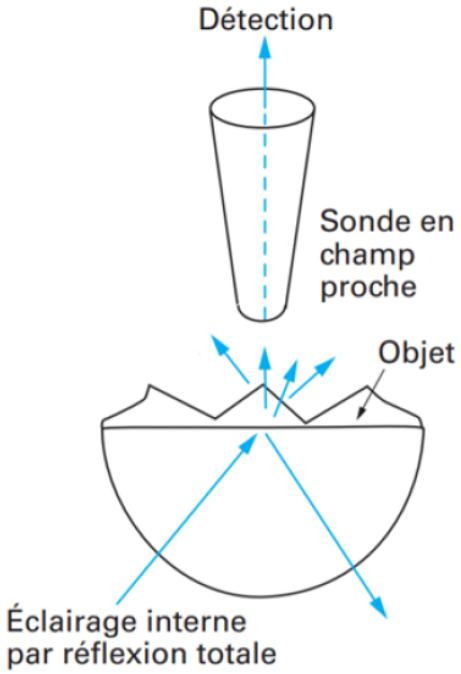
Il faut garder à l'esprit que l'on s'intéresse dans cette leçon aux microscopies ***optiques*** *: il faut donc dans cette expérience utiliser une lumière de longueur d'onde* ***visible*** *pour qu'elle soit pertinente (la mise en évidence d'ondes évanescentes centimétriques est certes plus simple car la décroissance exponentielle est moins violente, mais elle est complètement hors-sujet).*

A ce moment-là, il est essentiel de se rappeler de la relation d'indétermination de Heisenberg qui nous dit :

$$\Delta x \Delta k_x = 2\pi \tag{32.17}$$

Cette relation est également valable sur y, et nous dit que lorsque l'on veut étudier les détails les plus fins de notre objet, il faut avoir accès aux fréquences spatiales les plus élevées. On voit alors toute l'importance des ondes évanescentes : **pour avoir accès aux détails de l'objet à étudier, il faut pouvoir capter les hautes fréquences spatiales et donc les ondes évanescentes du champ.** On peut alors théoriquement descendre en-dessous du critère de Rayleigh...

3.2 Microscope STOM



La microscopie STOM (scanning tunneling optical microscope) repose sur la détection d'ondes évanescentes pour descendre sous le critère de Rayleigh.

Reprenons notre expérience en échangeant le deuxième hémisphère de plexiglas par l'objet à étudier, fixé sur le premier hémisphère de plexiglas. On sait que par effet tunnel optique, les ondes incidentes se propagent à l'intérieur

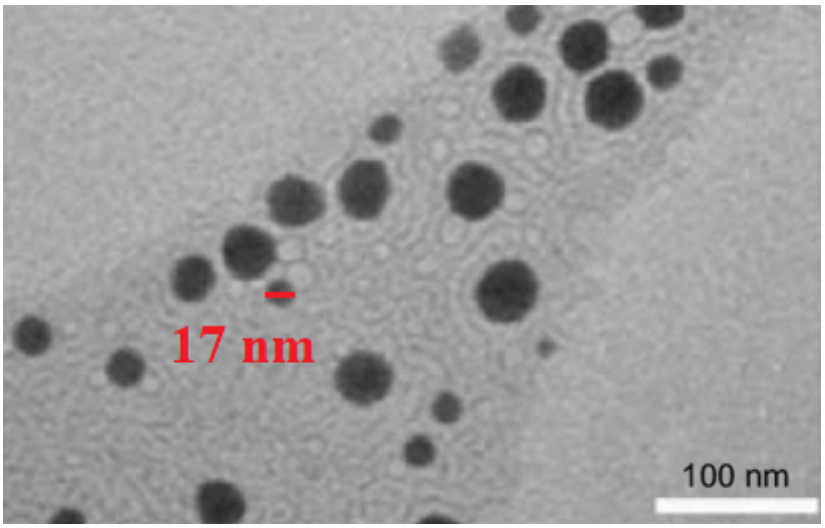
de notre objet qui a remplacé le deuxième hémisphère de plexiglas. En sortie de l'objet, les ondes propagatives sont alors modifiées par le coefficient de transmission de l'objet comme expliqué dans la sous-partie précédente. Il est alors possible d'accéder aux détails de l'objet en récupérant les ondes évanescentes à la sortie de l'objet. Pour cela, il faut placer une sonde en champ proche, qui capte ces ondes évanescentes et les transmet jusqu'au détecteur situé en champ lointain. On utilise souvent une fibre optique de la sonde au détecteur qui a l'avantage de ne pas atténuer l'onde incidente dans la fibre, même si c'est une onde évanescente.

Pour obtenir la limite de résolution du STOM, considérons un détail de l'objet de taille $\delta < \lambda$. Dans le cas classique, ce détail n'est donc pas visible car on est limité par le critère de Rayleigh. En revanche, il est visible en utilisant un STOM et en récupérant l'onde évanescente correspondante. La fréquence correspondante à l'onde évanescente est alors $k_z = \dfrac{2\pi}{\delta}$ et donc la sonde doit être placée à une distance

$$L = \frac{1}{k_z} = \frac{\delta}{2\pi}$$

La limite de résolution du STOM est donnée par la distance entre la sonde et l'objet et est indépendante de la longueur d'onde. Elle est de l'ordre d'un sixième du détail de l'objet. Il n'y a donc théoriquement pas de limite inférieure au détail de l'objet étudié, mais les limites techniques prennent alors le relais. En effet, réussir à conserver une distance constante entre la sonde et l'objet est très compliqué et demande de stabiliser la position de la sonde par un système piézoélectrique. En pratique, la limite de résolution est de l'ordre de la dizaine de nanomètres voire du nanomètre.

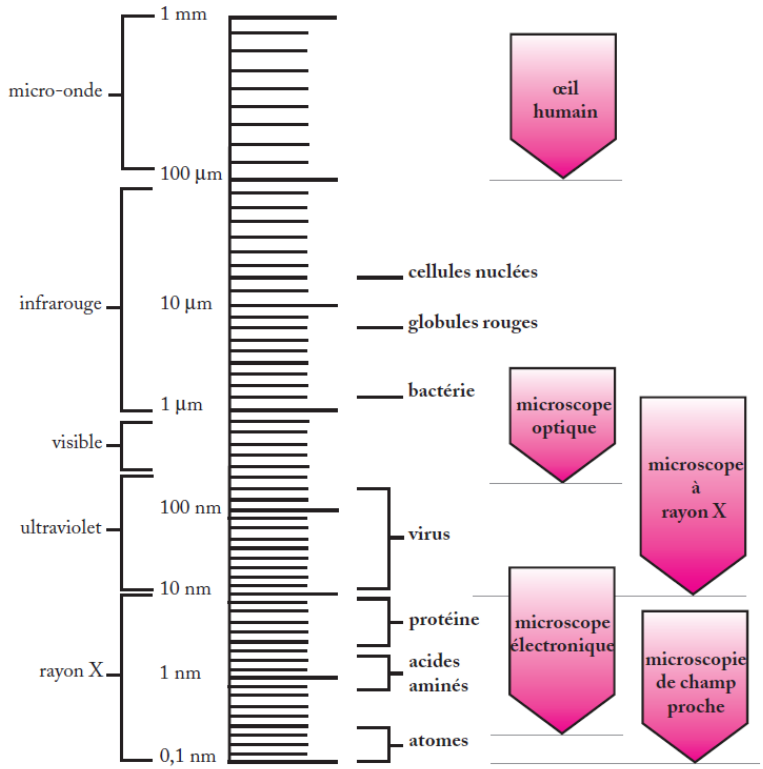
On peut prendre l'exemple de cette photo de micelle observée au STOM :



(32.18)

Cet exemple est très intéressant car il est extrait d'un article de biologie. Si la microscopie n'avait pas fait autant d'avancées ces dernières décennies, l'étude de cellules en biologie aurait été impossible (d'ailleurs, on utilise plutôt en biologie la technique de microscopie confocale couplée à de la fluorescence car elle nous permet d'avoir une vue 3D de nos échantillons. On peut donc dire que la microscopie est une problématique commune à toutes les sciences, et que son utilisation requiert une attention particulière en fonction des attentes de l'expérience.

Conclusion



Dans cette leçon, nous avons pu voir le concept de microscopie optique, ses caractéristiques et sa principale limite à savoir le critère de résolution. Ce dernier a évolué au fil des siècles pour nous permettre aujourd'hui de dépasser le critère de Rayleigh et d'attendre des détails de nos systèmes de plus en plus faibles.

Aujourd'hui, les techniques de microscopie se sont largement élargies au domaine non optique (microscope à effet tunnel analogue à celui présenté en deuxième partie, microscope à balayage, microscope à force atomique...). Chaque technique est adaptée à une limitation expérimentale particulière et nous permet d'atteindre des résolutions de l'ordre du dixième de nanomètre. Les microscopes actuels les plus avancés permettent d'observer les atomes.

LP 33

Interférences à deux ondes en optique

Niveau : L2

Commentaires du jury

- **2016 :** Les approximations mises en oeuvre dans les calcules de différence de marche doivent être justifiées a priori
- **2015 :** L'exposé doit permettre de préciser clairement les contraintes particulières que l'optique impose aux dispositifs interférentiels par rapport à d'autres domaines.
- **2009-2010 :** Il faut réfléchir à l'opération de moyenne réalisée par le détecteur et il est bon de connaître quelques ordres de grandeurs à ce sujet.
- **2003 :** Cette leçon doit être illustrée expérimentalement, le candidat devant être en mesure de montrer clairement les effets de cohérence spatiale ou temporelle de la source.

Bibliographie

✍ *Optique*, **Huard** ⟶ Tout
✍ *Optics*, **Hecht** ⟶ Tout aussi
✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** ⟶ ODG

Prérequis

➢ Optique Géométrique et diffraction
➢ Modèle scalaire de la lumière
➢ EM dans le vide

Expériences

☕

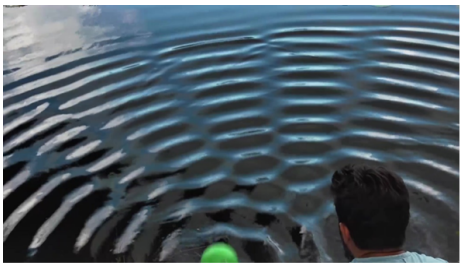
1 Conditions d'interférences . . . 458
1.1 Présentation du détecteur de lumière . . . 458
1.2 Superposition d'ondes dans le modèle scalaire . . . 459
1.3 Terme de déphasage . . . 460
2 Fentes/trous d'Young et source idéale . . . 461
2.1 Présentation et observations . . . 461
2.2 Figure d'interférence . . . 462
2.3 Retour sur l'expérience . . . 462
2.4 Trous d'Young . . . 463
2.5 Cas perpendiculaire à l'axe . . . 463
3 Sources réelles - Notion de cohérence . . . 463
3.1 Cohérence spatiale – Étalement spatial . . . 463
3.2 Cohérence temporelle – Étalement spectral . . . 465

Introduction

Le phénomène d'interférences est un phénomène caractéristique des ondes qui se manifeste par le fait que l'intensité de la somme de deux ondes n'est pas la somme des intensités de chaque onde. On rencontre ce phénomène dans plusieurs domaines de la physique ondulatoire, comme par exemple avec les ondes sonores et les ondes à la surface d'un liquide (montrer une vidéo avec l'interférence de vagues [1]). On observe également des interférences en optique, comme dans le cas de l'irisation d'une bulle de savon ou de la coloration d'un lame mince (teinte de Newton). Cependant, elles ne sont pas si simples à obtenir.

Éclairer un écran avec 2 lampes : pas d'interférences.

Cette leçon a donc pour but de présenter les conditions nécessaires à l'obtention d'interférences en optique.



Moyenné sur < 0.1 s

Moyenné sur 3 s

1 Conditions d'interférences

1.1 Présentation du détecteur de lumière

Avant de commencer toute étude, il faut déjà être capable de détecter la lumière. En optique ondulatoire, on représente la lumière avec un champ $\overrightarrow{E}$ et un champ $\overrightarrow{B}$. On pourrait donc naïvement penser qu'on peut étudier le phénomène d'interférences en détectant le champ $\overrightarrow{E}$. Seulement il y a un hic : le champ $\overrightarrow{E}$ carie extrèmement vite dans le temps. Par exemple, le champ $\overrightarrow{E}$ de la lumière dans le visible varie avec une fréquence $f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3\times10^8}{6\times10^{-7}} = 5\times10^{14}\,\text{Hz}$ et donc avec une période $T = 2\times10^{-15}\,\text{s}$. Pour comparaison, les détecteurs à notre disposition ont des temps de réponse [2] beaucoup plus élevés à cause des différents procédés physiques/biologiques en jeu lors de leur fonctionnement :

Capteur	Temps de réponse T_d(s)
Oeil	10^{-1}
Appareil photo	10^{-3}
Photomultiplicateur	10^{-9}
Photodiode	10^{-12}

On voit donc que dans tous les cas $T_d \gg T$, et en général le temps de réponse des détecteurs est également très supérieur aux temps caractéristiques de fluctuation de l'amplitude et de la phase de la lumière émise par une source chaotique (QI, lampes à vapeur...). On n'a donc accès qu'à la valeur moyenne du champ $\overrightarrow{E}$ sans espoir d'obtenir sa valeur réelle.

On va donc définir une grandeur qui est bien plus facilement accessible afin de pallier à ce problème : l'**intensité vibratoire** définie par

$$I(M) = \left\langle \left\| \overrightarrow{E}(M,t) \right\|^2 \right\rangle_{T_d} = \frac{1}{T_d}\int_0^{T_d} \left\| \overrightarrow{E}(M,t) \right\|^2 \mathrm{d}t \tag{33.1}$$

1. https://www.youtube.com/watch?v=Iuv6hY6zsd0#t=4m49s ou https://www.youtube.com/watch?v=yDuzUvsvugo
2. ✍ Champeau, p432

Attention

Cette intensité **n'est pas l'intensité lumineuse** ! L'intensité lumineuse, exprimée en Candela, est une grandeur qui exprime la capacité à éclairer d'une source ponctuelle de lumière dans une direction donnée. On a alors $\mathcal{I} = \epsilon d^2$ où ϵ est l'éclairement et d la distance à la source, et $\mathcal{I} = \dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Omega}$ où Φ est le flux lumineux et Ω l'angle solide.

1.2 Superposition d'ondes dans le modèle scalaire

✍ Hecht [3] p403

On sait maintenant quelle grandeur étudier pour comprendre les interférences. Il reste maintenant à faire les calculs et pour cela, on se place de la cadre du modèle scalaire de la lumière donc les hypothèses sont les suivantes :

- les milieux sont transparents ;
- la lumière est décrite par des rayons lumineux indépendants ;
- en chaque point du rayon l'état vibratoire est décrite par une grandeur scalaire s ;
- la lumière a localement une structure d'onde plane (de polarisation quelconque).

Considérons deux OPPH issues de deux sources distinctes S_1 et S_2 qui se superposent en un point M [4]. D'après le théorème de superposition, la vibration lumineuse en M est donc :

$$\begin{aligned} s(M,t) &= s_1(M,t) + s_2(M,t) \\ &= A_1(M)\cos(\omega_1 t - \phi_1(M,t)) + A_2(M)\cos(\omega_2 t - \phi_2(M,t)) \end{aligned} \tag{33.2}$$

avec $\phi_i = \overrightarrow{k_i}\cdot\overrightarrow{r} - \varphi_i$ pour une propagation dans un milieu homogène isotrope avec une phase à l'émission φ_i. Dans le cadre du modèle scalaire, l'intensité vibratoire pour chaque source s'écrit $I_i = \langle s_i^2 \rangle$ et l'intensité vibratoire totale s'écrit $I = \langle s^2 \rangle$. **On parle donc d'interférences si** $I \neq I_1 + I_2$. Si ce n'est pas le cas, on n'a pas d'interférences comme par exemple on a pu le voir en éclairant un écran avec deux lampes. Deux sources qui permettent d'avoir $I \neq I_1 + I_2$ sont dites **cohérentes**. Faisons donc le calcul :

$$\begin{aligned} I = \langle s^2 \rangle &= \langle (s_1 + s_2)^2 \rangle \\ &= \langle s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \rangle \\ &= \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + 2\langle s_1 s_2 \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\langle s_1 s_2 \rangle \end{aligned} \tag{33.3}$$

L'intensité totale est donc la somme des intensités individuelles à laquelle on ajoute un terme d'interférence. Ainsi, on aura interférence si et seulement si ce terme est non-nul. On a

$$\begin{aligned} \langle s_1 s_2 \rangle &= A_1(M)A_2(M)\langle \cos[\omega_1 t - \phi_1(M,t)]\cos[\omega_2 t - \phi_2(M,t)]\rangle \\ &= \frac{1}{2}A_1(M)A_2(M)\left(\langle \cos[(\omega_1+\omega_2)t - \phi_1(M,t) - \phi_2(M,t)]\rangle + \langle \cos[(\omega_1-\omega_2)t - \phi_1(M,t) + \phi_2(M,t)]\rangle\right) \end{aligned} \tag{33.4}$$

La valeur moyenne d'un cosinus étant nulle si sa pulsation $\omega \neq 0$, on en déduit que le premier terme est forcément nul. Cependant, le premier terme peut ne pas être nul à la condition que $\omega_1 = \omega_2$.

> Deux ondes de pulsations différentes ne peuvent pas interférer l'une avec l'autre.

Cependant, cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, le terme d'interférence vaut

$$\begin{aligned} \langle s_1 s_2 \rangle &= \frac{1}{2}A_1(M)A_2(M)\langle \cos[\phi_2(M,t) - \phi_1(M,t)]\rangle \\ &= \frac{1}{2}A_1(M)A_2(M)\left\langle \cos\left[\overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r} - \varphi_2 - \overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_1\right]\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}A_1(M)A_2(M)\left\langle \cos\left[\overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r} - \overrightarrow{k_1}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right]\right\rangle \end{aligned} \tag{33.5}$$

3. Démonstration un peu plus générale
4. Ne pas faire un schéma symétrique.

Pour deux sources indépendants, les phases à l'émission sont indépendantes (et décorrélées). La différence $\varphi_1 - \varphi_2$ est donc un terme aléatoire qui annule donc la moyenne temporelle du cosinus.

> Deux ondes monochromatiques issues de deux sources indépendants ne peuvent pas interférer l'une avec l'autre.

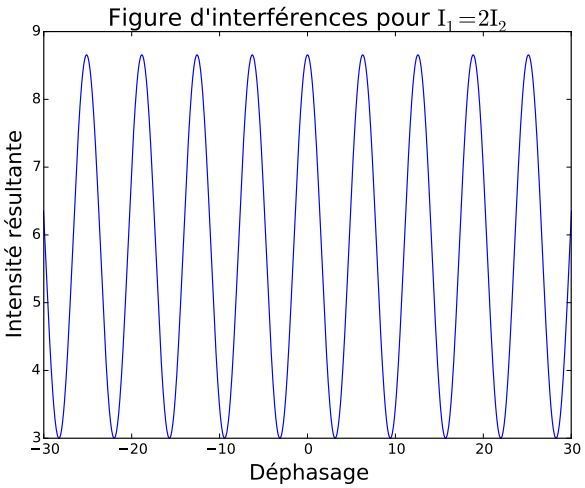
Une fois qu'on a deux ondes émises de même pulsation et émises par la même source, on a enfin un terme d'interférence non-nulle qui vaut $\langle s_1 s_2 \rangle = \frac{1}{2} A_1(M) A_2(M) \left\langle \cos\left[\overrightarrow{k_2} \cdot \overrightarrow{r} - \overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r}\right] \right\rangle$ En général, on garde ce terme sous la forme

$$\langle s_1 s_2 \rangle = \frac{1}{2} A_1(M) A_2(M) \langle \cos[\phi_2 - \phi_1] \rangle = \frac{1}{2} A_1(M) A_2(M) \cos[\Delta\Phi(M)] \tag{33.6}$$

En remarquant que $I_i = A_i^2$, on obtient la **formule de Fresnel** (ou formule des interférences) :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[\Delta\phi(M)]} \tag{33.7}$$

Morale de l'histoire : **deux ondes interfèrent si et seulement si elles sont cohérentes**. Si c'est le cas, on obtient le profil d'intensité ci-dessous :



Condition de polarisation

Si on ne se place pas dans le modèle scalaire, le terme d'interférence fait intervenir le produit scalaire $\overrightarrow{E_1} \cdot \overrightarrow{E_2}$. **Deux ondes de polarisation croisées ne peuvent donc pas interférer l'une avec l'autre.**

1.3 Terme de déphasage

Le terme d'interférence fait intervenir le déphasage $\Delta\phi(M)$ entre les deux ondes. On parle alors d'**interférences constructives** si $\cos(\Delta\phi(M)) > 0$ et d'**interférences constructives** si $\cos(\Delta\phi(M)) < 0$. L'intensité en un point M de l'espace pour lequel on a interférence constructive sera alors supérieure à $I_1 + I_2$ et ce point sera brillant tandis l'intensité en un point M de l'espace pour lequel on a interférence destructive sera inférieure à $I_1 + I_2$ et ce point sera sombre. Ainsi, on obtient une figure d'interférence composée de régions brillantes et de régions sombres qu'on appelle les **franges d'interférences**.
L'intensité est maximale quand $\Delta\phi(M) = 2m\pi$ (avec $m \in \mathbb{Z}$) et minimale quand $\Delta\phi(M) = (2m+1)\pi$ (toujours avec $m \in \mathbb{Z}$). On définit alors l'**ordre d'interférence** par

$$p = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{33.8}$$

Ainsi, l'intensité est maximale quand $p \in \mathbb{Z}$ et est minimale quand $p \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Il reste cependant à exprimer $\Delta\phi$. Dans un milieu homogène isotrope pour des ondes de même pulsation et de même phase à l'émission, on a

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r} - \overrightarrow{k_2}\cdot\overrightarrow{r} \\ &= n_2\frac{\omega}{c}\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{r} - n_1\frac{\omega}{c}\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{r} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}(n_2S_2M - n_1S_1M)\end{aligned} \tag{33.9}$$

On peut donc attribuer à ce déphasage une origine géométrique : il est dû au retard de propagation d'une onde par rapport à l'autre qui est engendré par une différence de chemins optiques. On définit alors la **différence de marche** δ par

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = n_2S_2M - n_1S_1M \tag{33.10}$$

On obtient donc

$$\boxed{\Delta\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)} \tag{33.11}$$

Autre origine du déphasage

Une source émet des photons via les désexcitations d'atomes. Cependant, lorsqu'ils se désexcitent, les atomes émettent en réalité un train d'onde ayant une durée moyenne de corrélation τ_c correspond au temps moyen passé par l'atome dans l'état excité. Ainsi, deux trains d'onde séparés temporellement de τ_c sont déphasés aléatoirement. **Pour avoir interférence, les trains d'ondes qui interfèrent doivent être les mêmes, *i.e.* le déphasage dû à l'émission des trains d'onde doit être nul**.

On définit une dernière notion, le **contraste**, qui est la grandeur adimensionnée caractérisant les variations d'intensités. Il varie entre 0 pour une teinte plate et 1 pour une figure dont les noirs sont absolus.

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1I_2}}{I_1 + I_2} \tag{33.12}$$

La formule de Fresnel peut donc finalement s'écrire sous la forme

$$\boxed{I(M) = [I_1(M) + I_2(M)]\left[1 + \mathcal{C}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]} \tag{33.13}$$

Le contraste joue donc un rôle très important si on veux observer une figure d'interférence. On peut par exemple comparer les profils d'intensité pour $\mathcal{C} = 1$ et $\mathcal{C} = 0.5$:

2 Fentes/trous d'Young et source idéale

2.1 Présentation et observations

Rappelons-nous des condition à respecter pour observer des interférences en optique :

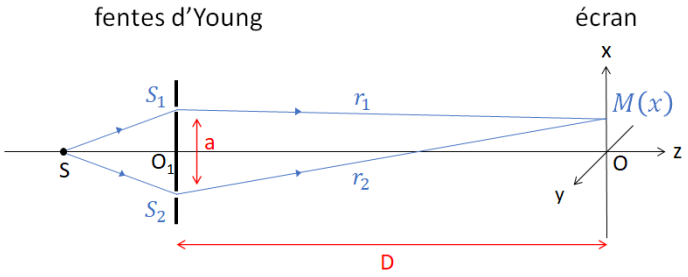
- La polarisation des ondes ne doit pas être croisées. C'est facile à satisfaire avec des polariseurs.
- Les ondes ont la même pulsation. Encore une fois, c'est facile à satisfaire puisqu'un filtre interférentiel fait l'affaire.
- Les sources doivent être cohérentes en terme de phase d'émission. C'est là que ça bloque : en pratique c'est irréalisable.

Cependant, on peut contourner ce problème en utilisant la même source et en divisant le front d'onde avec des fentes d'Young, puisqu'une source est cohérente avec elle-même.

Remarque

On peut aussi diviser l'amplitude mais ça n'est pas l'objet de cette leçon. Ce sera traité dans la leçon suivante avec le Michelson et/ou le Fabry-Pérot.

Cette expérience a en réalité déjà été tentée en 1665 par Grimaldi qui essayait d'obtenir des interférences en éclairant deux fentes avec la lumière du Soleil, sans résultat pour des raisons de cohérence spatiale (notion détaillée dans la section 3). Cependant, Thomas Young réussit à observer des interférences en 1805 grâce au dispositif suivant :



Fentes d'Young

Placer en premier une fente simple : on observe la diffraction. Placer ensuite les fentes doubles : on observe des franges verticales apparaître dans le figure de diffraction, régulièrement espacées (interfrange i)et invariantes selon la direction des fentes.

On peut alors changer l'espacement a entre les fentes : les franges se resserrent ou s'écartent (i diminue si a augmente). On observe la même chose en changeant la distance D entre les fentes et l'écran (i augmente si D augmente). On en déduit que $i \propto \frac{D}{a}$.

2.2 Figure d'interférence

On calcule la différence de marche :

$$\begin{aligned}\delta &= (SS_1M) - (SS_2M) \\ &= n_0 (S_1M - S_2M) \\ &= \sqrt{D^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2} \\ &\underset{DL1}{=} n_0 \frac{ax}{D}\end{aligned} \tag{33.14}$$

On calcule l'intensité lumineuse :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} n_0 \frac{ax}{D}\right)\right] \tag{33.15}$$

2.3 Retour sur l'expérience

La théorie permet d'expliquer les observations suivantes :

- On a bien une indépendance selon y, *i.e.* selon la direction d'allongement des fentes.
- On retrouve bien $i \propto \frac{D}{a}$ en écrivant $i = \frac{\lambda D}{a}$

- On a bien une périodicité de la figure d'interférence : $I(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right]$

Mesure de λ

✍ ⏲

En mesurant i pour plusieurs valeurs de a et D, on peut remonter à la valeur de λ.

Remarque

La périodicité des franges n'est pas toujours présente, comme on peut le constater avec un Michelson en lame d'air.

2.4 Trous d'Young

On observe alors des franges inscrites dans une successions de cercles. Les franges sont perpendiculaires à l'axes reliant les trous. Ces cercles sont ceux de la figure de diffraction, et dans la limite des trous parfaits, on a la même chose que pour des fentes.

2.5 Cas perpendiculaire à l'axe

Dans le cas hypothétique où l'on met deux sources cohérentes l'une après l'autre sur l'axe optique (comme dans le Michelson), on trouve l'expression suivante :

$$\delta = na\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2D^2}\right) \tag{33.16}$$

Cette expression est celle que l'on retrouve dans le Michelson, qui est un dispositif à division d'amplitude. Ces derniers sont traités plus en détails dans la leçon ✍ LP34.

3 Sources réelles - Notion de cohérence

Nous avons fait, avant cette partie, des hypothèses sur la taille et l'émission de la source. En effet on se plaçait dans le cadre d'une source monochromatique ponctuelle.

3.1 Cohérence spatiale – Étalement spatial

Ici on suppose que la source n'est plus ponctuelle mais étendue. Commençons par souligner qu'une extension dans une direction orthogonale à l'axe des trous ne change aucunement la figure. C'est là la différence entre les trous et les fentes d'Young. Cela ne va faire que l'étendre dans la même direction. Ici on parle d'extension parallèle aux trous.

La façon dont on va modéliser cela, c'est en considérant une source ponctuelle hors de l'axe optique, puis en superposant des sources qui n'interfèrent pas (donc dont on somme les intensités) tout le long de l'extension de la source réelle.

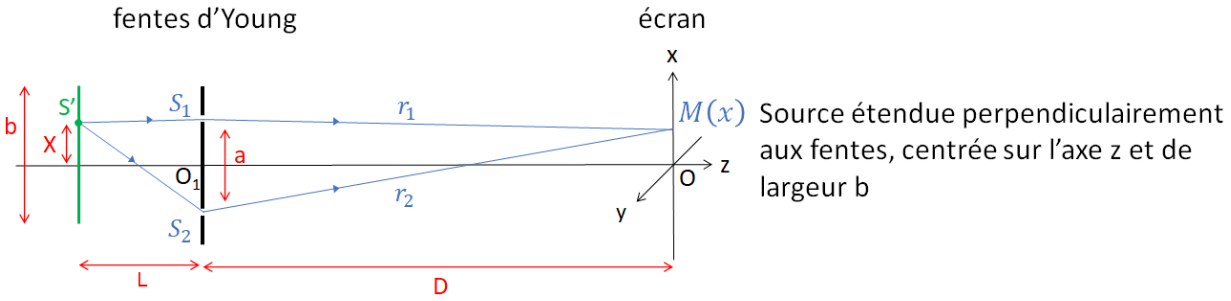


FIGURE 33.1 – Schématisation de la situation

On a alors le déphasage en $M(x)$ qui vaut

$$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{L} = \frac{a}{D}\left(x + \frac{D}{L}X\right) \tag{33.17}$$

Ainsi on peut refaire les calculs faits précédemment. On trouve une interfrange égale, de $i = \dfrac{\lambda D}{a}$, mais on a un décallage de $\dfrac{D}{L}X$ sur l'écran, ce qui veut dire que l'on va superposer des figures d'interférences dont les noirs ne correspondent pas. On va donc perdre nos jolies franges !

Pour mener à bien le calcul, il suffit d'intégrer l'intensité sur chaque point de la source. Par exemple si on considère une source étendue de largeur b, entre $-b/2$ et $b/2$, éclairant de manière uniforme, avec une intensité totale I_0 dans chaque trou d'Young, on a :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{2I_0}{b}\left(1 + \cos 2\pi\left(\frac{ax}{\lambda D} + \frac{aX}{\lambda L}\right)\right) \mathrm{d}X \\ &= \text{calcul} \\ &= 2I_0\left(1 + \operatorname{sinc}\frac{\pi ab}{\lambda L}\cos\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \end{aligned} \tag{33.18}$$

On calcule alors le **contraste** pour bien comprendre ce qu'il se passe :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left|\operatorname{sinc}\frac{\pi ab}{\lambda L}\right| \tag{33.19}$$

Il est indépendant de la position sur l'écran !

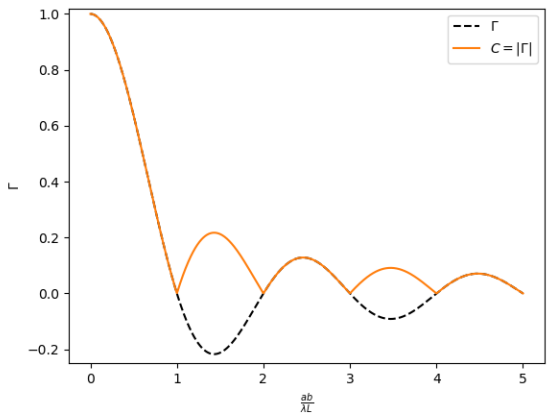


FIGURE 33.2 – Contraste de la figure en fonction du produit entre la largeur de la source et l'écartement des fentes.

Montrer la forme des franges en extension spatiale non nulle

✍ `contraste_spatiale.py` ⏲

Le faire en vrai sur le montage, ou avec Python. **La figure est uniforme** ! L'élargissement de la source change le contraste global, on ne voit PAS le sinc.

Définition : On parle de **brouillage** lorsque le contraste s'annule. Les franges disparaissent alors au profit d'une teinte plate.

Théorème de Van-Cittert Zernike

Le contraste est la transformée de Fourier de la distribution d'intensité de la source.

Michelson astronomique : on utilise la cohérence spatiale en augmentant la distance entre deux bras de l'interféromètre jusqu'à annulation du contraste. Cela donne la taille de l'étoile, et donc sa distance en comparant à sa taille apparente.

✍ `TD.pdf` http://paristech.institutoptique.fr/site.php?id=460&fileid=2099

3.2 Cohérence temporelle – Étalement spectral

3.2.1 Pourquoi le polychromatisme ?

Jusqu'ici on a considéré uniquement des sources monochromatiques, sauf qu'en réalité, entre l'effet **Doppler** dû à l'agitation thermique des émeteurs, l'effet **Stark** (sous l'effet d'un champ $\overrightarrow{E}$ il y a modification des états électroniques, et possiblement levée de dégénérescence), et les superpositions entre **raies très proches**, voir même les sources lumineuses d'**émission continue** comme les corps gris, on a plein de raisons de regarder l'effet d'une distribution spectrale d'intensité lumineuse.

3.2.2 Effet de deux longueurs d'ondes – doublet du sodium

On va tout d'abord considérer le cas très simple de deux sources monochromatiques de λ différentes spatialement superposées de même intensité, comme par exemple le doublet idéalisé du Sodium.

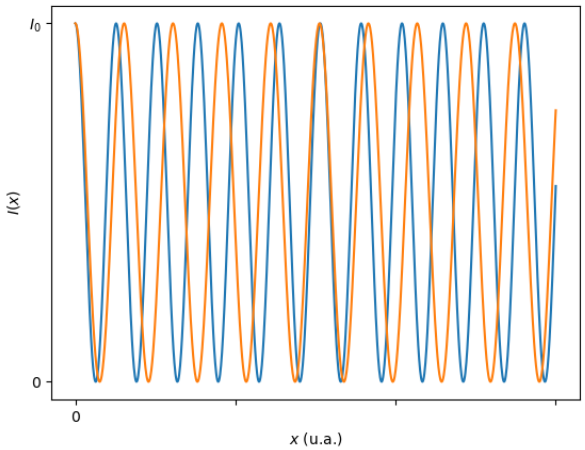


FIGURE 33.3 – Les intensités de ces deux sources s'additionnent.

Par le calcul on trouve :

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= I_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right] \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi\delta \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2}\right) \cos\left(2\pi\delta \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2\lambda_1\lambda_2}\right) \right] \end{aligned} \tag{33.20}$$

On voit apparaître une petite période et une grande période dans l'expression, car $\lambda_1 + \lambda_2 \ll \lambda_1 - \lambda_2$

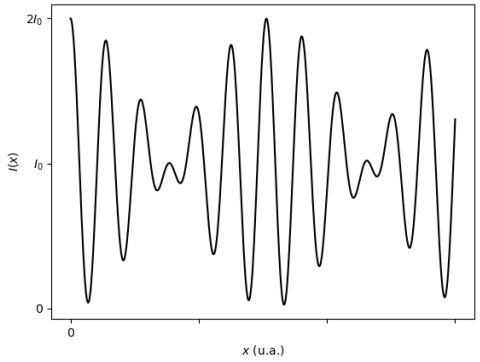


FIGURE 33.4 – Le résultat du calcul, et une simulation de l'écran.

3.2.3 Source réelle – spectre continu

Cependant une question subsiste, quid des spectres continus ? Parce que les élargissements de raies sont généralement continus et Gaussiens/lorentziens :

- Doppler : gaussien 10^9 Hz (un laser est à $\Delta\nu = 10^9$ Hz)
- Collisionnel : lorentzien 10^8 Hz

Par exemple, prenons le cas d'une source polychromatique dont le spectre est un carré centré sur ν et de largeur $\Delta\nu$. Ici encore, on peut diviser la source en sous-sources mais cette fois dans l'espace des fréquences, l'intensité émise par la lampe pour un intervalle spectral $\mathrm{d}\nu$ est : $\mathrm{d}I_S = A\mathrm{d}\nu$. Alors l'intensité reçue par un point M de l'écran pour cet intervalle $\mathrm{d}\nu$ est : $\mathrm{d}I = 2A\mathrm{d}\nu \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)$ avec $\lambda = c/\nu$.

Donc l'intensité reçue par le point M due à la totalité du spectre est :

$$I(M) = 2A \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\frac{ax}{D}\right)\right) \mathrm{d}\nu \tag{33.21}$$

$$= 2A\Delta\nu \left(1 + \frac{cD}{\pi ax\Delta\nu} \cos\left(\frac{2\pi ax}{cD}\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\right) \tag{33.22}$$

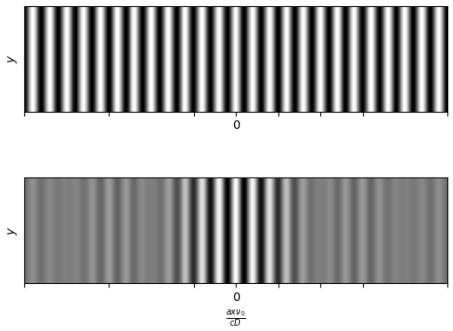
$$= 2I_S \left(1 + \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right) \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right) \tag{33.23}$$

où $\lambda_0 = c/\nu_0$ et $\nu_0 = \dfrac{\nu_1 + \nu 2}{2}$.

Le contraste est alors :

$$\mathcal{C} = \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi ax\Delta\nu}{cD}\right)\right|. \tag{33.24}$$

Il dépend de la position sur l'écran !



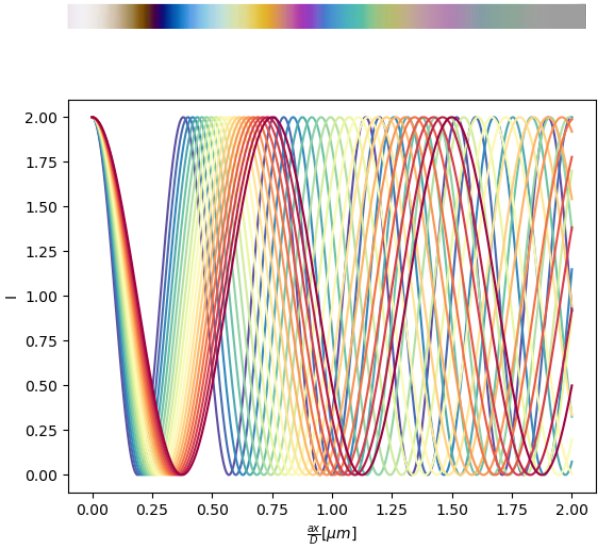
On définit alors la **longueur de cohérence** comme $c\tau$ où $\tau = \dfrac{1}{\Delta\nu}$ est le temps de cohérence. La première annulation de la figure d'interférence se fait à $x = \dfrac{cD}{a\Delta\nu}$. Pour un laser, D=2m, a=200µm, $\Delta\nu = 10^9$Hz. On a $x = 10^4$m, bon courage pour le voir.

Théorème de Wiener Khintchine

Le contraste est la transformée de Fourier sur ν de la distribution spectrale d'énergie de la source.

3.2.4 Cas de la lumière blanche

La lumière blanche, dans le fond, c'est simplement un spectre plat.



On remarque que si on s'éloigne trop du centre, les couleurs se réadditionnent mais ce ne sera jamais un vrai blanc puisqu'il manque également certaines couleurs. On dit que c'est un blanc d'ordre supérieur.

Remarques

D'autres dispositifs à division du front d'onde : Miroirs de Lloyd, Miroirs de Fresnel, Lentille de Binet

LP 34

Interférométrie à division d'amplitude

Commentaires du jury

- 2017 : Le candidat doit réfléchir aux conséquences du mode d'éclairage de l'interféromètre (source étendue, faisceau parallèle ou non...). Il est judicieux de ne pas se limiter à l'exemple de l'interféromètre de Michelson.
- 2016 : La distinction entre divisions du front d'onde et d'amplitude doit être précise. Le jury rappelle que l'utilisation d'une lame semi-réfléchissante ne conduit pas nécessairement à une division d'amplitude.
- 2015 : Les notions de cohérence doivent être présentées.
- 2014 : Un interféromètre comportant une lame séparatrice n'est pas obligatoirement utilisé en diviseur d'amplitude. La notion de cohérence et ses limites doivent être discutées.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Interféromètres à division d'amplitude. Applications.
- 2009, 2010 : Le calcul des différences de marche doit être effectué aussi simplement que possible, en exploitant au maximum les « dépliements » de rayons. L'influence de l'extension spatiale de la source sur la figure d'interférences est au coeur de la leçon.
- 2008 : Il est indispensable de développer des applications.
- 2005 : Le Michelson n'est souvent utilisé qu'en lame d'air. Les problèmes de localisation et les détails expérimentaux sont rarement présents, tout comme les applications. On peut, pour cette leçon, admettre que les dispositifs par division du front d'onde ont déjà été étudiés auparavant, ce qui permet au candidat d'entrer tout de suite dans le vif du sujet de la division d'amplitude et de son intérêt.
- 2004 : Si le jury souhaite naturellement une solide illustration expérimentale de la leçon, il ne faut pas la transformer en une succession d'observations purement qualitatives. Cette leçon doit être l'occasion pour le candidat de montrer qu'il sait conduire l'analyse théorique du phénomène expérimental montré.
- 2001 : Il faut prendre le temps de justifier la nature du lieu de localisation et réfléchir à l'intérêt de l'utilisation des interféromètres à division d'amplitude.
- 2000 : L'interféromètre de Michelson est habituellement présenté dans cette leçon. Rappelons que, si la source est ponctuelle, l'interféromètre de Michelson permet d'observer des interférences non localisées. Dans ce cas deux rayons distincts partant de la source interfèrent, et on n'est donc pas dans le cadre d'interférences à division d'amplitude. Par conséquent, dans cette leçon, il n'est pas utile de présenter une multitude de schémas illustrant cette situation.
- 1999 : Dans cette leçon aussi la notion de cohérence, spatiale et temporelle, est centrale et doit être abordée.
- 1998 : La motivation des dispositifs étudiés dans cette leçon est l'obtention d'interférences avec une source étendue et conventionnelle, donc spatialement incohérente. L'intérêt des interféromètres à division d'amplitude sur ceux qui utilisent la division du front d'onde doit clairement ressortir de l'exposé. Compte tenu de l'importance expérimentale de ces appareils il est inutile de perdre du temps à l'étude exhaustive des lames d'indice n dans l'air, qu'elles soient à faces parallèles ou non, et il est souhaitable de développer quelques applications des interféromètres étudiés.

Niveau : L2 (attention pas prépa car théorème de localisation pas au programme)

Bibliographie

- ✍ *Optique ondulatoire (Hprépa bleu)*, **Brébec** ⟶ Localisation
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Les interféromètres et historique.
- ✍ *BUP 795(2) Interféromètre de Michelson,...*, **Fortunato** ⟶ Surtout le II, sur les défauts de fabrication tolérés
- ✍ http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/cplt_localisation.pdf ⟶
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Pour les problèmes expérimentaux
- ✍ *Optique*, **Pérez** ⟶ Fabry-Pérot

Prérequis

- ➢ Optique géométrique
- ➢ Base d'optique interférentielle
- ➢ Avoir déjà vu un Michelson dans sa vie

Expériences

☕

1 Source étendue et brouillage : nécessité de la division d'amplitude . . . 471
1.1 Mise en évidence expérimentale . . . 471
1.2 Condition de non brouillage et théorème de localisation . . . 471
2 Interféromètre de Michelson . . . 473
2.1 Présentation . . . 473
2.2 Réglage en lame d'air . . . 475
2.3 Réglage en coin d'air . . . 476
3 Interféromètre de Fabry-Pérot . . . 477
3.1 Présentation . . . 477
3.2 Intensité de l'onde transmise . . . 478
3.3 Finesse et résolution . . . 479
3.4 Application photographique (ou pour tes lunettes) . . . 481

Introduction

1 Source étendue et brouillage : nécessité de la division d'amplitude

1.1 Mise en évidence expérimentale

Reprenons un interféromètre que nous avions étudié dans la leçon précédente : les fentes d'Young.

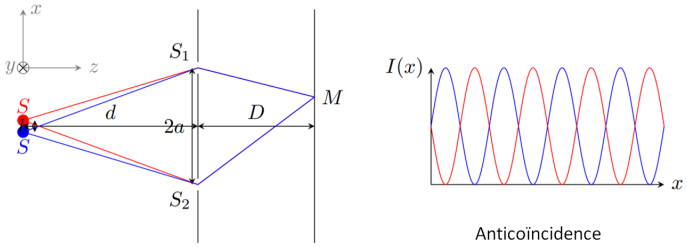
Fentes d'Young et brouillage

✍ Houard p198 ⏲

On éclaire les fentes d'abord par une source ponctuelle, puis par une fente source qu'on élargit de plus en plus. On ne voit aucun brouillage pour la source ponctuelle et on en voit un peu pour la fente source. On peut utiliser une lampe spectrale et une caméra Caliens pour un meilleur résultat.

L'élargissement de la source peut avoir deux effets : augmenter la luminosité ou brouiller la figure d'interférence. Pour comprendre ce phénomène, on peut reprendre la fente source fine et la déplacer : la figure d'interférences se déplace également. En particulier, **la position des maxima et des minima d'intensités d'une figure d'interférences dépend de la position de la source.** On se rappelle également qu'avec le dispositif de fentes d'Young, les franges ne sont pas localisées : on les observe peu importe la distance entre les fentes et l'écran. Cependant, chaque point de la source est incohérent par rapport aux autres points de la source donc chaque point de la source génère sa propre figure d'interférence, et on observe à l'écran la somme de ces figures. Puisque la position des maxima et minima d'intensité de la figure d'interférences dépend de la position du point source, on distingue deux cas :

- Si la source est peu étendue, tous les points de la source auront des positions proches et donc donneront des figures d'interférences dont les maxima et les minima d'intensité coïncident. Le fait que les points source ne soient pas cohérent ne pose donc pas problème.
- Si la source est trop étendue, certains points source seront suffisamment éloignés qu'ils donneront des figures d'interférences dont les maxima se superposent aux minima et inversement. C'est ce qu'on appelle le brouillage.

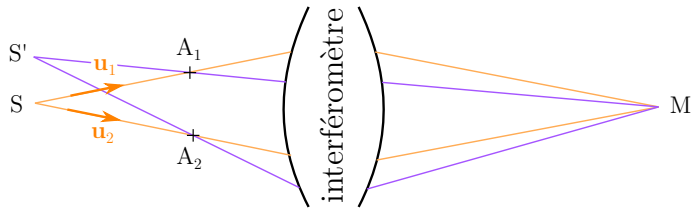


$$I(x(S'),x(M)) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_0\frac{2ax(M)}{D}+\frac{2\pi}{\lambda}n_0\frac{2ax(S')}{d}\right)\right] \tag{34.1}$$

1.2 Condition de non brouillage et théorème de localisation

Pour éviter d'avoir ce brouillage, il faudrait que la position du point source n'influe pas sur la figure d'interférences pour que la figure d'interférences de deux points source différents (et donc sur la différence de marche) ait les mêmes maxima et minima. On va voir que cette condition est bien vérifiée pour certains points. En plaçant l'écran au niveau de ces points, on n'aura donc pas de brouillage et on verra des belles franges. Vu qu'on observe ces franges que dans une région de l'espace bien précise, on dit qu'elles sont localisées.

Pour comprendre ce phénomène, on considère 2 points source S et S' appartenant à la source étendue et on suppose que l'écran est situé au bon endroit pour que la différence de marche entre les rayons arrivant en un point M de l'écran ne dépendent pas du fait que les rayons sont issus de S et S'.



On considère deux rayons 1 et 2 issus du point source S et interférant l'un avec l'autre en M. On note $\delta(S,M)$ leur différence de marche.
On considère également deux rayons 1' et 2' issus de S' et interférant également en M. On note $\delta(S',M)$ leur différence de marche.
On note A_1 l'intersection entre les rayons 1 et 1' ainsi que A_2 l'intersection entre les rayons 2 et 2'.
Finalement, on note $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ les vecteurs unitaires de même sens et direction que $\overrightarrow{SA_1}$ et $\overrightarrow{SA_2}$ respectivement.

On veut que la figure d'interférences créée par les deux rayons issus de S se superpose avec celle créée par les deux rayons issus de S'. Cela revient à demander à ce que la différence de marche entre les rayons 1 et 2 soit identique (à 2π près) à celle entre les rayons 1' et 2', c'est-à-dire on veut que $\delta(S,M) = \delta(S',M)$. On suppose que tout ce petit monde se propage dans l'air pour avoir $n = 1$ et donc écrire les chemins optiques comme des longueurs. En regardant le schéma, il vient :

$$\begin{aligned}\delta(S,M) &= (SA_2M) - (SA_1M) = SA_2 + (A_2M) - SA_1 - (A_1M)\\ \delta(S',M) &= (S'A_2M) - (S'A_1M) = S'A_2 + (A_2M)' - S'A_1 - (A_1M)'\end{aligned} \tag{34.2}$$

On suppose que l'interféromètre est **parfaitement stigmatique** : deux rayons issus du point A_1 et arrivant en M ont donc strictement le même chemin optique donc $(A_1M) = (A_1M)'$. On a de même $(A_2M) = (A_2M)'$. On peut donc écrire :

$$\delta(S',M) - \delta(S,M) = [S'A_2 - S'A_1] - [SA_2 - SA_1] = [S'A_2 - SA_2] - [S'A_1 - SA_1] \tag{34.3}$$

Il faut exprimer ces deux différences pour les deux rayons. Prenons par exemple le rayon 1. Pour cela, on utilise l'approximation des points sources proches, *i.e.* $S'S \ll SA_1$. On a alors :

$$\begin{aligned}S'A_1 &= \left\|\overrightarrow{S'A_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{S'S} + \overrightarrow{SA_1}\right\|\\ &= \sqrt{\overrightarrow{S'S}^2 + 2\overrightarrow{S'S}\cdot\overrightarrow{SA_1} + \overrightarrow{SA_1}^2}\\ &\simeq \left\|\overrightarrow{SA_1}\right\|\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2\overrightarrow{S'S}\cdot\overrightarrow{SA_1}}{\left\|\overrightarrow{SA_1}\right\|}\right) \qquad \text{à l'ordre 1}\\ &\simeq SA_1 + \overrightarrow{S'S}\cdot\overrightarrow{u_1} \qquad \text{car} \qquad \overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{SA_1}}{\left\|\overrightarrow{SA_1}\right\|}\end{aligned} \tag{34.4}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} S'A_1 - SA_1 = \overrightarrow{S'S}\cdot\overrightarrow{u_1}\\ S'A_2 - SA_2 = \overrightarrow{S'S}\cdot\overrightarrow{u_2} \qquad \text{de façon analogue}\end{cases} \tag{34.5}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\delta(S',M) - \delta(S,M) = \overrightarrow{S'S}\cdot(\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1})} \tag{34.6}$$

Puisqu'on veut annuler $\delta(S',M) - \delta(S,M)$, on a deux possibilités :

- $\overrightarrow{S'S} \perp \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}$: la source est étendue dans la direction perpendiculaire à la direction des rayons qui interfèrent. Dans ce cas, les interférences sont délocalisées. Par exemple, ça revient à éclairer des fentes d'Young verticales avec une source étendue verticalement. Cette solution contraint cependant la géométrie du dispositif donc elle n'est pas très pratique.

- $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$: les rayons 1 et 2 sont confondus donc les rayons qui interfèrent sont issus du même rayon incident et on parle d'interférences par **division d'amplitude**. On observe alors une figure d'interférences pour n'importe quelle source étendue, et ça c'est beau.

On peut donc écrire le **théorème de localisation :**

> Pour observer des interférences contrastées avec une source étendue, les rayons qui interfèrent doivent forcément être issus du même rayon incident. Cela revient à dire qu'il faut forcément utiliser un interféromètre à division d'amplitude. Les rayons issus du même rayon incident interfèrent dans une région précise de l'espace dans laquelle sont donc localisées les franges d'interférence.

2 Interféromètre de Michelson

L'expérience de Michelson et Morley (1887) avait pour objectif de démontrer l'existence de l'éther, milieu dans lequel on supposait que se propageait la lumière. Elle consistait à mesurer la différence de la vitesse de la lumière entre deux directions perpendiculaires, à six mois d'intervalle, à l'aide d'un interféromètre de Michelson, créé pour l'occasion. L'expérience fut considérée comme un échec puisque les différences attendues ne purent être constatées. Ce n'est que plus tard que Hendrik Lorentz interprète ces résultats comme étant l'expression d'une réalité physique inattendue, à savoir le caractère absolu de la vitesse de la lumière.

Cet échec a valu à Michelson un prix Nobel.

Toujours dire "L'interféromètre de Michelson", et pas "Le Michelson".

2.1 Présentation

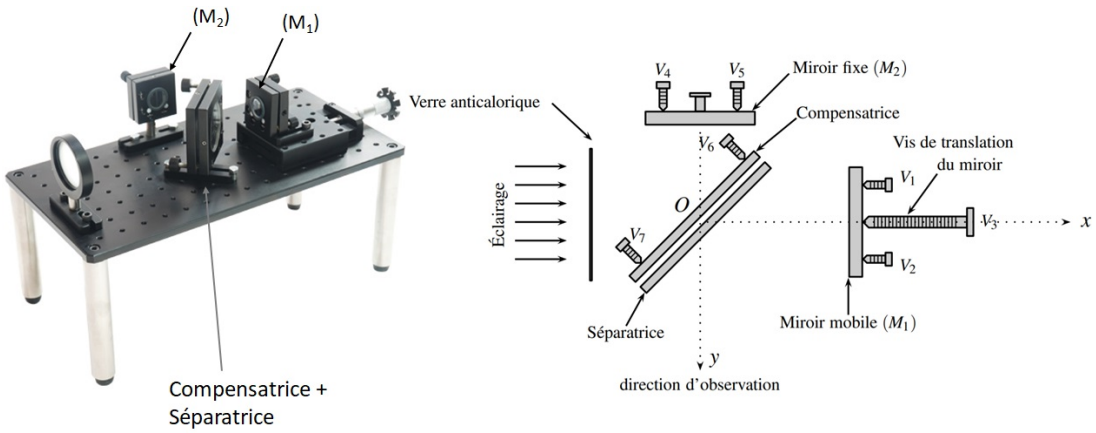


FIGURE 34.1 – Photo et schéma de l'interféromètre de Michelson

Présentation de l'interféromètre de Michelson

✍ ⏲

Présenter au fur et à mesure avec le vrai appareil, et avec les schémas géogébra.

On remarque que le système de deux miroirs peut se réduire par symétrie par rapport à la séparatrice à de l'air coincé entre deux miroirs (représenter un cas mixte entre lame d'air et coin d'air).

On voit qu'en pratique, la lame séparatrice est accompagnée d'une lame dite compensatrice, elle sert non pas tant à compenser une différence de marche constante due à la traversée de l'épaisseur de la séparatrice, mais surtout à

compenser les effets de la dispersion dans le verre (En pratique, elles sont formées dans le même bloc de matière première pour qu'elles aient bien le même $n(\lambda)$).

Rôle de la compensatrice :

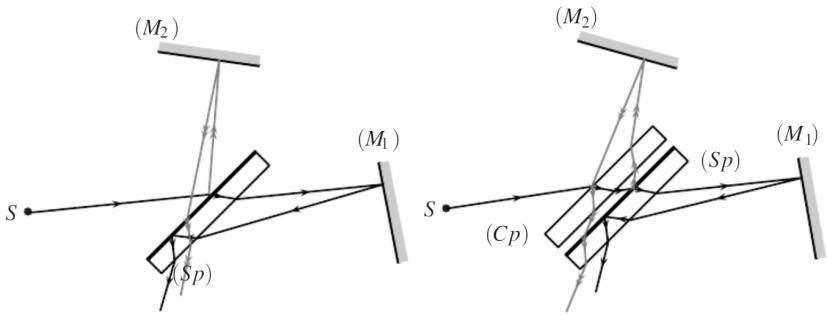


FIGURE 34.2 – La compensatrice ne sert pas à compenser une différence de marche absolue, qu'un chariotage compenserait très bien, mais plutôt à compenser la différence de dispersion entre les deux rayons. En effet en passant dans le verre de la séparatrice, le rayon passant en M1 est dispersé par le verre trois fois, contre une pour celui de M2.

Division du front d'onde ou d'amplitude ?

Si on a une source ponctuelle, on peut faire interférer deux rayons issus de ce point mais arrivant sur 2 points différents de la séparatrice : on a division du front d'onde. Ces 2 points de la séparatrice se comportent **comme des trous d'Young** : on voit donc les franges partout (elles sont donc délocalisées) et si on étend la source, on observe un brouillage de la figure, exactement comme avec des trous d'Young.

Si on prend en revanche **un seul** et unique rayon arrivant sur la séparatrice, il va être séparé en 2 et les 2 parties du rayon ne vont interférer que lorsqu'ils seront **à l'infini**. Le rayon à l'infini n'interférera d'ailleurs pas avec d'autre rayons partis dans des directions opposées, puisqu'ils croisera ceux-ci avant l'infini. Il n'interfère donc **qu'avec lui même**.

Puisqu'on avait qu'un seul rayon incident, on dit qu'on a **division d'amplitude** et dans ce cas les franges sont localisées.

Le truc cool, c'est que quand on fait interférer deux rayons issus du même rayon incident, la différence de marche ne dépend quasiment pas (en tout à l'ordre 1) de la position du point source duquel a été émis le rayon incident : ainsi, on peut avoir une source étendue sans avoir de brouillage car peu importe la position du point source, il donne la même différence de marche et donc la même figure d'interférences. Mais ça on y vient...

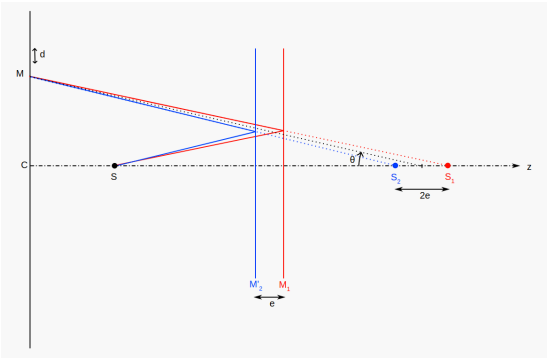


FIGURE 34.3 – Exemple de schéma équivalent d'utilisation de l'interféromètre de Michelson en division du front d'onde.

Condition de localisation des interférences : On a vu dans la partie précédente que, dans le cas d'une source étendue, la condition de non-brouillage était que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$. Cela implique la localisation des interférences, ce qui est un point très important de l'interféromètre de Michelson. On gagne en cohérence au prix d'une perte en localisation.

Regardons les deux réglages standards de l'interféromètre de Michelson, et ce que l'on peut en faire.

Condition d'éclairage du Michelson en lame d'air

En lame d'air, on veut avoir la plus grande variété d'angles d'incidence possible pour avoir le plus d'anneaux possibles. Pour cela, on fait converger la source sur un des miroirs en formant son image sur le-dit miroir.

2.2 Réglage en lame d'air

Il s'agit du cas dans lequel les deux miroirs sont parfaitement orthogonaux l'un à l'autre dans la vraie vie, et parfaitement alignés dans la représentation fictive schématique. On peut alors tracer les rayons issus d'un seul rayon incident :

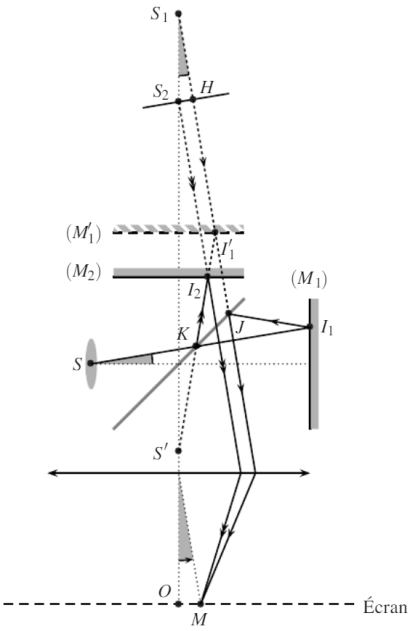


FIGURE 34.4 – La schématisation équivalente de l'interféromètre de Michelson en lame d'air.

Le calcul de la différence de marche donne alors, si on zoome un peu :

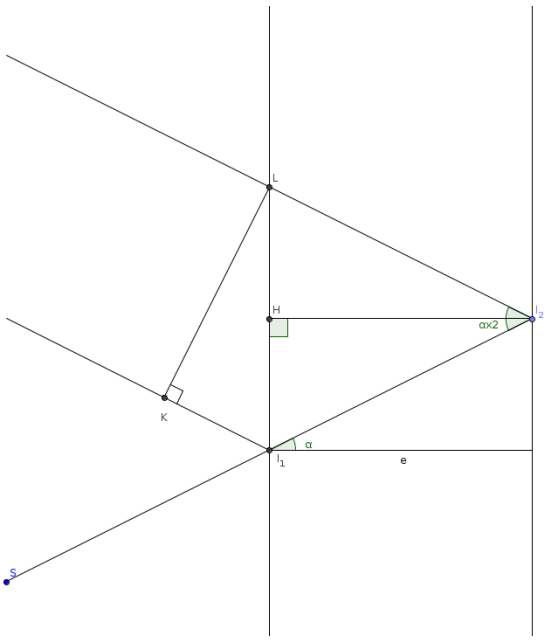


FIGURE 34.5 – Le "zoom un peu".

Il faut déterminer la différence de marche entre les rayons, dans le cas où l'on se place parfaitement perpendiculaire à leur propagation, puisque c'est comme ça qu'on va les regarder avec la lentille à la fin.

$$\begin{aligned}\delta &= n(I_1I_2 + I_2L - I_1K)\\ &= n\left(\frac{2e}{\cos\alpha} - 2e\tan\alpha\sin\alpha\right)\\ \delta &= 2ne\cos\alpha\end{aligned} \tag{34.7}$$

On a ainsi directement l'intensité lumineuse en l'infini :

$$I = I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}2ne\cos\alpha\right)\right) \tag{34.8}$$

On remarque que la forme des interférences dépend directement de α l'angle effectué par le rayon incident. Cela nous donne donc des anneaux, dit **d'égale inclinaison**, **localisés** à l'infini.

Pour les observer, l'idéal reste de mettre soit l'oeil directement (attention à la sécurité) soit une lentille de focale 1 m, par exemple.

Michelson en lame d'air, doublet du sodium

✍ Sextant, p162, MP08

On éclaire l'interféromètre de Michelson avec une lampe à vapeur de sodium. On simule une source ponctuelle avec un diaphragme : les interférences sont non localisées, on les voit partout avec le même contraste, et peu intenses. Elles ont la forme d'anneaux. Lorsque le diaphragme est ouvert, on passe à une source étendue et le contraste se détériore, on dit qu'il y a brouillage du fait de la cohérence spatiale. Cette fois-ci les interférences sont localisées en l'infini, visible au foyer d'une lentille. L'intensité est nettement supérieure.

On peut ensuite se servir de l'interféromètre de Michelson pour trouver la largeur du doublet du Sodium, ✍ MP08. C'est un **sondage de la cohérence temporelle**, après s'être affranchi de la cohérence spatiale.

Passons maintenant dans le deuxième réglage de l'interféromètre de Michelson.

2.3 Réglage en coin d'air

✍ Dunod p788

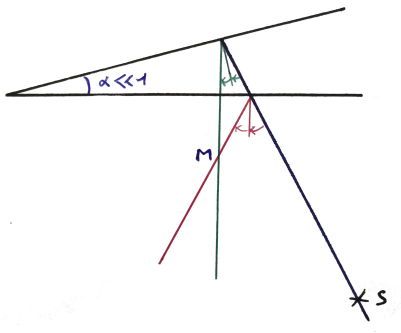


FIGURE 34.6 – Le réglage en coin d'air.

Un petit calcul montre que en coin d'air α faible, on a localisation des interférences très près du coin d'air, donc du miroir. De plus, on peut calculer la différence de marche, et elle vaut

$$\delta = 2n\alpha x \tag{34.9}$$

$$I = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2n\alpha x\right)\right) \tag{34.10}$$

On observe des franges parallèles, de même largeur, qui défilent lorsque l'on chariotte. L'interfrange observé sur l'écran avec un système de grandissement γ est donc :

$$i = \gamma \frac{\lambda}{2n\alpha} \tag{34.11}$$

Condition d'éclairage du Michelson en coin d'air

En coin d'air, on veut avoir un angle d'incidence le plus faible possible pour justifier l'approximation faite dans le calcul de δ. Pour cela, on fait en sorte d'éclairer uniformément les miroirs avec un faisceau parallèle de rayons.

Expériences diverses

✍ MP08, ton imagination

Montrer la localisation des franges, le chariotage, mesurer l'épaisseur d'une lame de verre, y'a plein de possibilités, t'es libre.

	Lame d'air	Coin d'air
Forme des franges	Anneaux	Franges rectilignes
Localisation des franges	À l'infini	Sur un miroir
Condition d'éclairage	Faisceau convergent sur le miroir	Faisceau parallèle

3 Interféromètre de Fabry-Pérot

3.1 Présentation

Cet interféromètre a été mis au point par deux scientifiques français, Charles Fabry et Alfred Pérot, au XIXème siècle. Le principe de l'interféromètre de Fabry-Pérot est de piéger de la lumière entre deux interfaces identiques parallèles de coefficients de réflexion r et de transmission t, le milieu entre ces deux interfaces étant un diélectrique d'indice n et d'épaisseur e. Une onde incidente entrant dans le dispositif subira alors de multiples réflexions avant de ressortir du dispositif.

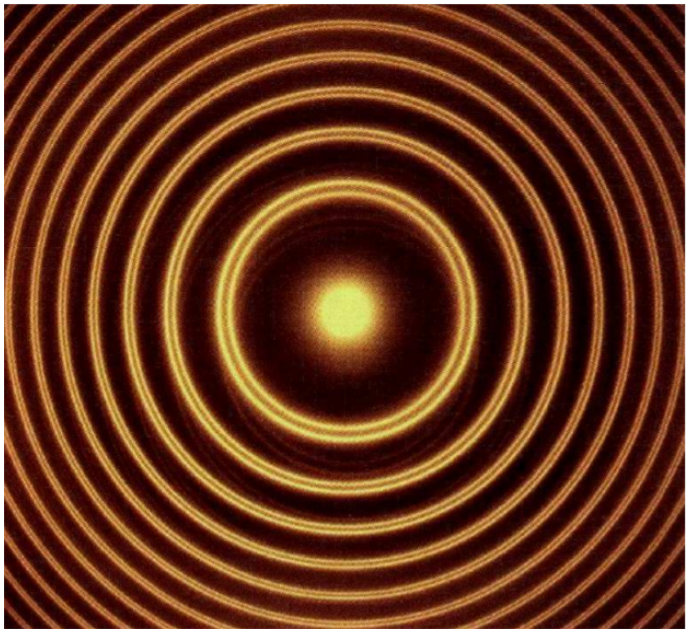
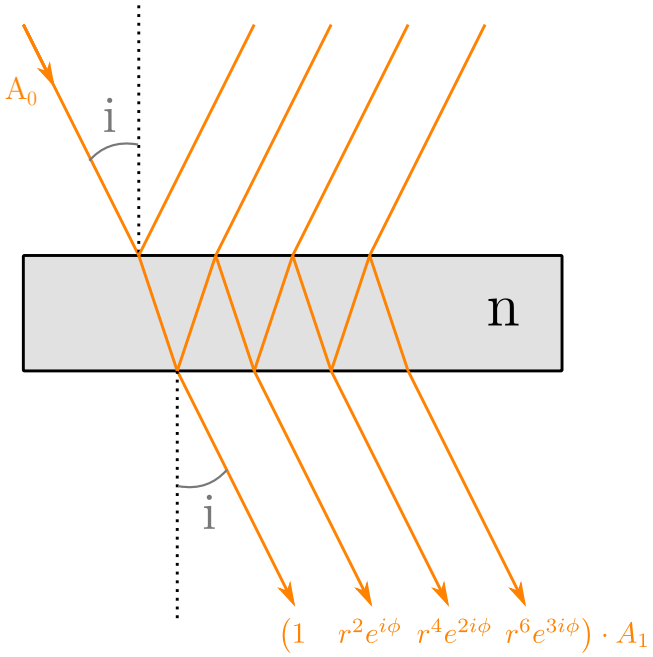


FIGURE 34.7 – Figure d'interférence du doublet du sodium obtenue avec un interféromètre de Fabry-Pérot.



Les ondes transmises vont alors interférer entre elles et on obtient une figure d'interférences semblable à celle d'un interféromètre de Michelson en lame d'air, donc avec des anneaux. En réalité, le coefficient de transmission est différent selon qu'on regarde une transmission air–cavité (coefficient t) ou cavité–air (coefficient t'). Cependant, on va mener l'étude en intensité et donc utiliser les coefficients de transmission $T = tt'$ et de réflexion $R = r^2$ en intensité, donc cette distinction n'a pas d'importance.

3.2 Intensité de l'onde transmise

Si on suppose que le milieu diélectrique a un indice $n \simeq 1$, le déphasage entre deux ondes transmises consécutives ψ_n et ψ_{n+1} vaut

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2e\cos(i) \tag{34.12}$$

en remarquant que le calcul de δ a déjà été fait pour l'interféromètre de Michelson en lame d'air. En prenant en compte les deux réflexions ayant lieu entre ces 2 ondes consécutives, on peut donc relier leur expression par :

$$\psi_{n+1} = r^2 e^{i\phi}\psi_n = Re^{i\phi}\psi_n \tag{34.13}$$

Par récurrence, on montre que $\psi_{n+1} = \left(Re^{i\phi}\right)^n \psi_1$ Ainsi, si on somme toutes les ondes transmises via le principe de superposition sans oublier la transmission air/cavité au début et cavité/air à la fin, on obtient

$$\psi = tt'\psi_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(Re^{i\phi}\right)^n = T\frac{\psi_1}{1 - Re^{i\phi}} \tag{34.14}$$

L'intensité vaut alors

$$\begin{aligned}
I &= \psi^*\psi \\
&= T^2 \frac{\psi_1^*}{1 - Re^{-i\phi}} \frac{\psi_1}{1 - Re^{i\phi}} \\
&= T^2 \frac{I_1}{1 + R^2 - R(e^{i\phi} + e^{-i\phi})} \\
&= T^2 \frac{I_1}{1 + R^2 - 2R\cos(\phi)} \\
&= T^2 \frac{I_1}{1 + R^2 - 2R + 4R\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} && \text{car } \cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\
&= T^2 \frac{\frac{I_1}{(1-R)^2}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} \\
&= \frac{I_{\max}}{1 + m\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} && \text{avec } I_{\max} = T^2\frac{I_1}{(1-R)^2} \text{ et } m = \frac{4R}{(1-R)^2}
\end{aligned} \tag{34.15}$$

On peut, à ce moment là, montrer une simulation Géogébra.

La bulle de savon

Une bulle de savon est constituée de deux interfaces air–eau et eau–air qui se comportent comme un interféromètre de Fabry-Pérot. Ainsi, quand l'épaisseur de la bulle tend vers 0, ϕ tend vers 0 et on se rapproche du contact optique. on voit alors apparaître un blanc d'ordre supérieur annonciateur de la rupture imminente de la bubulle.

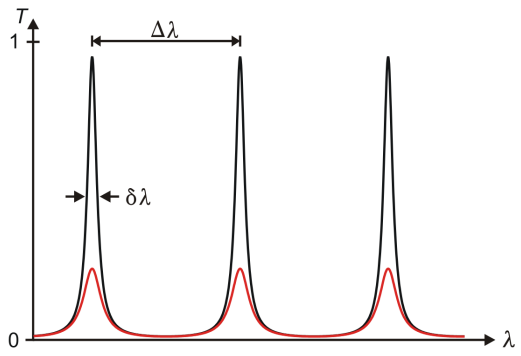
3.3 Finesse et résolution

L'interféromètre de Fabry-Pérot est souvent utilisé comme un filtre interférentiel. Afin de caractériser le dispositif, on définit sa finesse $\mathcal{F}$ comme étant le rapport de la distance $\Delta\lambda$ entre 2 pics et de la largeur $\delta\lambda$ à mi-hauteur de ces pics :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda} \tag{34.16}$$

On peut également définir la finesse en fonction de $\Delta\phi$ le déphasage entre deux raies (qui vaut donc 2π) et $\delta\phi$ la largeur à mi-hauteur du pic en terme de phase :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\phi}{\delta\phi} = \frac{2\pi}{\delta\phi} \tag{34.17}$$



Pour calculer $\mathcal{F}$, on se place une raie centrée en λ_0 qui définit un ordre p tel que $\phi_0 = 2p\pi$. On a donc $\dfrac{4\pi}{\lambda_0} ne\cos(i) = 2p\pi$.

- **Calcul de $\delta\lambda$:**
  Pour une longueur d'onde $\lambda = \lambda_0 + \dfrac{1}{2}\delta\lambda$, on a
  $$\phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 + \dfrac{\delta\lambda}{2}} ne\cos(i) = \phi_0 - \delta\phi'$$
  On fait un DL pour obtenir
  $$\phi \simeq \frac{4\pi}{\lambda_0} ne\cos(i)\left(1 - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0}\right) = \phi_0\left(1 - \frac{\delta\lambda}{2\lambda_0}\right)$$
  donc $\delta\phi' = \phi_0 \dfrac{\delta\lambda}{2\lambda_0} = p\pi\dfrac{\delta\lambda}{\lambda_0}$
  De plus, si on considère que $\delta\lambda$ est la largeur à mi-hauteur du pic, on a donc $I\left(\lambda_0 \pm \dfrac{\delta\lambda}{2}\right) = \dfrac{I_{\max}}{2}$. Cela implique que
  $$1 = m\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = m\sin^2\left(p\pi - \frac{\delta\phi'}{2}\right) \simeq m\left(\frac{\delta\phi'}{2}\right)^2 \qquad \text{car } \phi_0 = 2p\pi$$
  On obtient donc que $\delta\phi' \simeq \dfrac{2}{\sqrt{m}}$.
  À partir des deux expressions de $\delta\phi'$, on trouve que
  $$\delta\lambda = \frac{2\lambda_0}{p\pi\sqrt{m}}$$
  Notons que la largeur à mi-hauteur de la raie en terme de déphasage vaut $\delta\phi = 2\delta\phi' = \dfrac{4}{\sqrt{m}}$.
- **Calcul de $\Delta\lambda$**
  Puisqu'on a une raie en $\lambda_0 + \Delta\lambda$, on en déduit que $I(\lambda_0) = I(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Ainsi, on a
  $$2\pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} ne\cos(i) - \frac{4\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda} ne\cos(i) = 4\pi ne\cos(i)\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda}\right) \simeq 4\pi ne\cos(i)\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$
  Encore une fois, on s'en est sorti avec un DL pour trouver
  $$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda_0^2}{2ne\cos(i)} = 2\pi\frac{\lambda_0}{\dfrac{4\pi}{\lambda_0} ne\cos(i)} = \frac{2\pi\lambda_0}{2p\pi} = \frac{\lambda_0}{p}$$

Finalement, on obtient

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\pi}{2}\sqrt{m} = \pi\frac{\sqrt{R}}{1-R}} \tag{34.18}$$

On remarque que la formule $\mathcal{F} = \dfrac{\Delta\phi}{\delta\phi} = \dfrac{2\pi}{\delta\phi}$ donne le même résultat.

Détails pas forcément utiles

Cette formule montre que la finesse ne dépend pas du pic choisi, or numériquement on voit que c'est le cas. Cela vient de l'approximation $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ qui n'est pas vraiment vérifiée. On pourrait faire le calcul sans faire le DL et trouver

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{m}}{1 - \dfrac{\lambda_0}{2ne\cos(i)}}$$

La finesse est donc augmentée pour les grandes longueurs d'onde (la finesse augmente mais pas nécessairement $\delta\lambda$ puisque $\Delta\lambda$ varie aussi). On montre le spectre du filtre interférentiel qu'on fit avec le modèle, on donne alors R, λ et $\delta\lambda$ (avec incertitude fournies par le code python). On compare avec le résultat attendu ($\delta\lambda \simeq 10$ nm). En pratique le dépôt d'une épaisseur aussi fine n'est pas possible (cf ✍ Houard p.237-238) et la structure du filtre est un peu différente, ce qui peut expliquer des difficultés éventuelles à faire le fit.

On peut montrer les limites d'un filtre interférentiel en l'éclairant sous différents angles incidents : la couleur transmise change (c'est $2ne\cos(i)$ qui compte).

Finesse de l'interféromètre de Michelson

On peut également calculer la finesse de l'interféromètre de Michelson.
On rappelle qu'on a $I = 2I_0(1+\cos\phi)$ et $\phi = \dfrac{4\pi}{\lambda} ne\cos(i)$. On va utiliser la formule $\mathcal{F} = \dfrac{2\pi}{\delta\phi}$. Pour calculer $\delta\phi$, on fait le même calcul que pour l'interféromètre de Fabry-Pérot mais l'expression de I a changé et donne comme nouvelle formule $0 = \cos(\phi) = \cos(\delta\phi')$ donc

$$\delta\phi' = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta\phi = 2\delta\phi' = \pi$$

Finalement, la finesse de l'interféromètre de Michelson vaut

$$\mathcal{F}_{\text{Michel}} = 2$$

Pour les interféromètres de Fabry-Pérot de la collection, $R = 0.85$, et $\mathcal{F} = 19.3$

On a de plus $e = 0.2$ mm et pour le doublet de sodium, $\lambda = 589.3$ nm ce qui donne $p\mathcal{F} = 13000$ en incidence normale, avec p l'ordre d'interférence, qui au centre vaut $2e/\lambda$. Donc $\delta\lambda = 0.04$ nm ce qui est largement suffisant pour séparer les pics de 0.6 nm.

Séparation du doublet du Sodium

✍ Duffait

l'interféromètre de Fabry-pérot est réglé de sorte à observer deux systèmes d'interférences créés par chacun des doublets, $e = 0.2$ mm. Deux systèmes d'anneaux concentriques sont ainsi visibles.

Quelques mots sur le réglage de l'interféromètre de Fabry-Pérot : on a ici utilisé un étalon Fabry-Pérot de la collection. Il ne permet donc pas une variation continue de l'épaisseur de la lame d'air, il faut, pour chaque épaisseur, réajuster le parallélisme. Les étalons ont cependant l'avantage d'être stables, i.e. non sensibles aux chocs sur la paillasse qui, dans le cas de l'interféromètre de Fabry-Pérot, peuvent anéantir une heure de réglage. Les étalons de la collection possèdent trois vis de réglage grossier, dont une reliée à un vernier en millimètres. Il peut être pratique d'ajuster cette vis en premier lors du réglage grossier du parallèlisme, afin d'avoir dès le départ une épaisseur proche de celle recherchée. On règle alors le parallélisme sans toucher cette vis.

3.4 Application photographique (ou pour tes lunettes)

✍ Houard p.237

Pour les appareils photos le montage optique de l'objectif (plusieurs lentilles bien placées pour limiter les aberrations chromatiques et géométriques) réduit la qualité de l'image. Les réflexions sur chaque lentille font chuter l'intensité lumineuse en fin de montage, et il peut y avoir une perte de contraste de l'image obtenue à cause des réflexions internes dans les lentilles. En vaporisant une fiche couche d'un substrat on peut faire en sorte que les lentilles réfléchissent très peu la lumière via un montage type Fabry-Pérot.

En considérant les rayons sous incidence quasi-normale, on obtient la condition d'interférences destructives $2ne = \lambda/2$. On choisit alors n et e de sorte que les longueurs d'onde correspondant au vert-jaune soient bloquées car c'est dans cette partie du spectre que l'oeil est le plus sensible. Ceci explique la couleur bleutée des objectifs, ou des lunettes de vue.

Conclusion

Ce chapitre comporte un aspect très expérimental, qui sera approfondi lors de travaux pratiques. On a pu voir un autre type d'interférométrie qui permet, en s'affranchissant notamment de l'étendue spatiale de la source et des problèmes de cohérence spatiale associés, de voir des figures interférométriques très lumineuses. Des systèmes tels que l'interféromètre de Michelson ou de Fabry-Pérot permettent de sonder et de comprendre un peu mieux les propriétés optiques des sources lumineuses, via l'étude de la cohérence temporelle. Leur application est même plus large, comme en métrologie (contrôle des surfaces), dans l'industrie (couche anti-reflet) ou dans la recherche (mesure de température, Virgo). Le coût d'un tel système est cependant notamment la localisation des franges et les réglages des appareils qui demandent une certaine minutie. C'est pourquoi toute mesure interférométrique nécessite une réflexion sur le choix approprié du système à utiliser, et en premier lieu autour de la question : *division du front d'onde ou du front d'amplitude ?*

Remarques diverses

Virgo : Un michelson avec des bras de 3 km, avec des interféromètres de Fabry-Perot de chaque côté pour augmenter encore la longueur effective. On détecte des variation de 10^{-22} m.

Laser et Fabry-Pérot : Un laser c'est une cavité Fabry-Pérot, pour sélectionner une onde très monochromatique.

Limites de cohérence spatiale : Même en division d'amplitude, il faut garder en tête que la cohérence spatiale peut se faire ressentir, notamment si la largeur de l'objet devient similaire à celle de l'image.

Les questions diverses :

Votre programme est en source ponctuelle, il se passe quoi en source étendue ? En source ponctuelle on a aucun problème de localisation, puisque tout est bien, beau et simple. En source étendue cependant, on a localisation des interférences !

Comment ça marche un Laser ? ✍ LP37 **C'est quoi Virgo ?**

C'est quoi la cohérence temporelle ? C'est l'analogue de la cohérence spatiale mais en longueurs d'ondes. Si une source est étendue en longueurs d'ondes, les figures d'interférences des différentes longueurs se superposent et le résultat est un spectre brouillé.

C'est quoi une onde sphérique ? Et une onde plane ? Et pour le FP et le Michelson tu mets quoi en entrée ? Pour un élève tu lui expliques comment ?

Quels sont les défauts classiques de réglage du Michelson ? Les défauts d'alignement de la compensatrice-séparatrice, les défauts d'alignement des miroirs, et les défauts d'observation.

Pourquoi travailler sur un Michelson et pas un Fabry-Perrot en classe préparatoire ? C'est moins cher, plus robuste, et plus pédagogique.

LP 35

Diffraction de Fraunhofer

Commentaires du jury

- **2011-2017 :** Les conditions de Fraunhofer (pour autant, elles ne constituent pas le coeur de la leçon) et leurs conséquences doivent être présentées, ainsi que le lien entre les dimensions caractéristiques d'un objet diffractant et celles de sa figure de diffraction.
- **2009-2010 :** Les phases associées aux amplitudes doivent être traitées avec soin.
- **2006-2008 :** Le principe de Huygens-Fresnel doit être exposé clairement, sans débordements mathématiques excessifs. Il faut expliquer pourquoi la diffraction de Fraunhofer est pertinente dans la formation des images.
- **2005 :** Rappelons que la diffraction de Fraunhofer accompagne l'image géométrique d'une source initiale et que l'écriture du principe de Huygens-Fresnel dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer doit être rigoureuse. Les applications ne doivent pas se limiter au trou circulaire et à la fente fine. Dans ce dernier cas, il faut justifier le calcul qui est mené.
- **2001 :** Il faut éviter les calculs trop lourds et valoriser les applications. Notons que le pouvoir séparateur de la lunette astronomique n'est pas le seul exemple d'application.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *La diffraction pour les nuls... et les forts, BUP 889 Cahier n° 2* ⟶ Base intéressante pour la pédagogie
- ✍ *Optique*, **Pérez** ⟶ Principe de Huygens-Fresnel
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Manips
- ✍ *Optique physique*, **Taillet** ⟶
- ✍ *Optique*, **Hecht** ⟶

Prérequis

- ➢ Optique géométrique, modèle scalaire
- ➢ Transformée de Fourier
- ➢ Interférences, cohérence

Expériences

☕

1 Principe de Huygens-Fresnel . . . 485
1.1 Contexte . . . 485
1.2 Les contributions respectives de chacun . . . 485
1.3 Le principe et son interprétation . . . 486
1.4 Régime de Fraunhofer . . . 487
1.5 Formulation en transformée de Fourier . . . 488
1.6 Obtention expérimentale . . . 488
2 Diffraction par un objet quelconque . . . 489
2.1 Fente rectangulaire . . . 489
2.2 Trou circulaire . . . 490
2.3 Propriétés de la figure de diffraction . . . 490
3 Conséquences . . . 491
3.1 Pouvoir de résolution et critère de Rayleigh . . . 491
3.2 Filtrage optique . . . 492

Introduction

En optique géométrique, on travaille avec des rayons, sauf que bon, les rayons, on sait que ça marche pas.

Mise en évidence de la diffraction

✍ ⏲

Avec un laser et un trou, à grande distance. On ne peut pas interpréter ça avec des rayons lumineux

On a alors le phénomène de diffraction, que vous avez déjà vu au lycée normalement. Pour l'expliquer, il va falloir sortir du cadre de l'optique géométrique. On va donc se placer dans les cas où l'obstacle est de la taille de la longueur d'onde (en OG), et où on passe près des bords des objets.

1 Principe de Huygens-Fresnel

On pourrait directement faire les calculs d'électromagnétisme, dans un formalisme que l'on connaît bien qui est celui des équations de Maxwell, mais mêler l'EM dans le vide et dans la matière, dans un espace non continu, c'est trop long et vraiment pas drôle. On va se placer dans le modèle ondulatoire de la lumière, qui est un intermédiaire entre l'EM et l'OG.

Nous nous placerons dans un cas sans polarisation afin de simplifier le lot de calculs. Il s'agit là du modèle scalaire de la lumière.

1.1 Contexte

Le problème est celui de connaître l'amplitude en un point M de l'espace, après une pupille repérée par un point P, en connaissant celle avant. On éclairera en lumière monochromatique, car la théorie de l'optique ondulatoire est fondamentalement linéaire, ce qui permettra d'utiliser le théorème de superposition.

1.2 Les contributions respectives de chacun

Huygens, 1678 : par analogie avec la propagation à la surface de l'eau, il énonce

La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément d'une surface d'onde est une source secondaire d'ondelettes sphériques. L'enveloppe de ces ondelettes définit la nouvelle surface d'onde.

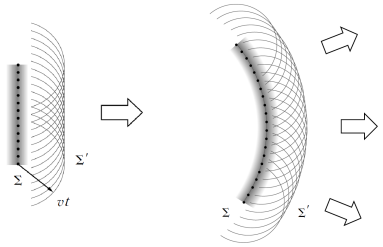


FIGURE 35.1 – Ondelettes sphériques dues aux sources secondaires à la surface d'un front d'onde sphérique. À partir de celles-ci, on définit le nouveau front d'onde.

Avec ce principe, on comprend que la lumière puisse se retrouver dans des endroits où l'optique géométrique prévoit du noir. Cependant ce que cela n'explique pas, c'est la figure en tâches. On s'attend à un truc assez homogène, sans passage par le noir.

On peut montrer les lois de Descartes sur la réfraction avec les ondelettes. ✍ `gifondelettes.gif`

Fresnel, 1818 : plus d'un siècle plus tard, on comprend qu'en fait, les ondelettes sont cohérentes entre elles, et là c'est le drame, on a toutes les cartes en mains pour exprimer convenablement le principe de Huygens-Fresnel.

Les différentes sources secondaires sont cohérentes. Les ondelettes interfèrent entre elles.

1.3 Le principe et son interprétation

Principe de Huygens-Fresnel :
L'amplitude d'une onde après une surface peut s'exprimer en supposant que les surfaces élémentaires $\mathrm{d}P$ de cette surface se comportent comme des sources secondaires :

- d'amplitude proportionelle à la surface
- et à l'amplitude de l'onde créée
- et à un facteur de transmission de la surface (complexe, il vaut 1 pour un trou et 0 pour un mur)
- et à un facteur d'inclinaison $K = \dfrac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{2}$.
- de phase égale à celle de l'onde arrivant (plus $\pi/2$ en réalité, d'où le i, mais ça vient.)
- se comportant comme des ondes sphériques
- cohérentes entre elles

On nomme $A(M)$ l'amplitude au point M, $A(P)$ celle arrivant sur la surface au point P, $t(P)$ le facteur de transmission en P. On ne suppose rien sur l'onde incidente. Expérimentalement (parce que la théorie à développer ici serait celle de l'électromagnétisme, et que l'on ne veut poser qu'un principe) on remarque un facteur $\dfrac{i}{\lambda}$, qui apparaît.

$$A(M) = \frac{-i}{\lambda} \iint \frac{A(P)}{PM} t(P) K e^{i\frac{2\pi PM}{\lambda}} \mathrm{d}P \tag{35.1}$$

La question maintenant est celle de l'onde incidente, car pour faire le calcul, il faut la connaître.

Du facteur i/λ

En fait, on peut montrer (Kirshoff, 1824-1887) que pour un champ vérifiant l'équation de d'Alembert, la connaissance de l'état ondulatoire sur une surface fermée donne l'amplitude en tout point entouré par cette surface. C'est de l'analyse complexe. En supposant que $\lambda \ll$ le reste, et que $\overrightarrow{e_s}$ correspond aux figures :

$$A(M) = \frac{1}{i\lambda} \oiint_S A(P) K \frac{e^{ikPM}}{PM} \mathrm{d}S \qquad \text{avec } K = \frac{\cos(\overrightarrow{\mathrm{d}S}, \overrightarrow{e_r}) - \cos(\overrightarrow{\mathrm{d}S}, \overrightarrow{e_s})}{2} \tag{35.2}$$

On peut alors négliger le contour qui n'est pas dans la surface d'incidence en le faisant tendre vers l'infini et en invoquant la sacro-sainte causalité. L'appel à une décroissance en $1/r^2$ est souvent fait, mais est ici fallacieux.

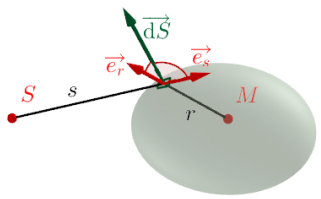


FIGURE 35.2 – Les notations utilisées ici (j'ai inversé P et M).

1.4 Régime de Fraunhofer

Le régime de Fraunhofer, c'est deux approximations en une. La première partie c'est de considérer que **L'onde incidente est plane**, c'est à dire que $A(P) = A_0$. On a alors $\cos\theta_1 = 0$, et

$$A(M) = \frac{-iA_0}{\lambda} \iint \frac{1}{PM} t(P) K e^{i\frac{2\pi PM}{\lambda}} \mathrm{d}P \tag{35.3}$$

On va alors mettre des coordonnées (X, Y) sur la surface diffractante, et (x, y) sur la surface de projection, et on nomme d la distance entre la surface diffractante et la surface de projection :

$$A(x,y) = \frac{-iA_0}{\lambda} \iint \frac{1}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+d^2}} t(X,Y) \exp\left(i\frac{2\pi\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+d^2}}{\lambda}\right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{35.4}$$

On voit l'apparition du terme compliqué $r = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+d^2}$. C'est sur ce dernier que porte l'approximation de Fraunhofer, la vraie. En effet cette expression est difficilement calculable si on laisse r sous cette forme, il va falloir faire les développements limités adaptés.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+d^2} \\ &= \sqrt{X^2+Y^2+x^2+y^2-2(xX+yY)+d^2} \\ &= d + \frac{X^2+Y^2}{2d} + \frac{x^2+y^2}{2d} - \frac{xX+yY}{d} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell^4, L^4, \ell^2L^2}{d^3}\right) \end{aligned} \tag{35.5}$$

Et là, c'est le drame : dans l'amplitude, on prend un DL0, et dans la phase, un DL1, la raison pour cela est que la phase varie beaucoup plus vite que l'amplitude (et parce que ça marche aussi). On a alors $K = 1$, et

Formule de Fresnel :

$$A(x,y) = \frac{-iA_0}{\lambda d} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}d} \iint t(X,Y) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{2d}\right) \mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{35.6}$$

Là, c'est Fresnel, mais le Fraunhofer arrive au pas de course, puisqu'il suffit maintenant de mettre l'écran loin de l'objet diffractant, ce qui a pour conséquence de garder les angles $\alpha = \frac{x}{d}$ et $\beta = \frac{y}{d}$ constant, tout en augmentant d. On se place donc dans le cas $d \ll X, Y$, mais $d \gtrsim x, y$

$$\begin{aligned} r &\simeq d + \frac{X^2+Y^2}{2d} + \frac{x^2+y^2}{2d} - \frac{xX+yY}{d} \\ &\simeq \frac{x^2+y^2}{2d} - (\alpha X + \beta Y) \end{aligned} \tag{35.7}$$

On a alors :

Formule de Fraunhofer :

$$A(x,y) = \frac{-iA_0}{\lambda d}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\left(d+\frac{x^2+y^2}{d}\right)\right)\iint t(X,Y)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{d}X+\frac{y}{d}Y\right)\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \tag{35.8}$$

Attention : On a ici négligé un terme dans la phase, il faut donc qu'il soit négligeable devant 2π ! On note r la taille caractéristique de l'objet. On compare donc finalement la taille de l'objet et la distance de l'écran. Si $\mathcal{F} \gg 1$, on est dans le **régime de Fresnel**.

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{X^2+Y^2}{2d} \ll 2\pi \Rightarrow \mathcal{F} \ll 1 \qquad \text{avec } \mathcal{F} = \frac{r^2}{2\lambda d} \tag{35.9}$$

Le laser et la fente : vérification des hypothèses
On a pris un laser de 632 nm, on s'est placé à d=3 m, et l'objet diffractant à une taille typique de 100µm. Ainsi on a $\frac{X^2+Y^2}{2d}\frac{2\pi}{\lambda} \sim 1/10$.

1.5 Formulation en transformée de Fourier

On définit la transformée de Fourier d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ comme :

$$\mathcal{TF}[f] : \nu \mapsto \widetilde{f}(\nu) = \int f(x)e^{i2\pi\nu x}\mathrm{d}x \tag{35.10}$$

De même pour une fonction bidimensionnelle $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ la transformée de Fourier bidimensionnelle :

$$\mathcal{TF}[f] : (\nu_x,\nu_y) \mapsto \widetilde{f}(\nu_y,\nu_y) = \int f(x,y)e^{i2\pi\nu_x x + i2\pi\nu_y y}\mathrm{d}x \tag{35.11}$$

Alors avec cette convention on a

$$A(x,y) = \frac{-iA_0}{\lambda d}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\left(d+\frac{x^2+y^2}{d}\right)\right)\widetilde{t}\left(\frac{x}{\lambda d},\frac{y}{\lambda d}\right) \tag{35.12}$$

Sans prendre en compte les termes de normalisation qui peuvent apparaître avec les définitions des $\mathcal{TF}$, on écrit

$$A(x,y) = A'_0 e^{i\phi(x,y)}\widetilde{t}\left(\frac{x}{\lambda d},\frac{y}{\lambda d}\right) \tag{35.13}$$

1.6 Obtention expérimentale

Nous venons de faire une jolie théorie, mais la question qui se pose maintenant est celle de l'obtention expérimentale des conditions de Fraunhofer.

Selon nos hypothèses, il faut se placer en **incidence normale** avec une **onde plane**, donc idéalement un objet à l'infini. Pour se faire, on utilise une lentille et une source quasi ponctuelle dans son plan focal. Il nous faut également une observation à l'infini, par conséquent on va opter pour l'utilisation d'une deuxième lentille pour projeter l'image de la figure de diffraction. Le plan dans lequel se retrouve cette image se nomme **Plan de Fourier**. On peut ensuite faire l'image du plan de Fourier, ce qui a pour effet de ré-effectuer une $\mathcal{TF}$, et de redonner l'image de l'objet initial, renversée.

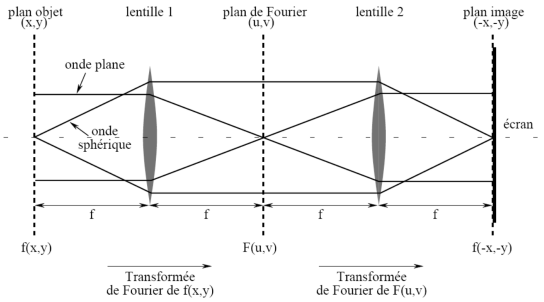


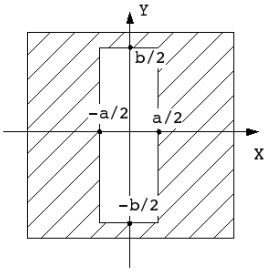
FIGURE 35.3 – Montage utilisé pour projeter le plan de Fourier puis l'image renversée. Ce type de montage est très utile, car il permet d'effectuer du filtrage spatial, mais ça, on verra plus tard.

2 Diffraction par un objet quelconque

2.1 Fente rectangulaire

✍ Taillet, Pérez

Commençons par un cas simple : on considère une fente rectangulaire de largeur a et de longueur b et on considère un montage dans le cas de la diffraction de Fraunhofer rigoureuse. Le but est de retrouver la forme de la figure de diffraction de deux manières différentes : d'abord par le calcul, et ensuite par les transformées de Fourier.



Commençons par le calcul. On a vu qu'on appliquant Huygens-Fresnel puis en se plaçant dans le régime de Fraunhofer, l'amplitude de l'onde arrivant sur l'écran valait

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \frac{-iA_0}{\lambda d}\exp\left(i\frac{2\pi d}{\lambda}\right)\exp\left(i\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda d}\right)\iint t(X,Y)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{d}X+\frac{y}{d}Y\right)\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \\ &= A_0' e^{i\phi(x,y)}\iint t(X,Y)\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x}{d}X+\frac{y}{d}Y\right)\right)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y \end{aligned} \tag{35.14}$$

Dans le cas de la fente, la transmission s'exprime facilement :

$$t(X,Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } X\in\left[-\frac{a}{2},+\frac{a}{2}\right] \text{ et } Y\in\left[-\frac{b}{2},+\frac{b}{2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{35.15}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A(x,y) &= A_0' e^{i\phi(x,y)}\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{d}X\right)\mathrm{d}X\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{d}Y\right)\mathrm{d}Y \\ &= A_0' e^{i\phi(x,y)}\frac{\lambda d}{-i2\pi x}\frac{\lambda d}{-i2\pi y}\left[\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{d}\frac{a}{2}\right)-\exp\left(+i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x}{d}\frac{a}{2}\right)\right]\left[\exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{d}\frac{b}{2}\right)-\exp\left(+i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y}{d}\frac{b}{2}\right)\right] \\ &= A_0' e^{i\phi(x,y)}\frac{\lambda^2 d^2}{4\pi^2 xy}4\sin\left(\frac{\pi x a}{\lambda d}\right)\sin\left(\frac{\pi y b}{\lambda d}\right) \end{aligned} \tag{35.16}$$

On trouve donc

$$\boxed{A(x,y) \propto \text{sinc}\left(\frac{\pi x a}{\lambda d}\right)\text{sinc}\left(\frac{\pi y b}{\lambda d}\right) \qquad \text{et} \qquad I(x,y) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{\pi x a}{\lambda d}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{\pi y b}{\lambda d}\right)} \tag{35.17}$$

Remarques

- pour une fente mince avec $a \ll b$, seul le terme $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi x a}{\lambda d}\right)$ est intéressante. La première annulation selon $\overrightarrow{e_x}$ a donc lieu en $x = \frac{\lambda d}{a}$ et on retrouve la formule de lycée de la diffraction.
- selon $\overrightarrow{e_y}$, la première annulation a lieu pour $y = \frac{\lambda d}{b}$.

Passons maintenant par la formule faisant intervenir la transformée de Fourier de $t(X,Y)$, que l'on va calculer en $\left(\nu_x = \left(\frac{x}{\lambda d}\right), \nu_y = \left(\frac{y}{\lambda d}\right)\right)$:

$$A(x,y) = \mathcal{TF}[t](\nu_x, \nu_y)$$

Dans le cas de la fente, la fonction de transmission est le produit d'une fonction porte selon $\overrightarrow{e_x}$ de largeur a centrée en $x = 0$ et d'une fonction porte selon $\overrightarrow{e_y}$ de largeur b centrée en $y = 0$. On sait que la TF d'une fonction porte est un sinus cardinal, et on retrouve bien l'expression de $A(x,y)$ obtenue précédemment.

Remarque

On pourrait se demander pourquoi la TF du produit de deux fonctions portes donne ici le produit des TF de chaque fonction porte et non pas un produit de convolution. Cependant, il ne faut pas oublier qu'on a fait on TF en 2 dimensions et que chaque fonction porte est dans une direction découplée de l'autre.

2.2 Trou circulaire

Contrairement à la fente simple, l'amplitude diffractée par un trou de diamètre a n'a pas d'expression analytique simple. Cependant, on peut qualitativement décrire la figure de diffraction car elle doit satisfaire la symétrie de révolution par rapport à l'axe z. Les taches en croix sont donc remplacées par des anneaux de diffraction concentriques. L'intensité de la figure de diffraction ramenée dans le plan (x,y) d'une lentille de focale f' s'exprime alors à l'aide de la première fonction de Bessel J_1 :

$$I(x,y) \propto \left(2\frac{J_1(\pi r(x,y))}{\pi r(x,y)}\right)^2 \qquad \text{avec } r(x,y) = \frac{a}{\lambda f'}\sqrt{x^2+y^2} \tag{35.18}$$

La figure de diffraction à l'infini par une ouverture circulaire de diamètre a est constituée d'anneaux dont l'éclairement décroît très rapidement. Cette figure, très connue, s'appelle **tache d'Airy** et intervient beaucoup en optique, comme on le verra dans la section sur le critère de Rayleigh. Le pic central a un rayon angulaire qui vaut $1.22\frac{\lambda}{a}$. (le 1.22 correspond à la première annulation de J_1).

2.3 Propriétés de la figure de diffraction

Puisque l'allure de la figure de diffraction est directement reliée à la TF de la transmittance, ses propriétés découlent de celles de la TF :

- **Translation de l'objet :**

$$\mathcal{TF}[t(X-a, Y-b)](\nu_x,\nu_y) = e^{-i2\pi\nu_x a}e^{-i2\pi\nu_y b}\,\mathcal{TF}[t(X,Y)](\nu_x,\nu_y)$$

La translation de l'objet fait apparaître un terme de phase qui disparaît dans la formule de l'intensité. En incidence normale, la figure de diffraction n'est donc pas modifiée par une translation de l'objet.

- **Changement d'échelle :**

$$\mathcal{TF}[t(aX,bY)](\nu_x,\nu_y) = \frac{1}{|ab|}\mathcal{TF}[t(X,Y)]\left(\frac{\nu_x}{a},\frac{\nu_y}{b}\right)$$

L'augmentation de la taille de l'objet implique donc une diminution des fréquences spatiales et donc la figure de diffraction se contracte. On comprend pourquoi on ne voit pas de diffraction quand l'objet est trop grand : toutes les fréquences sont trop proches de la tache centrale.

- **Convolution :**

$$\mathcal{TF}[f\otimes g] = \mathcal{TF}[f]\mathcal{TF}[g]$$

Cette propriété permet de calculer la figure de diffraction d'objets complexes à partir de celle d'objets plus simples. Par exemple, la transmittance d'une double fente est le produit de convolution d'une fonction porte de largeur e et d'une somme de deux δ de Dirac chacun centré en la position d'une des fentes :

$$t_{\text{double fente}}(X,Y) = \Pi\left(\frac{X}{e}\right)\otimes[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)]$$

De même, pour un réseau,

$$t_{\text{réseau}}(X,Y) = \Pi\left(\frac{X}{L}\right)\times\left(\Pi\left(\frac{X}{e}\right)\otimes \text{III}_b(X)\right)$$

où $\Pi\left(\frac{X}{L}\right)$ est la fonction porte traduisant la taille du réseau et III_b est le peigne de Dirac (somme de δ de Dirac espacés d'une distance b). Généralement on oublie la taille du réseau et on le considère infini.

Convolution ?

Le produit de convolution à une dimension est défini comme :

$$(f\otimes g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \tag{35.19}$$

- **Babinet :**

$$\mathcal{TF}[1-t(X,Y)](\nu_x,\nu_y) = \delta(\nu_x,\nu_y) - \mathcal{TF}[t(x,y)](\nu_x,\nu_y)$$

À part au centre, la figure de diffraction d'un objet est identique (à un terme de phase près) à celle de son objet complémentaire.

Montrer les propriétés de la TF

✍ ⏲

Montrer la figure d'une fente et d'un cheveux, montrer celle de la double fente, et le principe expliquer bien.

3 Conséquences

3.1 Pouvoir de résolution et critère de Rayleigh

✍ LP32 - Microscopies optiques

Dans tout appareil optique (lunette, microscope, télescope), il y a une ouverture de taille finie. On modélise cette ouverture par un diaphragme d'ouverture. La lumière peut diffracter sur ce diaphragme ce qui a pour conséquence d'avoir une tache sur l'image au lieu du point source (si l'ouverture est circulaire, on a une tache d'Airy par exemple).

L'appareil a donc une limite de résolution qui dépendra des dimensions du diaphragme d'ouverture. Cette limite de résolution, créée par la diffraction, est donnée par le **critère de Rayleigh** :

$$\theta_R = K\frac{\lambda}{D} \propto \frac{\lambda}{D} \tag{35.20}$$

où K est un facteur dépendant de la géométrie du diaphragme d'ouverture. Par exemple, $K = 1.22$ pour un diaphragme de forme circulaire et correspond au premier zéro de la première fonction de Bessel. Avec une fente, $K = 1$.

C'est un problème courant par exemple en astronomie où il empêche par exemple de distinguer les étoiles d'un système binaire comme par exemple α-Centauri. Pour palier à ça, on utilise des gros radiotélescopes (Arecibo, ALMA, *etc.*). **C'est pas sourcé :** La diffraction est d'ailleurs la raison pour laquelle on voit les étoiles sur les photos en forme de +, c'est dû à la présence de l'ossature dont la forme est un '+' qui maintient le miroir central du téléscope.

3.2 Filtrage optique

On a vu qu'on obtenait dans le plan de Fourier le spectre spatial de l'objet diffractant. Dans ce plan de Fourier, on associe des fréquences spatiales (f_x, f_y) à chaque point de coordonnées (x, y) de sorte que que $x = \lambda f' f_x$ et $y = \lambda f' f_y$. Le principe du filtrage optique est alors simple : dans le plan de Fourier, en occultant certaines zones, on peut sélectionner des fréquences spatiales de l'objet.

- Si on occulte une zone proche de l'axe optique, on enlève les basses fréquences (filtre passe-haut) : c'est la strioscopie. C'est utile pour augmenter le contraste d'une image et faire ressortir les détails, on peut même faire ressoritr les objets de phase comme une empreinte digitale.
- Si on occulte des zones éloignées de l'axe optique, on ne laisse passer que les basses fréquences (filtrage passe-bas) : c'est le détramage. On peut par exemple enlever les imperfections d'une photographie. C'est ce qu'on fait dans l'expérience d'Abbe (cf ✍ Sextant).

L'image qu'on obtient après filtrage correspond à l'objet fictif dans la transformée de Fourier est la transformée de Fourier de l'objet réel modifiée par le filtrage.

Prenons par exemple un réseau. Si on cache une tache sur deux dans la figure de diffraction au niveau du plan de Fourier (donc dans la TF du réseau), on divise par 2 le pas de la figure de diffraction dans le plan de Fourier et donc on obtient l'image d'un réseau deux fois **plus** serré.

Espacement :	Objet	TF	Plan de Fourier	filtrage	Plan de Fourier filtrée	TF	Image
Sans filtrage	a	$\to$	$1/a$	$\xrightarrow[\text{rien}]{}$	$1/a$	$\to$	a
Avec filtrage	a	$\to$	$1/a$	$\xrightarrow[\text{cache}]{}$	$2/a$	$\to$	$a/2$

On rappelle la TF d'un peigne de Dirac.

$$\widetilde{\text{III}}_a(f) = \frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(f - \frac{k}{a}\right) = \frac{1}{a}\text{III}_{1/a}(f). \tag{35.21}$$

☕

Filtrage optique

✍ Sextant, Duffait, FLTCLD 🕐

On reprend le montrage $4f$: la première lentille fait la TF et la seconde fait la TF inverse !

On peut montrer des plans de Fourier de différentes grilles, filtrer la TF d'une grille pour faire disparaître le grillage dans la même direction que la fente, on peut montrer les détails d'une plume, faire ressortir une empreinte digitale, faire sortir le tigre/chat/Fourier de la cage....

LP 36

Diffraction par des structures périodiques

Commentaires du jury

- 2017 : Il faut traiter de diffraction par des structures périodiques et pas seulement d'interférences à N ondes.
- 2015 : Il est important de bien mettre en évidence les différentes longueurs caractéristiques en jeu.
- 2012, 2013, 2014 : Cette leçon donne souvent l'occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur dans différents domaines ne sont pas toujours maîtrisés.
- 2009, 2010 : La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L'influence du nombre d'éléments diffractants doit être discutée.
- 2008 : Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux.
- 2007 : Le jury souhaite que la diffraction d'ondes autres que les ondes électromagnétiques soit envisagée. C'est pourquoi l'intitulé 2008 précise dans différents domaines de la physique.
- 2005 : On peut admettre que l'expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel est acquise, ainsi que son application au cas d'une ouverture unique, plus particulièrement d'une fente fine.
- 2004 : Il faut veiller au bon équilibre de l'exposé : il est inutile de faire l'étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l'étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.
- 2003 : La leçon ne peut pas se limiter à une étude du réseau plan en optique. Il faut donc pouvoir dégager les idées importantes assez rapidement pour pouvoir passer à l'étude d'autres domaines.
- 2002 : Cette leçon doit être illustrée expérimentalement de manière efficace. Le pouvoir de résolution d'un réseau est toujours présenté, mais la détermination de son expression théorique pose systématiquement des problèmes aux candidats.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Optique Physique*, **Taillet** ⟶ Pour la relation diffraction-TF
- ✍ *Ondes mécanique et diffusion*, **Garing** ⟶ Schéma et application à l'échographie
- ✍ *Cap prépa PSI*, **Renvoizé** ⟶ Pour une approche "classique" des réseaux
- ✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Compléments sur les réseaux
- ✍ *Physique des électrons dans les solides*, **Alloul** ⟶ Partie Physique du solide
- ✍ **Ashcroft** ou **Kittel** ⟶ Si jamais le Alloul ne suffit pas

Prérequis

- ➢ Transformée de Fourier
- ➢ Interférences
- ➢ Huygens-Fresnel et diffraction
- ➢ Réseaux cristallins

Expériences

☕

1 Facteurs de forme et de structure . . . 495
2 Réseaux plans unidimensionnels . . . 496
2.1 Présentation et grandeurs pertinentes . . . 496
2.2 Formule des réseaux . . . 497
2.3 Intensité diffractée . . . 497
3 Application à la spectroscopie . . . 499
3.1 Dispersion . . . 499
3.2 Pouvoir de résolution . . . 499
3.3 Limitation réelles du spectro . . . 501
4 Diffraction par une structure cristalline . . . 501
4.1 Réseau de Bravais et transmission . . . 501
4.2 Condition d'interférence : Réseau réciproque . . . 502
4.3 Formulation de Bragg . . . 502
4.4 Construction d'Ewald et méthode des poudres . . . 503
4.5 Remarques diverses . . . 503

Introduction

On a vu dans la leçon précédente que la diffraction par un objet de transmittance $t(X,Y)$ correspondait à la $\mathcal{TF}$ en 2 dimensions de $t(X,Y)$:

$$A(u,v) = C\iint t(x,y)e^{-i2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $u = \dfrac{x}{\lambda d}$ et $v = \dfrac{y}{\lambda d}$ si on observe la figure de diffraction sur un écran à la distance d de l'objet (on peut également utiliser une lentille, dans ce cas on remplace d par f' la focale de la lentille dans les expressions de u et v). Or la $\mathcal{TF}$ est un outil particulièrement adapté à l'étude de fonctions périodiques. On va donc s'intéresser dans cette leçon à la diffraction par des structures périodiques.
Il suffit de regarder un DVD pour observer les irisations à sa surface qui trahissent la décomposition spectrale de la lumière ambiante par diffraction sur les sillons gravés sur le DVD. Ainsi, la diffraction par des structures périodiques a une première application importante : la **spectroscopie**, qui consiste à étudier le spectre obtenu par diffraction sur une structure parfaitement connue et d'étudier le spectre pour remonter aux propriétés de la lumière incidente et de sa source.
Cependant, on peut raisonner dans l'autre sens : si on connaît parfaitement la lumière incidente et son spectre, alors l'étude de la figure de diffraction permet de remonter aux propriétés de la structure diffractante. Si l'objet étudié est un cristal, on parle de **cristallographie**.

Dans cette leçon, on va donc commencer par le cas simple d'un réseau unidimensionnel pour ensuite parler de spectroscopie et finir sur la cristallographie.

1 Facteurs de forme et de structure

On se place dans les conditions de Fraunhofer, pour une lumière monochromatique, et on s'intéresse au dispositif des trous d'Young. On les a déjà étudié dans la leçon sur les interférences à division du front d'onde mais on peut également le faire du point de vue de la diffraction dans les conditions de Fraunhofer.

On peut décrire les trous d'Young de façon idéale par un objet de transmittance $t_{\text{struct}}(X,Y) = \delta\left(X - fraca2\right)\delta(Y) + \delta\left(X + fraca2\right)\delta(Y)$ en notant X l'axe reliant les trous, Y l'axe vertical et a la distance entre les trous. Le principe de Huygens-Fresnel dans les conditions de Fraunhofer permet alors d'écrire l'amplitude de l'onde diffractée sous la forme

$$A(u,v) \propto \mathcal{TF}[t_{\text{struct}}(X,Y)](u,v) \propto \cos\pi au$$

avec $u = \dfrac{x}{\lambda d}$ et $v = \dfrac{y}{\lambda d}$. L'intensité diffractée vaut alors

$$I(u,v) = I(x,y) \propto \cos^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda d}\right)$$

Sachant que $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$, on peut donc écrire I sous la forme

$$\boxed{I(x,y) = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{d}\right)\right]} \tag{36.1}$$

On retrouve bien la formule des interférences avec $\delta = \dfrac{ax}{d}$. Cependant, on n'a jamais des trous idéaux. En effet, les trous ont toujours un rayon b et auraient donc chacun, en étant centré en (0,0), une transmittance définie comme

$$t_{\text{forme}}(X,Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sqrt{X^2+Y^2} \leq b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La transmission des trous d'Young vaut alors

$$t(X,Y) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sqrt{\left(X \pm \dfrac{a}{2}\right)^2 + Y^2} \leq b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On peut alors l'écrire sous la forme d'un produit de convolution :

$$\boxed{t(X,Y) = \left(t_{\text{struct}} \otimes t_{\text{forme}}\right)(X,Y)} \tag{36.2}$$

où t_{struct} est le **facteur de structure** et t_{forme} est le **facteur de forme**. On dit alors que l'objet forme un réseau d'amplitude. L'amplitude de l'onde diffractée s'écrit donc sous la forme

$$A(u,v) \propto \mathcal{TF}[t_{\text{struct}}]\,\mathcal{TF}[t_{\text{form}}]$$

où le premier terme correspond à des raies d'interfrange $\dfrac{\lambda d}{a}$ et le sond terme correspond à une tache d'Airy. L'intensité diffractée s'écrit donc

$$\boxed{I(u,v) \propto I_{\text{struct}}(u,v) \cdot I_{\text{forme}}(u,v)}$$

I_{struct} rend compte de la structure de l'objet tandis que I_{forme} rend compte de sa forme. pour les trous d'Young,

$$\begin{cases} I_{\text{struct}} \propto \left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{ax}{d}\right)\right] \\ I_{\text{forme}} \propto \text{sinc}^2\left(\dfrac{\pi b x}{\lambda d}\right) \end{cases} \tag{36.3}$$

2 Réseaux plans unidimensionnels

2.1 Présentation et grandeurs pertinentes

Un réseau plan unidimensionnel est un objet diffractant dont la transmittance t (rapport du champ en 0+ sur le champ en 0-) est une fonction périodique. On distingue plusieurs types de réseaux : les réseaux par transmission ou réflexion ainsi que les réseaux de phase et/ou d'amplitude. Ici nous nous intéresserons **aux réseaux d'amplitude par transmission**.

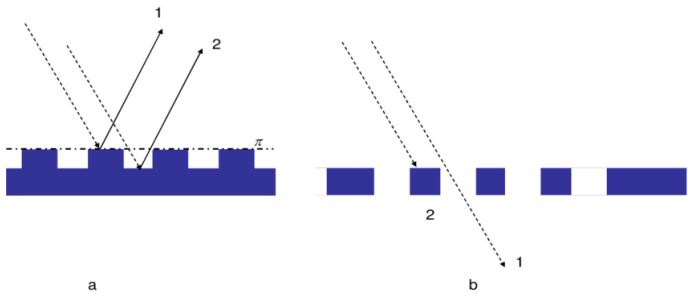
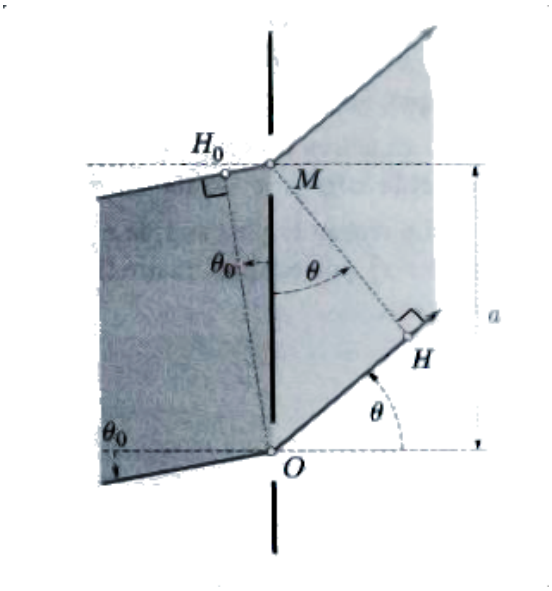


FIGURE 36.1 – **(a)** Réseau en réflexion. **(b)** Réseau par transmission.

Les réseaux sont souvent fabriqués en verre, sur lesquels on a "collé" un métal rayé périodiquement avec une pointe en diamant pour ainsi avoir une alternance de transmission et de réflexion. On peut alors définir plusieurs grandeurs pertinentes :

- la longueur éclairée du réseau $L \simeq 1$ cm
- le nombre de fentes éclairées $N \simeq$ 10-100
- le pas de réseau $a \simeq$ 1-10 μm
- le nombre de traits par mm $n = \dfrac{1}{a} \simeq$ 50-600 traits/mm

2.2 Formule des réseaux



Considérons un faisceau de rayons incidents parallèles faisant un angle θ_0 avec l'horizontale, et on note θ l'angle que fait le faisceau diffracté avec l'horizontale. La différence de marche entre 2 rayons passant par 2 fentes côte à côte :

$$\delta = (OH) - (H_0M) = a(\sin\theta - \sin\theta_0) \tag{36.4}$$

On a donc des interférences constructives si θ satisfait la **condition de Bragg** :

$$\boxed{a(\sin\theta - \sin\theta_0) = p\lambda \qquad \text{avec } p \in \mathbb{Z}} \tag{36.5}$$

Cette condition peut être réécrite sous la forme :

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0) = 2p\pi \qquad \text{avec } p \in \mathbb{Z}} \tag{36.6}$$

Remarque

On peut visualiser cette condition sur Geogebra.

Cette condition impose une **limitation des ordres disponibles**. Par exemple, en incidence normale, $\sin\theta_0 = 0$ et $\sin\theta = p\dfrac{\lambda}{a}$. Or le sinus ne peut avoir que des valeurs entre -1 et 1 donc $|p| < \dfrac{a}{\lambda} < \dfrac{1}{\lambda n}$.

Ordre de grandeur

Pour $\lambda = 500$ nm et $n = 500$ traits/mm, on a $|p| < 4$.

2.3 Intensité diffractée

Intéressons-nous maintenant à l'intensité diffractée par le réseau *unidimensionnel*. D'après le principe de Huygens-Fresnel dans les conditions de Fraunhofer, l'amplitude de l'onde diffractée dans une direction θ pour une onde incidente selon θ_0 vaut :

$$A = K \int t_{\text{réseau}}(X) e^{-i2\pi uX} \mathrm{d}X \qquad \text{avec } u = \frac{1}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_0) \tag{36.7}$$

Pour un réseau unidimensionnel de pas a, la transmittance vaut

$$t_{\text{réseau}}(X) = \sum_{m=0}^{N-1} t_{\text{fente}}(X - ma) = t_{\text{fente}}(X) \otimes \sum_{m=0}^{N-1} \delta(X - ma)$$

donc

$$\begin{aligned} A &= K \int t_{\text{fente}}(X) \otimes \sum_{m=0}^{N-1} \delta(X - ma) e^{-i2\pi uX} \mathrm{d}X \\ &= K \left(\sum_{m=0}^{N-1} \int \delta(X - ma) e^{-i2\pi uX} \mathrm{d}X \right) \times \left(\int t_{\text{fente}}(X) e^{-i2\pi uX} \mathrm{d}X \right) \\ &= K \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{i2\pi uma} \right) \times \mathcal{TF}[t(X)](u) \end{aligned} \tag{36.8}$$

Pour calculer l'intensité diffractée, il faut prendre le module au carré de A. Pour le terme de structure, on reconnaît une somme géométrique et on obtient

$$\boxed{I(u) = I_0 \left| [\mathcal{TF}[t_{\text{fente}}(X)](u)] \right|^2 \times \left(\frac{\sin(N\pi ua)}{\sin \pi ua} \right)^2} = \text{facteur de forme} \times \text{facteur de structure} \tag{36.9}$$

Pour une fente de largeur b, on sait que $\left| [\mathcal{TF}[t_{\text{fente}}(X)](u)] \right|^2 = \text{sinc}^2(\pi bu)$.

Correspondance paramètres du réseau ↔ figure de diffraction :

Largeur b de la fente	↔	Taille $\propto \frac{1}{b}$
Distance a entre 2 fentes	↔	Distance $\propto \frac{1}{a}$ entre 2 pics
Taille Na du réseau	↔	Largeur $\propto \frac{1}{Na}$ d'un pic

On peut soit illustrer ça sur Géogébra ou bien s'amuser à faire la manip.

Remarque

On peut aussi faire le raisonnement avec les interférences à N ondes comme vu dans la leçon sur les interférences. Pour rappel, cette méthode consiste à exprimer l'onde diffractée par la fente $n+1$ en fonction de l'onde diffractée par la fente n via la différence de marche $\delta = a(\sin\theta - \sin\theta_0)$. On peut alors exprimer l'onde diffractée par la fente n en fonction de celle diffractée par la première fente pour obtenir une somme géométrique et *in fine* la formule pour l'intensité de structure.

On note $S(u) = \left(\frac{\sin(N\pi ua)}{\sin \pi ua} \right)^2$ le facteur de structure dans l'intensité. Alors en incidence normale :

- $S(u) = S(\theta)$ est maximal pour $\sin\theta = \frac{\lambda p}{a}$
- $S(\theta) = 0$ pour pour $\sin\theta = \frac{\lambda p}{Na}$
- $S(\theta = 0) = N^2$

On peut de nouveau voir ça sur Géogébra.

☕

Diffraction de la lumière d'une lampe Hg par un réseau de traits

✍ ⏲

Faire l'image d'une fente (assez fine mais pas trop pour avoir de la lumière) sur le mur ou sur un écran par une lentille convergente de focale adaptée : pas besoin d'une image de 3 m de haut, mais pas de 2 cm non plus. Placer un filtre interférentiel sur le faisceau de la lampe à Hg afin de ne sélectionner qu'une seule raie. Nous avons choisi la raie verte car c'est ce que nous préférions mais vous pouvez choisir le doublet jaune ou la raie bleu (mais moins

lumineuse).

Montrer la diffraction (en monochromatique grâce au filtre) et montrer les ordres 0, +1, -1 etc...

Enlever le filtre et montrer que le phénomène est dispersif : les raies de la lampe à vapeur de mercure ne sont pas diffractées avec le même angle. Si vous voulez voir les deux raies de Hg dans l'UV, placer une feuille blanche sur l'écran/mur.

Noter que le rouge est plus dispersé que le bleu, c'est le contraire du prisme.

3 Application à la spectroscopie

Grâce à la condition de Bragg, nous avons vu que l'angle de diffraction dépendait de la longueur d'onde utilisée. Ainsi, en connaissant par ailleurs toutes les caractéristiques du réseau diffractant, nous pouvons déterminer les λ présents dans un rayonnement en étudiant la figure de diffraction. C'est le principe d'un spectromètre à réseau ! On en profite aussi pour montrer un magnifique goniomètre et/ou l'intérieur d'un vrai spectro !

3.1 Dispersion

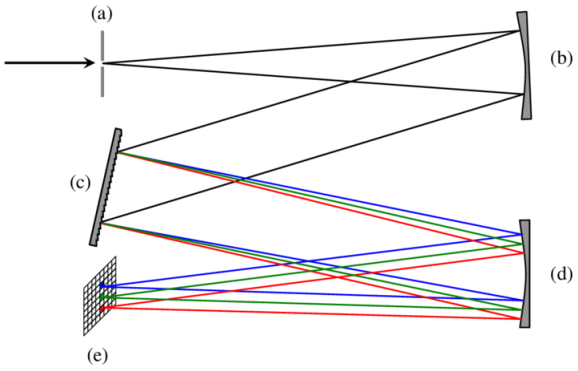


FIGURE 36.2 – Principe d'un spectromètre à réseau à réflexions

Pour un réseau éclairé en incidence normale, on a $\sin\theta_p = \frac{p\lambda}{a}$ et pour les premiers pics on a directement $\theta_p = \frac{p\lambda}{a}$. On a donc une relation **linéaire** entre l'angle de déviation et λ. On rappelle que pour le prisme c'est loin d'être le cas puisque $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (loi de Cauchy).
De plus, contrairement au prisme, le réseau possède plusieurs ordres et dévie plus le rouge que le bleu.
Pour quantifier la dispersion d'un réseau on définit le **pouvoir de dispersion :** $D = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}$. Pour un réseau on a $D = \frac{p}{a\cos\theta_p}$ pour un ordre p donné. Pour des angles faibles on a $D = \frac{p}{d} = cst$. La déviation est alors porportionelle à la longueur d'onde, ce qui est bien pour faire les mesures. On parle de **spectre normal**. D augmente avec p et diminue avec a.

3.2 Pouvoir de résolution

On suppose ici une fente source infiniment fine, ainsi seule la seule limite de diffraction est due à la diffraction. Le critère de Rayleigh stipule que l'on ne peut séparer deux tâches de diffractions (ici de signaux qui n'interfèrent pas) que si le maximum de l'un correspond, au plus proche, au minimum de l'autre.

Le **pouvoir de résolution** $PR = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda}$ correspond au plus petit écart de longueur d'onde mesurable par le spectromètre (normalisé of course).

Si on fait quelques calculs, on a, avec N le nombre de traits et L la longueur, et n la densité de trait :

Le maximum du pic principal d'ordre p est observé pour $\sin\theta'_p = \sin\theta + p\dfrac{\lambda}{a}$. La première annulation de l'amplitude correspond à $\sin\left(\theta'_p + \epsilon\right) = \sin\theta'_p \simeq \dfrac{\lambda}{aN}$. L'écart, en variable $\sin\theta' p$ entre le max et le premier min vaut donc en valeur absolue $\delta_1\left(\sin\theta'_p\right) = \dfrac{\lambda}{aN}$. La relation de Bragg donne par ailleurs

$$\sin\theta'_p(\lambda) = \sin\theta + p\frac{\lambda}{a} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta'_p(\lambda+\Delta\lambda) = \sin\theta + p\frac{\lambda+\Delta\lambda}{a}$$

Pour un ordre p l'écart en variable $\sin\theta'_p$ entre les max de λ et $\lambda+\Delta\lambda$ vaut donc $\delta_2\left(\sin\theta'_p\right) = p\dfrac{\Delta\lambda}{a}$. En comptant tout positif, les raies de λ et $\lambda+\Delta\lambda$ sont séparées si

$$\delta_2\left(\sin\theta'_p\right) > \delta_2\sin\left(\theta'_p\right) \Longleftrightarrow p\frac{\Delta\lambda}{a} > \frac{\lambda}{aN} \Longleftrightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda} > \frac{1}{pN} = \frac{\Delta\lambda_{min}}{\lambda}$$

On aboutit finalement à l'expression du pouvoir de résolution :

$$\boxed{PR = pN = pLn} \tag{36.10}$$

☕

Animation géogébra

✍ ⏲

La taille d'un pic est $\dfrac{2\lambda}{Na}$, donc la largeur à mi hauteur peut être prise à $\dfrac{\lambda}{Na}$. La distance entre les maximas à λ et à $\lambda+\Delta\lambda$ est de $\dfrac{m}{a}\Delta\lambda$ à l'ordre m, et le critère de Rayleigh donne

$$\frac{m}{a}\Delta\lambda > \frac{\lambda}{Na} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} < mN \tag{36.11}$$

On définit alors le pouvoir de résolution comme $PR = nM$.

OdG : Pour l'ordre $p = 1$, $L = 20cm$, $n = 500$ traits/cm, on a $N = 10^4$ et RP=10^4, soit 0.06 nm pour une longueur d'onde de 600. On est large pour le double du Sodium.

☕

Doublet du sodium au spectro/au Gognio

✍ Sextant ⏲

Montrer que le doublet est résolu.

Cependant, avec une résolution aussi bonne, on se doute bien que cette résolution n'est que théorique. En effet, ce calcul est mené pour une fente infiniment fine donc ne laissant passer aucune lumière. Un système réel possède des fente de largeur finie et le pouvoir de résolution diminue. Le pouvoir de résolution réel reste tout de même supérieur à celui d'un prisme.

3.3 Limitation réelles du spectro

- En pratique, si on monte trop haut dans les ordres d'interférences, on peut observer un **recouvrement des spectres**. Cela arrive lorsque $\theta_{p+1}^{\text{bleu}} < \theta_p^{\text{rouge}}$. En pratique on le voit entre l'ordre 2 et 3 ou 3 et 4
- Comme on le voit sur Géogébra avec { diffractions + interférences }, la majorité de la luminosité est contenue dans l'ordre 0 qui, par définition, ne présente pas de décomposition du spectre.. On manque de luminosité dans les modes d'intérêt (p non nul). Pour pallier à ça on utilise des réseaux en réflexion **blazés**, qui sont une suite de "marches" dont l'angle définit l'angle de luminosité maximale. Un autre intérêt, c'est que comme on apu le voir le pouvoir de résolution est meilleur pour les grands ordres... On peut donc diriger toute la lumière dans un ordre supérieur pour faciliter la mesure.

En effet, pour un réseau de fentes de largeur b et de pas a, Le facteur de forme intervenant dans l'intensité vaut $\text{sinc}^2(\pi b u)$. Cependant, le sinus cardinal est une fonction qui décroît rapidement dont le premier zéro est en $u = \frac{1}{b}$ (donc $x = \frac{\lambda f'}{b}$). Avec le facteur de structure, on a ainsi des pics en $x_p = pf'\frac{\lambda}{a}$ donc la hauteur suit la courbe du sinus cardinal. Le pic le plus intense est donc en $x = 0$, *i.e.* l'intensité est concentrée en $x = 0$ qui n'est pas vraiment un zone intéressante.
On veut donc décaler le sinus cardinal pour que l'intensité soit concentrée sur les pics qui nous intéressent, c'est-à-dire on veut un facteur de forme pour l'amplitude de l'onde diffractée de la forme $\text{sinc}(\pi b(u - u_0))$. Ce retard dans l'espace de Fourier se traduit par une modulation dans le domaine spatial : il faut donc

$$t_{\text{forme}}(X) = t_{\text{fente}}(X)e^{iXu_0}$$

Concrètement, ça se traduit par la réalisation d'un déphasage $\propto X$: c'est un réseau **blazé**, donc le motif ressemble à une lame de cutter avec une hauteur de la forme $h(X) = h_0 + X\tan(\alpha)$ où α et h_0 sont des des constantes. On a alors $u_0 = \frac{2\pi\Delta n \tan\alpha}{\lambda}$.

4 Diffraction par une structure cristalline

Diffraction des électrons sur le graphite

✍ MP26

On sort la démonstration au graphène, et on montre ce qu'il se passe. On ferra les mesures à la fin de la leçon.

4.1 Réseau de Bravais et transmission

La structure en 3D d'un cristal est décrite par :

- **Un motif :** une maille élémentaire, ce qui va se répéter dans l'espace (plusieurs choix, maille conventionnelle, de Wigner-Seitz, etc.). On la décrit par des vecteurs $\vec{\delta_i}$ par rapport à un noeud du réseau
- **Un réseau :** comment se répète le motif, c'est l'expression de la périodicité, qui relie les noeuds du réseau. On le décrit par les vecteurs de base et alors

$$\overrightarrow{R_{n_1,n_2,n_3}} = \vec{R_i} = n_1\vec{a_1} + n_2\vec{a_2} + n_3\vec{a_3} \qquad n_j \in \mathbb{Z}$$

On nomme les $\vec{a_j}$ les veteurs primitifs du réseau. Il n'existe que 14 types de réseaux de Bravais à 3D, 5 à 2D.

Pour reconstituer un cristal, on place une origine, on forme ensuite les noeuds du réseau par translation de vecteur $\vec{R_i}$ puis on place le motif $\vec{\delta_j}$ sur tous les noeuds. On peut finalement écrire les positions de notre cristal.

On peut écrire, si on nomme t_{motif} la transmission d'un motif :

$$t = t_{\text{motif}} \otimes \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{R_i})$$

4.2 Condition d'interférence : Réseau réciproque

On cherche une conditions d'interférences constructives. Pour ce faire, on calcule la distribution de lumière. On a naturellement par transformée de fourier, avec $\vec{\Delta k} = \vec{k} - \vec{k'}$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de l'onde incidente et $\vec{k'}$ celui de l'onde diffractée :

$$A = A_0 \, \mathcal{TF}(t_{motif}) \sum_i e^{-i\vec{\Delta k}\cdot\vec{R_i}} \tag{36.12}$$

On a donc interférence constructive dans la direction portée par $\vec{\Delta k}$ si et seulement si

$$\exists p \in \mathbb{Z} / \vec{\Delta k} \cdot \vec{R_i} = 2p\pi \tag{36.13}$$

On défini alors le réseau réciproque $\mathcal{G}$ comme l'ensemble des vecteurs $\vec{G}$ tels que

$$\forall \vec{G} \in \mathcal{G}, \exists p \in \mathbb{Z} / \vec{G} \cdot \vec{R} = 2p\pi \tag{36.14}$$

La condition d'interférence est donc $\vec{\Delta k} \in \mathcal{G}$.

La stucture de $\mathcal{G}$ est aussi celle d'un réseau cristallin

En effet on peut aussi lui trouver des vecteurs de base grâce à l'habile formule suivante :

$$\vec{b_i} = 2\pi \frac{\vec{a_j} \wedge \vec{a_k}}{\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \wedge \vec{a_3})} \qquad \text{et } \forall \vec{G} \in \mathcal{G}, \exists (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3 / \vec{G} = m_1\vec{b_1} + m_2\vec{b_2} + m_3\vec{b_3} \tag{36.15}$$

On a parlé des conditions de diffraction, mais pour cela il faut en premier lieu qu'il y ait diffraction, or la distance interatomique est de l'ordre de 1 Å *donc il faut des rayons X (ou des électrons) pour pouvoir diffracter.*

4.3 Formulation de Bragg

Bragg (PN 1915) suppose en 1913 que la lumière incidente se réfléchit sur les plans réticulaires. La différence de marche entre deux faisceaux issus de réflexions sur des plans successifs (on a ici un réseau par réflexion mais on continuera à noter a la distance entre deux plans) s'écrit, dans le cadre d'interférences constructives

$$\delta = 2a \sin\theta \tag{36.16}$$

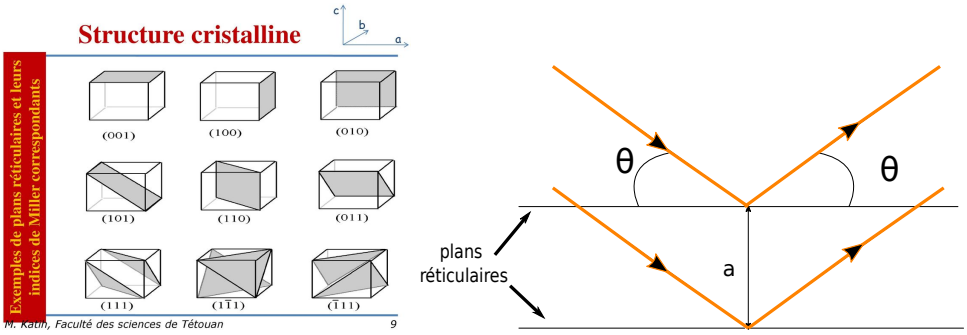


FIGURE 36.3 – On considère le cristal comme une succession de plans réticulaires séparés de a, c'est à dire un réseau en réflexion.

4.4 Construction d'Ewald et méthode des poudres

Nous, ce que l'on veut faire, c'est remonter à la structure d'un cristal à partir de sa figure de diffraction. C'est utile car cela permet de mieux comprendre ses propriétés physicochimiques.

Le sens forme théorique du réseau -> construction du réseau réciproque peut se faire, par exemple, avec la méthode de la sphère d'Ewald :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Sphère_d'Ewald

Le sens inverse se fait généralement par la méthode de la poudre : on concasse en poudre le solide à étudier, de façon à ce que l'orientation des grains soit parfaitement aléatoire. On envoie alors un rayon incident selon la direction $\overrightarrow{k}$, créant ainsi une symétrie cylindrique. La figure de diffraction est alors naturellement un ensemble de cercles, comme dans l'expérience introductive du graphène.

On détermine le réseau réciproque par énumération des réseaux de bravais, et on en déduit le réseau réel.

Banc hyperfréquences et diffraction sur un réseau

✍ 🕒

Montrer la forme de la diffraction des ondes centimétriques sur un réseau de démonstration, comme par exemple les modèles moléculaires de CFC de la collection.

4.5 Remarques diverses

Couleur et interférences :

les opales doivent leur couleur à la diffraction sur le réseau qu'elles contiennent. Il en va de même pour certains papillons.

Prix nobels :

Von Laue et Bragg en 1914 et 1915, Röntgen en 1901 pour les rayons X.

exemple sur la CFC :

CuZn, $\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{a}(h\overrightarrow{x} + k\overrightarrow{y} + l\overrightarrow{z})$.

$$A(\overrightarrow{k} = f_{\mathrm{Cu}} + (-1)^{h+k+l} f_{\mathrm{Zn}} \qquad \text{Dans le cas ordonné}$$

On fait intervenir une permutation et une probabilité x si on est désordonné.

LP 37

Absorption et émission de la lumière

Niveau : L2

Commentaires du jury

- **2017 :** Cette leçon ne peut se résumer à une présentation des relations d'Einstein.
- **2015 :** Cette leçon peut être traitée de façons très variées, mais il est bon que les candidats aient réfléchi aux propriétés des diverses formes de rayonnements émis, aux dispositifs exploitant ces propriétés et au cadre théorique permettant de les comprendre.
- **2010 :** Le laser n'est pas la seule application de cette leçon. Le Laser He-Ne n'est pas l'illustration la plus simple. Il est maladroit d'introduire les coefficients d'Einstein dans une situation de rayonnement parfaitement monochromatique.

Bibliographie

✍ *Physique statistique*, **Diu**
✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz**
✍ *Optique quantique*, **Fox**
✍ *Optique*, **Houard**
✍ *Lasers*, **Dangoisse**, et **Cagnac**

⟶ Discussion des coefficients d'Einstein
⟶ Base de la leçon
⟶ Compléments
⟶ Culture G et ODG sur les lasers
⟶

Prérequis

➢ Distribution de Maxwell-Boltzmann

➢ Corps noir, loi de Planck, notion de photon

Expériences

☕

1 Interaction lumière-matière . . . 506
1.1 De l'importance de la quantification . . . 506
1.2 Les différents processus d'interaction - Coefficients d'Einstein . . . 506
1.3 Lien entre les coefficients d'Einstein . . . 508
1.4 Comparaison entre les types d'émission . . . 510
2 Émission stimulée : le LASER . . . 510
2.1 Principe . . . 510
2.2 Système à deux niveaux - Nécessité de l'inversion de population . . . 511
2.3 Laser à 3 niveaux . . . 512
2.4 Rôle de la cavité . . . 513
2.5 Propriétés de la cavité . . . 514
2.6 Application : refroidissement d'atomes . . . 515
3 Absorption : la fluorescence . . . 515

Introduction

Le champ électromagnétique, que l'on étudie beaucoup du point de vue de la propagation dans le vide, se propage aussi dans la matière, dans laquelle il interagit. L'interaction lumière-matière est donc ce qui va nous intéresser au cours de cette leçon.

Au cours de diverses séance de TP, on a toustes utilisé des sources lumineuses en tous genres, incandescentes, ou luminescentes comme le laser (ou la diode ?). c'est ce deuxième type qui va nous intéresser aujourd'hui, l'autre étant traité dans les ✍ LP17-38-39.

Problématique : Comment comprendre et prendre en compte la nature discrète du rayonnement émis par ces sources ? Quels sont les processus mis en jeu ? Qu'est-ce qu'un LASER ?

1 Interaction lumière-matière

1.1 De l'importance de la quantification

Reprenons le calcul de Rayleigh et Jeans, de la fin du 19eme. En considérant le nombre de modes dans l'espace des phases contenu dans la boite cubique de volume V à CL périodiques, on trouve :

$$N(k, \mathrm{d}k) = \frac{V}{(2\pi)^3} 8\pi k^2 \mathrm{d}k \qquad N(\omega, \mathrm{d}\omega) = \frac{V}{\pi^2} \frac{\omega^2}{C^3} \mathrm{d}\omega \tag{37.1}$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie donne ensuite

$$u(\omega) = \frac{\mathrm{d}E_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \mathrm{k_B} T \omega^2 \tag{37.2}$$

Pour une démonstration de cette loi, se référer à wikipédia :
https://fr.wikibooks.org/wiki/Physique_atomique/Loi_de_Planck

Historiquement c'est un résultat très important, un monument de la physique, à l'origine de la catastrophe ultra-violette, elle même résolue à contre-coeur par Planck, *c.f.* la LP38 :

$$\mathrm{u}_\nu(\nu, \mathrm{T}) = 8\pi \frac{\nu^2}{\mathrm{c}^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\dfrac{\mathrm{h}\nu}{\mathrm{k_B T_0}}\right) - 1} \cdot \mathrm{h}\nu \tag{37.3}$$

Au départ le remplacement de l'équipartition par une statistique était phénoménologique, c'est aujourd'hui une application de la statistique de Bose-Einstein. Un DL redonne Rayleigh-Jeans.

1.2 Les différents processus d'interaction - Coefficients d'Einstein

Afin de décrire l'interaction entre le rayonnement et la matière, nous allons étudier l'approche d'Einstein.

Il y a trois processus fondamentaux à distinguer et combiner ensuite pour comprendre. On se place dans cette partie dans le cadre d'un atome avec deux niveau d'énergie $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, mais ce qui sera détaillé s'applique lorsqu'il y en a plus.

Émission spontanée

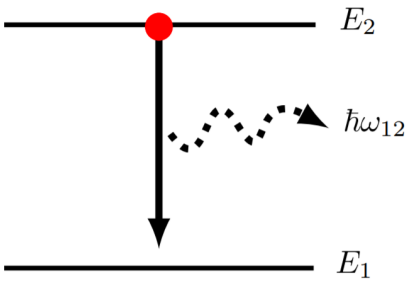


FIGURE 37.1 – Schéma de fonctionnement de l'émission spontanée

Lorsqu'un atome est excité, il va naturellement pouvoir se désexciter en émétant un photon. L'énergie du photon sera $\varepsilon = h\nu = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, et sa pulsation sera donc $\omega_{12} = \dfrac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\hbar}$.

Ce processus est aléatoire, c'est à dire que l'état excité a une demi-vie, et que le photon émis est de phase quelconque. Il n'y a pas de cohérence entre les photons émis.

Il s'agit là du mode de fonctionnement des lampes spectrales, et de la plupart des sources usuelles. Si on ne considère que ce processus, on nomme N_2 la population du niveau d'énergie 2, et on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -A_{12}N_2 \tag{37.4}$$

A_{12} est le taux de désexcitation dû à l'émission spontanée. Seul, il peut définir un temps caractéristique et une évolution exponentielle, $\tau = \dfrac{1}{A_{12}}$. Ce temps est nommé **durée de vie radiative**.

OdG :

atome	A_{12}	τ
CO_2	$3 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$	3 s
He-Ne	$8.00 \times 10^{2}\,\mathrm{s}^{-1}$	1 ms
Nd^{3+}	$1.4 \times 10^{6}\,\mathrm{s}^{-1}$	7×10^{-1} µs

Absorption

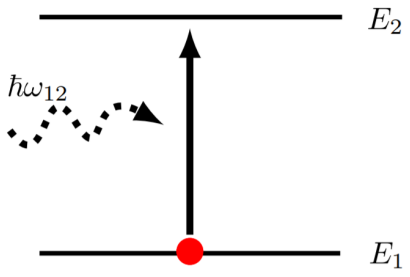


FIGURE 37.2 – Schéma de fonctionnement de l'absorption.

Il s'agit du phénomène inverse. Lorsqu'un photon cogne sur un atome, il peut, à condition d'avoir une énergie adaptée, exciter l'atome dans son état $\mathcal{E}_2$. Ce n'est pas un processus spontané, puisqu'il nécessite d'être pompé. On écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = +B_{12}^{\omega} N_1 u(\omega) \tag{37.5}$$

On nomme B_{12}^{ω} le coefficient d'Einstein associé à la transition $1 \to 2$, $u(\omega)$ est la densité spectrale d'énergie en ω, c'est une énergie volumique, et N_1 est la population de l'état 1.

Section efficace d'absorption

Il est utile de préciser qu'on peut réécrire cette relation sous une autre forme (ce n'est jamais fait en leçon, mais dans l'optique de présenter le LASER, cela semble très utile ! ✍ Dangoisse, p. 5). Si on note $J = J(\omega_{12})$ le flux de photon (en $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$) à la pulsation ω_{12}, on peut le lier simplement à la densité spectrale par une relation de proportionnalité (logique) :

$$B_{12} u = \sigma_{12} J \tag{37.6}$$

σ_{12} a alors la dimension d'une surface, on l'appelle section efficace d'absorption, sa valeur est propre au milieu. ✍ De-La-Salle.

Émission stimulée

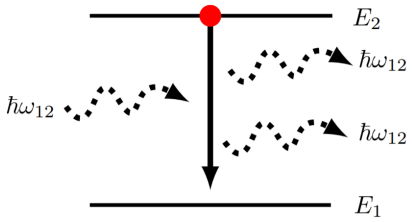


FIGURE 37.3 – Schéma de fonctionnement de l'émission stimulée

Il s'agit là du phénomène fondamental du fonctionnement des LASER. Ce phénomène, introduit par Einstein par analogie avec l'absorption, correspond à ce qu'il se passe lorsqu'un photon capable d'exciter un atome collisionne avec un atome déjà excité. On a alors

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -B_{21}^{\omega} N_2 u(\omega) \tag{37.7}$$

Ce phénomène est remarquable de part les propriétés du photon émis, qui est **strictement identique** au photon qui la déclenche. Et quand je dis strictement identique, je veux dire que les deux photons vont ensuite se balader ensemble, cohérents, transportant deux fois plus d'énergie, dans la même polarisation, et continuer leur chemin en collisionnant d'autres atomes !

Cela permet d'augmenter l'énergie du champ en prenant l'énergie du milieu.

1.3 Lien entre les coefficients d'Einstein

L'objectif est de relier les coefficients d'Einstein entre eux. On considère que l'on est en présence d'un gaz de N atomes à l'intérieur d'une boîte non réfléchissante à la température T (la boîte qui contient le champ électromagnétique et les atomes forme donc un système fermé isolé). On considère que les atomes n'interagissent pas entre eux, mais ils peuvent interagir avec le rayonnement qui remplit la cavité et qui suit une distribution de type corps noir. Les 3 types de transition indiqués précédemment interviennent.

Si on attend suffisamment longtemps pour que l'équilibre thermique soit atteint par les atomes en contact avec le rayonnement de type corps noir, on se trouve dans un état stationnaire, ce qui permet d'annuler la dérivée temporelle

de N 2 (et de même pour N 1 par conservation du nombre d'atomes). Ceci revient à dire que le taux d'absorption qui amène dans l'état 2 doit être exactement compensé par les taux de retour vers l'état 1 (émission spontanée et stimulée). Autrement dit mathématiquement :

$$B_{12}N_1u = B_{21}N_2u + A_{12}N_2 \tag{37.8}$$

On peut alors isoler u :

$$u = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}}\frac{N_1}{N_2} - 1} \tag{37.9}$$

À l'équilibre thermique on suit la loi de Boltzmann, par conséquent, si on nomme g_i la dégénérescence d'un niveau, que l'on prendra plus tard de 1 :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{k_B T}\right) \tag{37.10}$$

Par hypothèse de non dégénérescence, et en comparant à la loi de Planck, on peut écrire :

$$u = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{\frac{B_{12}}{B_{21}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{k_B T}\right) - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \tag{37.11}$$

Ainsi on a les relations fondamentales qui lient les coefficients d'Einstein :

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1 \qquad \text{et} \qquad A_{21} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} B_{21} \qquad \forall T, \text{ et pour } \omega = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{\hbar} \tag{37.12}$$

Il suffit de connaître un seul coefficient et la fréquence pour connaître toutes les caractéristiques du système. Nous voyons bien que l'existence de l'émission stimulée est cruciale pour rendre compatible la distribution de Maxwell-Boltzmann et celle de Planck.

Astuce

En fait ce n'est pas naturel du tout de penser ça... En effet, un atome n'a jamais que deux états d'énergies possibles. Il faudrait prendre en compte tout les types de transitions possibles dans tous les sens et ce serait le bordel ! Heureusement, il y a un résultat magique : quand on applique un bilan détaillé au système atomes+photons, il y a autant d'atomes qui émettent de d'un niveau 2 vers un autre niveau 1 que d'atome qui passent de 1 à 2 par absorption... En gros pour chaque couple de niveaux, le peuplement de l'un correspond au dépeuplement de l'autre !

Dans notre cas où les niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés, on obtient donc que les probabilités des processus stimulés (absorption et émission) sont identiques. On voit également que les transitions ayant une plus forte probabilité d'absorption ont comparativement aussi une plus grande probabilité d'émission, que ce soit spontanée ou stimulée.

Le calcul explicite de ces coefficients se fait par une quantification du champ électromagnétique en utilisant la règle d'or de Fermi [1]. Ceci a pour conséquence directe que les coefficients d'Einstein ne dépendent que des états initial et final et il s'agit donc de **propriétés intrinsèques** des atomes. Les relations précédentes restent donc valables même hors équilibre, bien que nous les ayons établies ici à l'équilibre.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_d'or_de_Fermi

1.4 Comparaison entre les types d'émission

✍ Dunod p. 1072

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_{21}^{\text{stimul}}}{\mathrm{d}N_{21}^{\text{spont}}} = R &= \frac{B_{21}N_2 u}{A_{21}N_2} \\ &= \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_{12}^3} \\ &= \frac{\lambda^3}{8\pi\hbar}u(\omega)\end{aligned} \tag{37.13}$$

Par exemple, pour le cas du laser, l'émission spontanée est une gêne et nous voulons une prédominance d'émission stimulée pour l'amplification du faisceau (que nous verrons dans la prochaine partie).

On voit que la longueur d'onde va avoir une grande influence, ce qui explique que le MASER (microondes) ait été réalisé bien plus tôt que le laser.

2 Émission stimulée : le LASER

→ animation Java (qui est god-tier)

2.1 Principe

Les bases théoriques du laser (et du maser) ont été établies par Einstein en 1917 dans *Zur Quantentheorie der Strahlung* (On the Quantum Theory of Radiation), et de nombreux physiciens ont ensuite étayé le théorie du laser comme par exemple Alfred Kastler qui proposa la méthode du pompage optique en 1950 (il a d'ailleurs reçu le prix Nobel de 1966 pour ses travaux). Cependant, il a fallu attendre le 16 mai 1960 pour que Theodore H. Maiman développe le premier laser fonctionnel.

Le mot laser est en réalité un acronyme pour *light amplification by stimulated emission radiation*. Ainsi, le laser se base sur la principe de l'émission stimulée qui, contrairement à l'émission spontanée (qui émet des photons dans des directions aléatoires), permet d'émettre des photons cohérents entre eux et de même direction que le rayonnement incident. Le faisceau issu d'un laser est ainsi un faisceau de photons cohérents allant dans la même direction.
Un laser est composé d'une cavité délimitée par deux miroirs, l'un étant totalement réfléchissant tandis que l'autre ne l'est que partiellement (99% réfléchissant). La cavité contient un gaz d'atomes à plusieurs niveaux d'énergie auquel on envoie de l'énergie (via pompage optique) afin d'exciter les atomes et de provoquer une émission de photons. Ces photons vont alors désexciter d'autres atomes par émission stimulée. Les photons émis vont à leur tour désexciter d'autres atomes et ainsi de suite. On obtient donc un phénomène d'avalanche dans lequel un très grand nombre de photons cohérents et en phase sont émis.
Cependant, la cavité ne joue pas uniquement le rôle de milieu amplificateur, elle sert également de filtre. En effet, les photons vont beaucoup d'aller-retours dans la cavité et il faut donc que la longueur de la cavité soit accordée à la fréquence d'émission pour pouvoir l'amplifier. Les fréquences parasites ne sont ainsi pas amplifiées et en sortie on aura une largeur spectrale très faible, voire plus faible que la largeur spectrale naturelle. *In fine,* on peut modéliser un laser par un système bouclé où la chaîne directe est l'amplification par pompage optique et la boucle de retour est le filtrage par la longueur de la cavité, qui se comporte comme un interféromètre de Fabry-Pérot.

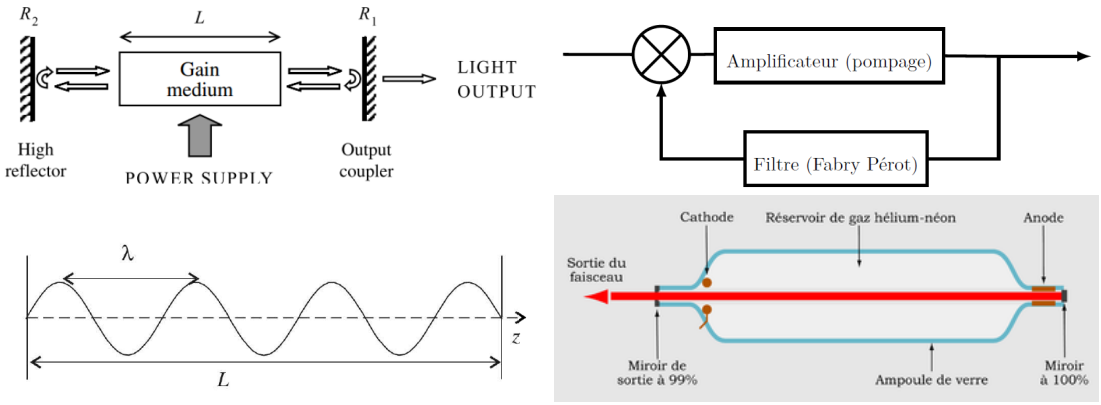


FIGURE 37.4 – En haut à gauche : schéma d'un laser. En haut à droite : modélisation d'un laser sous forme de système bouclé. En bas à gauche : condition de résonance dans la cavité ($L = p\frac{\lambda}{2}$ avec $p \in \mathbb{N}$). En bas à droite : exemple du laser Hélium-Néon.

Parmi les caractéristiques d'un laser, on cite :

- une grande longueur de cohérence qui s'explique par la cohérence des photons issus de l'émission stimulée. Par exemple, $l_c \simeq 30$ cm pour un laser He-Ne alors que pour la lumière du Soleil, $l_c \simeq 0.6$ μm.
- une très grande résolution en λ. Par exemple, le spectre d'un laser He-Ne est composé d'un pic autour de 632.8 nm ayant une largeur de 2 pm.
- un très faible angle d'ouverture qui s'explique par le fait que les photons issus de l'émission stimulée sont émis dans la même direction que les photons incidents. Pour un laser en général, $\theta_0 \simeq 0.02°$.
- sa classe, attribuée en fonction de sa puissance :

Classe	Puissance
Classe 1	jusqu'à 0,39 mW
Classe 2	de 0,39 mW à 1 mW
Classe 3R	de 1 à 5 mW
Classe 3B	de 5 à 500 mW
Classe 4	au-delà de 500 mW

Par exemple, un laser He-Ne a une puissance entre 1 et 100 mW, il peut donc être classée de la classe 2 jusqu'à la classe 3B. Les pointeurs laser de présentation sont pour leur part plutôt des lasers de classe 1 à Diode.

2.2 Système à deux niveaux - Nécessité de l'inversion de population

✍ Dangoisse p7

Prenons le cas d'un laser pour lequel les atomes dans la cavité n'ont que 2 niveaux d'énergie $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$ et de population respective N_1 et N_2. On note σ la section efficace d'un atome et Φ le flux de photon arrivant sur les atomes. On note ν leur fréquence et on suppose qu'elle vérifie $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = h\nu$. La statistique de Maxwell-Boltzmann nous dit que

$$\frac{N_1}{N_2} = \exp\left(\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{k_b T}\right)$$

Le système est donc stable lorsque $N_1 > N_2$.

Dans un premier temps, on ne prend en compte que l'absorption et l'émission stimulée (l'émission spontanée n'étant pas prise en compte car elle ne contribue pas à l'effet laser de par son côté aléatoire). On suppose les deux niveaux non dégénérés afin que le coefficient d'Einstein d'absorption B_{12} soit égal au coefficient d'Einstein d'émission stimulée B_{21}. On introduit le flux J de photons exprimé en $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$ ainsi que la section efficace σ de l'atome, de sorte que $\sigma J = Bu(\nu)$.

On peut voir σJ comme la probabilité (en s^{-1}) qu'une absorption ou une émission stimulée ait lieu pendant dt, si bien qu'on peut écrire que le flux de photons absorbés pendant dt vaut $dJ_{abs} = \sigma J N_1 c dt$ (les photons doivent être à une distance de l'atome inférieure à cdt pour être absorbés), et on a de façon analogue pour l'émission stimulée $dJ_{stim} = \sigma J N_2 c dt$. On obtient donc les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{N}_2 = B_{12}u(\nu)N_1 - B_{21}u(\nu)N_2 = Bu(\nu)(N_1 - N_2) = \sigma J(N_1 - N_2) \\ \dot{J} = \dot{J}_{stim} - \dot{J}_{abs} = c\sigma J(N_2 - N_1) \end{cases} \tag{37.14}$$

Dans un laser, on cherche à amplifier le flux entrant de photons grâce à l'émission stimulée *i.e.* on veut $\dot{J} > 0$ donc on veut $\boxed{N_2 > N_1}$. Il faut donc plus d'atomes dans l'état excité 2 que dans l'état désexcité 1. On peut comprendre physiquement cette condition en se disant qu'il faut plus d'atomes prêts à émettre des photons que d'atomes prêts à en absorber : c'est ce qu'on appelle une **inversion de population** puisque la situation stable correspond à celle où $N_1 > N_2$.
Or comme l'état initial du laser correspond à l'état stable pour lequel $N_1 > N_2$, on a donc $\dot{N}_2 > 0$ Le niveau 2 se peuple alors progressivement jusqu'à atteindre $N_2 = N_1$. Une fois cette limite atteinte, $\dot{N}_2 = 0$ et donc $\dot{J} = 0$. Il s'agit du cas limite où le rayonnement incident est autant absorbé qu'amplifié. Toute fluctuation qui tend à donner $N_2 > N_1$ donne alors $\dot{N}_2 < 0$ et l'état du système est ramené au cas $N_1 = N_2$.

Et avec l'émission spontanée ?

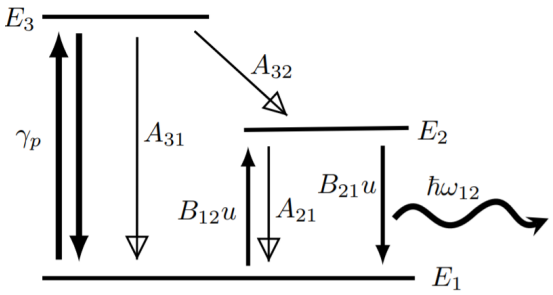
On peut ajouter l'effet de l'émission spontanée si l'on veut : on a alors

$$\dot{N}_2 = \sigma J(N_1 - N_2) - A_{21}u(\nu)N_2$$

On atteint l'équilibre pour $N_1 > N_2$ donc on n'a toujours pas d'inversion de population.

On ne peut donc pas avoir d'amplification de lumière pour un système à 2 niveaux, car le phénomène d'absorption sera toujours dominant par rapport à celui d'émission stimulée et donc on ne peut avoir d'inversion de population. On a alors recours à une méthode proposée en 1950 par Alfred Kastler : le **pompage optique**, qui fait intervenir des atomes à 3 niveaux d'énergie.

2.3 Laser à 3 niveaux



L'idée pour maintenir l'inversion de population et de faire rentrer dans les équations un troisième niveau d'énergie $\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2$, de population N_3. Le pompage optique consiste donc à exciter les atomes du niveau 1 pour les faire monter au niveau 3 (et donc dépeupler le niveau 1), tout en ayant une transition **non radiative** du niveau 3 vers le niveau 2 (pour peupler le niveau 2). pour que ça marche, il faut cependant s'assurer que tous les atomes envoyés dans l'état 3 retombent bien dans l'état 2 (*i.e.* la transition 3 vers 2 est majoritaire devant toutes les autres désexcitations) et il faut que $N_1 \gg N_3$ pour pouvoir négliger l'émission spontanée de 3 vers 1.

Tâchons de mettre ça en équation.
Tout d'abord, la conservation du nombre d'atomes impose que $N = N_1 + N_2 + N_3$ est une constante.
On note ensuite γ_P le taux de transition pour le pompage de 1 vers 3, et qui est également le taux de transition pour l'émission stimulée de 3 vers 1. Les coefficients d'Einstein d'absorption et d'émission spontanée entre les niveaux 1 et 2 sont toujours égaux et sont toujours notés B. Les coefficients A_{31}, A_{21} et A_{32} traduisent quant à eux les relaxations entre les différents niveaux, en notant que la transition de 3 vers 2 est **non radiative**.

On a également dit qu'on voulait que la transition de 3 vers 2 devait être majoritaire devant toutes les autres désexcitations. Cela se traduit par le fait que le temps de désexcitation $\frac{1}{A_{23}}$ soit petit devant les autres temps $\frac{1}{\gamma_P}, \frac{1}{A_{21}}, \frac{1}{A_{31}}$, il faut donc que $\boxed{A_{32} \gg \gamma_P, A_{31}, A_{21}}$

L'évolution temporelle de la population du niveau 3 est alors :

$$\dot{N_3} = \gamma_P N_1 - (\gamma_p + A_{31} + A_{32}) N_3 \simeq \gamma_P N_1 - A_{32} N_3 \tag{37.15}$$

En régime stationnaire, on obtient donc $\gamma_P N_1 = A_{32} N_3$. On a donc $\frac{N_3}{N_1} = \frac{\gamma_P}{A_{32}} \ll 1$. On peut alors écrire $N \simeq N_1 + N_2$.

De même, l'évolution de la population du niveau 2 en régime stationnaire s'écrit

$$\begin{aligned} 0 = \dot{N_2} &= A_{32} N_3 - Bu(\nu) N_2 + Bu(\nu) N_1 - A_{21} N_2 \\ &= (\gamma_P + Bu) N_1 - (Bu + A_{21}) N_2 \qquad \text{car} \qquad \gamma_P N_1 = A_{32} N_3 \end{aligned} \tag{37.16}$$

En posant $D = N_2 - N_1$, la conservation du nombre d'atomes donne $2N_1 = N - D$ et $2N_2 = N + D$. Ainsi, on obtient $(\gamma_P + Bu(\nu))(N - D) = (Bu(\nu) + A_{21})(N + D)$ donc

$$\boxed{D = \frac{\gamma_P - A_{21}}{\gamma_P + A_{21} + 2Bu(\nu)} N} \tag{37.17}$$

Ainsi, on a inversion de population $\iff D > 0 \iff \boxed{\gamma_P > A_{21}}$. il faut donc que le pompage soit suffisamment fort pour compenser la désexcitation spontanée de 2 vers 1.

Retour sur le système à 2 niveaux

Sans pompage, on obtient $D = \frac{-A_{21}}{\gamma_P + A_{21} + 2Bu(\nu)} N \leq 0$ ce qui montre bien qu'on ne peut avoir d'amplification dans un système à 2 niveaux.

Pour réaliser le pompage, on pourrait utiliser un second laser à la bonne fréquence d'excitation, mais nécessiter un laser pour en faire un autre ça peut paraître quelque peu absurde sur le principe. On peut donc procéder par décharges électriques ou bien en utilisant des semi-conducteurs : la recombinaison de paires électrons-trous peut apporter suffisamment d'énergie sous forme de photons pour réaliser le pompage.

Remarque

Notez que dans la "vraie vie" on utilise apparemment plus souvent des systèmes à 4 niveaux : c'est plus pratique parce qu'il n'y a plus de condition sur le taux de pompage comme on va l'obtenir lors du calcul à 3 niveaux. Néanmoins lors de la leçon, pour tenter le calcul à 4 niveaux, il faut être un peu courageux.

2.4 Rôle de la cavité

L'amplification par le milieu actif ne suffit pas à expliquer l'extrême sélectivité et la pureté spectrale du faisceau émis. On l'a vu sur la simulation, pour amplifier le signal et générer une émission stimulée plutôt qu'une spontanée, on utilise des miroirs. Ceux-ci fixent la longueur de la cavité et imposent des conditions aux limites fortes, l'onde à l'intérieur est stationnaire, exactement comme sur une corde de Melde.

Du fait de la stationnarité, une condition mathématique est imposée à l'onde :

$$\omega_n = n \frac{\pi C}{L} \tag{37.18}$$

Ainsi les différents modes de la cavité sont espacés de $\Delta\omega = \frac{\pi C}{L}$. Plus la cavité est petite, plus les modes sont espacés, et plus on peut facilement en choisir un seul et unique par diverses méthodes de filtrage.

Points importants [rapport Jury ENS 2012-2013] : Un laser démarre toujours par un photon d'émission spontanée. Pour qu'il puisse être amplifié de façon significative il faut qu'il puisse engendrer d'autres photons par émission stimulée avant d'être absorbé (sa fréquence doit correspondre à une transition dont les populations sont inversées), et qu'il fasse beaucoup d'aller-retours dans la cavité (sa fréquence correspond à un mode propre). de la cavité

2.5 Propriétés de la cavité

✍ LP34

Laser He-Ne avec cavité ouverte : mesure des spectres

✍ ⏲

Matériel : Spectro ULICE avec la fibre optique et la photodiode, SPID HR.

On se place d'abord dans l'axe perpendiculaire au laser : on observe une partie du spectre du milieu amplificateur. Les photons observés sont pratiquement exclusivement dus à l'émission spontanée. Comme il y a de nombreux niveaux (ici on s'est restreint à 2 mais en réalité il y en a bien plus !) on retrouve le spectre caractéristique d'une vapeur d'Hélium-Néon. Par contre lorsqu'on se place dans l'axe du laser, on observe le rôle de filtre de la cavité : les photons sont principalement issus de l'émission stimulée, et on ne sélectionne qu'une fréquence. Notons d'ailleurs que la fréquence amplifiée n'était même pas la plus intense au départ !

La cavité optique est donc de type Fabry-Perot, les miroirs ont un coefficient de réflexion R. On peut remonter à la finesse des pics :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \tag{37.19}$$

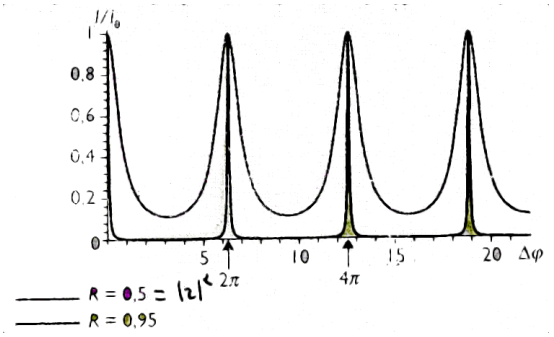


FIGURE 37.5 – La finesse du Fabry perrot en fonction de R

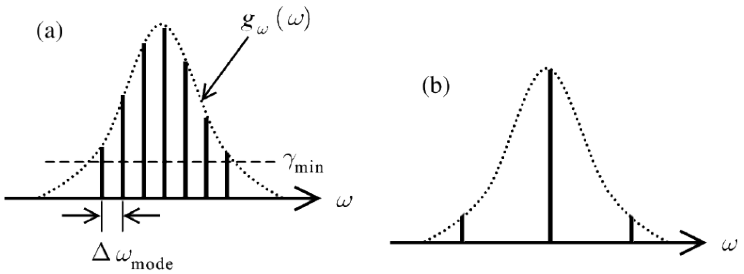


FIGURE 37.6 – ✍ Fox, p.66.

La figure (a) représente le spectre d'un laser multimode. Sur la figure $\gamma_{\min}$ représente la gain minimal à fournir pour qu'il y ait amplification. On l'a vu précédemment, si le pompage est trop faible et que l'inversion de population n'est pas assez grande, alors les pertes induites dans la cavité prédominent et l'effet d'émission stimulée n'est pas possible. On parle de seuil du laser. Si on réduit la taille de la cavité, l'écart fréquentiel entre les modes augmente, et il est possible de réaliser un laser dit monomode : une seule transition est amplifiée (figure (b)).

Attention à l'interprétation des courbes ! Le spectromètre ULICE permet de résoudre au maximum 1.5×10^{-9} m. Or pour $R = 0.99$ on obtient une finesse de 313. Dans ce cas, l'écart entre les modes est $\delta\lambda = 6.67 \times 10^{-13}$ m, et la largeur totale de la raie est de $\Delta\lambda = 2 \times 10^{-12}$ m. Aucune chance donc de mesurer la largeur de la raie, et encore mois l'écart entre celles ci avec ce spectromètre ! Si on fait le calcul de la largeur d'un seul mode, on trouve 2×10^{-15} m. Ainsi, la longueur de cohérence du laser multimode He-Ne n'est que de 20cm ici, mais si on réalise un laser He-Ne monomode, on obtient une longueur de cohérence de 200m ! Cela est possible pour une longueur de cavité inférieure à $c/2\Delta\nu$, ce qui fait environ 10 cm. Si la cavité de laser He-Ne est inférieure à cette valeur, on peut le considérer monomode. Attention encore, ici quand on parle de monomode on ne parle que des modes longitudinaux. Il existe aussi des modes transverses. En pratique il est possible de ne garder qu'un mode transverse (le TEM00 le plus souvent), en orientant convenablement les miroirs pour ne sélectionner que lui.

2.6 Application : refroidissement d'atomes

✍ Fox p247

Pour refroidir des atomes, il nous faut contrer leur agitation thermique. Pour se faire, on peut imaginer la chose suivante : l'atome a une impulsion, reliée à la température de part le fait que pour tous les atomes en présence, $\frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle$. Lorsqu'un photon rencontre l'atome et est absorbé, l'atome va s'exciter, puis se désexciter en libérant un autre photon, dans une direction aléatoire.

(schéma de la vitesse)

L'impulsion de l'atome devient donc au fil des excitations $\overrightarrow{p_0} - n\hbar k\overrightarrow{u_z} + \cancel{\sum \hbar k\overrightarrow{u_s}}^{\text{random}}$, ce qui a pour conséquence de réduire sa vitesse sur z. En le piégeant dans les six directions de l'espace et en adaptant bien le laser, on finit par refroidir le gaz d'atome étudié en diminuant les vitesses de tous les atomes, et donc $\langle v^2\rangle$.

3 Absorption : la fluorescence

✍ LP32 qui donne le principe de la fluorescence + la microscopie PALM

La microscopie PALM a pour but de s'affranchir de la limite de résolution du à la diffraction. On place sur un objet à observer des fluorophores qu'on active avec des flashs lumineux très brefs. Un nombre N de fluorophores vont s'allumer et émettre de la lumière comme des sources lumineuses ponctuelles et disjointes. On va alors observer N taches d'Airy à cause du phénomène de diffraction. Mais grâce à un traitement informatique on va trouver le centre de chacune des taches. Et on créer une image ou on ne conserve que le centre de la tâche en l'identifiant ainsi au fluorophore. On vient en faisant ça de se débarrasser de la limite de diffraction. En reproduisant cette opération de nombreuses fois (avec plusieurs flashs) on obtient une image débarrassée de la diffraction qui limite la résolution des microscopes.

Remarque

on peut parler de la phosphorescence si on le veut.

LP 38

Aspect corpusculaire du rayonnement

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Physique Atomique*, **Cagnac** ⟶ début
- ✍ *Mécanique Quantique*, **Aslangul** ⟶ début

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Relativité restreinte
- ➢ Physique statistique
- ➢ Rayonnement thermique
- ➢ Optique ondulatoire
- ➢ Électromagnétisme
- ➢ Avoir des cheveux

Expériences

- ☕ Mise en évidence de l'effet photoélectrique

1 La nécessité de la quantification du réel . . . 518
1.1 La catastrophe Ultraviolette . . . 518
1.2 Effet photoélectrique . . . 520
1.3 Expériences modernes montrant l'existence du photon . . . 521
2 Propriétés des photons . . . 521
2.1 Énergie et débit de photons . . . 521
2.2 Impulsion et masse du photon . . . 522
2.3 Moment cinétique . . . 523
3 Applications . . . 524
3.1 Refroidissement d'atomes . . . 524
3.2 Photodétecteurs . . . 524

Introduction

Depuis la première théorisation par Newton des rayons lumineux en 1704 (en Anglais), les explications se sont succédées dans le but de répondre à des observations expérimentales de plus en plus complexes. Newton donc le premier a théorisé la lumière comme des billes à trajectoire droite, rebondissant sur les surfaces telles que les miroirs.

Après les expériences de Young et Fresnel, le besoin d'une autre description s'est fait ressentir, puisque les interférences ne pouvaient pas être expliquées par les ondes électromagnétiques. En 1820, l'optique ondulatoire est née.

Dans une tentative d'unifications des théories de la lumière présentes à son époque, Maxwell en 1865 condense de nombreuses équations en ses *équations de la dynamique de l'éther*, et fait dire à Lord Kelvin, en 1894, que la Physique n'est plus qu'un ciel bleu dont seuls deux petits nuages résistent encore à la science. Ces deux nuages sont l'existence de l'éther, qui donnera naissance à la relativité restreinte et générale, et la catastrophe ultraviolette du rayonnement du corps noir, qui sera le point de départ de cette leçon, et donnera naissance à la notion de Photon, et à la mécanique quantique.

1 La nécessité de la quantification du réel

1.1 La catastrophe Ultraviolette

✍ https://fr.wikibooks.org/wiki/Physique_atomique/Loi_de_Planck

Le corps noir est une modélisation idéale d'un four. Imaginez un objet idéalement noir, qui absorbe tout ce qu'il reçoit, et émet de la lumière par émission thermique, comme si sa paroi était recouverte d'oscillateurs harmoniques. La théorie de l'époque, décrite par l'équation de Rayleigh-Jeans ($\sim$ 1900) prédit une densité de ses oscillateurs $g(\nu)$ décrite par l'équation 38.1.

$$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \tag{38.1}$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie pour sa part indique que l'énergie présente par oscillateur est $k_B T$, ce qui donne une densité spectrale d'énergie comme suit :

$$u(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2 \tag{38.2}$$

Soit en λ :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \tag{38.3}$$

L'accord expérimental était... Pour le moins douteux, comme montré dans la Figure 38.1.

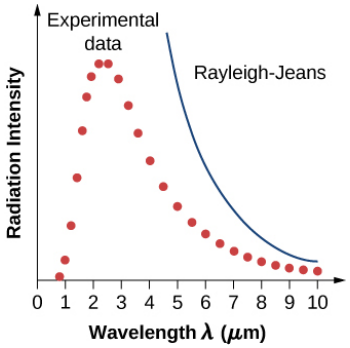


FIGURE 38.1 – Courbe expérimentale typique contre courbe théorique de Rayleight.

Il a donc fallu trouver un moyen de corriger cette divergence, et pour ce faire, Planck en 1900 fait naître sans le savoir la mécanique quantique. Il suppose, en se basant sur la physique statistique et le calcul qu'il envisage déjà, que chaque oscillateur a accès à un espace quantifié d'énergies. Il pose l'existence d'une constante, h (pour *hilfe grosse*, "*grandeur auxiliaire*"), telle que pour chaque oscillateur du modèle du corps noir sont énergie soit un multiple de

$$\mathrm{E} = h\nu \tag{38.4}$$

Les équations de la physique statistique donnent alors

$$\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-h\nu n/\mathrm{k_B T}\right) \tag{38.5}$$

Alors on a pour un oscillateur $\mathrm{E}_{tot}(\nu) = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{Z} = \dfrac{h\nu}{e^{\beta h\nu}-1}$, et finalement $u(\nu) = \mathrm{E}_{tot}(\nu)g(\nu)$.

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{\mathrm{c}^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(h\nu/\mathrm{k_B T}\right)-1} \tag{38.6}$$

En λ on a :

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\exp\left(hc/\lambda\mathrm{k_B T}\right)-1} \tag{38.7}$$

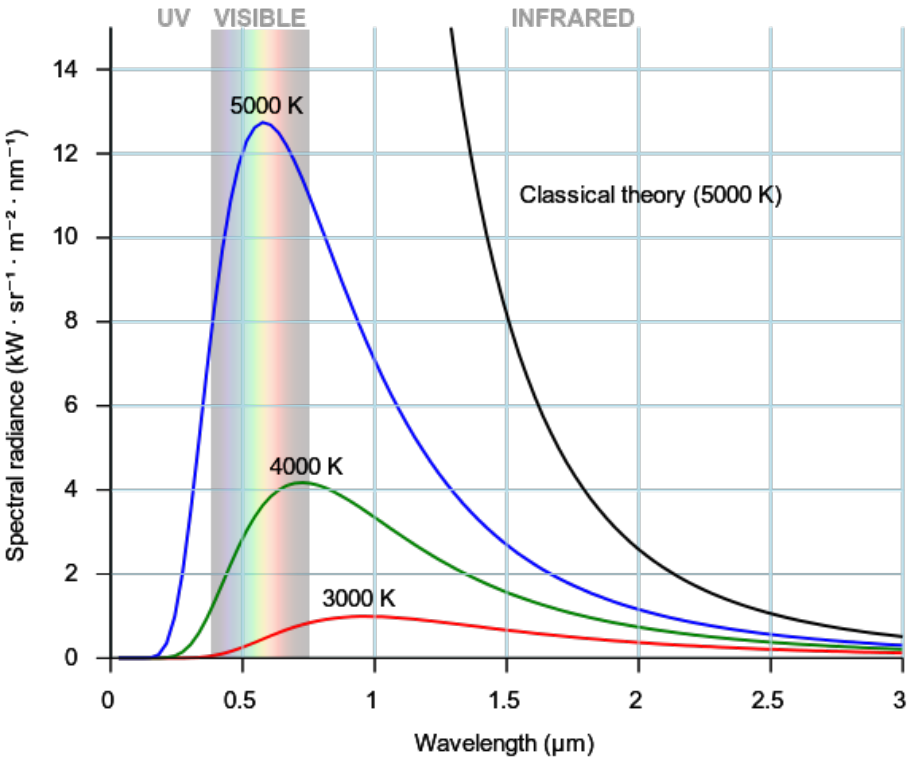


FIGURE 38.2 – Quelques tracés du modèle de Planck.

Ce modèle est en parfaite adéquation avec les valeurs théoriques. En plus de cela, notre moustachu préféré, le grand Albert Einstein, a étudié un effet qui fait réapparaître cette quantification, l'effet photo électrique.

1.2 Effet photoélectrique

L'effet photoélectrique se base sur un constat simple : lorsqu'un matériau est chargé électriquement, il est possible de le décharger avec un éclairage adapté.

Effet photoélectrique
On utilise un Électroscope/Électromètre, que l'on isole de la terre avec une vieille cale en bois, et on utilise un quelconque arracheur d'électrons, que l'on frotte sur nos cheveux, puis que l'on met en contact avec la plaque de l'électrotruc.

L'électroscope

C'est une plaque chargée reliée à une aiguille en ciseau. Lorsque l'ensemble est chargé électriquement, les charges se répartissent dans les deux parties du ciseau, et l'une peut bouger sans frottement sur un cadran. Les deux membres étant chargés négativement, ils se repoussent, et on a $\theta = kq$.

Lors du contact, on charge l'électrotruc, et il garde sa charge parce qu'il est isolé. Lorsqu'on lui met de la lumière normale, il ne se passe rien, mais à partir d'une certaine longueur d'onde (et donc énergie), il se décharge. Cette décharge fait apparaître un effet de seuil en λ.

Pour faire cette démonstration en longueur d'onde, on utilise une lampe à mercure, celle dont le verre est amovible. Enlever le verre permet d'éliminer un filtrage UV, et donc de laisser tout passer.

IL FAUT À TOUT PRIX PORTER DES LUNETTES ET UTILISER UN VERRE PROTECTEUR POUR L'ASSEMBLÉE.

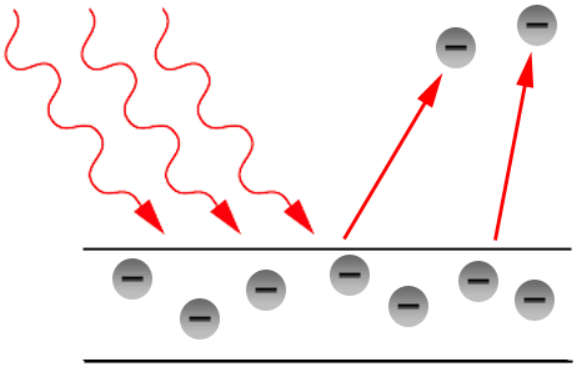


FIGURE 38.3 – Schématisation de l'effet photoélectrique

Parmi les observations faites sur cet effet, il est possible de relier l'énergie cinétique des électrons émis à la fréquences des photons reçus par une loi affine. On montre que $h\nu < \mathrm{E}_{lim}$ => pas d'émission, peu importe l'intensité du flux lumineux, et si $h\nu > \mathrm{E}_{lim}$, les électrons émis ont une énergie cinétique de $h\nu - \mathrm{E}_{lim}$.

Cela pousse alors Einstein à poser l'existence du photon, comme réalité et physique, et pas seulement comme artefact de calcul. Le photon, quantum de l'interaction électromagnétique, est né, au même titre que la mécanique quantique.

1.3 Expériences modernes montrant l'existence du photon

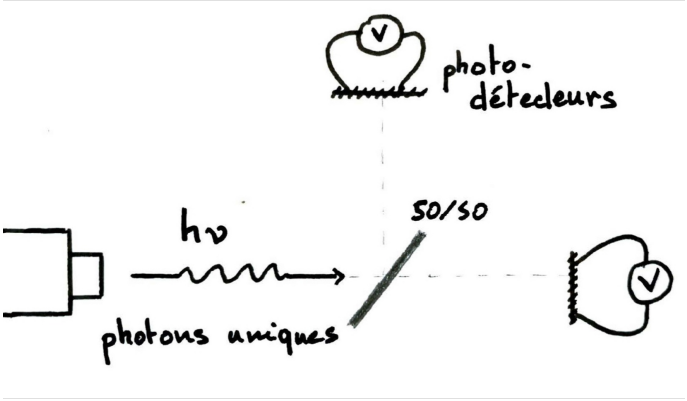


FIGURE 38.4 – Schéma d'une expérience à photon unique

Si on imagine une expérience comme celle-ci, qui a été réalisée par *Hamamatsu Photonics* en 1981, on peut immédiatement trancher sur l'existence du photon : si on détecte une tension sur un seul des détecteurs à la fois de manière aléatoire, c'est que le photon existe. C'est d'ailleurs ce qu'il se passe !

L'expérience qui montre finalement l'ultime dualité onde corpuscule des photons, c'est les interférences à photons uniques.

https://youtu.be/e30BuTnhJng

> *Un but que l'on peut avoir maintenant, c'est de déterminer les propriétés de ces fameux photons, sachant que l'on doit combiner les résultats ondulatoires ET les résultats corpusculaires.*

↓

2 Propriétés des photons

2.1 Énergie et débit de photons

On a déjà trouvé l'énergie du photon, E= $h\nu$. On peut alors se demander combien de photons il y a dans les rayonnements solaires ! On a $\mathcal{P}(\nu)\mathrm{d}\nu = SD_S(\nu)h\nu\mathrm{d}\nu$, *i.e.* la puissance surfacique est le produit de la surface, du débit de photon (en photon par seconde) et de l'énergie d'un photon.

Chiffres : le soleil émet 4×10^{26}W (source : Wikipédia), ce qui donne, en supposant tous les photons identiques et de 800nm, $D_S S = \dfrac{\mathcal{P}}{h\nu}$.

On explicite les unités :

- D_S -> photons.s^{-1}.m^{-2}
- S -> m^2
- $\mathcal{P}$ -> W
- E -> J/photon (ici $h\nu = 10^{-19}$)

Le soleil émet 10^{45} photons par seconde. (Ta pupille en reçoit 10^{16}).

Avec l'absorption de l'atmosphère, au sol on reçoit 1000 W/m2.

2.2 Impulsion et masse du photon

Calcul convainquant mais foireux

Pour déterminer l'impulsion d'un photon, on va imaginer une onde plane monochromatique de fréquence ν et de période T qui arrive selon $\overrightarrow{u_z}$ sur une particule ponctuelle de masse m et de charge q, initialement sans moment, placée en $z = 0$ et contrainte à y rester.

$$\overrightarrow{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - kz) \\ E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi) \end{bmatrix} \tag{38.8}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E}}{C}$$

On applique le PFD sur la particule.

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E}(0,t) + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(0,t)\right) \tag{38.9}$$

Ainsi si $\overrightarrow{p}(t_0) = \overrightarrow{0}$, on a $\overrightarrow{p} = \int_{t_0}^{t_0+T} \overrightarrow{F}\ \mathrm{d}t$ après une période d'oscillation.

$$\overrightarrow{p} = q\int_{t_0}^{t_0+T} \overrightarrow{E}\ \mathrm{d}t \quad + \quad \frac{q}{c}\int_{t_0}^{t_0+T} \overrightarrow{v} \wedge (\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{E})\ \mathrm{d}t \tag{38.10}$$

($\langle\cos\rangle$ sur la première intégrale)

$$\overrightarrow{p} = \frac{q}{c}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{E})\overrightarrow{u_z}\ \mathrm{d}t \quad - \quad \int_{t_0}^{t_0+T} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_z})\overrightarrow{E}\ \mathrm{d}t\right) \tag{38.11}$$

($v_z = 0$ sur la seconde intégrale)

Maintenant, il faut relier celà à une quantité connue pour déterminer $\overrightarrow{p}$. Pour se faire, on sait que $\mathcal{P} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = q\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{E}$. Donc $\overrightarrow{p} = \frac{1}{c}\overrightarrow{E}$.

Raisonnement par les équation de la Relativité

Le photon va à la vitesse de la lumière, et ne peut donc pas avoir de masse sans avoir une énergie cinétique infinie d'après les lois d'Einstein :

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right). \tag{38.12}$$

Donc le photon a une masse nulle, et du fait que $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, on a

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} = \hbar k \tag{38.13}$$

Un autre aspect fondamental du champ EM est qu'il possède une polarisation. Cette caractéristique peut-elle se retrouver chez le photon ?

2.3 Moment cinétique

calculs

Pour ce calcul, on reste dans la même situation que pour le calcul de l'impulsion mais cette fois on s'intéresse à la projection selon $\vec{u_z}$du moment cinétique cédé par l'onde à la particule pendant une période. Pour cela, le théorème du moment cinétique appliqué à la particule nous donne

$$\vec{L}_{\text{cédé}} \cdot \vec{u_z} = \int_{t_0}^{t_0+T} (\vec{OP} \times \vec{F}) \cdot \vec{u_z} \mathrm{d}t$$

Or $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ donc on obtient :

$$\begin{aligned}(\vec{OP} \times \vec{F}) \cdot \vec{u_z} &= (\vec{OP} \times q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})) \cdot \vec{u_z} \\ &= q(\vec{OP} \times \vec{E}) \cdot \vec{u_z} + \cancelto{0}{q(\vec{OP} \cdot \vec{B})\, \vec{v} \cdot \vec{u_z}} - \cancelto{0}{q(\vec{OP} \cdot \vec{v})\, \vec{B} \cdot \vec{u_z}} \\ &= q(\vec{E} \times \vec{u_z}) \cdot \vec{OP} \\ &= -q(\vec{u_z} \times \vec{E}) \cdot \vec{OP}\end{aligned} \tag{38.14}$$

en utilisant les formules d'analyse vectorielle $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ et $(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a$ On considère ensuite une onde polarisée circulaire gauche, *i.e.*

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \sin(\omega t - kz) \end{bmatrix} \tag{38.15}$$

Cela nous permet d'établir que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t} = \omega(\vec{u_z} \times \vec{E})$ et donc de continuer le calcul précédent en remplaçant $(\vec{OP} \times \vec{F}) \cdot \vec{u_z}$:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{cédé,CG}} \cdot \vec{u_z} &= -q \int_{t_0}^{t_0+T} (\vec{u_z} \times \vec{E}) \cdot \vec{OP}\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{q}{\omega} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\mathrm{d}\vec{E}(0,t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{OP}\ \mathrm{d}t \\ &= -\frac{q}{\omega} \left(\cancelto{\langle \cos \rangle_T}{\left[\vec{OP} \cdot \vec{E}\right]_{t_0}^{t_0+T}} + \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{E} \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t \right) \\ &= -\frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t_0+T} q\vec{E} \cdot \vec{v} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{E}_{\text{cédée}} \quad \text{où } \mathcal{E}_{\text{cédée}} \text{ est l'énergie cédée par le photon}\end{aligned} \tag{38.16}$$

Ici, $\mathcal{E}_{\text{cédée}}$ vaut $\hbar\omega$ et donc pour une onde circulaire gauche,

$$\overrightarrow{L}_{\text{cédé,CG}} \cdot \overrightarrow{u_z} = \hbar \tag{38.17}$$

Le calcul pour une circulaire droite, un calcul analogue (il suffit de rajouter un moins dans l'expression de $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{E}}{\mathrm{d}t}$) donne

$$\overrightarrow{L}_{\text{cédé,CD}} \cdot \overrightarrow{u_z} = -\hbar \tag{38.18}$$

On retrouve ainsi le concept de spin ± 1 du photon auquel on associe les polarisations gauche ou droite.

Ordre de grandeur rapide

On a une valeur de moment cinétique donnée dans le problème : $\hbar$. Tout laisse à penser qu'elle interviendra dans l'expression du moment cinétique du photon.

On a une confirmation expérimentale de ce résultat, grâce à l'expérience de Beth.

L'expérience de Beth, réalisée en 1936, permet de mesurer le couple exercé sur un matériau diélectrique à l'aide d'un fil de torsion. Le couple exercé est très faible, le fil de torsion choisit par Beth est un fil de Quartz créant un couple de 10^{-12} Nm/rad. L'angle observé est de l'ordre de 0.001rad.

spin nul

La théorie quantique des champs interdit le spin 0 pour une particule sans masse.

Maintenant que l'on connaît la masse, l'énergie, l'impulsion et le spin du photon, on peut s'en servir pour faire quelques expériences, et profiter de ses propriétés.

3 Applications

3.1 Refroidissement d'atomes

Pour refroidir des atomes, il nous faut contrer leur agitation thermique. Pour se faire, on peut imaginer la chose suivante : l'atome a une impulsion, reliée à la température de part le fait que pour tous les atomes en présence, $\frac{3}{2}\mathrm{k_B T} = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle$. Lorsqu'un photon rencontre l'atome et est absorbé, l'atome va s'exciter, puis se désexciter en libérant un autre photon, dans une direction aléatoire.

(schéma de la vitesse)

L'impulsion de l'atome devient donc au fil des excitations $\overrightarrow{p_0} - n\hbar k\overrightarrow{u_z} + \sum \cancel{\hbar k \overrightarrow{u_s}}^{\text{random}}$, ce qui a pour conséquence de réduire sa vitesse sur z. En le piégeant dans les six directions de l'espace et en adaptant bien le laser, on finit par refroidir le gaz d'atome que l'on considère en diminuant les vitesses de tous les atomes, et donc $\langle v^2\rangle$.

3.2 Photodétecteurs

Pour faire un photodétecteur électronique, qui convertisse de la lumière en signal électrique, on peut utiliser l'effet photoélectrique, qui combiné à des semi-conducteurs permet même de générer de l'électricité avec un flux de lumière suffisant. Les panneaux photovoltaïques en sont un parfait exemple.

Petit ordre de grandeur sur les panneaux photovoltaïques

Un panneau solaire typique de 300W fait environ 1m2, ce qui fait un rendement d'environ 0.3.

https://helloenergie.com/amfile/file/download/file/182/product/1215/

Conclusion

Les deux petits nuages de Lord Kelvin cachaient donc deux orages de proportions bibliques dont les vents soufflent aujourd'hui encore dans les voiles de la Physique.

Nous avons vu au travers cette leçon l'histoire, les origines et propriétés principales du photon. Ces propriétés, à cheval entre le corpuscule et l'onde, ont ouvert le domaine de la mécanique quantique, qui est toujours aujourd'hui un domaine de recherche actif. La dualité onde corpuscule a d'ailleurs inspiré la recherche, car le 20ème siècle marque aussi la découverte du comportement ondulatoire de la matière, mais ça se sera pour une prochaine leçon.

Questions

- On peut observer de la lumière polarisée rectilignement, donc avec un moment cinétique nul. Comment expliquer cela ? *Car combinaison linéaire d'une polarisation circulaire droite (-ħ) et gauche (+ħ) qui donne une polarisation rectiligne avec moment cinétique en moyenne nul.*
- Quel est le cadre de la formule de Rayleigh-Jeans (avec $g(\nu)$) ? *Ensemble canonique, similaire au grand canonique car le potentiel chimique est nul. Le système étudié est le gaz de photons à l'intérieur du corps noir. On a un système à volume et température fixes donc on applique Maxwell-Boltzmann.*
- Par le calcul, on obtient $g(\nu) = \frac{4\pi}{c^3}\nu^2$. D'où vient le facteur 2 dans la formule de Rayleigh-Jeans ? *Le spin serait anachronique, c'est la polarisation la réponse. On savait déjà à l'époque qu'il y avait deux polarisations de la lumière. Le lien avec le spin peut être fait ensuite.*
- Est-ce qu'écrire E= $nh\nu$ semble correct au vu de ce que l'on sait ? *La mécanique quantique prévoit que pour un oscillateur harmonique quantique, $E=h\nu(n+1/2)$, sauf que si l'on met cette formule dans le calcul de $\mathcal{Z}$, on obtient la dérivée d'une constante, donc cela ne change rien.*
- Qu'est-ce qui fixe le seuil de l'effet photoélectrique ? *L'énergie correspondant à une transition électronique du matériau faisant échapper un électron. L'énergie correspondant au seuil s'appelle le travail de sortie. L'expérience qui étudie proprement l'effet photoélectrique est l'expérience de Millikan.*
- Quelle doit être la fréquence du rayonnement pour refroidir des atomes ? *Encore une fois, elle doit correspondre à une transition électronique de l'atome non ionisante.*
- Pourquoi on ne peut pas refroidir jusqu'au zéro absolu ? *À cause de l'effet Doppler, de la distribution Gaussienne de fréquence, et de l'effet de moyenne des photons qui cause des fluctuations.*
- Comment régler le problème de l'effet Doppler ? *En utilisant une fréquence légèrement inférieure à celle de la transition électronique. Cela permet de ne ralentir que les atomes qui sont dans la direction du laser émetteur, et ainsi d'éviter de ré-accélerer ces derniers.*
- Pourquoi prendre λ=800 nm pour le calcul du débit de photon du Soleil ? *Longueur d'onde la plus présente dans son spectre de corps noir même si en réalité c'est plus vers 600 nm. On a aussi des effets de distribution, le maximum d'émission ne correspond pas à la moitié de la masse de la distribution.*
- Est-ce que la notion de photon est cohérente avec l'électromagnétisme ? *Oui, elle complète même cette théorie en apportant de nouvelles explications voire en expliquant des phénomènes avant pas expliqués. Attention, la pression de radiation est un effet explicable en électromagnétisme classique.*

Commentaires du jury

- Expérience de l'effet photoélectrique : Commencer par intercaler une lame de verre entre la lampe et l'électroscope. Cela permet de d'abord décrire l'expérience puis ensuite de montrer le phénomène en retirant la lame. Cela montre aussi que ce sont bien les UV qui arrachent les électrons.
- Insister sur le fait que la notion de photon NE CONTREDIT PAS l'électromagnétisme déjà en place.
- Calcul de l'impulsion du photon via la pression de radiation fait dans le livre de Cagnac, à voir.
- Niveau à cheval entre L2 et L3, pas de choix clair entre ces deux niveaux.
- Romain Volk : "Leçon un peu brouillon". Si on parle de grandeurs en fréquence alors on montre des courbes en fonction de la fréquence, prendre le temps de bien montrer un beau schéma de l'expérience de Beth en décrivant les paramètres expérimentaux (et non pas juste un schéma rapide et dégueu au tableau), montrer le lien entre cette expérience et la polarisation droite/gauche. Enfin, creuser un peu plus les calculs pour en connaître les hypothèses et le cadre.
- "Une bonne leçon avec 2-3 trucs à peaufiner", "applications classiques mais intéressantes", "parties équilibrées".
- Attention aux petits détails, cette leçon ne change pas beaucoup d'année en année donc le jury la connaîtra bien.
- Arriver plus vite sur le nombre de photons sur la rétine car c'est quelque chose qui nous parle plus que la totalité des photons émis par le Soleil par seconde.
- Il manque l'explication de pourquoi l'effet photoélectrique ne s'explique pas avec l'électromagnétisme. *Car la densité d'énergie d'un rayonnement classique est indépendante de la fréquence alors que l'effet photoélectrique fait intervenir une fréquence seuil.*
- Possibilité de réaliser une expérience quantitative sur l'effet photoélectrique (à voir si l'ENS achète le matos ou bien une autre école envoie le matos à l'agreg).
- Pas de calcul mené directement au tableau, peut-être faire au tableau le calcul du débit de photon pour un laser ?
- Éviter de répondre aux questions en disant "c'est écrit dans le bouquin". Montrer que l'on a soi-même creusé la question et lu le livre.

LP 39

Aspects ondulatoires de la matière, notion de fonction d'onde

Commentaires du jury

- **2017 :** Un exposé sans présentation de l'équation de Schrödinger ne paraît pas raisonnable.
- **2015 :** Les dispositifs interférométriques avec les ondes de matière ne se résument par aux expériences du type fentes d'Young.
- **2009-2010 :** La signification physique des différents termes de l'équation de Schrödinger n'est pas toujours connue. Le jury constate qu'un nombre significatif de candidats confondent équation aux valeurs propres et équation de Schrödinger. Enfin, les candidats sont invités à s'interroger sur les aspects dimensionnels de la fonction d'onde et sur sa signification physique précise.
- **2008 :** La justification physique des relations de continuité aux interfaces est trop souvent éludée.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Tout-en-un PCSI*, **Salamito** ⟶ Une première approche
- ✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** ⟶ Cours
- ✍ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/PC/88/0/Dualite_onde-particule_222880.pdf ⟶ Ressource Eduscol sur la dualité onde-particule
- ✍ *MQ I*, **Aslangul** ⟶ Compléments
- ✍ *MQ*, **Basdevant et Dalibard** ⟶ Compléments

Prérequis

- ➢ Mécanique
- ➢ Aspects corpusculaires de la lumière
- ➢ Équations différentielles

Expériences

☕

1 Aspect ondulatoire de la matière . . . 529
1.1 Relation de de Broglie (1923) . . . 529
1.2 Vérifications expérimentales . . . 530
2 Une description quantique : la fonction d'onde . . . 531
2.1 Interprétation probabiliste des interférences avec des électrons . . . 531
2.2 Fonction d'onde et interprétation de Born . . . 532
2.3 Application aux interférences avec des électrons . . . 533
2.4 Inégalité d'Heisenberg . . . 534
3 Dynamique de la fonction d'onde . . . 535
3.1 Équation de Schrödinger . . . 535
3.2 Application à la particule libre . . . 537
3.3 Propriété de l'OPPH de matière . . . 538
3.4 Paquet d'onde quasi monochromatique : propagation et dispersion . . . 538
4 Particule dans un potentiel constant par morceaux . . . 539
4.1 Potentiel constant . . . 539
4.2 Marche de potentiel . . . 539
4.3 Puits de potentiel . . . 541
4.4 Marche de potentiel . . . 542

Introduction

On a vu dans la leçon précédente la dualité onde-corpuscule de la lumière qui pouvait être décrite à la fois comme une onde et comme des photons, ce qui fut une révolution pour l'époque puisqu'on pensait ces 2 notions contradictoires. Mais si la lumière que l'on croyait onde est aussi une particule, est-ce les particules de matière comme par exemple les électrons sont aussi des ondes ? C'est la question à laquelle on va répondre dans cette leçon.

1 Aspect ondulatoire de la matière, approche historique

1.1 Relation de de Broglie (1923)

✍ Sanz p793 + Aslangul p273

Nous sommes en l'an de grâce 1923. L'idée de la dualité onde-corpuscule de la lumière avait déjà été introduite par Einstein quand le physicien français Louis de Broglie propose pendant sa thèse d'étendre cette dualité à la matière, considérée jusque là comme uniquement corpusculaire. En particulier, il propose une équation faisant le lien entre l'aspect ondulatoire et l'aspect corpusculaire d'une particule de matière avec la **relation de de Broglie** :

On peut associer à une particule d'impulsion de norme $p = mv$ une longueur d'onde λ_{dB} appelée **longueur d'onde de de Broglie** et donnée par

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

avec $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\text{J s}$ la constante de Planck.

Remarque

Ici, m est la masse dans le référentiel de la particule. On peut faire apparaître sa masse propre m_0 en écrivant que $m = \gamma m_0$ avec γ le facteur de Lorentz.

Ordres de grandeurs

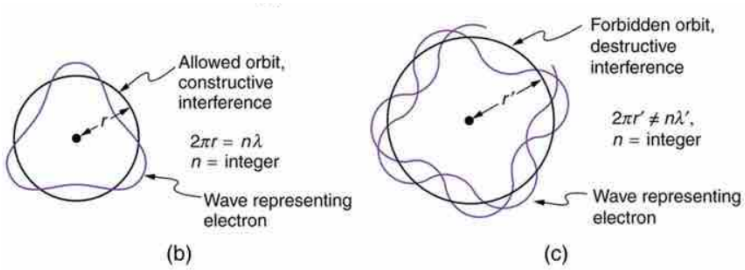
- un électron accéléré à 10^6 m/s : $\lambda_{\text{dB}} \approx 10^{-9}$ m
- un atome d'hydrogène à température ambiante : $p \approx \sqrt{m\mathcal{E}_c} \approx \sqrt{mk_BT} \approx 1 \times 10^{-24}\,\text{kg m s}^{-1}$ donc $\lambda_{\text{dB}} \simeq 10^{-8}$ m
- moi quand il y a des crêpes à manger : $m \approx 80$ kg, $v \approx 3$ m/s donc $\lambda_{\text{dB}} \simeq 2.8 \times 10^{-36}$ m

L'influence du comportement ondulatoire de la matière sur le système dépend du rapport entre cette longueur d'onde et les dimensions du système [1] :

- si λ_{dB} est faible devant les autres tailles caractéristiques du système, le comportement ondulatoire de la matière peut être négligé (de la même façon qu'on néglige le comportement ondulatoire de la lumière en optique géométrique) ;
- si λ_{dB} est du même ordre ou est grande devant les autres tailles caractéristiques du système, le comportement ondulatoire de la matière doit être pris en compte.

La prise en compte du caractère ondulatoire de la lumière qui, à ce stade, n'est qu'une hypothèse, permet par exemple de compléter le modèle de Bohr de 1913 qui sort *ad hoc* une quantification du rayon des orbitales électroniques pour expliquer les raies d'absorption. En effet, le rayon de l'orbitale serait alors quantifié pour satisfaire une condition d'interférences constructives de l'électron sous forme d'onde.

1. La discussion est menée dans le ✍ Aslangul p297.



1.2 Vérifications expérimentales

Cette hypothèse est bien jolie mais en physique, c'est bien de proposer des expériences pour valider ou non une hypothèse. Et c'est exactement ce qui va être fait.

1.2.1 Diffraction des électrons (1927)

✍ Basdevant p24

En 1927, Davisson et Gerner purent observer la figure de diffraction d'électrons par un cristal de Nickel, ce qui leur valu le prix Nobel de 1937. Cette expérience a permis de remonter aux paramètres de maille du cristal et de les comparer aux résultats obtenus par diffraction de rayons X : les résultats concordaient, ce qui a permis de vérifier l'hypothèse de de Broglie et de montrer le caractère ondulatoire de la matière.

☕

Diffraction des électrons par du graphène

✍ MP26 - Mesure de longueurs ⏲

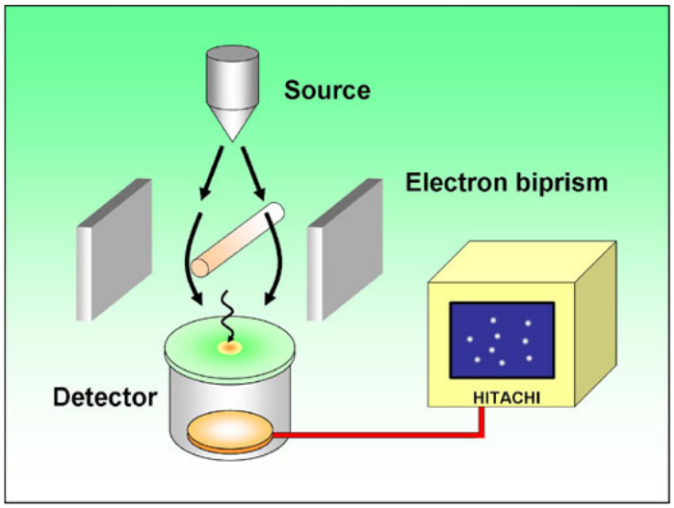
On voit une belle figure de diffraction.

1.2.2 Interférences avec des électrons (1974)

✍ Sanz p793

Beaucoup d'expériences ont a pu également montré le caractère ondulatoire de la matière à travers un autre phénomène caractéristique des ondes : les interférences. Le premier à avoir fait l'expérience est Jönsson qui, en 1974, a observé une figure d'interférence semblable à ce qu'on peut observer avec la lumière mais pour des électrons envoyés sur des fentes d'Young.

Dans cette leçon, on va cependant présenter l'expérience de 1989 réalisée par Tonomura *et al.* et qui est analogue au biprisme de Fresnel mais avec une tige chargée positivement entre 2 plaques métalliques.



L'expérience consiste à envoyer des électrons un par un et à observer la position de leur impact sur l'écran. Les impacts sur l'écran étant très localisés, on voit bien l'aspect corpusculaire des électrons. Cependant, au fur et à mesure que les impacts sur l'écran deviennent nombreux, on remarque qu'ils ne sont pas localisés au même endroit, ce qui peut sembler étonnant puisque les électrons sont préparés dans le même état. Mieux encore, au delà de l'aspect aléatoire de la position des impacts, on voit une figure d'interférence se dessiner au fur et à mesure avec des franges clairement définies dont l'interfrange vaut 0.7 μm. La dualité onde-corpuscule n'est donc pas exclusive à la lumière.
Les résultats de l'expérience sont disponibles à https://www.hitachi.com/rd/research/materials/quantum/doubleslit/index.html.

On peut également obtenir ce genre de figures avec des particules plus grosses :

- des atomes de néons *(F. Shimizu, K.Shimizu, H. Takuma ; "Double-slit Interference whith ultra cold metastable neon atoms" ; Physical Review A ; 1992)*
- des molécules de fullerène *(O. Nairz, M. Arndt, A. Zeillinger ; "Quantum interference experiments with large molecules" A. J. Phys. 71 (4), avril 2003)*

2 Une description quantique : la fonction d'onde

✍ Basdevant p34

On a donc établi que la dualité onde-corpuscule n'était pas exclusive à la lumière mais s'appliquait également à la matière. Il s'agit maintenant de développer un modèle décrivant l'aspect ondulatoire de la matière. Pour cela, il faut :

- **décrire l'état d'un système**, comme on le fait par exemple en mécanique avec la position et la vitesse.
- **passer de l'objet mathématique à la grandeur physique**, c'est-à-dire savoir interpréter chaque outil mathématique d'un point de vue physique. En mécanique, la position est très intuitive et la vitesse est définie mathématiquement comme la dérivée temporelle de la position, donc c'est plutôt facile.
- **établir les lois d'évolution temporelle de ces objets**, comme par exemple le PFD en mécanique non relativiste.

On va, dans cette partie, s'intéresser aux deux premiers points. Le troisième sera abordé dans la partie suivante.

2.1 Interprétation probabiliste des interférences avec des électrons

✍ Aslangul p323 + https://toutestquantique.fr/dualite/

Revenons sur l'expérience des interférences avec des électrons en prenant l'exemple des fentes d'Young. On peut tenter de mener l'expérience en ajoute un observateur pour savoir dans quelle frange passe chaque électron, cependant les franges disparaissent. On peut également tenter l'expérience avec des billes pour se rendre compte de l'absence encore une fois de l'absence de figure d'interférence. On peut donc en conclure que l'étude de phénomènes quantiques ne peut être menée en ayant une vision classique. Pire encore : tenter de connaître l'état classique d'une particule quantique telle que sa trajectoire fait disparaître le phénomène quantique !

Il nous faut donc un nouvel outil pour décrire l'expérience, qui vérifie deux conditions :

- il doit pouvoir expliquer le **comportement ondulatoire** de la particule
- il doit également s'inscrire dans un **formalisme probabiliste** : en effet, on ne peut que dire que l'électron a une chance sur deux de passer par la fente de droite et une chance sur deux de passer par la fente de gauche. Tenter d'outrepasser cette aspect probabiliste détruit le phénomène quantique : la notion de trajectoire n'a donc plus de sens.

2.2 Fonction d'onde et interprétation de Born

✍ Sanz p795

On définit alors la **fonction d'onde** $\psi(\overrightarrow{r},t)$ comme étant la fonction à valeur complexe qui décrit complètement l'état dynamique d'une particule quantique de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ à l'instant t.

La fonction d'onde remplace donc la donnée de $(\overrightarrow{r},\overrightarrow{p})$ qui décrivait un système classique. Elle doit répondre aux 2 conditions énoncés juste au-dessus, à savoir elle doit décrit le caractère ondulatoire et probabiliste de la particule quantique. C'est pourquoi Born [2] proposa en 1927 une interprétation probabiliste de la fonction d'onde qu'on appelle **interprétation de Born** :

La probabilité de trouver la particule quantique à l'instant t à la position $\overrightarrow{r}$ à $\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}^3\mathbb{P}(\overrightarrow{r}) = |\psi(\overrightarrow{r},t)|^2\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r}$$

Cette interprétation donne lieu à plusieurs remarques :

- La fonction d'onde $\psi(\overrightarrow{r},t)$ est également appelée **amplitude de probabilité de présence** et son module au carré $|\psi(\overrightarrow{r},t)|^2$ est appelé **densité de probabilité de présence**.
- Le fait que la fonction d'onde soit complexe traduit son caractère ondulatoire, notamment par sa phase.
- Soit $\mathcal{D}$ le domaine de l'espace accessible à la particule. Le fait que cette particule soit **certainement** dans l'espace $\mathcal{D}$ se traduit par la **condition de normalisation**

$$\iiint_{\mathcal{D}} |\psi(\overrightarrow{r},t)|^2\,\mathrm{d}^3\overrightarrow{r} = 1$$

- Deux fonctions différentes décrivent deux états différents de la particule, à condition que ces deux fonctions d'ondes ait plus qu'un facteur de phase constant qui les distinguent. Un système est donc toujours décrit par une fonction d'onde à une phase constante près.
- Il s'agit d'une description probabiliste non classique. En effet, on ne travaille pas directement avec les probabilités mais avec les amplitudes de probabilité complexes, dont les modules carrés sont les probabilités

2. En réalité, c'est Schrödinger qui, en prenant connaissance des travaux de de Broglie en 1925, développe en premier cette notion de fonction d'onde à travers huit articles publiés en 1926. Cependant l'interprétation probabiliste est cependant due à Max Born qui l'a proposé fin 1926, début 1927, et a rçu le prix Nobel en 1954.

Remarques plus subtiles (✍ Basdevant p35)

- Il faut que ψ soit de carré sommable.
- La mesure est un processus très particulier qui n'a pas d'équivalent en mécanique quantique. La modélisation en fonction d'onde ne donne seulement qu'une probabilité de mesurer la particule à un endroit. Le débat est encore ouvert pour trancher entre le caractère intrinsèquement aléatoire de la MQ, le simple caractère mathématique de ψ, ou les lacunes dans nos connaissances. On sait cependant que la mesure directe de ψ et même de $|\psi|^2$ est impossible, et qu'on ne peut que répéter des mesures afin de s'approcher naturellement du bon résultat.

La description ondulatoire de la matière nous force à abandonner notre vision entièrement déterministe de la matière au profit d'une vision probabiliste. Cependant, on verra par la suite que l'évolution de ψ est décrite par une équation, ce qui montre que la mécanique quantique n'est pas pour autant purement probabiliste.

2.3 Application aux interférences avec des électrons

✍ Basdevant p37

Appliquons maintenant ce nouveau formalisme à l'expérience d'interférence. On suppose pour cela que l'onde diffracté uniquement par la fente S_1 a une amplitude ψ_1 connue en tout point de l'écran, et on fait de même pour l'amplitude ψ_2 de l'onde diffracté uniquement par la fente S_2. La vision probabiliste de ce phénomène nous empêche de savoir par quelle fente l'électron est passé, et nous encourage donc à considérer que l'électron passe par les deux fentes à la fois avec une certain probabilité d'être passé par l'une des fentes. La fonction d'onde totale correspondant à l'électron après avoir passé les fentes vaut donc

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2)$$

où le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ vient de la condition de normalisation. La densité de probabilité de présence de l'électron après les fentes vaut donc

$$\begin{aligned} |\psi|^2 = \psi^*\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^* + \psi_2^*) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\Re(\psi_1^*\psi_2)\right) \end{aligned} \tag{39.1}$$

donc $\boxed{|\psi|^2 \neq \frac{1}{2}\left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2\right) \text{ si } \Re(\psi_1^*\psi_2) \neq 0}$. De façon analogue à l'expérience des fentes d'Young en optique scalaire, on constate l'apparition d'un terme d'interférences qui module le terme sans interférences. On aurait alors

$$\begin{array}{ccc} \psi & \leftrightarrow & \overrightarrow{E} \\ |\psi|^2 & \leftrightarrow & I = \left\|\overrightarrow{E}\right\|^2 \end{array}$$

Remarques

- Dans cette expérience, si on bouche par exemple la fente S_2, alors $\psi = \psi_1$ et on obtient une figure de diffraction.
- Si, par la mesure, on détermine que l'électron est passé par la fente S_1, alors on connaît précisément sa fonction d'onde (qui est alors $\psi = \psi_1$) et on perd également les interférences.

2.4 Inégalité d'Heisenberg

✍ Basdevant p36 et p46 + Sanz p802

Puisqu'un système est décrit de façon probabiliste, on peut définir une valeur moyenne [3] pour chaque grandeur X à partir de la densité de probabilité :

$$\langle X \rangle = \iiint_{\mathcal{D}} X(\vec{r}, t) \, |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, \mathrm{d}^3\vec{r} \tag{39.2}$$

À partir de là, on peut également définir un écart-type :

$$\Delta X = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \tag{39.3}$$

Cet écart-type quantifie la précision avec laquelle on connaît la grandeur X. Par exemple, si on peut modéliser la position par une gaussienne, un faible écart-type implique une connaissance précise de la position. Cependant, il y a une limite à la précision qu'on peut avoir sur certaines grandeurs. Si on suppose que l'on veuille mesurer la position x d'une particule ainsi que son impulsion p_x, l'**inégalité d'Heisenberg** nous dit qu'il existe une limite de résolution théorique :

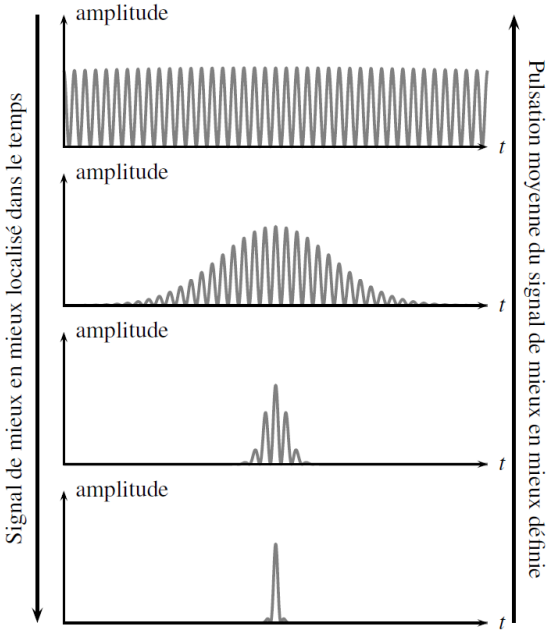
$$\boxed{\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta x \Delta k_x \geq \frac{1}{2}} \tag{39.4}$$

Il est important de noter qu'il ne s'agit pas du tout d'une limite de résolution instrumentale telle que la limite de résolution causée par la diffraction lumineuse. Il s'agit ici d'une véritable limite à la connaissance parfaite d'un système, que ce soit avec ou sans observation.

Remarque

On appelle souvent cette égalité *principe d'incertitude d'Heisenberg* même si les puristes diront que ce n'est pas un principe puisqu'il a été démontré grâce aux propriétés de la TF spatiale.

On peut essayer de comprendre cette inégalité en considérant une particule évoluant sur un axe x à laquelle on associe un vecteur d'onde de de Broglie k_x tel que $p_x = \hbar k_x$. Pour une amplitude de présence sinusoïdale, la particule est totalement délocalisée ($\Delta X \to \infty$) mais on connaît parfaitement la fréquence spatiale ($\Delta k_x = 0$). Si on module cette densité par une gaussienne, la position est connue plus précisément mais le spectre s'étale. Plus la position est connue précisément, plus le spectre est étalé, jusqu'à atteindre un spectre plat pour une position parfaitement connue (distribution de Dirac spatiale).



3. On sort du programme de L2, donc il faudrait se contenter de dire qu'on peut définir une moyenne sans donner de formule.

Remarque

Il existe une inégalité analogue à celle d'Heisenberg mais pour le temps et l'énergie (obtenue en faisant une TF temporelle et non pas spatiale) :

$$\boxed{\Delta t \Delta \mathcal{E} \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}} \tag{39.5}$$

Ce principe stipule donc qu'on ne peut pas connaître de façon infiniment précise la position et la vitesse d'une particule, et qu'il faut donc faire un compromis. Ce résultat tout à fait contre-intuitif, qui ne trouve aucun équivalent en physique classique, a été l'objet de nombreuses querelles entre Bohr et Einstein notamment [4].

Ordre de grandeur

Dans la vie courante, cette inégalité est très rarement gênante. En effet, que je me précipite sur des crêpes avec une incertitude sur la vitesse $\Delta v = 0.001$ m/s sachant que je pèse 80 kg, on peut espérer connaître ma position avec une incertitude $\Delta x = 7\,\mathrm{e} - 34$ m.

En revanche, pour un électron autour d'un atome, en prenant une incertitude sur la vitesse $\Delta v = 10^5$ m/s, on peut espérer connaître sa position avec une précision $\Delta x = 10^{-10}$ m, ce qui est de l'ordre de grandeur de la taille de l'atome. La notion de trajectoire n'a donc plus aucun sens pour des objets quantiques.

Stabilité de la matière

on peut carrément justifier la stabilité de la matière grâce à l'inégalité d'Heisenberg !

Pour cela, considérons un électron orbitant autour d'un proton. Il est donc dans un potentiel $V(r) = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ et possède une énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \dfrac{p^2}{2m}$. Son énergie totale est donc $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + V(r)$.

On suppose que $\Delta x \simeq r_0$. Alors d'après l'inégalité d'Heisenberg, $\Delta p > \dfrac{\hbar}{2r_0}$. On a alors $\mathcal{E}_c > \dfrac{\hbar^2}{2mr_0^2}$ donc

$$\mathcal{E} > \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Il existe donc une borne inférieur pour l'énergie, qui est minimale quand $r_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \simeq 10^{10}$ m et qui vaut $\mathcal{E} = -\dfrac{m}{2\hbar^2}\left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \simeq 13.6$ eV. On retrouve la constante de Rydberg donc c'est bien cohérent.

3 Dynamique de la fonction d'onde

3.1 Équation de Schrödinger

On considère le mouvement d'une particule quantique de masse m non relativiste dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$. La particule est en interaction avec d'autres systèmes physiques, ce qui se traduit par une énergie potentielle $V(\overrightarrow{r}, t)$. L'équation donnant l'évolution dans le temps et l'espace de la fonction d'onde ψ est **l'équation de Schrödinger** :

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\overrightarrow{r}, t) + V(\overrightarrow{r}, t)\psi(\overrightarrow{r}, t)} \tag{39.6}$$

4. Einstein s'amusait à construire des expériences de pensée visant à mettre à défaut ce principe et Bohr s'amusait à trouver la faute de raisonnement. Un exemple amusant est celui de l'expérience de l'horloge qui émet un photon dont on connaît précisément le temps d'émission ainsi que son énergie, en pesant l'horloge avant et après l'émission. Bohr arrive à s'en sortir en se servant de la relativité d'Einstein, la propre théorie de celui qui pose le problème !

Cette équation est un monument de la physique, posé comme postulat par Erwin Schrödinger en 1925. Elle ne se démontre à l'époque pas, puisque c'est un postulat, cependant aujourd'hui on la dérive comme une limite à vitesses non relativistes de l'équation de Dirac (1928). C'est la validation expérimentale qui donne sa force à cette équation.

Origine de l'expression :
Une fois établi le parallèle entre l'optique et la mécanique hamiltonienne (c'est-à-dire la partie non triviale du raisonnement), la fin de la dérivation est relativement élémentaire. En effet, l'équation d'onde satisfaite par l'amplitude spatiale d'une onde monochromatique de pulsation ω fixée dans un milieu d'indice n lentement variable s'écrit :

$$\left(\Delta + \frac{n^2\omega^2}{c^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0$$

On introduit le nombre d'onde k dans le milieu d'indice n, tel que :

$$k^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}$$

On obtient alors l'équation de Helmholtz :

$$(\Delta + k^2)\psi(\overrightarrow{r}) = 0$$

La longueur d'onde dans le milieu est définie par $\lambda = 2\pi/k$. L'équation de Helmholtz se réécrit :

$$\left(\Delta + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)\psi(\overrightarrow{r}) = 0$$

On utilise alors la relation de de Broglie pour une particule non relativiste, pour laquelle la quantité de mouvement $p = mv$:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2v^2}{h^2}$$

Or, l'énergie cinétique s'écrit pour une particule non relativiste :

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - V(\overrightarrow{r})$$

d'où l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left[\Delta + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - V(\overrightarrow{r})\right)\right]\psi(\overrightarrow{r}) = 0$$

En introduisant le quantum d'action $\hbar = h/2\pi$, on la met sous la forme habituelle :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\overrightarrow{r}) + V(\overrightarrow{r})\psi(\overrightarrow{r}) = E\psi(\overrightarrow{r})$$

Il ne reste plus qu'à réintroduire le temps t en explicitant la dépendance temporelle pour une onde monochromatique, puis en utilisant la relation de Planck-Einstein $E = \hbar\omega$:

$$\psi(\overrightarrow{r}, t) = \psi(\overrightarrow{r})\mathrm{e}^{-i\omega t} = \psi(\overrightarrow{r})\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

On obtient finalement l'équation de Schrödinger générale :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\overrightarrow{r}, t) + V(\overrightarrow{r})\psi(\overrightarrow{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\overrightarrow{r}, t)$$

Propriétés :

- Déterministe : si on connaît exactement le système à l'instant t_0, on le connaît $\forall t$, cependant cela ne va à l'encontre de l'aspect probabiliste, comme on l'a vu, puisque la partie probabiliste intervient à la mesure.
- Linéaire : On a donc accès au doux et glorieux principe de superposition, et à la décomposition en OPPH !

On voit que cette équation remplit le rôle de 2nde loi de Newton dans le cadre de la mécanique ondulatoire, et ça tombe bien parce qu'elle a les même propriétés ! Cependant là où elle diffère pas mal de Newton c'est dans l'apparition d'une structure diffusive, mais ce sont des détails que nous traiterons plus tard.

Principe de superposition

Pour toute paire de solutions de l'équation 41.1 ψ_1 et ψ_2, et pour tout complexe α, $\Psi = \alpha\psi_1 + \psi_2$ est solution de l'équation 41.1. Ce principe peut, dans des conditions mathématiques non détaillées ici, s'appliquer aussi pour les somme continues $\Psi(\overrightarrow{r}, t) = \int \psi(\overrightarrow{r}, t, k)\mathrm{d}k$.

3.2 Application à la particule libre

Définition : On appelle particule libre une particule quantique évoluant dans le vide sans interaction. On a alors $V = 0$. On se place aussi dans le cas unidimensionnel, mais fondamentalement ça change pas grand chose. On peut alors écrire l'équation de Schrödinger comme :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) \tag{39.7}$$

L'idée est maintenant similaire à celle que l'on a développé en résolvant l'équation de la corde de Melde : on va séparer les variables.

$$\psi(x,t) = \phi(x)f(t) \tag{39.8}$$

Séparation de variables et validité mathématique

L'idée lorsqu'on utilise cette méthode est de se dire que, comme l'équation est linéaire, on peut décomposer n'importe quelle solution de l'équation dans une base complète d'un espace de Hilbert des fonctions de deux variables. Il se trouve qu'une classe de bases naturelle pour cet espace est le produit tensoriel de vecteurs de base de chacun des espaces de Hilbert (l'un des fonctions de x et l'autres des fonctions de t). Maintenant, si on revient à notre équation (sans second membre) linéaire on sait qu'en essayant ce produit de fonctions on pourra avoir une base de l'espace considéré puisque les fonctions propres d'un opérateur linéaire forment un famille de vecteurs libre et génératrice.

En bref, la raison pour laquelle on utilise très fréquemment cette méthode, c'est juste pour trouver une base de l'espace adéquate pour développer n'importe quelle solution.

Par injection dans l'équation de Schrödinger on obtient

$$i\hbar\phi(x)f'(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}f(t)\phi''(x) \tag{39.9}$$

On isole chaque dépendance, et par dépendences exclues on obtient directement l'égalité à la constante nommée E et de la dimension d'une énergie :

$$E = i\hbar\frac{f'}{f} = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\phi''}{\phi} \tag{39.10}$$

Ainsi on peut résoudre séparément les deux équations différentielles :

$$\begin{cases} f' + i\dfrac{E}{\hbar}f = 0 \\ \phi'' + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0 \end{cases} \tag{39.11}$$

On va alors poser les deux valeurs fondamentales :

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{E}{\hbar} \\ k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2} = \dfrac{2m\omega}{\hbar} \end{cases} \tag{39.12}$$

Alors il faut s'intéresser à trois cas :

- $E < 0$, alors on a des solutions divergentes en $\pm\infty$ ou nulles de la forme $\phi(x) = Fe^{kx} + Ge^{-kx}$, ce qui n'est pas cool, et physiquement pas intéressant.
- $E = 0$, alors $\phi(x) = ax + b$, alors $a = 0$ pour ne pas diverger en $\pm\infty$ et $b = 0$ pour pouvoir normaliser la fonction d'onde
- $E > 0$, dans ce ca là on a

$$\begin{cases} \phi(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} \\ f(t) = He^{i\omega t} \end{cases} \tag{39.13}$$

Finalement on obtient la forme générale des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger unidimensionelle à potentiel nul :

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{-i(kx+i\omega t)} \tag{39.14}$$

On appelle ces solutions les ondes planes progressives harmoniques de fonction d'onde, ou OPPH. Une OPPH, en tant que solution élémentaire de l'équation de Schrödinger, est un outil mathématique utile. On peut en effet construire, par superposition d'états stationnaires (OPPH), une fonction d'onde sous la forme d'un paquet d'onde, qui pourra être normalisée correctement et qui permettra de représenter une particule quantique unique.

3.3 Propriété de l'OPPH de matière

On voit par analyse dimensionnelle que ω est l'inverse d'un temps. D'après la formule de Planck $E = \hbar\omega$, E est une énergie. Il s'agit de l'énergie de la particule libre. On voit de plus que k a la dimension d'un nombre d'onde, ce qui en réalité nous donne une relation de dispersion :

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{39.15}$$

On en déduit la vitesse de phase et la vitesse de groupe. La vitesse de phase dépend e k, donc cette propagation est dispersive !

$$\begin{cases} v_\phi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\hbar k}{2m} \\ v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{\hbar k}{m} \end{cases} \tag{39.16}$$

Une telle OPPH a une probabilité de présence uniforme. Ainsi, de la même manière que l'OPPH en optique n'est qu'un outil, ceci n'est qu'un outil pour faire des calculs et des modélisations.

3.4 Paquet d'onde quasi monochromatique : propagation et dispersion

✍ Sanz, j'Intègre, chapitre 33 (PC) ou p.826 (MP).

Envisageons la propagation d'une superposition d'OPPH de pulsation et de vecteur d'onde proche de ω_0 et k_0, toutes dans le même sens, avec une dispersion initiale de $\delta k \ll k_0$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_{k_0-\delta k/2}^{k_0+\delta k/2} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}\mathrm{d}k \\ &= e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\delta k/2}^{+\delta k/2} A(k_0+k)e^{i((k-k_0)x-(\omega(k_0+k)-\omega_0)t)}\mathrm{d}k \\ &= e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\delta k/2}^{+\delta k/2} A(k_0+k)e^{i(k-k_0)(x-v_gt)}\mathrm{d}k \qquad \text{à l'ordre 1}\end{aligned} \tag{39.17}$$

Et là, on est heureux, on voit que le paquet se propage à la vitesse $v_g = \left.\dfrac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0}$. C'est cette vitesse là qui se rapproche de la vitesse classique, et donc c'est cette vitesse là qu'il faut prendre en compte, pas celle de phase.

4 Particule dans un potentiel constant par morceaux

Dans toute cette section on va considérer un potentiel constant par morceaux, et on va résoudre l'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde indépendante du temps. Ce que cela cache, c'est que l'on a déjà séparé les variables, et que la résolution sur le temps est **toujours la même**, parce que le potentiel est indépendant du temps. On a alors à résoudre :

$$\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\phi(x) = 0 \tag{39.18}$$

On notera l'expression usuelle de cette équation : $\hat{H}\phi = E\phi$: on cherche donc une fonction propre du hamiltonien de Schrödinger.

4.1 Potentiel constant

C'est la même chose que l'OPPH, sauf que on fait $E := E - V$.

4.2 Marche de potentiel

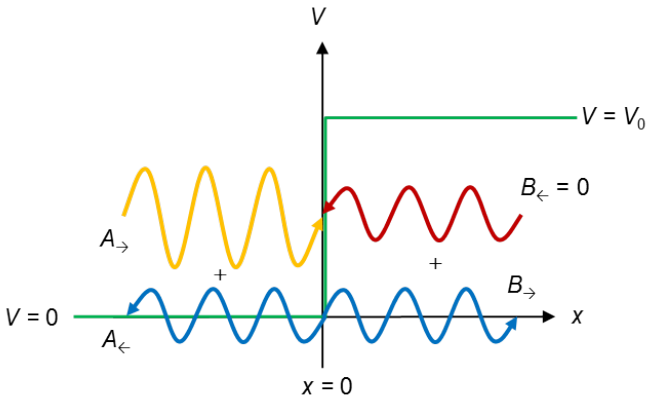


FIGURE 39.1 – Le schéma de la situation.

Dans le cas classique, une barrière de potentielle est infranchissable si on a une énergie plus faible, on rebondi, et est totalement franchie si on a une énergie plus grande, on passe. Ici on va voir que c'est pas si simple...

Résolution de l'équation différentielle

On divise l'espace en deux parties, une à $x > 0$ au potentiel V_0 et une à $x < 0$ au potentiel nul. On peut alors écrire la solution comme une superposition de deux ondes, une dans chaque demi-espace :

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \left(A_{\rightarrow} e^{ik_1 x} + A_{\leftarrow} e^{-ik_1 x}\right) & x < 0 \\ \psi_2(x) = \left(B_{\rightarrow} e^{ik_2 x} + B_{\leftarrow} e^{-ik_2 x}\right) & x > 0 \end{cases} \tag{39.19}$$

où 1 et 2 indiquent les deux régions de l'espace et les flèches indiquent la direction (le signe) du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. La valeur de la norme de ce dernier est d'ailleurs :

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2} \\ k_2 = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2} \end{cases} \tag{39.20}$$

Deux cas peuvent alors émerger dans la résolution, en fonction de si $E < V_0$ ou l'inverse. Dans le cas où $E > V_0$, il y a passage de la barrière par une onde, et on discute de cela plus bas. Dans le cas où $E < V_0$, l'onde dans la barrière est une exponentielle décroissante (la partie croissante étant divergente, on la prend nulle), qui pénètre la barrière avec une certaine profondeur, donnée par $E - V_0$. On appelle cette onde une onde **évanescente**.

Condition aux limites

Afin de respecter les conditions aux limites, il faut avoir

$$\begin{cases} \psi_1(0) = \psi_2(0) \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x}(0) = \dfrac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x}(0) \end{cases} \tag{39.21}$$

Ce qui donne quand on insère les expressions que l'on vient de trouver

$$\begin{cases} (A_{\rightarrow} + A_{\leftarrow}) = (B_{\rightarrow} + B_{\leftarrow}) \\ k_1(A_{\rightarrow} - A_{\leftarrow}) = k_2(B_{\rightarrow} - B_{\leftarrow}) \end{cases} \tag{39.22}$$

Transmission et réflexion

Dans le cas où $E > V_O$, il y a une onde transmise et une onde réfléchie. La première remarque que l'on peut faire, c'est que physique, si une onde arrive sur la barrière, elle peut soit être réfléchie soit être transmise, mais elle ne peut pas faire revenir une onde depuis l'autre côté. Ainsi on a

$$B_{\leftarrow} = 0 \tag{39.23}$$

On peut alors définir les coefficients de réflexion et de transmission comme les rapports entre l'amplitude incidente et l'amplitude de chaque onde émise en retour. On suppose ici que $V_0 > 0$.

$$\begin{cases} t = \dfrac{B_{\rightarrow}}{A_{\rightarrow}} & = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ r = \dfrac{B_{\leftarrow}}{A_{\rightarrow}} & = \dfrac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{cases} \tag{39.24}$$

Pour ce qui est de la transmission en probabilité, il faut maintenant regarder les rapport des quantités $J = |A|^2 \dfrac{\hbar k}{m}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \sqrt{T} = \dfrac{2\sqrt{k_1 k_2}}{k_1 + k_2} \\ \sqrt{R} = \dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \end{cases} \tag{39.25}$$

4.3 Puits de potentiel

4.3.1 Puits infini

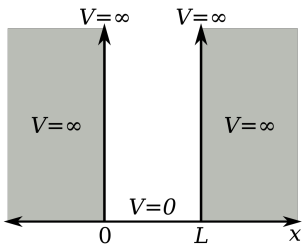


FIGURE 39.2 – Le potentiel est nul dans la boîte et infini ailleurs

Pour le cas de la particule dans une boîte unidimensionnelle de longueur L, le potentiel est zéro à l'intérieur de la boîte, et vaut l'infini en $x = 0$ et $x = L$. Pour la région à l'intérieur de la boîte $V(x) = 0$ et l'équation se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

La solution générale est

$$\psi = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$$

Maintenant, pour trouver les solutions spécifiques pour le problème d'une particule dans un puits de potentiel, nous devons spécifier les conditions aux limites et trouver les valeurs de A et de B qui satisfont ces conditions. Premièrement, on impose ψ égale zéro pour $x = 0$ et $x = L$. Ces conditions peuvent être interprétées comme une valeur infinie du potentiel en ces positions, donc il est impossible de retrouver la particule à ces endroits. Ainsi, la probabilité de retrouver la particule, soit $|\psi|^2$, doit être petite dans ces régions et diminue lorsque le potentiel augmente. Dans le cas d'un potentiel infini, $|\psi|^2$ doit être nulle, d'où ψ doit être nulle dans cette région. En résumé,

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

Nous trouvons que $B = 0$ (car $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$). Il s'ensuit que la fonction d'onde doit être de la forme :

$$\psi = A\sin(kx)$$

et en $x = L$ nous trouvons :

$$\psi = A\sin(kL) = 0$$

Une solution est $A = 0$, cependant cela impliquerait que $\psi = 0$ en tout point (*i.e.* la particule n'est pas dans la boîte) et peut être mise à l'écart. Si $A \neq 0$ alors $\sin(kL) = 0$, ce qui est seulement vrai quand :

$$kL = n\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc} \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

(remarquez que $n = 0$ ne convient pas car alors ψ=0 en tout point, correspondant au cas où la particule n'est pas dans la boîte). Les valeurs négatives de n sont aussi négligées, car elles changent simplement le signe de $\sin(nx)$. Maintenant afin de trouver A, on utilise le fait que la probabilité de trouver la particule quelque part est égale à 1. D'où la valeur de l'intégrale de $|\psi|^2$ sur l'axe x :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2 kx \, dx = |A|^2 \, \frac{L}{2}$$

d'où

$$|A| = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (8)$$

Ainsi, A peut être tout nombre complexe de norme $\sqrt{2/L}$; ces différentes valeurs de A correspondent au même état physique. On choisit donc $A = \sqrt{2/L}$ pour simplifier.

Finalement, en remplaçant les résultats de l'équation 7 et 8 dans l'équation 3 on obtient la solution complète pour le problème d'une particule unidimensionnelle dans une boîte :

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

Remarquons que, comme mentionné précédemment, seuls des niveaux d'énergie « quantifiés » sont possibles. Aussi, puisque n ne peut être nul, la plus basse énergie est aussi non nulle. Cet état fondamental d'énergie non nulle peut être expliqué par le principe d'incertitude. Puisque la particule est astreinte à se déplacer dans une région finie, la variance dans ses positions est majorée. Ainsi selon le principe d'incertitude la variance de l'impulsion (quantité de mouvement) de la particule ne peut être nulle, la particule possède donc une certaine quantité d'énergie qui augmente que quand la longueur de la boîte, L, diminue.

Aussi, puisque ψ est composée d'ondes sinusoïdales, pour quelques valeurs de n supérieures à un, il y a des régions dans la boîte pour lesquels ψ ainsi que ψ^2 sont égales à 0, indiquant ainsi que pour ces niveaux d'énergie, des nœuds existent dans la boîte où la probabilité de trouver une particule est nulle.

4.3.2 Puits fini

Là ça devient tout de suite plus compliqué, on a des ondes qui bavent de chaque côté, mais on peut le faire de manière qualitative et être heureux.

4.4 Marche de potentiel

✍ LP41

Le cas est celui d'une marche, mais on la passe deux fois, et on peut la traverser sans forcément être au dessus du potentiel de la barrière. C'est ce que l'on appelle l'effet tunnel.

LP 40

Confinement d'une particule et quantification de l'énergie

Commentaires du jury

- 2017 : Cette leçon est une leçon de physique et ne doit donc pas se limiter à des calculs.
- 2016 : Le lien entre le confinement et la quantification doit être explicité.
- 2015 : Cette leçon peut être l'occasion de développer des arguments qualitatifs et des calculs simples permettant de donner des ordres de grandeur dans des domaines divers de la physique avant d'envisager des applications élaborées.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Confinement de l'électron et quantification de l'énergie. Exemples.
- 2011, 2012, 2013 : La justification des conditions aux limites est essentielle.
- 2008 : Le modèle de Bohr a maintenant une importance surtout historique. Il est évidemment possible de l'aborder mais il n'est pas un passage obligé pour aborder la quantification.
- 2005 : Le jury n'attend pas un exposé purement historique.
- 1998 : Si les détails des calculs peuvent être omis, les bases de ceux-ci, ainsi que la signification physique des conditions aux limites imposées au système doivent être explicitées. Par ailleurs, le jury attend la présentation d'applications significatives et bien comprises.

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Physique tout-en-un PC*, **Sanz** ⟶
- ✍ *Mécanique quantique*, **Cohen-Tanoudji, Diu, Laloë** ⟶
- ✍ *Physique quantique tome 1, fondements*, **Le Bellac** ⟶
- ✍ *12 leçons de mécanique quantique*, **Basdevant** ⟶
- ✍ *Mécanique quantique*, **Feynman** ⟶
- ✍ *Mécanique quantique tome 1*, **Aslangul** ⟶
- ✍ *Mécanique quantique*, **Basdevant, Dalibard** ⟶

Prérequis

- ➢ Schrödinger + Heisenberg
- ➢ Ondes stationnaires
- ➢ Mécanique du point (orbite)
- ➢ Électrostatique

Expériences

☕

1 Mise en évidence de la quantification . . . 545
1.1 Spectres de raies : exemple de l'hydrogène . . . 545
1.2 Modèle de Bohr (1913) . . . 546
1.3 Expérience de Franck et Hertz (1914) . . . 547
2 Le confinement à l'origine de la quantification . . . 548
2.1 État lié, état de diffusion . . . 548
2.2 Approche qualitative . . . 549
2.3 La description ondulatoire . . . 549
2.4 Puits infini . . . 549
2.5 Puits fini . . . 551
2.6 Potentiel harmonique . . . 553
3 Applications . . . 553
3.1 Absorption de rayonnement électromagnétique . . . 553
3.2 Ions moléculaires colorés . . . 553
3.3 Atome d'hydrogène . . . 554
3.4 La molécule d'ammoniac . . . 556
3.5 Semi-conducteurs . . . 557

Introduction

1 Mise en évidence de la quantification

1.1 Spectres de raies : exemple de l'hydrogène

✍ Aslangul p149 + Basdevant p410 + FLTCLD p353

Spectre de la lampe à hydrogène

✍ FLTCLD p353 ⏲

Observer le spectre d'une lampe à hydrogène avec un spectromètre. On constate l'existence de raies [a] qui marquent la discontinuité du spectre.

a. Si on veut parler d'élargissement des raies ou si on a des questions dessus, consulter ✍ Aslangul p152 ainsi que ✍ FLTCLD p363.

Depuis Max Planck et Albert Einstein, on sait qu'on peut associer une énergie à une longueur d'onde avec la formule $\mathcal{E} = \dfrac{hc}{\lambda}$. Ainsi, vu qu'un spectre de raies ne présente qu'un nombre discret de longueurs d'onde, cela implique un nombre discret de transitions entre niveaux d'énergie et donc un nombre discret de niveaux énergétiques : on a donc une **quantification** des transitions énergétiques de l'hydrogène.

Pour ce qui est de l'hydrogène, ses 4 raies dans le visible ont été mesurées précisément par le suédois Anders Jonas Angström en 1862 en étant précisément identifiées dans le spectre de la lumière solaire. En 1885, Johann Jakob Balmer parvient à établir une relation empirique entre les longueurs d'onde de ces 4 raies et qui, pour la première fois, fait intervenir un indice entier. Cette relation a été généralisée par Rydberg en 1888 pour prendre en compte la découverte des autres raies de l'hydrogène pour donner :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = \mathrm{Ry}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \qquad \text{avec } n, p \in \mathbb{N}} \tag{40.1}$$

avec $\mathrm{Ry} \simeq 1.096\,78 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$ la constante de Rydberg. Le succès de cette formule est notamment dû à sa capacité à prévoir l'existence de nouvelles raies, et on remarque que la présence d'indices entiers met en valeur la quantification des transitions énergétiques de l'hydrogène. D'ailleurs, on donne un nom à chaque série pour chaque n fixé :

n	Nom de la série
1	Série de Lyman
2	Série de Balmer
3	Série de Paschen
4	Série de Brackett
5	Série de Pfund
6	Série de Humphreys
7	Série de Hansen-Strong

Les raies dans le visible correspondent à $n = 2$ et donc à la série de Balmer.

Remarque

Notons qu'on peut généraliser la formule de Rydberg pour d'autres atomes avec la formule de Ritz (1908) :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_p} \tag{40.2}$$

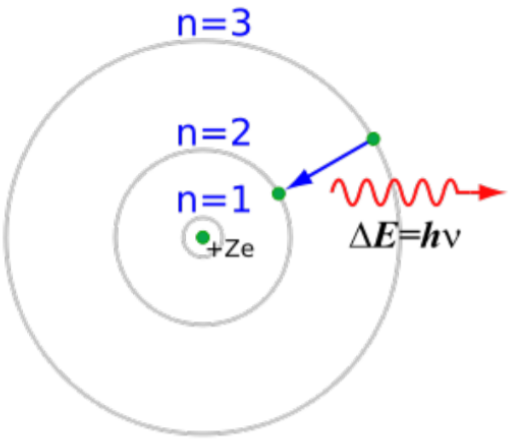
où $T_n = \dfrac{n^2}{\mathrm{Ry}}$ pour l'atome d'hydrogène.

1.2 Modèle de Bohr (1913)

✍ BFR + Aslangul p158

Après que Thomson ait découvert l'électron en 1896 et que Rutherford ait découvert le proton en 1909, le nombreux modèles de l'atomes ont été proposés. Mis à part le modèle du 'plum pudding', ces modèles ont en commun la représentation d'électrons orbitant autour d'un noyau fait de protons, à la manière d'une planète orbitant autour de son étoile. Cependant, cette représentation ne peut être la bonne car l'électron accéléré rayonne forcément de l'énergie [1] et donc devrait finir par tomber sur le noyau. De pls, cela ne permet pas d'expliquer l'observation de raies car tous les rayons d'orbite sont possibles et donc il est difficile d'avoir une quantification de quoi ce soit.

Pour remédier à ce problème, Bohr proposa un nouveau modèle en rassemblant la formule de Rydberg (ou Ritz pour les atomes autres que l'hydrogène), le photon d'Einstein et le modèle planétaire de Perrin. Selon ce modèle, un atome d'hydrogène par exemple rayonne de la lumière en émettant des photons, qui correspondent à des quanta d'énergie, lorsqu'il passe d'un état d'énergie $\mathcal{E}_i$ à un autre état $\mathcal{E}_f$, plus stable.



En écrivant la conservation d'énergie, on obtient

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_f + h\nu \iff \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f = \frac{hc}{\lambda} = hc\mathrm{Ry}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \tag{40.3}$$

On trouve donc des niveaux d'énergie **quantifiés** :

$$\boxed{\mathcal{E}_n = -\frac{hc\mathrm{Ry}}{n^2} = -\frac{13.6\ \mathrm{eV}}{n^2} \qquad \text{avec } n \in \mathcal{N}^*} \tag{40.4}$$

On peut alors en déduire une quantification du moment cinétique et donc du rayon des orbites de l'électron. En effet, si on suppose que l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon R autour du noyau et qu'il n'est soumis qu'au potentiel de Coulomb, le PFD donne

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \iff mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \iff 2\mathcal{E}_c = -\mathcal{E}_p \tag{40.5}$$

On obtient donc que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\mathcal{E}_p$.
Le TMC assure que le moment cinétique $L = mvR$ de l'électron est constant et avec l'expression de mv^2 on déduit que $Lv = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$. On a donc

$$\mathcal{E} = -\mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\right)^2 \tag{40.6}$$

Puisque l'énergie $\mathcal{E}$ est en réalité quantifiée, on en déduit que le moment cinétique L et on obtient

$$L_n^2 = -\frac{1}{2}m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{\mathcal{E}_n} = +\frac{1}{2}m\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{n^2}{hc\mathrm{Ry}} \tag{40.7}$$

1. Cf ✍ LP30 - Rayonnement dipolaire électrique, qui donne la formule de Larmor pour la puissance rayonnée par l'électron : $\mathcal{P} = \frac{e^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$.

$$\boxed{L_n = n \times \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2hc\mathrm{Ry}}} = n\hbar \qquad \text{avec } n \in \mathcal{N}^*} \tag{40.8}$$

où la mesure expérimentale de Ry a permis de constater que $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2hc\mathrm{Ry}}} \simeq 0.16h \simeq \hbar$ ce qui a permis de supposer $L_n = n\hbar$ Or

$$mRv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \iff L^2 = m^2R^2v^2 = mR\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{40.9}$$

donc

$$R_n = \frac{L_n^2}{m}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} = \frac{(n\hbar)^2}{m}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \tag{40.10}$$

On obtient finalement la quantification du rayon de l'orbite de l'électron :

$$\boxed{R_n = n^2 a_0 \qquad \text{avec le rayon de Bohr } a_0 = \frac{\hbar^2}{m}\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \simeq 52.9 \text{ pm}} \tag{40.11}$$

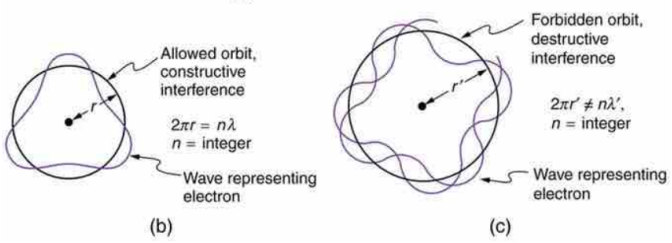
Remarque

On précise de nouveau que cette formule est valable pour l'atome d'hydrogène. Pour les autres atomes, il faut utiliser la formule de Ritz.

Cependant, bien que le modèle donne lieu à une formule d'énergie quantifiée en très bon accord avec l'expérience et mette en évidence un état d'énergie minimale, il ne propose cependant aucune explication conceptuelle à la quantification (car il repose sur la formule de Rydberg/Ritz qui est empirique) et suppose que l'électron passe d'une orbite à l'autre instantanément lors d'une absorption ou émission de photon, ce qui impliquerait une vitesse infinie.

Remarque

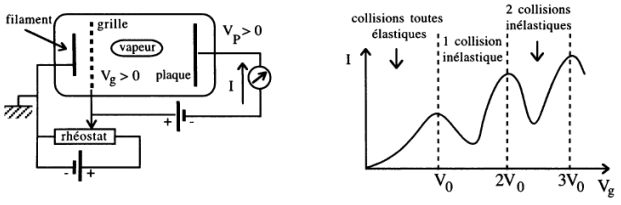
Il fallut attendre que Louis de Broglie propose en 1923 d'étendre la notion de dualité onde-corpuscule à la matière et donc de considérer l'électron non pas comme une particule mais comme une onde. La quantification devient alors la conséquence d'une condition d'interférences constructives qui impose $2\pi R_n = n\lambda_{\mathrm{dB}}$.



1.3 Expérience de Franck et Hertz (1914)

✍ Basdevant p17 + Aslangul p174

Il n'a cependant pas fallu attendre 1923 et de Broglie pour vérifier expérimentalement les prévisions théoriques du modèle de Bohr. Ainsi, Franck et Hertz étudièrent en 1914 l'interaction d'électrons accélérés avec une vapeur atomique. Ils contrôlent l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{inc}}$ des électrons qu'ils envoient et ils mesurent l'énergie $\mathcal{E}_{\mathrm{sortie}}$ des électrons qui ont traversés la vapeur.



Ils ont alors observés les résultats suivants :

- Tant que $\mathcal{E}_{\text{inc}} < 4.9$ eV, les collisions dans la vapeur sont élastiques et $\mathcal{E}_{\text{sortie}} = \mathcal{E}_{\text{inc}}$.
- Pour $\mathcal{E}_{\text{inc}} = 4.9$ eV, on constate que $\mathcal{E}_{\text{sortie}} \simeq 0$.
- Pour $\mathcal{E}_{\text{inc}} > 4.9$ eV, une fractions des électrons ressortent avec une énergie $\mathcal{E}_{\text{sortie}} = \mathcal{E}_{\text{inc}} - 4.9$ eV tandis que les autres conservent leur énergie (donc $\mathcal{E}_{\text{sortie}} = \mathcal{E}_{\text{inc}}$). On observe également un rayonnement ultraviolet à $\lambda = 253.7$ nm, qui comme par hasard correspond à $\dfrac{hc}{\lambda} = 4.9$ eV.

Ces résultats confirment le modèle de Bohr : deux états d'énergie sont séparés de 4.9 eV, les électrons d'énergie inférieures ne peuvent pas exciter les atomes de mercure tandis que électrons dont l'énergie est supérieure à ce seuil fournissent ces quanta d'énergie aux atomes, qui passent alors dans un état excité. En se désexcitant les atomes de mercure émettent un rayonnement ultra-violet correspondant exactement à la différence d'énergie entre les niveaux énergétiques.

On va maintenant expliquer plus en détail d'où vient cette quantification.

2 Le confinement à l'origine de la quantification

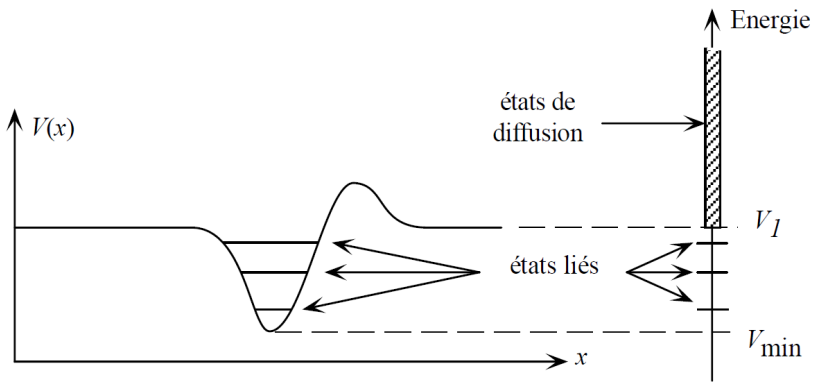
2.1 État lié, état de diffusion

En mécanique classique, on peut distinguer deux régimes de mouvement d'une particule dans un potentiel (tel que $V(\infty) = V_1$) :

- **l'état libre** : lorsque E > V1, la particule a assez d'énergie pour s'extraire du champ de force.
- **l'état lié** : si E < V1, alors sa trajectoire reste confinée dans la zone accessible.

Notons qu'en mécanique classique, l'énergie prend des valeurs continues.

Maintenant, prenons une onde confinée dans un espace de largeur a. Cette onde va interférer avec elle même à cause des réflexions successives aux limites de cette espace (par exemple, la corde de Melde ou la fibre à saut d'indice). Ainsi, seules certaines longueurs d'ondes vont donner lieu à des interférences constructives et donc exister. Notons que la condition d'interférence constructive dépend de la taille du puit mais aussi de sa forme et du type de conditions aux limites. **La quantification est donc un phénomène purement ondulatoire** et non pas quantique. Il apparaît lorsqu'on impose certaines conditions aux limites, c-à-d lorsque l'on confine l'onde à une région limitée de l'espace. Et qui dit quantification de la longueur d'onde dit quantification de l'énergie.



Ainsi, on peut de nouveau distinguer en mécanique quantique deux régimes de mouvement :

- les état liés sont de carré sommable/normalisés ($\int |\psi|^2 \, \mathrm{d}^3\overrightarrow{r} = 1$), ce qui signifie que la particule associée est quelque part dans l'espace considéré. On peut montrer que cela ne se produit que pour un ensemble discret de valeurs d'énergie $V_{\min} < E_n < V_1$
- les états de diffusion correspondent aux solutions obtenues pour des valeurs continues de $E > V_1$. Asymptotiquement, ce sont des ondes planes et ne représentent pas un état physique, elles sont utilisées pour faire des paquets d'ondes.

2.2 Approche qualitative

L'inégalité de Heisenberg donne une limite inférieure aux valeurs possibles pour l'impulsion. En effet, si on prend $\Delta x \Delta p > \dfrac{\hbar}{2}$, une incertitude sur x (donc un confinement) donne une valeur minimale sur p. Cependant il s'agit là d'une rapide analogie, qu'il peut être bon de connaître, mais qui ne fait pas office de preuve.

2.3 La description ondulatoire

Reprendre toutes les notations de la ✍ LP39.

On va introduire l'outil privilégié de la mécanique quantique, la fonction d'onde. Le cas que l'on va considérer est celui d'un puits de potentiel d'abord infini puis fini.

2.4 Puits infini

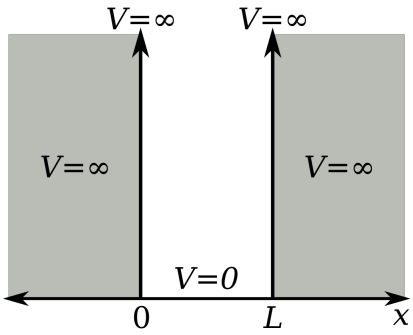


FIGURE 40.1 – Le potentiel est nul dans la boîte et infini ailleurs

Pour le cas de la particule dans une boîte unidimensionnelle de longueur L, le potentiel est zéro à l'intérieur de la boîte, et vaut l'infini en $x = 0$ et $x = L$. Pour la région à l'intérieur de la boîte $V(x) = 0$ et l'équation se réduit à :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \tag{40.12}$$

La solution générale est

$$\psi = A\sin(kx) + B\cos(kx) \tag{40.13}$$

$$E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} \tag{40.14}$$

Maintenant, pour trouver les solutions spécifiques pour le problème d'une particule dans un puits de potentiel, nous devons spécifier les conditions aux limites et trouver les valeurs de A et de B qui satisfont ces conditions. Premièrement, on impose ψ égale zéro pour $x = 0$ et $x = L$. Ces conditions peuvent être interprétées comme une valeur infinie du potentiel en ces positions, donc il est impossible de retrouver la particule à ces endroits. Ainsi, la probabilité de retrouver la particule, soit $|\psi|^2$, doit être petite dans ces régions et diminue lorsque le potentiel augmente. Dans le cas d'un potentiel infini, $|\psi|^2$ doit être nulle, d'où ψ doit être nulle dans cette région. En résumé,

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{40.15}$$

Nous trouvons que $B = 0$ (car $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$). Il s'ensuit que la fonction d'onde doit être de la forme :

$$\psi = A\sin(kx) \tag{40.16}$$

et en $x = L$ nous trouvons :

$$\psi = A\sin(kL) = 0 \tag{40.17}$$

Une solution est $A = 0$, cependant cela impliquerait que $\psi = 0$ en tout point (*i.e.* la particule n'est pas dans la boîte) et peut être mise àl'écart. Si $A \neq 0$ alors $\sin(kL) = 0$, ce qui est seulement vrai quand :

$$kL = n\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \tag{40.18}$$

$$\text{donc} \quad k = \frac{n\pi}{L} \tag{40.19}$$

(remarquez que $n = 0$ ne convient pas car alors ψ=0 en tout point, correspondant au cas où la particule n'est pas dans la boîte). Les valeurs négatives de n sont aussi négligées, car elles changent simplement le signe de $\sin(nx)$. Maintenant afin de trouver A, on utilise le fait que la probabilité de trouver la particule quelque part est égale à 1. D'où la valeur de l'intégrale de $|\psi|^2$ sur l'axe x :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2 kx \, dx = |A|^2 \, \frac{L}{2} \tag{40.20}$$

d'où

$$|A| = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{40.21}$$

Ainsi, A peut être tout nombre complexe de norme $\sqrt{2/L}$; ces différentes valeurs de A correspondent au même état physique. On choisit donc $A = \sqrt{2/L}$ pour simplifier.

Finalement, en remplaçant les résultats des équations 40.19 et 40.21 dans l'équation 40.14 on obtient la solution complète pour le problème d'une particule unidimensionnelle dans une boîte :

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{40.22}$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{40.23}$$

Remarquons que, comme mentionné précédemment, seuls des niveaux d'énergie « quantifiés » sont possibles. Aussi, puisque n ne peut être nul, **la plus basse énergie est aussi non nulle**. Cet état fondamental d'énergie non nulle peut être expliqué par le principe d'incertitude. Puisque la particule est astreinte à se déplacer dans une région finie, la variance dans ses positions est majorée. Ainsi selon le principe d'incertitude la variance de l'impulsion (quantité de

mouvement) de la particule ne peut être nulle, la particule possède donc une certaine quantité d'énergie qui augmente que quand la longueur de la boîte, L, diminue.

Aussi, puisque ψ est composée d'ondes sinusoïdales, pour quelques valeurs de n supérieures à un, il y a des régions dans la boîte pour lesquels ψ ainsi que ψ^2 sont égales à 0, indiquant ainsi que pour ces niveaux d'énergie, des nœuds existent dans la boîte où la probabilité de trouver une particule est nulle.

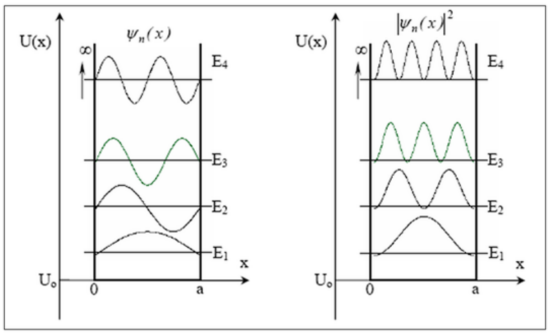


FIGURE 40.2 – La forme de la fonction d'onde dans un puits infini.

On peut faire une super analogie avec la corde vibrante, puisque dans le fond le principe est le même : on superpose des ondes propagatives et ça fait une onde stationnaire.

Corde de Melde

	Corde de Melde	Fonction d'onde
Solution stationnaire	$y(x,t) = f(x)g(t)$	$\phi(x,t) = \psi(x)\exp(-iEt/\hbar)$
Équation d'onde	$f'' + kf = 0$	$\psi'' + k\psi = 0$
Vecteur d'onde	$k = \dfrac{\omega}{C}$	$k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$
Conditions aux limites	$f(0) = f(L) = 0$	$\psi(0) = \psi(L) = 0$
Quantification	$k_n = \dfrac{n\pi}{L}$	$k_n = \dfrac{n\pi}{L}$

Cependant ici on a fait une grosse approximation, celle que le puit est infini. En réalité on sait que c'est faux, un potentiel infini ça n'existe pas.

2.5 Puits fini

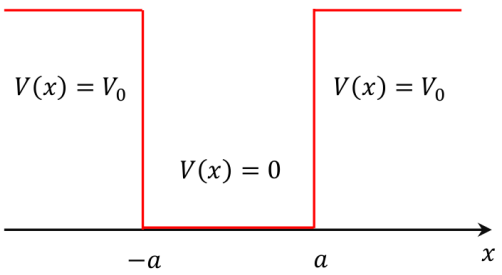


FIGURE 40.3 – Schéma du puits fini.

Typiquement un puits quantique fini c'est ce qui arrive quand on a une interaction à courte portée entre deux particules.

Dans la situation schématisée au dessus, les états liés sont les états pour lesquels $0 < E < V_0$.

I	II	III
$\psi'' - \alpha^2\psi = 0$	$\psi'' + k^2\psi = 0$	$\psi'' - \alpha^2\psi = 0$
$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0$	$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$	$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0$
$\psi = De^{\alpha x} + Ce^{-\alpha x}$	$A\cos(kx) + B\sin(kx)$	$Ee^{\alpha x} + Fe^{-\alpha x}$
$C = 0$		$E = 0$

Du fait de la discontinuité finie, il y a continuité jusqu'à ψ''.

Il y a deux types de solutions, les solutions paires et impaires.

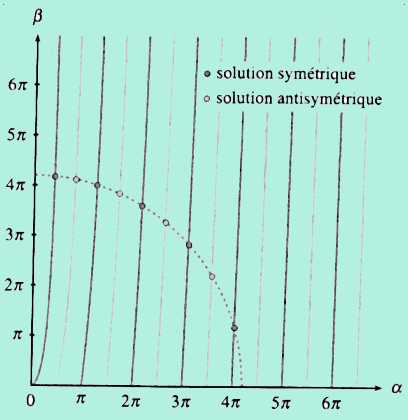
- **Paire :** $B = 0$, $D = F$ et $k\tan(ka) = \alpha$
- **Impaire :** $A = 0$, $D = -F$, et $k\,\mathrm{cotan}(ka) = -\alpha$

Dans tous les cas, l'égalité $k^2a^2 + \alpha^2a^2 = a^2\frac{2m}{\hbar}V_0 = cst$ est vraie par continuité de ψ' en a et $-a$, ce qui mène à l'apparition d'un cercle !

☕

Cercle avec géogébra

✍ `cercle.html` 🕒



☕

Puits fini en Python

✍ `puitsquantique1D.py` 🕒

```
python3 puitsquantique1D.py harmonique/carre/NH3/NH3reel
```

Les états accessibles, dit états liés, sont discrétisés, finis, et surtout sont quantifiés ! On peut les indexer sur le nombre de noeuds qu'ils ont !

Remarque : Pour $R < \frac{\pi}{2}$, *i.e.* $V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$, il n'y a qu'un seul état lié.

2.6 Potentiel harmonique

✍ `python3 puitsquantique1D.py harmonique`

Il est intéressant de montrer le cas d'un potentiel harmonique, et de montrer la forme des solution. On voit que la quantification est similaire, même si le potentiel change. C'est pour cela qu'on utilise pédagogiquement souvent le modèle carré, plus simple en terme de calculs.

3 Applications

3.1 Absorption de rayonnement électromagnétique

✍ Basdevant p.83

Le modèle nous donne une différence entre les niveaux d'énergie qui vaut au minimum : $\frac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}$.

- Un électron autour d'un noyau $r_0 = 1\,\text{Å}$, $m = 9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$: $\Delta E = 3.7 \times 10^1\,\text{eV}$, c'est un ordre grandeur plus grand que l'énergie d'une liaison covalente.
- Un proton dans un noyau : $r_0 = 1\,\text{fm}$, $m = 1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$: $\Delta E = 5.1 \times 10^1\,\text{MeV}$, on retrouve l'ordre de grandeur des énergies mises en jeu lors de réactions nucléaires de fission ou de fusion.

Si l'on veut revenir sur les spectres présentés au début de la leçon, on peut utiliser la formule de Planck-Einstein : $\Delta E = h\nu$, c'est à dire que l'absorption ou l'émission d'un photon correspond à une transition entre deux niveaux d'énergie. La plus petite transition possible (donc la plus grande transition possible est celle donnée précédemment, qui donne un rayonnement de $\lambda = 3.3 \times 10^1\,\text{nm}$, alors que l'on a observé des franges visibles. De plus, on a vu que les raies étaient plus rapprochées lorsque l'on augmente la longueur d'onde, alors que ce modèle prédit l'inverse (λ en $\frac{1}{n^2}$). Il faut attribuer cela au modèle simpliste que l'on a construit, les hypothèses de puits carré infini et même de puit carré ne sont pas justifiables pour l'atome d'hydrogène.

3.2 Ions moléculaires colorés

Le formalisme développé dans cette leçon permet d'expliquer la couleur de certains pigments constitués d'ions moléculaires linéaires. Dans ce genre de structure les liaisons se réarrangent pour donner quelque chose du genre

$$[CH_2 \overset{\cdots}{=} CH \overset{\cdots}{=} CH \overset{\cdots}{=} CH \overset{\cdots}{=} CH \overset{\cdots}{=} CH_2]^- \tag{40.24}$$

C'est une structure linéaire de n atomes de carbone distants de $d = 1.4\,\text{Å}$. On peut alors considérer que les $n+1$ électrons se déplacent indépendamment les uns des autres dans un puits de potentiel infini à une dimension de largeur $\ell_n = nd$. Pour expliquer les couleurs perçues il faut s'intéresser aux transitions possibles entre les niveaux d'énergie des ions. En réutilisant les résultats précédents on sait que les niveaux d'énergie possibles pour un électron sont donnés par :

$$\epsilon_k = k^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_n} \tag{40.25}$$

Cependant, le principe de Pauli limite à 2 le nombre d'électrons par niveau d'énergie. L'énergie de l'état fondamental de l'ion correspond donc à l'énergie minimale accessible avec les $n+1$ électrons répartis dans les niveaux d'énergie les plus bas possible :

$$\mathcal{E}_0 = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} 2\epsilon_k = \frac{\pi^2\hbar^2}{m\ell_n}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} k^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{m\ell_n}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{p^2}{4} = \frac{\pi^2\hbar^2}{24m\ell_n}(n+1)(n+2)(n+3) \tag{40.26}$$

On calcule de la même manière l'énergie du premier état excité :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_n}\left[\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right] = \mathcal{E}_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{8m\ell_n}[(n+3)^2-(n+1)^2] = \mathcal{E}_0 + \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_n}(n+2) \tag{40.27}$$

La transition entre le fondamental et le premier état excité est alors

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m\ell_n}(n+2) \tag{40.28}$$

Puisque $\Delta\mathcal{E} = h\dfrac{c}{\lambda}$, on obtient la longueur d'onde correspondant à la transition :

$$\boxed{\lambda_n = \frac{8cd^2m}{h}\frac{n^2}{n+2} = 64.6\frac{n^2}{n+2}\text{ nm}} \tag{40.29}$$

On obtient donc :

Longueur de la chaîne	Longueur d'onde absorbée	Couleur absorbée
$n \leq 7$	$\lambda \leq \lambda_7 = 351.7$ nm	UV $\Rightarrow$ incolore
$n = 9$	$\lambda_9 = 475.6$ nm	Bleu
$n = 11$	$\lambda_{11} = 601.2$ nm	Jaune orangé
$n = 13$	$\lambda_{13} = 730.0$ nm	Rouge
$n \geq 15$	$\lambda \geq \lambda_{15} = 885.0$ nm	IR $\Rightarrow$ incolore

Notons que pour les ions qui absorbent dans l'IR, il ne sont incolores *que pour la transition étudiée*. Il est tout à fait possible qu'une transition entre le fondamental et un état encore plus excité que $\mathcal{E}_1$ ait lieu, ce qui donne un $\Delta\mathcal{E}$ plus grand donc un λ absorbé plus petit. L'ion peut donc absorber dans l'IR pour une transition donnée mais quand même être coloré grâce à l'absorption de photons dans le visible via une autre transition.

3.3 Atome d'hydrogène

On modélise l'atome d'hydrogène par un électron de masse m_e placé dans le potentiel coulombien du proton supposé infiniment lourd :

$$V(r) = -\frac{K}{r} \quad \text{avec} \qquad K = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{40.30}$$

Le problème étant à symétrie sphérique, on cherche des solutions stationnaires de la forme

$$\psi_{k,l,m}(\overrightarrow{r}) = R_l(r)Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{40.31}$$

Grâce à l'équation de Schrödinger, on trouve que la partie radiale de la fonction d'onde vérifie l'équation suivante

$$ER_l(r) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{K}{r}\right)(R_l(r)) \tag{40.32}$$

En effectuant les changements de variable $\rho = \dfrac{r}{a_0}$ et $\epsilon = \dfrac{E}{E_I}$ avec $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e K} \simeq 5.3\times10^{-1}$ Å le rayon de Bohr et $E_I = \dfrac{m_e K^4}{2\hbar^2} \simeq 13.6$ eV, on obtient :

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\rho - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \epsilon\right)(R_l(\rho)) \tag{40.33}$$

Pour chaque valeur de l, cette équation admet un ensemble infini de solutions normalisables repérées par un entier n' :

$$R_{l,n'}(\rho) = \exp(\rho\sqrt{\epsilon})\rho^l Q_{n',l}(\rho) \tag{40.34}$$

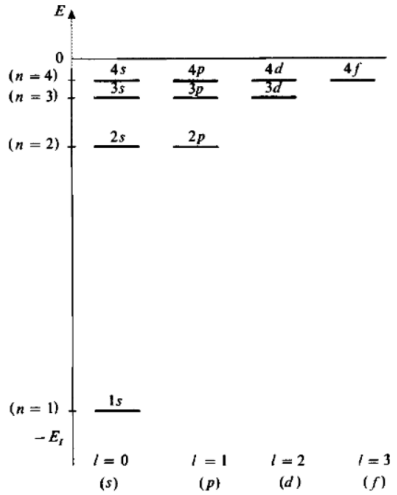
avec $Q_{n',l}$ est un polynôme de Laguerre de degré n'. Chaque solution est associée à une valeur particulière de ϵ :

$$\epsilon = \frac{1}{(n'+l+1)^2} \tag{40.35}$$

On peut donc conclure que chaque solution est caractérisée par trois nombres quantiques :

- $n = n' + l + 1 \in \mathbb{N}^*$ le nombre principal qui caractérise une couche électronique
- $l \in [\![0, n-1]\!]$ les sous-couches
- $m \in [\![-l, l]\!]$ les états d'une sous-couche.

La fonction d'onde correspondant à un triplet est unique mais son énergie ne dépend que du nombre quantique principal n via la formule $E_n = -\dfrac{E_I}{n^2}$. Il y a donc dégénérescence des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, ce qu'on peut observer sur le graphique suivant :



Chaque trait horizontal représente un niveau d'énergie donc la valeur de n est indiquée à gauche. La colonne indique la valeur de l et l'ordonnée est l'énergie. On retrouve la série de Balmer pour les transitions d'états ns vers l'état 2p : $\hbar\omega = E_n - E_2 = 13.6\dfrac{N^2-4}{4n^2}$ eV. Ces raies sont bien dans le visible puisque $\Delta E \simeq$ 2-3 eV donc $\lambda \simeq 500$ nm.

L'étude de l'état de plus basse énergie permet également de déterminer la taille de l'atome dans son état fondamental. Cet état correspond à la fonction d'onde

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_1^3}} \exp\left(-\frac{r}{a_1}\right) \tag{40.36}$$

puisque l'état de plus basse énergie correspond à l'état pour lequel $n = 1$, $l = 0$ et $n' = 0$. Pour déterminer la position de l'électron, on peut calculer sa propabilité de présence :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r)\mathrm{d}r &= |\psi_{100}(r)|^2 \,\mathrm{d}^3 r \\ &= |\psi_{100}(r)|^2 \, 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= r^2 \, |R_{10}(r)|^2 \,\mathrm{d}r \qquad \text{car } Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \end{aligned} \tag{40.37}$$

En traçant la courbe on voit que la probabilité de présence est maximale pour $r = a_1$, ce qui signifie que l'électron a une forte probabilité de se situer à la distance a_1 du noyau. L'atome a donc un rayon a_1, d'où le nom de rayon de Bohr.

Remarque

Le cas de l'atome d'hydrogène est **le seul** cas solvable analytiquement, on peut utiliser ces résultats pour étudier toute fois les atomes hydrogénoïdes en considérant un potentiel $V' = ZV$ ce qui a seulement pour conséquence de diviser les longueurs par Z et de multiplier les énergies par Z^2.

3.4 La molécule d'ammoniac

✍ LP41 pour plus de détails sur les calculs

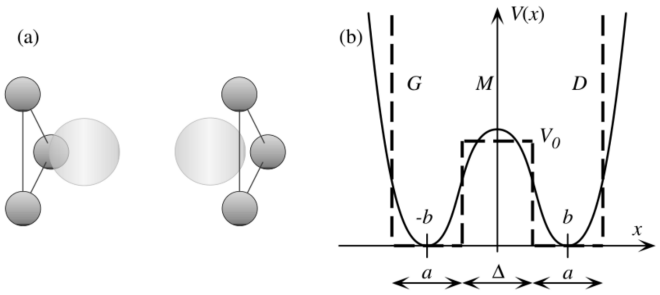


FIGURE 40.4 – La molécule d'ammoniac (a) et sa modélisation de potentiel (b).

La molécule d'ammoniac a un comportement très particulier, puisqu'elle fait le parapluie. En effet elle peut se retourner et échanger la position de son doublet liant et de ses doublets liants, comme un parapluie emporté par le vent. En réalité la position du doublet non liant peut être décrite par une fonction d'onde, et le potentiel qu'elle voit est alors de la forme $V(x) = ax^4 - bx^2$.

Afin de modéliser ce comportement, on prendra un potentiel plus simple, celui d'un double puits carré, avec une barrière tunnellable au milieu.

La résolution des équations fait apparaitre deux solutions par niveau d'énergie, une symétrique et une antisymétrique.

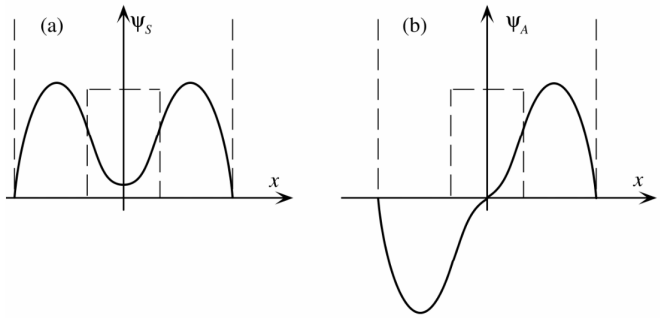


FIGURE 40.5 – Solution symétrique (a) et antisymétrique (b) de plus basse énergie dans le puits double modélisant la molécule d'ammoniac.

Le calcul est détaillé dans ✍ **Basdevant**, p. 92.

Du fait de l'annulation de la fonction d'onde en 0 pour le mode antisymétrique, celui-ci à moins de place, et on peut raisonner par Heisenberg et en déduire que son énergie est plus haute que celle du mode symétrique, et cela se vérifie bien par le calcul

Simulation Python

✍ `puitsquantique1D.py`

```
python3 puitsquantique1D.py NH3 True
```

La fréquence d'inversion de la molécule peut être déterminée à l'aide d'un calcul savant, détaillé dans le Basdevant, ou dans la leçon de 2017 ✍ `2017.pdf`

3.5 Semi-conducteurs

✍ **Basdevant**, p. 85

Dans les technologies modernes de microélectronique, les potentiels carrés permettent la description d'un électron de conduction qui bouge dans un semi-conducteur comme GaAs : celui-ci "ressent" un potentiel uniforme à l'échelle du pas du réseau cristallin. La valeur de ce potentiel dépend de la composition du semi-conducteur.

Dans des "sandwichs" de couches minces alternées de semi-conducteurs (GaAs et GaAlAs), on crée des puits quantiques d'une largeur de 2 à 5 nm. Le confinement quantique des électrons dans ces domaines laisse entrevoir des développements sans précédents en électronique et dans les composants d'ordinateurs. Ces composants sont également très prometteurs en opto-électronique ; les transitions entre niveaux électroniques ($\Delta E \sim 50$ à 200 meV) sont situées dans l'infrarouge.

Conclusion

Au cours de cette leçon on a vu la nécessité d'introduire la quantification des énergies à partir des expériences et de l'étude des atomes. La mécanique classique ne parvenant pas à fournir d'explications satisfaisantes à cette quantification nous avons abordé une démarche quantique en associant à la particule étudiée (par exemple l'électron) une fonction d'onde. L'étude ondulatoire d'une onde confinée dans un potentiel fait alors intervenir naturellement la quantification des solutions et des énergies accessibles. Cela nous a permis d'expliquer pourquoi certains ions moléculaires étaient colorés et de retrouver tous les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

LP 41

Effet tunnel

Niveau : L2/L3

Commentaires du jury

- **2017 :** Cette leçon est une leçon de physique et ne doit donc pas se limiter à des calculs.
- **2015 :** Trop de candidats pensent que l'effet tunnel est spécifique à la physique quantique.
- **2011-2014 :** Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle ! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, . . .).
- **2008 :** Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.

Bibliographie

- ✍ *Tout-en-un Physique PC*, **Sanz** ⟶ Base de la leçon
- ✍ *Quantique*, **Pérez** ⟶ Compléments notamment sur le couplage
- ✍ *MQ*, **Basdevant** ⟶ Compléments
- ✍ *BUP 699* ⟶ Microscope à effet tunnel
- ✍ http://www.seigne.free.fr/EtudesDoc/ETunnelEDoc.pdf ⟶ poly de MP
- ✍ https://toutestquantique.fr/ ⟶ Animation effet tunnel + microscope à effet tunnel
- ✍ http://sondeslocales.fr/upload/documents/forum2011/cours/cours/Forum2011-Palmino.pdf ⟶ Microscope à effet tunnel
- ✍ *BUP 734* ⟶ Applications de l'effet tunnel, parle notamment de la radioactivité alpha
- ✍ *Physique nucléaire*, **Blanc** ⟶

Prérequis

- ➢ Équation de Schrödinger stationnaire
- ➢ Densité de probabilité
- ➢ Ondes évanescentes
- ➢ Radioactivité
- ➢ Confinement d'une particule quantique

Expériences

☕

1 Présentation de l'effet du tunnel . . . 561
1.1 Approche optique expérimentale . . . 561
1.2 Approche de la mécanique ondulatoire . . . 561
1.3 Coefficients de transmission et de réflexion . . . 562
1.4 Barrière quelconque . . . 564
2 Exemples dans la nature . . . 564
2.1 La molécule d'ammoniac . . . 564
2.2 La liaison covalente . . . 567
3 Radioactivité α . . . 567
3.1 Résultats expérimentaux . . . 567
3.2 Nécessité d'un effet tunnel . . . 568
3.3 Prise en compte de l'effet tunnel . . . 569
4 Microscope à effet tunnel (1981) . . . 570
4.1 Dispositif . . . 570
4.2 Paramètres utilisés . . . 571

Introduction

On a vu dans des leçons précédentes la magie de l'équation de Schrödinger et son application aux puits de potentiels. Aujourd'hui on va faire l'inverse : la barrière de potentiel.

C'est là la plus grande illustration de la dualité onde-corpuscule. Un exemple typique d'effet tunnel serait celui d'un skieur franchissant une colline sans avoir l'élan suffisant, comme en passant par un tunnel. Évidemment cela ne marche pas pour le skieur, mais pour une particule quantique (donc avec des propriétés ondulatoires), ça peut marcher !

Définition : on nomme **Effet tunnel** le passage d'un objet par une barrière de potentiel si son énergie ne lui permet pas classiquement de franchir la dite barrière.

Remarque : ce phénomène n'est pas tant quantique que purement ondulatoire. L'apport de la mécanique quantique réside dans les multiples applications qu'elle offre.

1 Présentation de l'effet du tunnel

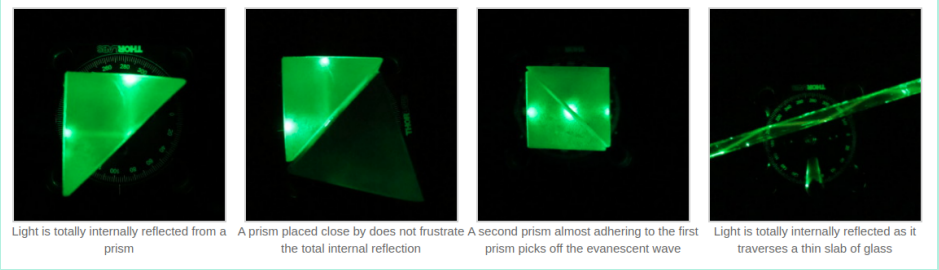
1.1 Approche optique expérimentale

Effet tunnel optique

✍ ⏲

On peut montrer l'effet tunnel optique en contournant la réflexion interne totale.

Un laser vert entre dans un prisme en verre. L'angle d'incidence à l'intérieur est plus grand que l'angle de réflexion totale, on a donc... Réflexion totale, oui Timéo. De la lumière passe quand même, mais peu. Cependant, si on calle un deuxième prisme, on récupère de la lumière, preuve de l'effet tunnel optique.



Light is totally internally reflected from a prism | A prism placed close by does not frustrate the total internal reflection | A second prism almost adhering to the first prism picks off the evanescent wave | Light is totally internally reflected as it traverses a thin slab of glass

1.2 Approche de la mécanique ondulatoire

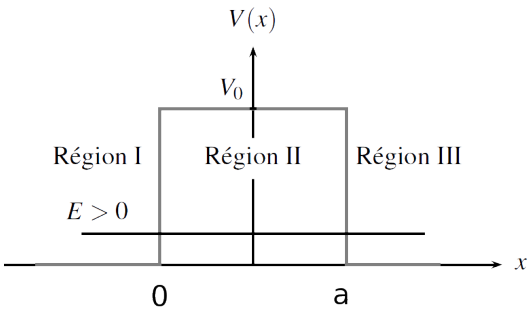


FIGURE 41.1 – On se place en une dimension, et on considère le potentiel en forme de carré.

On prend une particule de masse m arrivant sur la barrière avec une énergie inférieure à la hauteur de la barrière, à savoir $E < V_0$. Le premier principe de la mécanique quantique prédit l'existence d'une fonction d'onde ψ qui suit l'équation de Schrödinger.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x,t)\psi(x,t) \tag{41.1}$$

On cherche des solutions stationnaires du fait de l'indépendance du temps de V, $\psi = \phi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$. L'équation vérifiée par ϕ est alors

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\phi = E\phi \tag{41.2}$$

Enfin on cherche des solutions en ondes planes, qui par superposition donnent des paquets d'ondes, vive la linéarité.

$$\begin{cases} \text{I, III} & \phi'' + \dfrac{2mE}{\hbar^2}\phi = \phi'' + k^2\phi = 0 \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ \text{II} & \phi'' + \dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\phi = \phi'' - k'^2\phi = 0 \Rightarrow k' = \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \end{cases} \tag{41.3}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \text{I} : \phi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx} & \text{incidente et réfléchie} \\ \text{II} : \quad = B_1e^{k'x} + B_2e^{-k'x} & \text{évanescente} \\ \text{III} : \quad = C_1e^{ikx} + C_2e^{-ikx} & \text{transmise} \end{cases} \tag{41.4}$$

Du fait de la non infinité de la discontinuité de potentiel, il faut que ϕ et ϕ' soient continues à la rupture. Ce résulat peut être obtenu en intégrant l'équation de Schrödinger entre $-\epsilon$ et ϵ, et en supposant la continuité de ϕ.

Ainsi on a 4 conditions aux limites, mais malheur, on a 6 inconnues... On va supposer qu'il n'y a pas d'onde venant de $+\infty$ parce que c'est pas physique. On peut ensuite poser $A_1 = 1$, et on exprimera toutes les amplitudes en unité de A_1 ! Cela nous fait descendre à 4 inconnues pour 4 équations.

1.3 Coefficients de transmission et de réflexion

$$\begin{cases} x = 0 : \begin{cases} A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \\ ik(A_1 - A_2) = k'(B_1 - B_2) \end{cases} \\ x = a : \begin{cases} B_1e^{k'a} + B_2e^{-k'a} = C_1e^{ika} \\ k'\left(B_1e^{k'a} - B_2e^{-k'a}\right) = ikC_1e^{ika} \end{cases} \end{cases} \tag{41.5}$$

On peut ainsi écrire :

$$\boxed{\frac{C_1}{A_1} = \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2e^{k'a} + (k'+ik)e^{-k'a}} = \frac{2ikk'}{e^{ika}}\frac{1}{(k^2-k'^2)\sinh(k'a) + 2ikk'\cosh(k'a)}} \tag{41.6}$$

On peut alors calculer la probabilité de traverser la barrière :

$$\begin{aligned} T &= \left|\frac{j_{\text{trans}}}{j_{\text{incid}}}\right| \\ &= \frac{4k'^2k^2}{(k'^2+k^2)^2\sinh^2(k'a)+4k'^2k^2} \end{aligned} \tag{41.7}$$

Vient alors l'approximation de la barrière épaisse, c'est à dire considérer que $k'a \ll 1$, alors on a

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{4ikk'e^{-ika}}{(k+ik')^2}e^{-k'a} \tag{41.8}$$

Et finalement le coefficient de transmission devient :

$$\begin{aligned} T &= \left|\frac{C_1}{A_1}\right|^2 = \frac{16k^2k'^2}{(k^2+k'^2)^2}e^{-2k'a} \\ &= \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2k'a} \end{aligned} \tag{41.9}$$

Probabilité de transmission tunnel en barrière épaisse

$$T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2k'a} \neq 0 \tag{41.10}$$

On peut vérifier que les différentes limites sont cohérentes, à savoir le cas où V_0 tend vers l'infini, celui ou l'épaisseur tend vers l'infini, et les cas inverses, on retrouve tout ce que l'on voulait !

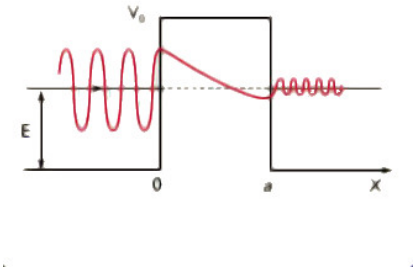


FIGURE 41.2 – Forme de l'onde qui traverse par effet tunnel.

Petite simulation java

✍ ⏲

OdG : électron : $E \sim 1$eV, $V_0 \sim$5eV, $a = 1$ Å, alors $T \sim 0.7$.

Moi quand y'a des crêpes et qu'il faut passer une colline pour les manger : $m = 80$ kg, $E = \frac{1}{2}mv^2$ J, $V_0 = mgz$=8000J pour une colline de 10m par 10m, on trouve 0 à la calculette.

Particule	m(kg)	V_0(eV)	a(nm)	δ(nm)	T
Électron	10^{-30}	4	0,3	0,1	10^{-2}
Électron	10^{-30}	40	0,3	4×10^{-2}	10^{-6}
Électron	10^{-30}	4	3	0,1	10^{-20}
Proton	10^{-27}	4	0,3	4×10^{-3}	10^{-63}
Proton	10^{-27}	4	3	2×10^{-3}	10^{-628}

1.4 Barrière quelconque

Sans entrer dans les détails, on utilise la barrière épaisse mais sur des tranches de barrière, comme si on coupait en tranches de saucisson. Chaque tranche est une barrière rectangulaire épaisse, et par théorème fondamental de la physique, on peut intégrer l'équation trouvée et ça marche :

$$T \simeq e^{-2\int k'(x)\mathrm{d}x} \tag{41.11}$$

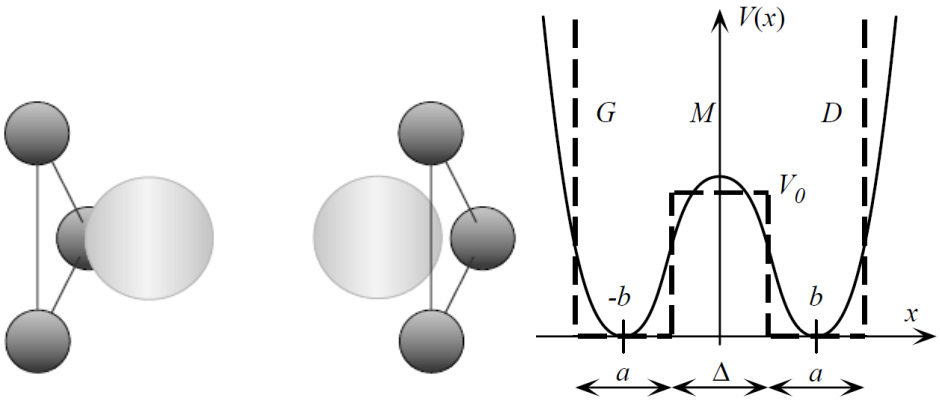
Remarque : oui la barrière de largeur dx est épaisse. On peut le montrer par un raisonnment semi-classique détaillé dans Le Bellac, nouvelle édition, p. 482.

2 Exemples dans la nature

2.1 La molécule d'ammoniac

✍ Cohen p412 + Basdevant p97 pour justifier la modélisation
✍ Basdevant p93 pour la résolution
✍ LP40 pour les simulations Python

La molécule d'ammoniac NH_3 a la forme d'une pyramide dont le sommet est occupé par l'azote et la base est formée par les trois hydrogènes. On note Π le plan des 3 hydrogènes, $\mathcal{D}$ l'axe normal à Π passant par l'azote et, en prenant l'azote comme origine pour $\mathcal{D}$, on note x l'abscisse du plan Π sur $\mathcal{D}$. En supposant que l'azote reste immobile et que la géométrie de la molécule reste pyramidale, on se demande comment varie l'énergie potentielle réelle $\mathcal{V}(x)$ en fonction de x.



L'évolution de $\mathcal{V}(x)$ peut être comprise qualitativement de la façon suivante : si $x = b$, $\mathcal{V}(x)$ passe par un minimum, et si on oblige x à diminuer, l'énergie croît puis passe par un maximum pour $x = 0$ qui correspond à l'état instable pour lequel les quatre atomes sont dans le même plan. Si x devient négatif, nous avons "retourné" la molécule comme un parapluie. Manifestement il existe donc un autre minimum pour $x = -b$ et l'énergie $\mathcal{V}(x)$ est symétrique par rapport à l'origine : $\mathcal{V}(x) = -\mathcal{V}(-x)$. Dans la suite, nous allons remplacer le potentiel réel $\mathcal{V}(x)$ par le potentiel carré $V(x)$. On s'intéresse au mouvement quantique d'une 'particule' fictive qui correspond au mouvement collectif des 3 hydrogènes

en supposant qu'ils restent dans le même plan. On note m la masse de cette particule fictive, qui vaut $m = 3m_H$ avec m_H la masse d'un hydrogène.

On rappelle l'équation de Schrödinger stationnaire à 1 dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}(x) + V(x)\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x) \tag{41.12}$$

On se limite au cas où $\mathcal{E} < V_0$ qui correspond à la situation de mécanique classique où la particule reste dans l'un des deux puits, *i.e.* la molécule ne se retourne pas. En imposant comme condition limite $\psi\left(x = \pm\left(b + \frac{a}{2}\right)\right) = 0$, on obtient en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned}
&\psi(x) = \pm\lambda \sin\left[k\left(b + \frac{a}{2} + x\right)\right] && \text{si } x \in \text{région G}\\
&\psi(x) = \left\{\begin{matrix}\mu\cosh(Kx) & \text{(symétrique)}\\ \mu\sinh(Kx) & \text{(antisymétrique)}\end{matrix}\right\} && \text{si } x \in \text{région M}\\
&\psi(x) = \lambda \sin\left[k\left(b + \frac{a}{2} - x\right)\right] && \text{si } x \in \text{région D}
\end{aligned} \tag{41.13}$$

avec λ et μ des constantes et en posant $K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}}$ et $k = K = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}$. En appliquant la continuité de ψ et de sa dérivée en $x = \pm\left(b - \frac{a}{2}\right)$, on obtient les conditions :

$$\begin{cases}
\tan(ka) = -\frac{k}{K}\coth\left[K\left(b - \frac{a}{2}\right)\right] & \text{pour une solution symétrique } \psi_S\\
\tan(ka) = -\frac{k}{K}\tanh\left[K\left(b - \frac{a}{2}\right)\right] & \text{pour une solution antisymétrique } \psi_A
\end{cases} \tag{41.14}$$

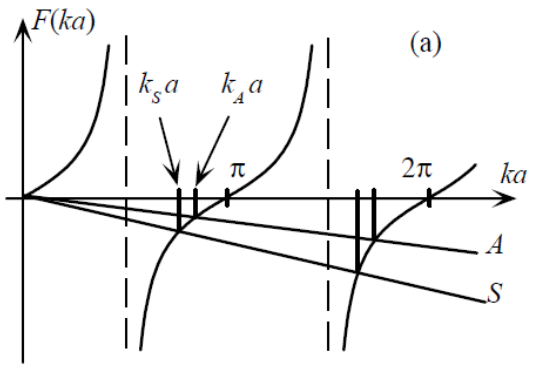
Pour simplifier, on se place dans le cas où $\mathcal{E} \ll V_0$ donc $K \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \gg k$. On suppose également que la largeur de la barrière $\Delta = 2b - a$ est assez grande pour que $K\Delta \gg 1$ [1]. On a alors

$$\begin{cases}
\tan(ka) \simeq -\frac{k}{K}\left[1 + 2e^{-K\Delta}\right] & \text{pour une solution symétrique } \psi_S\\
\tan(ka) \simeq -\frac{k}{K}\left[1 - 2e^{-K\Delta}\right] & \text{pour une solution antisymétrique } \psi_A
\end{cases} \tag{41.15}$$

On peut calculer graphiquement les valeurs de ka satisfaisant ces équations en regardant l'intersection de la courbe $y = \tan ka$ avec les droites $y = -\varepsilon_S ka$ et $y = -\varepsilon_A ka$ en posant les constantes

$$\varepsilon_S = \frac{1}{Ka}\left[1 + 2e^{-K\Delta}\right] \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_A = \frac{1}{Ka}\left[1 - 2e^{-K\Delta}\right]$$

Ces constants sont proches l'une de l'autre puisque $K\Delta \gg 1$ et elles sont telles que $\varepsilon_A < \varepsilon_S \ll 1$ puisque $Ka \gg ka$. Ces intersections sont situées au voisinage de $ka \simeq \pi$.



1. Ces hypothèses sont satisfaites pour l'ammoniac

On désigne par k_S et k_A les valeurs de k correspondant aux 2 premiers états propres ψ_S et ψ_A de plus faibles énergies. Ces énergies valent respectivement

$$\mathcal{E}_S = \frac{\hbar^2 k_S^2}{2m} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_A = \frac{\hbar^2 k_A^2}{2m}$$

On constate graphiquement que :

- k_S et k_A sont proches l'une de l'autre
- elles sont légèrement inférieures à $\frac{\pi}{a}$ qui est la valeur du premier nombre d'onde pour le puits G (ou D) de largeur a et supposé infiniment profond.
- k_S est légèrement inférieure à k_A, donc $\mathcal{E}_s < \mathcal{E}_A$
- dans l'approximation $K \gg k$ et $Ka \gg 1$, on vérifie que

  $$k_S \simeq \frac{\pi}{a(1+\varepsilon_S)} \qquad \text{et} \qquad k_A \simeq \frac{\pi}{a(1+\varepsilon_A)}$$

  avec $\varepsilon_S, \varepsilon_A \ll 1$

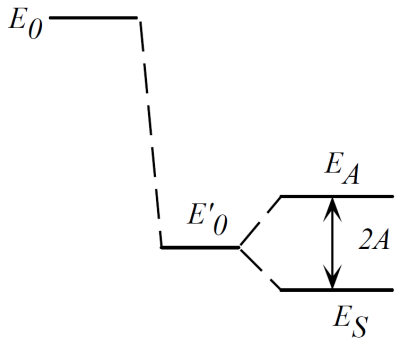
On peut calculer l'énergie moyenne et obtenir :

$$\mathcal{E}_0' \simeq \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(1 - \frac{2}{Ka}\right) = \mathcal{E}_0\left(1 - \frac{2}{Ka}\right) \tag{41.16}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A - \mathcal{E}_S &\simeq \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon_A)^2} - \frac{1}{(1+\varepsilon_S)^2}\right] \\ &= 2A \qquad \text{en posant } A \simeq \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\frac{4e^{-K\Delta}}{Ka} = \mathcal{E}_0\frac{4e^{-K\Delta}}{Ka} \end{aligned} \tag{41.17}$$

Comme $K \simeq \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$, on voit que A décroît exponentiellement avec la largeur de la barrière Δ ou sa hauteur V_0 augmentent. On remarque également que $A \to 0$ dans la limite classique $\hbar \to 0$.



Dans la situation classique $\mathcal{E} < V_0$, la molécule présente son plan d'hydrogènes soit à droite, soit à gauche, et aucun passage $G \leftrightarrow D$ n'est possible. Il y a deux états fondamentaux de même énergie, l'un dans la configuration G, l'autre dans la configuration D. Pour la molécule quantique, les deux états propres en question ici ne sont pas dégénérés. Ils forment un doublet, représenté par deux fonctions symétrique ψ_S et antisymétrique ψ_A. Dans ces deux états, la probabilité de présence de la particule (ou du triangle des hydrogènes) à droite et à gauche (module carré de ψ) est la même. Fait impossible à réaliser classiquement, tant pour ψ_S que ψ_A, **cette probabilité de présence n'est pas nulle dans la région médiane** M !

Nous retrouvons encore un exemple où une particule peut se trouver dans une région où son énergie totale est inférieure à l'énergie potentielle. Cette pénétration dans une région classiquement interdite entraîne une variation de l'énergie par rapport à celle qu'aurait la 'particule', donc la molécule NH_3, si elle était fixée à droite ou à gauche, c'est-à-dire si V0 était infini. Il en résulte une diminution de l'énergie moyenne par rapport à l'énergie $\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ d'une particule qui serait localisée dans l'un des puits . Parce que V_0 est fini, l'existence d'une probabilité de présence non nulle dans la région médiane fait que la molécule "voit" un puits effectif de largeur plus grande que a (typiquement $a + K^{-1}$), d'où l'abaissement $\mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0'$.

L'effet tunnel permet la stabilisation d'un système par déconfinement [a].

a. Il permet aussi la stabilisation du système par levée de dégénérescence puisque l'électron à accès à l'état symétrique d'énergie $\mathcal{E}_S < \mathcal{E}'_0$. Cependant, cette dégénérescence n'a en rélaité pas beaucoup d'effet sur la stabilisation car $2A \simeq 10^{-4}$ eV alors que typiquement $\mathcal{E}_0 \simeq 1$ eV et $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 \simeq 0.5$ eV.

Remarque

La largeur Δ de la barrière n'apparaît pas dans $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0$, contrairement à V_0 (qui intervient à travers K). La distance entre les atomes change à la fois Δ et V_0, donc plus les atomes sont proches, plus la molécule est stabilisée.

2.2 La liaison covalente

On peut appliquer ce raisonnement à la liaison covalente [2]. En effet, si on considère un électron qui peut être soit lié à un atome, soit lié à un autre atome, on peut modéliser la situation encore une fois avec un double-puits. Ainsi, l'électron qui classiquement reste lié au même atome peut, par effet tunnel, passer sur l'autre atome et puis revenir. On a alors une stabilisation du système par déconfinement. L'électron est ainsi partagé par les deux atomes : c'est ce qu'on appelle la liaison covalente.

3 Radioactivité α

3.1 Résultats expérimentaux

✍ Sanz p868 + *Énergie nucléaire* Basdevant p87 + http://www.seigne.free.fr/EtudesDoc/ETunnelEDoc.pdf

On appelle radioactivité α le phénomène d'émission d'une particule α, à savoir un noyau d'hélium $^4_2$He, par un noyau atomique instable. Elle permet ainsi aux noyaux lourds contenant un nombre important de protons de diminuer la répulsion électrostatique entre protons. On peut citer par exemple la désintégration de l'uranium 236 en thorium 232 :

$$^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{232}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{41.18}$$

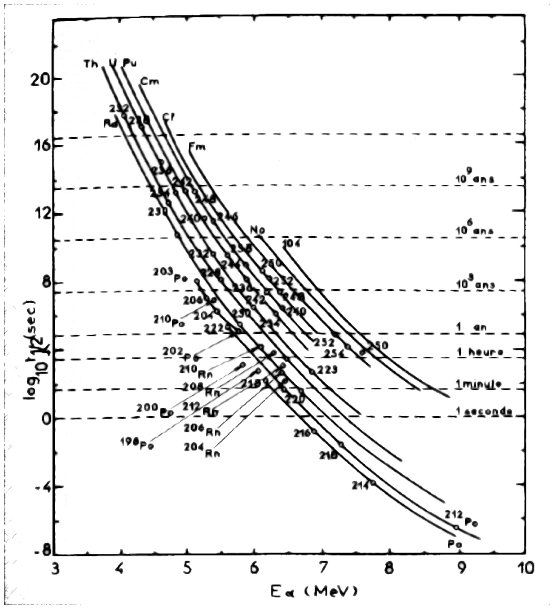
Les caractéristiques des divers noyaux pour lesquels on observe ce type de radioactivité sont recensées dans un tableau :

Élément	Énergie E des α (MeV)	Demi-vie
$^{212}_{84}$Po	$8,95$	$3,0 \times 10^{-7}$s
$^{240}_{96}$Cm	$6,40$	27 jours
$^{226}_{88}$Ra	$4,90$	1600 ans
$^{232}_{90}$Th	$4,05$	$1,4 \times 10^{10}$ ans
$^{230}_{92}$U	$5,60$	21 jours
$^{232}_{92}$U	$5,21$	73 ans
$^{234}_{92}$U	$4,70$	$2,4 \times 10^{5}$ ans
$^{236}_{92}$U	$4,45$	$2,3 \times 10^{7}$ ans
$^{238}_{92}$U	$4,19$	$4,4 \times 10^{9}$ ans

2. Si on veut faire des calculs, on prend l'exemple de la molécule H_2^+.

L'énergie E en question est l'énergie cinétique de la particule α émise et la temps de demi-vie $\tau_{1/2}$ est la durée nécessaire pour que moitié d'une quantité initiale d'élément radioactif se désintègre. En effet, l'évolution de la quantité d'élément radioactif suit une décroissance exponentielle $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. On peut alors relier le temps de demi-vie au taux λ de désintégrations par seconde via la relation : $\tau_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

En 1911, Geiger et Nuttal obtinrent les résultats expérimentaux suivants [3] :


Th U Pu Cm Cf Fm
Ra
Po
Rn
Rn
Ra
Po
Po
Po
Pb
Po
Po
Po

- Pour $x > R$, l'interaction forte, qui est de courte portée, devient négligeable dans la répulsion coulombienne des $Z' = Z - 2$ protons restants. La particule α est donc soumise à un potentiel coulombien de la forme

$$V(x) = 2\frac{(Z'e)(2e)}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$$

  en n'oubliant pas le facteur 2 qui tient compte du faite que la particule α ait 2 protons.

On veut, à partir de ce modèle, savoir si la particule peut s'échapper du noyau. Expérimentalement, on a mesuré l'énergie cinétique de la particule α émise par la désintégration du radium 226 en radon 222 :

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{41.20}$$

On trouve une énergie $E = 4.78$ MeV, que l'on souhaite comparer à l'énergie de la barrière coulombienne dans le potentiel de Gamow.
Pour cela, on considère le processus inverse de la désintégration, *i.e.* l'absorption de la particule α qui vient de l'infini par le noyau de radon 222. Le mouvement de la particule part donc de l'infini pour arriver à $r = r_{\mathrm{He}} + r_{\mathrm{Rn}} = 7.76$ fm. La barrière coulombienne à branchir vaut alors

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(86e)(2e)}{r} \simeq 31.9 \text{ MeV}$$

On obtient une barrière coulombienne dont l'énergie est supérieure à l'énergie cinétique de la particule α !! **On a donc besoin de l'effet tunnel pour expliquer la radioactivité α.**

3.3 Prise en compte de l'effet tunnel

Pour une barrière quelconque, la probabilité de transmission vaut

$$\ln(T) = -2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m_\alpha(V(x) - E_\alpha)}}{\hbar}\mathrm{d}x \tag{41.21}$$

avec m_α la masse de la particule α et E_α son énergie cinétique. On pose R_e l'abscisse qui vérifie $V(x = R_e) = E_\alpha$, on a donc

$$\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_e} = E_\alpha$$

On rappelle que l'effet tunnel est un effet ondulatoire et que traverser la barrière ne coûte pas d'énergie, donc l'énergie de la particule α reste égale E_α. On a donc

$$\begin{aligned}\ln(T) &= -2\int_R^{R_e} \sqrt{2m}\sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 x} - \frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_e}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0}}\int_R^{R_e}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{R_e}}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{41.22}$$

Après calculs (faits dans l'annexe), on trouve

$$\ln(T) = \frac{4e}{\hbar}\sqrt{\frac{mZ'}{\pi\varepsilon_0}}\sqrt{R} - \frac{Z'e^2}{\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}} \tag{41.23}$$

Tâchons maintenant de relier T au phénomène de désintégration. La variation du nombre de noyaux entre l'instant t et l'instant $t + \mathrm{d}t$ $\mathrm{d}t$ vaut $\mathrm{d}N = -\lambda N\mathrm{d}t$ avec λ la constante radioactive de l'élément exprimée en s^{-1}. La particule α oscille entre les bords du puits à la vitesse $v_\alpha = \sqrt{\frac{2E_\alpha}{m}}$, la fréquence des chocs vaut donc $f = \frac{v_\alpha}{2R}$. De plus, la particule a une probabilité T de franchir la barrière à chaque choc. On en déduit que, pour N noyaux, le nombre de particules α passant la barrière par unité de temps vaut $N\frac{v_\alpha}{2R}T$ donc on a

$$\mathrm{d}N = -\lambda N\mathrm{d}t = -\frac{v_\alpha T}{2R}TN\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v_\alpha}{2R}T \tag{41.24}$$

Finalement, en sachant que $\tau_{1/2} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$, on a

$$\begin{aligned}\ln(\tau_{1/2}) &= \ln\left(\frac{\ln(2)}{\lambda}\right) = \ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha T}\right) = \ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha}\right) - \ln(T) \\ &= \left[\ln\left(\frac{2\ln(2)R}{v_\alpha}\right) - \frac{4e}{\hbar}\sqrt{\frac{mZ'}{\pi\varepsilon_0}}\sqrt{R}\right] + \left[\frac{Z'e^2}{\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2}}\right]\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}\end{aligned} \tag{41.25}$$

On retrouve la loi empirique de Geiger et Nuttal : $\ln(\tau_{1/2}) = a + \dfrac{b}{\sqrt{E}}$

4 Microscope à effet tunnel (1981)

4.1 Dispositif

Prix Nobel 1986.

Le but ici est de réaliser la topographie d'une surface conductrice à l'aide de l'effet tunnel. Des exemples de résultats typiques sont des observations à l'Å près (verticalement on a même 0.1).

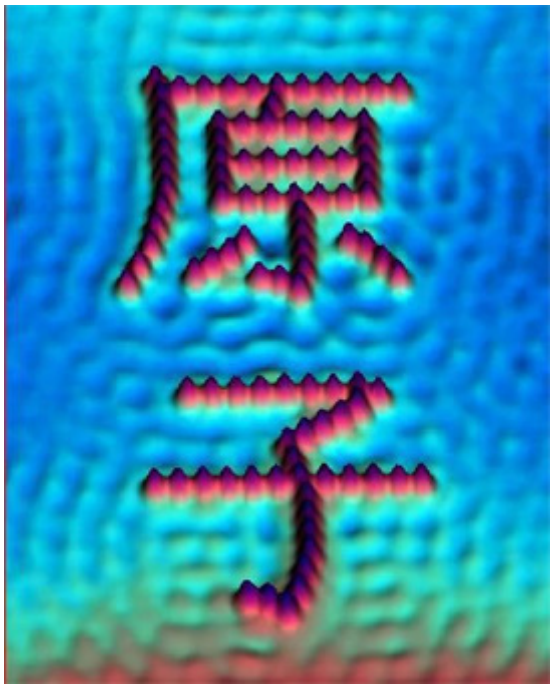


FIGURE 41.3 – Le kanji veut dire "atome"

✍ **Dunod** PC, p.1209 On recouvre une surface d'une fine couche de métal, typiquement par dépot chimique (électrolyse), et on approche ensuite une pointe de la surface. Lorsque la point est assez près, il est possible pour les électrons de sauter du métal à la pointe par effet tunnel. Ainsi si on applique une différence de potentiel, on peut mesurer une intensité et relier celle-ci directement à la proximité entre la surface et la pointe, et donc à la topologie de la surface.

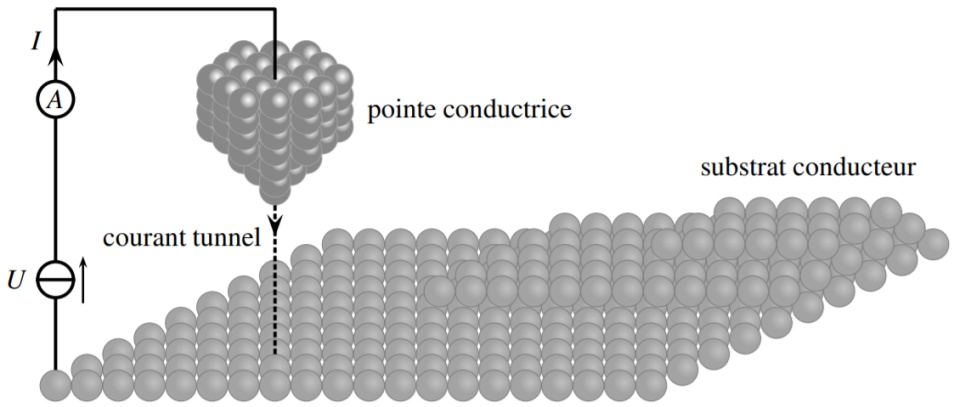


FIGURE 41.4 – Présentation du dispositif

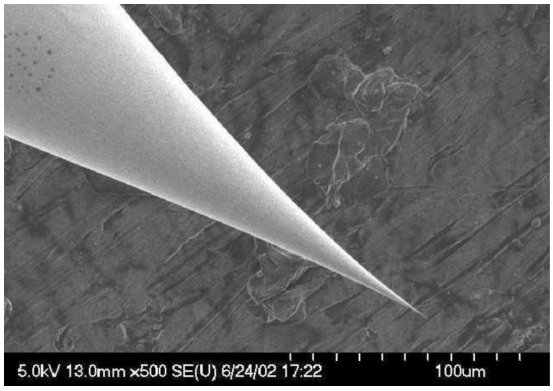


FIGURE 41.5 – Notons au passage que la pointe c'est vraiment une pointe taillée à l'atome près !

Le paysage énergétique de la situation est alors comme schématisé ci-dessous :

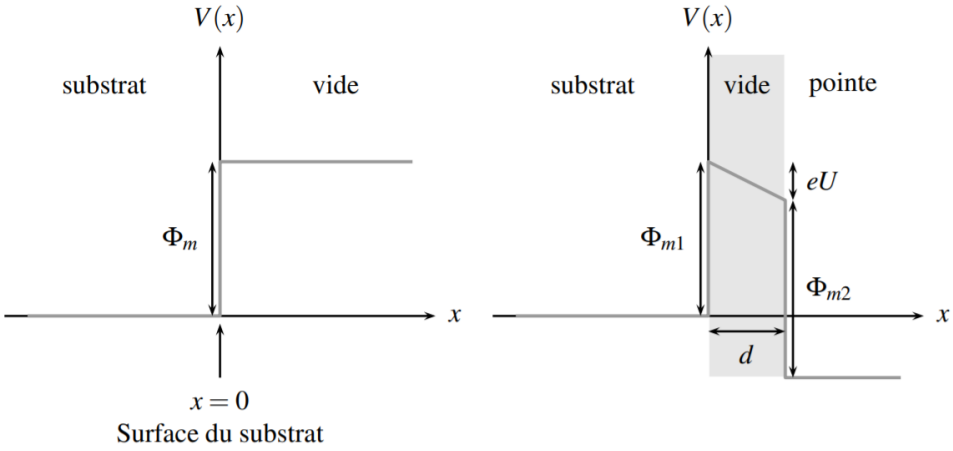


FIGURE 41.6 – Modélisation du paysage énergétique à la surface du métal avec et sans la pointe.

4.2 Paramètres utilisés

Lorsque l'on fait des images au TEM (microscope électronique à transmission), on veut une petites barrière, soit une distace de moins de 1nm. La tension est entre le mV et le V, et le courant lui varie du nA au pA, en $I = I_0 \exp\left(-\frac{2d}{\delta}\right)$. En pratique on contrôle la position de la pointe avec 3 piezo électriques, précis au pm. Il faut aussi éliminer les vibrations.

Il a deux modes d'utilisation, détaillés dans cette petite vidéo : http://toutestquantique.fr/effet-tunnel/

Topographie : On fixe u constant, et on maintient I constant en bougeant d. On peut ainsi mesurer les variations de hauteur du substrat.

Spectroscpie : Fixer la position de la pointe et faire varier u afin d'extraire des propriétés physiques du substrat (comme le travail d'extraction). Cela donne la nature chimique locale du substrat.

Pour aller plus loin : ✍ BUP 699, `microscope.pdf`, https://fr.wikipedia.org/wiki/Microscopie_électronique_en_transmission

Annexe : Calcul de $\ln(T)$

$$
\begin{aligned}
\ln(T) &= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0}}\int_R^{R_e}\mathrm{d}x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{R_e}} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_e}}\int_R^{R_e}\mathrm{d}x\sqrt{\frac{R_e}{x}-1} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E_\alpha}\int_R^{R_e}\mathrm{d}x\sqrt{\frac{R_e}{x}-1} \qquad \text{avec} \qquad E_\alpha = \frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0 R_e} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E_\alpha}\int_{\sqrt{R/R_e}}^{1}2R_e y\mathrm{d}y\sqrt{\frac{1}{y^2}-1} \qquad \text{en posant} \begin{cases} x = R_e y^2 \iff y = \sqrt{\dfrac{R_e}{x}} \\ \mathrm{d}x = 2R_e y\mathrm{d}y \end{cases} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\int_{\sqrt{R/R_e}}^{1}2\mathrm{d}y\sqrt{1-y^2} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\int_{\phi_0}^{\pi/2}2\cos\phi\mathrm{d}\phi\sqrt{1-\sin^2\phi} \qquad \text{en posant} \begin{cases} y = \sin\phi \\ \mathrm{d}y = \cos\phi\mathrm{d}\phi \\ \sqrt{R/R_e} = \sin\phi_0 \end{cases} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\int_{\phi_0}^{\pi/2}2\mathrm{d}\phi\cos^2\phi \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\int_{\phi_0}^{\pi/2}\mathrm{d}\phi[1+\cos(2\phi)] \qquad \text{car} \qquad 2\cos^2\phi = 1+\cos(2\phi) \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\left[\phi+\frac{\sin(2\phi)}{2}\right]_{\phi_0}^{\pi/2} \\
&= -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\phi_0+0-\frac{\sin(2\phi_0)}{2}\right] \\
&\simeq -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\left[\frac{\pi}{2}-\phi_0-\frac{2\phi_0}{2}\right] \qquad \text{car} \qquad \phi_0 \ll 1 \text{ donc } \sin(2\phi_0)\simeq 2\phi_0 \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}+\frac{4\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}\sqrt{\frac{R}{R_e}} \qquad \text{car} \qquad \phi_0 \simeq \sin\phi_0 = \sqrt{\frac{R}{R_e}} \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}R_e\sqrt{E_\alpha}+\frac{4\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{R_e E_\alpha}\sqrt{R} \\
&\simeq -\frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}+\frac{4\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\frac{Z'e^2}{2\pi\varepsilon_0}}\sqrt{R}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\ln(T) \simeq \frac{4e}{\hbar}\sqrt{\frac{mZ'}{\pi\varepsilon_0}}\sqrt{R} - \frac{Z'e^2}{\hbar\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}}
$$

LP 42

Fusion, fission

Commentaires du jury

- 2017 : Un exposé purement descriptif des réactions de fusion et de fission nucléaires est insuffisant
- 2014 : Cette leçon peut être abordée de manières diverses, mais on peut raisonnablement s'attendre à ce que les candidats aient quelques notions sur la structure et la cohésion nucléaire, les formes de radioactivité et les interactions mises en jeu, les réacteurs nucléaires, le confinement magnétique.
- 2013 : [À propos du nouveau titre] Le nouvel intitulé de cette leçon doit inviter les candidats à réfléchir à la physique sous-jacente aux phénomènes de fusion et fission nucléaires.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Le noyau : stabilité, énergie. Applications.
- 2012 : Le modèle de la goutte ne peut être simplement énoncé. Le candidat qui ferait le choix d'en parler doit commenter la physique inhérente à chaque terme du modèle. Cette leçon ne peut se réduire à un catalogue d'informations diverses et variées, mais les candidats doivent dégager du temps pour les applications.
- 2009, 2010 : L'énergie est un point central et les applications ne doivent pas être traitées trop rapidement en fin de leçon.
- 2008 : Les applications doivent être envisagées. Parmi elles, figure l'énergie nucléaire, qu'il paraît difficile de ne pas aborder.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Physique-Chimie 1ereS*, **Prevost, Nathan, collection Sirius** ⟶ Pour l'intro
- ✍ *Manuel de Radioactivité*, **Foos** ⟶ Pour la goutte liquide
- ✍ *Energie Nucléaire*, **Basdevant, Rich, Spiro** ⟶ Pour compléter, et les calculs de MQ
- ✍ *Physique Nucléaire*, **Le Sech, Ngô** ⟶ Alternative
- ✍ *Énergie Nucléaire*, **Charles** ⟶ Des chiffres et détails techniques.

Prérequis

- ➢ Tension de surface
- ➢ Effet tunnel
- ➢ Classification périodique
- ➢ $E = mc^2$
- ➢ Mécanique
- ➢ Radioactivité

Expériences

☕

1 Retour sur la radioactivité . . . 575
1.1 Vocabulaire . . . 575
1.2 Émission bêta . . . 576
1.3 Émission Alpha . . . 577
1.4 Loi de vitesse . . . 577
2 Structure du noyau . . . 578
2.1 Composition du noyau . . . 578
2.2 Énergie de liaison, défaut de masse . . . 578
2.3 Modèle de la goutte liquide (Bohr, 1935) . . . 580
3 Les mécanismes de la fission . . . 582
3.1 Énergie et produit de fission . . . 583
3.2 Mécanisme de la fission . . . 584
3.3 Centrale nucléaire à fission . . . 585
4 Les mécanismes de la fusion . . . 586
4.1 Principe et énergie de fusion . . . 586
4.2 Difficultés . . . 587
4.3 Critère de Lawson (1957) . . . 587
4.4 La nucléosynthèse stellaire . . . 588

Introduction

Accroche : Aujourd'hui, nous allons fabriquer un réacteur nucléaire.

Cette année la Chine a annoncé la création d'un réacteur nucléaire expérimental nommé Tokamak, permettant d'atteindre des températures extrêmes similaires à celles à la surface du soleil (15 000 000°C au centre, 8000 en surface pour rappel), dans le but d'étudier la fusion en laboratoire.

J'ai dit le mot *nucléaire*, mais qu'est-ce que celui-ci signifie ? Une réaction nucléaire est une réaction qui se passe non pas au niveau de des électrons d'un atome, comme une réaction chimique, mais au niveau de son noyau. Ces réactions se font généralement toujours dans le sens de la stabilité, c'est à dire que la réaction va former des produits plus stables que les réactifs.

On a déjà vu la radioactivité, qui explique certaines transformations nucléaires, mais ce que l'on va voir aujourd'hui est plus profond.

But : voir les concepts, comprendre les applications

1 Retour sur la radioactivité

1.1 Vocabulaire

Transformation isobarique

Une transformation isobarique correspond à la transmutation d'un noyau avec la conservation du nombre de masse A. La transformation isobarique est le cas le plus courant de radioactivité bêta et gamma. Les seules transmutations non isobariques s'effectuent par groupe de 4 nucléons ; c'est le rayonnement alpha. Un noyau ne peut perdre des nucléons que par groupe de quatre en émettant une particule alpha donc un noyau d'hélium.

Nucléide

Un nucléide est un type d'atome (ou de noyau atomique) caractérisé par le nombre de protons et de neutrons qu'il contient ainsi que par l'état d'énergie nucléaire dans lequel il se trouve.

Dans la graphie abrégée d'un nucléide, on place le nombre de nucléons en haut à gauche du symbole de l'élément chimique, et le numéro atomique (nombre de protons) en bas à gauche, par exemple : ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$

Relations entre nucléides

- **Isotope** : Les nucléides d'un élément chimique particulier avec le même numéro atomique mais des nombres de neutrons différents s'appellent isotopes de cet élément. Exemple : ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ sont deux isotopes du carbone. L'ensemble des isotopes forment un élément chimique.

- **Isobare** : Des nucléides de nombre de masse égal mais de numéro atomique différent, autrement dit même nombre de nucléons mais de nombre de protons différents, s'appellent des isobares. Exemple : ${}^{17}_{7}\mathrm{N}$ et ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$ sont isobares.

- **Isomères** : Les isomères nucléaires présentent la différence entre un isotope et un nucléide. Ils ont le même nombre de protons et de neutrons mais des énergies nucléaires différentes, et ont une demi-vie significativement longue (par exemple les deux états de ${}^{99}\mathrm{Tc}$.

- **Isotones** : Même nombre de neutrons. Exemple : ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ sont isotones.

1.2 Émission bêta

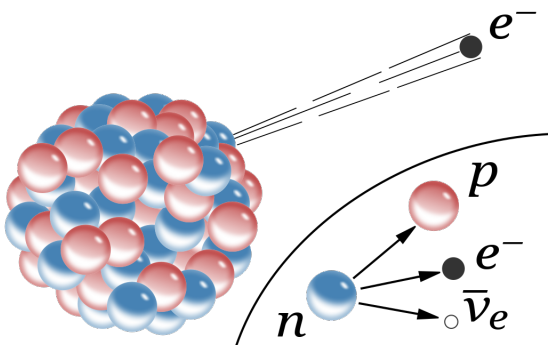


FIGURE 42.1 – Schématisation d'une émission β^-.

1.2.1 Bêta -

La radioactivité bêta moins affecte les nucléides X présentant un excès de neutrons. Elle se manifeste lors de réactions isobariques par la transformation dans le noyau d'un neutron en proton, le phénomène s'accompagnant de l'émission d'un électron (ou particule bêta moins) et d'un antineutrino électronique $\bar{\nu}_e$:

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + e^- + \bar{\nu}_e$$

À l'intérieur du noyau, un neutron se transforme (la radioactivité β- concerne en effet les noyaux trop riches en neutrons) :

$$^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{0}_{-1}e^- + {}^{0}_{0}\bar{\nu}_e$$

Cette transformation est **Isobarique**.

1.2.2 Bêta +

La radioactivité bêta plus ne concerne que les nucléides présentant un excès de protons. Elle se manifeste par la transformation dans le noyau d'un proton en neutron, le phénomène s'accompagnant de l'émission d'un positron (encore appelé particule bêta plus = anti-électron) et d'un neutrino électronique ν_e :

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + e^+ + \nu_e$$

L'émission d'un rayonnement β^+ par un noyau n'est possible que si l'énergie disponible est supérieure à 1.022 MeV. En effet le bilan énergétique, qui est la différence entre l'énergie initiale et l'énergie finale donne

$$Q_{\beta+} = (m(X) - m(Y) - m_e - m_\nu)c^2$$

où $m_\nu c^2$ est négligeable, puisque de l'ordre de quelques eV.

$$Q_{\beta+} = \mu(X)c^2 - Zm_ec^2 - (\mu(Y)c^2 - (Z-1)m_ec^2) - m_ec^2$$

avec $\mu(X)c^2$ et $\mu(Y)c^2$ les énergies des atomes X et Y.

$$Q_{\beta+} = (\mu(X) - \mu(Y) - 2m_e)c^2$$

La réaction n'est donc possible que si $Q_{\beta+} > 0$ c'est-à-dire que si $(\mu(X) - \mu(Y))c^2 > 2m_e c^2 = 1{,}022$ MeV.

Cette transformation est **Isobarique**.

1.3 Émission Alpha

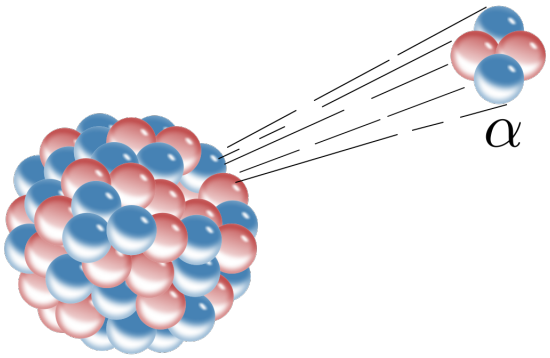


FIGURE 42.2 – Schéma d'une émission α.

On parle de radioactivité alpha pour désigner l'émission d'un noyau d'hélium :

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Ces hélions, encore appelés particules alpha, ont une charge $2e$, et une masse de 4,001 505 8 unités de masse atomique.

1.4 Loi de vitesse

Un radioisotope quelconque a autant de chances de se désintégrer à un moment donné qu'un autre radioisotope de la même espèce, et la désintégration ne dépend pas des conditions physico-chimiques dans lesquelles le nucléide se trouve. En d'autres termes, la loi de désintégration radioactive est une loi statistique.

Soit $N(t)$ le nombre de radionucléides d'une espèce donnée présents dans un échantillon à un instant t quelconque. Comme la probabilité de désintégration d'un quelconque de ces radionucléides ne dépend pas de la présence des autres espèces de radionucléides ni du milieu environnant, le nombre total de désintégrations $\mathrm{d}N$ pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ est proportionnel au nombre N de radionucléides de même espèce présents et à la durée $\mathrm{d}t$ de cet intervalle :

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t$$

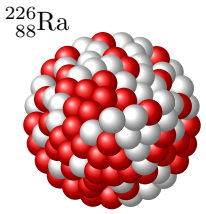
Le signe moins vient de ce que N diminue au cours du temps, la constante λ (caractéristique du radionucléide étudié) étant positive. En intégrant l'équation différentielle précédente, on trouve la loi de décroissance exponentielle du nombre $N(t)$ de radionucléides présents dans le corps à un instant t quelconque, en appelant N_0 le nombre des radionucléides présents à l'instant $t = 0$

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$$

La demi-vie $t_{1/2}$ est la durée au bout de laquelle la moitié d'un échantillon radioactif est désintégrée, le nombre de noyaux fils atteignant la moitié du nombre de noyaux pères. On montre que :

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

2 Structure du noyau



2.1 Composition du noyau

Le noyau est composé de nucléons, les neutrons et les protons. Eux même sont composés de particules quantiques fondamentales, mais on ne parlera pas de cela aujourd'hui. Les deux ont une masse très proche de 1.6×10^{-27} kg. Le proton possède de plus une charge $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. De fait de cette charge, il y a répulsion entre les protons, ce qui déstabilise l'édifice.

OdG : le rayon du noyau est de l'ordre du femtometre, soit 10^5 fois plus petit que l'atome lui-même, par conséquent la répulsion électrostatique à ce niveau vaut $F = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \simeq 230$ N. C'est monstrueux par rapport à la masse de l'édifice. L'attraction gravitationnelle en comparaison ne fait que 2×10^{-34} N. Elle ne suffit donc pas à compenser la répulsion électrostatique. Pourtant je suis la preuve vivante que les noyaux sont stables [1]. Il existe donc une ou plusieurs interaction(s) qui stabilisent le noyau.

La force qui stabilise le noyau sera nommée **interaction forte**. Elle est l'une des trois interactions du modèle standard, avec l'électromagnétisme et l'interaction faible [2].

Cette interaction affecte les quarcks et particules constituées de quarcks, donc pas les leptons. Elle est portée (et affecte) par les gluons. Sa portée est de l'ordre de la taille du noyau (10^{-15} m), et c'est la plus forte des interactions fondamentales à cette échelle.

2.2 Énergie de liaison, défaut de masse

L'énergie de liaison, c'est ce qui maintient en place les nucléons dans le noyau, ou plutôt c'est l'énergie à fournir pour les séparer.

On considère la réaction fictive $^A_Z\mathrm{X} \to Z\ ^1_1\mathrm{p} + (A-Z)\ ^1_0\mathrm{n}$, avec tous les composants immobiles. Faisons sur celle-ci un bilan de masse. On considère tous les composés au repos, donc $E = mc^2$. En notant $B(A,Z)$ l'énergie de liaison, on a

$$m_X c^2 + B(A,Z) = Z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2$$

Ainsi on peut écrire directement l'énergie de liaison comme $B(A,Z) = (Zm_p + (A-Z)m_n - m_X)c^2 = \Delta m c^2$.

Δm est le défaut de masse de la réaction. Dans le cas d'un noyau stable, l'énergie de liaison est positive, et le défaut de masse aussi, c'est à dire que l'atome est plus léger que ses constituants séparés.

1. Des noyaux qui étudient d'autres noyaux, l'humanité est bien étrange.
2. Et non la gravité n'est pas là, on cherche toujours le graviton et l'unification.

Exemple de calcul

✍ Prix Nobel de Chimie 1934, le deutérium $^{2}_{1}\mathrm{H}$ est un isotope naturel de l'hydrogène. On a, avec $u = \dfrac{m_{^{12}_{6}\mathrm{C}}}{12}$

$$\begin{cases} m_p = 1.0072765u \\ m_n = 1.0086649u \\ m_{^{2}_{1}\mathrm{H}} = 2.013553u \end{cases} \tag{42.1}$$

Alors on fait le calcul et on trouve $B(2,1) = 2.224$ MeV.

Pour $^{238}\mathrm{U}$ on trouve 1801,2 MeV, et 500 MeV pour $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$.

Cette énergie, comparée aux quelques eV des électrons qui gravitent autour du noyau, est colossale. C'est pourquoi on négligera toujours les électrons dans nos calculs.

Élément chimique	Énergie de liaison B (MeV)	Énergie de liaison par nucléon B/A (MeV)
Deutérium $^{2}_{1}\mathrm{D}$	$2,224$	$1,112$
Oxygène $^{16}_{8}\mathrm{O}$	$127,62$	$7,98$
Fer $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$	$499,6$	$8,79$
Uranium $^{238}_{92}\mathrm{U}$	$1783,2$	$7,59$

B augmente toujours avec A, il est donc difficile[3] de comparer la stabilité de deux noyaux distincts. On utilise alors usuellement l'énergie de liaison par nucléon pour faire cela.

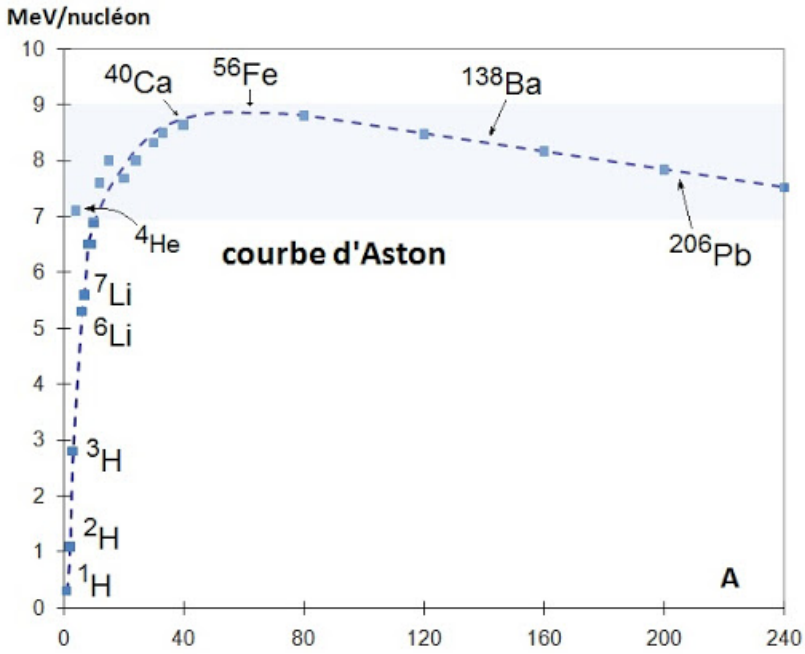


FIGURE 42.3 – La courbe d'Aston représente l'évolution de l'énergie de liaison par nucléons, en fonction du nombre de ces derniers.

3. et stupide.

La remarque à faire sur cette courbe, c'est que les atomes de droite vont avoir tendance à se séparer en petits bouts pour redescendre au plus stable : le Fer 56. Inversement, les atomes de gauche peuvent fusionner pour se rapprocher du Fer, mais on en parlera plus tard.

Il existe des anomalies pour Z, $N \in \{2, 8, 20, 28, 50, 82, 126\}$, où la stabilité semble anormalement haute (pour ^{4}He, il y a $Z = 2$ et $N = 2$, d'où une très grande stabilité relative !). Ces nombres sont appelés nombres magiques et leur origine est quantique (comparable à la stabilité des atomes lorsqu'une couche électronique est remplie) [4].

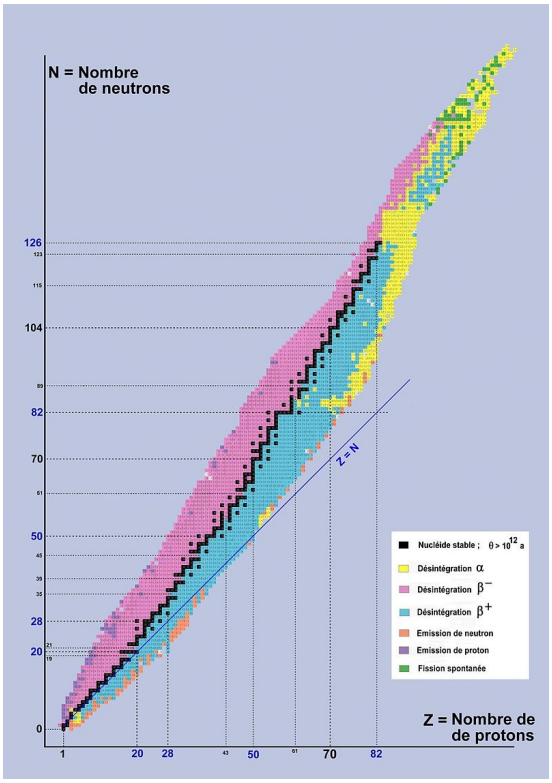


FIGURE 42.4 – Une représentation des atomes tables dans une *vallée de stabilité*.

Comment peut-on expliquer de manière théorique et prédictive cette courbe ?

2.3 Modèle de la goutte liquide (Bohr, 1935)

✍ Foos p92 puis Basdevant p66 etLe Sech p27

Pour calculer cette énergie, on simplifie le problème en faisant certaines hypothèses :

- Le noyau est une goutte liquide, incompressible, sphérique.
- La force nucléaire est à courte portée et est indépendante de la nature du nucléon
- La densité volumique de charge et la densité de nucléons sont homogènes dans tout le noyau

On a alors les résultats suivants :

- **Interaction forte :** C'est une interaction à faible portée donc seule l'interaction avec les proches voisins compte, plus on augmente le nombre de nucléons plus cette énergie augmente. C'est une énergie volumique, on peut dire que c'est l'équivalent des forces de VdW ou hydrogène dans un liquide. On l'écrit donc $E_v = a_v R^3$.
- Par analogie avec les liquides, on sait que ce terme volumique se traduit en surface par un défaut d'interaction et donc un terme de tension superficielle : créer une surface coûte de l'énergie. On a un terme $E_s = -a_s R^2$

4. Voir ✍ Le Sech, Ngô, p.23

- On a un liquide chargé, il faut donc prendre en compte la répulsion électrostatique. Un proton subit la répulsion de $(Z-1)$ autres, à une distance de l'ordre de R en moyenne, soit une énergie de répulsion $\frac{e(Z-1)}{4\pi\epsilon_0 R}$ et il y a Z protons donc $E_c = -a_c\frac{Z^2}{R}$ en considérant $Z(Z-1) = Z^2$.

- On a considéré un goutte sphérique donc $A = \int_0^R \rho 2\pi r^2 dr \propto R^3$

La formule semi-empirique de masse est donc finalement :

$$E_l(A,Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a\frac{(N-Z)^2}{A} + \delta(A,Z) \tag{42.2}$$

Détaillons chacun des termes :

- $a_v A$: terme de **volume** car $A \propto V$. Il provient de l'interaction nucléaire forte. Il est de l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison d'un nucléon entouré de quelques voisins (40 MeV)

- $-a_s A^{2/3}$: terme de **surface**, analogue à une tension de surface. Il provient aussi de l'interaction forte, ou plutôt de son manque. C'est une correction du premier terme pour prendre les effets de surface en compte. Il tend à minimiser la surface du noyau.

- $-a_c\frac{Z^2}{A^{1/3}}$: terme **coulombien**, il traduit l'interaction électrostatique entre les protons.

- $-a_a\frac{(N-Z)^2}{A}$: terme d'asymétrie.Il favorise les noyaux symétriques (Z=N), cela peut se comprendre par le fait qu'il faille apporter de l'énergie à un noyau symétrique pour en obtenir un asymétrique (✍ Foos p94) ou que quantiquement, c'est une question de recouvrement entre protons et neutrons avec le principe d'exclusion de Pauli (✍ Charles p.23). *Plus un noyau est gros, moins lever laisser l'asymétrie coûte cher.* C'est un terme quantique ajouté par Weisacker.

- Le dernier terme est un terme d'**appariement**. L'énergie du noyau est plus faible lorsque les nucléons sont appariés par couples de spin total nul.

$$\delta(A) = \begin{cases} -\frac{a_p}{A^{1/3}} & \text{pour un couple } (N,Z) \text{ impair/impair} \\ +\frac{a_p}{A^{1/3}} & \text{pour un couple pair/pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{42.3}$$

Coefficient	Valeur (MeV)
a_V	15,75
a_S	17,8
a_C	0,711
a_A	23,7
a_P (N pair + Z pair)	$\frac{11,18}{A^{1/2}}$
a_P (N pair + Z impair ou N impair + Z pair)	0
a_P (N impair + Z impair)	$\frac{-11,18}{A^{1/2}}$

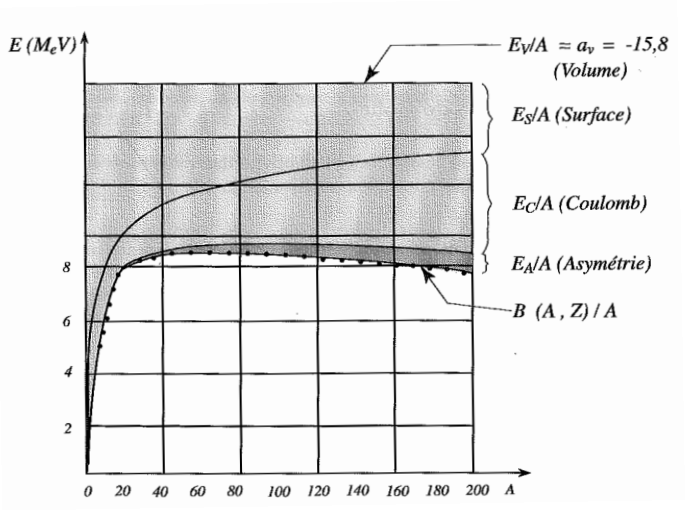


FIGURE 42.5 – Les coefficients et contributions de chaque partie du modèle.

Défauts du modèle

La formule est semi-empirique car les dépendances en (A,Z) sont obtenues par modèle physique et on obtient les coefficients en faisant une régression sur la courbe d'Ashton.

OdG : (✍ Basdevant p67).

On utilise de plus pas moins de 5 paramètres, et avec 8 on peut dessiner un éléphant très réaliste.

Ce modèle ne donne aucune explication aux nombres magiques, il nous faudra expliquer cela par le modèle en couches.

Ce modèle donne bien la forme de la courbe, et on obtient bien que le noyau le plus stable est celui du fer. Cependant, il faut être conscient.e des limites du modèle qui ne prédit pas par exemple les nombres magiques pour lesquels il faut faire un modèle quantifié de couches "nucléoniques". Cependant, on voit que l'on peut arriver au fer par deux chemins : la fusion et la fission et récupérer de l'énergie. Nous allons regarder tout d'abord celui qui est utilisé dans nos centrales : la fission.

↓

3 Les mécanismes de la fission

✍ Basdevant p. 185

La fission est la brisure spontanée ou provoquée d'un noyau en plusieurs noyaux fils plus stables d'un point de vue énergétique et étant composés d'un nombre plus faible de nucléons.

$$\boxed{{}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A_1}_{Z_1}\mathrm{X}_1 + {}^{A_2}_{Z_2}\mathrm{X}_2 + Q_{\text{fission}}} \tag{42.4}$$

où on note Q_{fission} l'énergie libérée sous forme d'énergie cinétique des produits lors de la réaction. Puisque cette réaction fait intervenir des noyaux lourds comportant beaucoup de nucléons, elle a lieu pour les atomes à droite du fer sur la courbe d'Aston. Elle apparaît donc chez les atomes pour lesquels $A > 100$ et elle prédomine chez ceux pour lesquels $A > 270$.

3.1 Énergie et produit de fission

Tâchons en premier lieu d'évaluer cette énergie. Supposons que l'on ait une fusion symétrique, à savoir

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A/2}_{Z_1}\mathrm{X}_1 + {}^{A/2}_{Z_1}\mathrm{X}_1 \tag{42.5}$$

Prenons $A = 240$ (on n'est pas loin de l'uranium). L'énergie de fission vaut alors :

$$ Q_{\text{fission}} = 2 \times B\left(\frac{A}{2}, Z_1\right) - B(A, Z) \tag{42.6}$$

La modèle d'Aston donne $\dfrac{B}{A} = 7.6$ MeV quand $A = 240$ et $\dfrac{B}{A} = 8.5$ MeV pour $A = 120$. On a donc

$$ Q_{\text{fission}} = 2 \times 120 \times 8.5 - 240 \times 7.6 = 216 \text{ MeV} $$

En réalité, un certain nombre de neutrons sont produits lors de la réaction car l'excès de neutrons croît avec A. Notons ν le nombre de neutrons. En sachant que l'énergie de liaison d'un neutron est nulle, on a

$$ Q_{\text{fission}} = 220 \text{ MeV} - \nu \times 8.5 \text{ MeV} $$

Pour $\nu = 2.5$, on obtient $\boxed{Q_{\text{fission}} = 200 \text{ MeV}}$ [5].

Application

Prenons 1 gramme de ^{235}U. L'énergie libérée par la fission de ce gramme vaut alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \text{nombre de noyaux d'uranium 235 dans 1 g} \times 200 \text{ MeV} \\ &= \frac{m}{M}\mathcal{N}_A \times 200 \text{ MeV} \\ &= 81 \text{ GJ} \end{aligned}$$

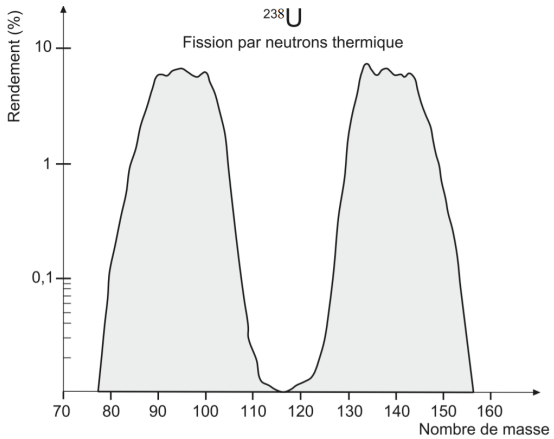
Sachant que la combustion d'1 kg de pétrole libère 42 MJ, on peut donc dire que

$$\boxed{1 \text{ g de } {}^{235}\mathrm{U} \iff 2 \text{ tonnes de pétrole}}$$

Jusque là, on a traité le cas des réactions symétriques mais en réalité la réaction est asymétrique dans le cas général :

$$ {}^{235}\mathrm{U} \to {}^{145}_{57}\mathrm{La} + {}^{90}_{35}\mathrm{Br} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n} \tag{42.7}$$

Les fragments tendent à se rapprocher des noyaux correspondant aux nombres magiques.



5. OdG à retenir.

Découverte de la fission (✍ Ngô p71)

La découverte de la fission nucléaire en 1939 fut accidentelle. Hahn et Strassmann tentaient de créer des noyaux plus lourds que l'uranium en le bombardant de neutrons et observaient à l'inverse l'apparition d'éléments plus légers. Le phénomène fut expliqué la même année par Meitner et Frisch avec le modèle de la goutte liquide.

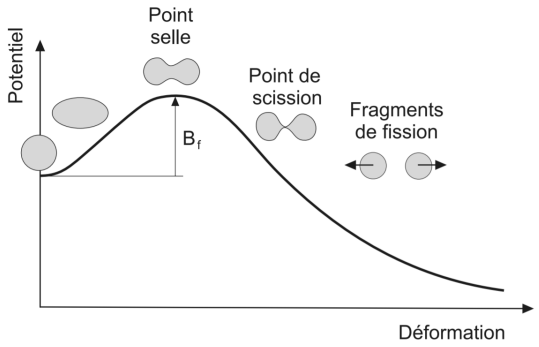
3.2 Mécanisme de la fission

✍ Basdevant p190

Reprenons la réaction

$$^{235}\mathrm{U} \rightarrow {}^{145}_{57}\mathrm{La} + {}^{90}_{35}\mathrm{Br} + 3\ {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

Pour modéliser cette réaction, on part du noyau père ^{235}U qui est de forme sphérique. Au cours de la réaction, la *goutte* se déforme pour donner une ellipsoïde, cette déformation augmentant l'énergie de tension superficielle et diminuant l'énergie de répulsion coulombienne. Quand on trace l'énergie potentielle en fonction du rayon de la goutte que varie entre r_0 et l'infini, on obtient :



On voit que l'énergie potentielle passe par un maximum : il faut donc franchir une barrière énergétique pour que la réaction ait lieu. On appelle cette barrière la **barrière de fission** et elle vaut environ 7 MeV.

Maintenant, essayons de voir comment varie l'énergie du système avec la déformation. Pour cela, prenons un ellipsoïde de demi-grand axe selon une direction a et de demi-petit axe selon les 2 autres directions b. On introduit la paramètre de déformation ϵ en écrivant :

$$\begin{cases} a = R(1+\epsilon) \\ b = \dfrac{R}{\sqrt{1+\epsilon}} \end{cases} \tag{42.8}$$

Remarquons que le volume est conservé : $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi a b^2$. Au premier ordre, on a

$$\begin{aligned} E_c &= a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5}\epsilon^2\right) \\ E_s &= a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5}\epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{42.9}$$

La changement total d'énergie vaut donc

$$\Delta E = \frac{\epsilon^2}{5}\left(2a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right) \tag{42.10}$$

Pour que la déformation soit possible et que le noyau soit instable vis-à-vis de la fission, il faut que $\Delta E < 0$ donc il faut que

$$\boxed{\frac{Z^2}{A} \geq \frac{2a_c}{a_s} \simeq 49}$$

On appelle $\dfrac{Z^2}{A}$ le **paramètre de fissibilité** et on considère que la fission est spontanée si $\dfrac{Z^2}{A} \geq 50$.

On observe donc 2 types de fission :

- **la fission spontanée :** la barrière énergétique est franchie par effet tunnel, mais les masses en jeu sont relativement élevées et font que la probabilité de franchissement est faible ($\propto e^{-\sqrt{m}}$), ce qui implique une demi-vie très longue de l'ordre de 10^{16} années voire plus.
- **la fission induite :** de l'énergie est fournie au noyau par interaction avec un neutron. Par exemple,

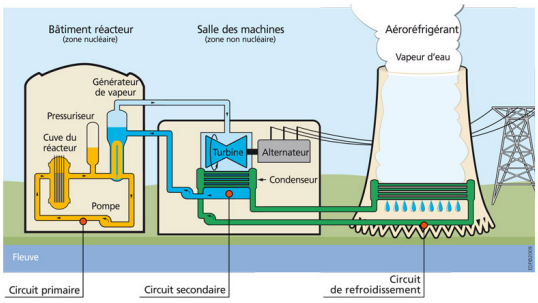
$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow ^{236}_{92}\mathrm{U}^{*}$$

Notons ici que $^{235}_{92}\mathrm{U}$ est le seul isotope d'uranium fissible présent à l'état naturel. En le neutronant, on en fait un noyau instable qui va faire une fission quasi immédiate.

3.3 Centrale nucléaire à fission

Les centrales nucléaires ont représenté en 2016 71.6% de la production électrique annuelle en France [6] et sont donc un moyen de production d'énergie majeur.

Le premier réacteur à fission nucléaire fut construit aux USA en 1942 par Fermi. Il s'agit d'une machine thermique dont la source de chaleur provient des réactions nucléaires. Dans l'industrie, on utilise de l'uranium 235 enrichi parce qu'il résiste à la chaleur (il fond à 2800°C) et parce qu'il est capable d'absorber un neutron dont la vitesse, liée à l'agitation thermique du milieu, est de l'ordre de 2 km/s. L'uranium 235 est d'ailleurs le noyau le plus lourd que l'on puisse trouver à l'état naturel.
Le principe de la réaction de fission est celui d'une réaction en chaîne : on envoie un neutron à 20000 km/s sur un noyau d'uranium 235 qui va alors l'absorber et devenir un noyau d'uranium 236. Ce noyau va alors se fissionner et libérer en moyenne 2.4 neutrons qui seront à leur tour absorbés par des noyaux d'uranium 235 et ainsi de suite... Les neutrons cèdent de l'énergie au milieu par frottements et cette énergie est utilisé comme source chaude dans la machine thermique.



7

Cependant, tous les neutrons ne restent pas forcément dans le milieu et tous les neutrons ne sont pas forcément absorbés par des noyaux qui fissionnent. Ainsi, suivant le nombre de neutrons qui vont effectivement contribuer à maintenir la réaction de fission, la réaction peut s'arrêter, rester stationnaire ou bien s'emballer. On appelle alors **coefficient de multiplication neutronique** le coefficient

$$k = \frac{\text{nombre de neutrons effectifs à l'étape } n+1}{\text{nombre de neutrons effectifs à l'étape } n}$$

On a alors :

- si $k > 1$: on est en régime sur-critique et mieux vaut ne pas rester dans le coin ;
- si $k = 1$: on est en régime critique, qui est le régime dans lequel sont maintenues les centrales ;
- si $k < 1$: on est en régime sous-critique, la centrale est à l'arrêt.

6. https://www.edf.fr/groupe-edf/espaces-dedies/l-energie-de-a-a-z/tout-sur-l-energie/produire-de-l-electricite/le-nucleaire-en-chiffres
7. https://www.irsn.fr/FR/connaissances/Installations_nucleaires/Les-centrales-nucleaires/reacteurs-nucleaires-France/Pages/1-reacteurs-nucleaires-France-Fonctionnement.aspx

Pour ralentir les neutrons afin de leur permettre de réaliser la réaction de fission, on utilise de l'eau. Cependant, l'eau est portée à plus de 300°C donc elle est maintenue à 150 bar pour rester liquide.

La réaction de fission nucléaire n'est pas sans problèmes :

- les produits sont radioactifs et non recyclables (en 2006, la France a produit 54 kg de déchets pour 450 TWh de puissance électrique générée).
- le réchauffement de l'eau peut poser un problème pour l'écosystème autour de la centrale (pour cela, on contrôle la puissance, cf ✍ Ngô p206).
- le poison neutronique est également un problème environnemental.

4 Les mécanismes de la fusion

4.1 Principe et énergie de fusion

La fusion est le procédé inverse de la fission mais pour des atomes légers puisqu'elle consiste à fusionner (Captain Obvious, le retour) deux noyaux légers pour former un noyau plus lourd et plus stable tout en libérant de l'énergie. Elle a lieu pour les atomes à gauche du fer sur la courbe d'Aston. On peut donner comme exemple :

$$^2_1\mathrm{d} + {}^2_1\mathrm{d} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + Q_{\text{fusion}} \qquad \text{avec } Q_{\text{fusion}} = 3.25 \text{ MeV}$$

$$^2_1\mathrm{d} + {}^2_1\mathrm{t} \rightarrow {}^3_1\mathrm{t} + {}^1_1\mathrm{p} + Q_{\text{fusion}} \qquad \text{avec } Q_{\text{fusion}} = 4 \text{ MeV}$$

$$^2_1\mathrm{d} + {}^3_1\mathrm{t} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + Q_{\text{fusion}} \qquad \text{avec } Q_{\text{fusion}} = 17.5 \text{ MeV}$$

où $^2_1$d est un isotope de l'hydrogène appelée deutérium tandis que $^3_1$t est un autre isotope de l'hydrogène appelé tritium. Pour le dernier exemple, l'énergie libérée est de 17.5 MeV, ce qui correspond à 3.5 MeV/nucléon. Pour comparaison, l'énergie libérée par la fission est de 0.8 MeV/nucléon. **L'énergie libérée par nucléon est donc plus importante par la fusion et que par la fission.** Ce la se traduit par une pente plus élevée sur la courbe d'Aston pour la fusion que pour la fission.

Application

Pour 1 g de mélange $\{^2_1\mathrm{d} + {}^3_1\mathrm{t}\}$, l'énergie libérée par fusion est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{m}{M_d + M_t}\mathcal{N}_A \times 17.5 \text{ MeV} \\ &= 340 \text{ GJ}\end{aligned}$$

Sachant que la combustion d'1 kg de pétrole libère 42 MJ, on peut donc dire que

$$\boxed{\text{1 g de mélange } \{^2_1\mathrm{d} + {}^3_1\mathrm{t}\} \iff \text{8 tonnes de pétrole}}$$

L'intérêt de la fusion est multiple :

- on ne produit pas de déchets radioactifs (en réalité c'est plus compliqué ça).
- on peut utiliser le deutérium stocké dans l'eau de mer (1 g de deutérium pour 300 L d'eau de mer), ce qui représente un approvisionnement pour 1 milliard d'années.
- contrairement à la fission, une réaction de fusion nucléaire ne peut pas s'emballer.

4.2 Difficultés

Sur le papier, la fusion c'est génial et on se demande pourquoi on utilise encore la fission pour produire de l'énergie. Seulement voilà, c'est pas si simple que ça de faire fusionner deux atomes car il faut vaincre la répulsion coulombienne et les rapprocher suffisamment jusqu'à une distance inférieur à 10 fm pour que l'interaction forte attractive puisse finalement surpasser cette répulsion. Il s'agit donc de passer une barrière de potentiel par effet Tunnel donc la probabilité de transmission vaut

$$T \simeq \exp\left(-2\int \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}\mathrm{d}x\right)$$

Plus les noyaux sont chargés, plus la barrière est haute et donc plus T diminue. À l'inverse, plus l'énergie des noyaux est élevée, plus T augmente. Par exemple, pour un mélange $\{^2_1\mathrm{d} + ^3_1\mathrm{t}\}$, on a

$$\begin{cases} E = 1 \text{ keV} \Rightarrow T = 10^{-13} \\ E = 10 \text{ keV} \Rightarrow T = 10^{-3} \end{cases}$$

Pour atteindre cette énergie, il faut chauffer. Sachant que $T = \dfrac{E}{k_B}$, on trouve une température $\boxed{T = 1.15 \times 10^8 \text{ K}}$ pour $E = 10$ keV. Autant dire qu'à cette température, on est chaud patate et que la matière est sous forme de plasma. Sachant que le taux de réaction (le nombre de réactions par seconde) et donc l'énergie dégagée sont proportionnels à la densité du mélange $\{^2_1\mathrm{d} + ^3_1\mathrm{t}\}$, il faut donc **confiner le plasma**. Sur Terre, on espère le faire avec des champs magnétiques et des lasers tandis que dans les étoiles c'est la gravitation qui s'en charge.

4.3 Critère de Lawson (1957)

✍ Basdevant p239

Face à toutes ces difficultés, Lawson proposa en 1957 un critère de rentabilité de la fusion nucléaire en se basant sur l'idée suivante : l'énergie produite doit être au moins égale à l'énergie fournie à l'installation où se déroule les réactions, *i.e.* il faut dépasser un point qui s'appelle le "break-even".

Pour savoir à quelle condition on dépasse le "break-even", on définit le temps de confinement τ la durée pendant laquelle le plasma après sa création garde sa température T et sa cohésion. Pour chauffer le plasma à la température T, il faut lui fournir l'énergie volumique $3n_i k_B T$ où n_i est la densité volumique des noyaux. On note v la vitesse microscopique des noyaux et σ la section efficace des collisions entre noyaux. Notons η le rendement de conversion de l'énergie nucléaire en énergie électrique. Le réacteur est intéressante si et seulement si $E_{\text{produite}} > E_{\text{perte}}$. Or on a

$$\begin{cases} E_{\text{perte}} = 3n_i k_B T \\ E_{\text{produite}} = \eta \left(\dfrac{n_i}{2}\right)^2 \langle\sigma v\rangle \, \tau Q_{\text{fusion}} \end{cases}$$

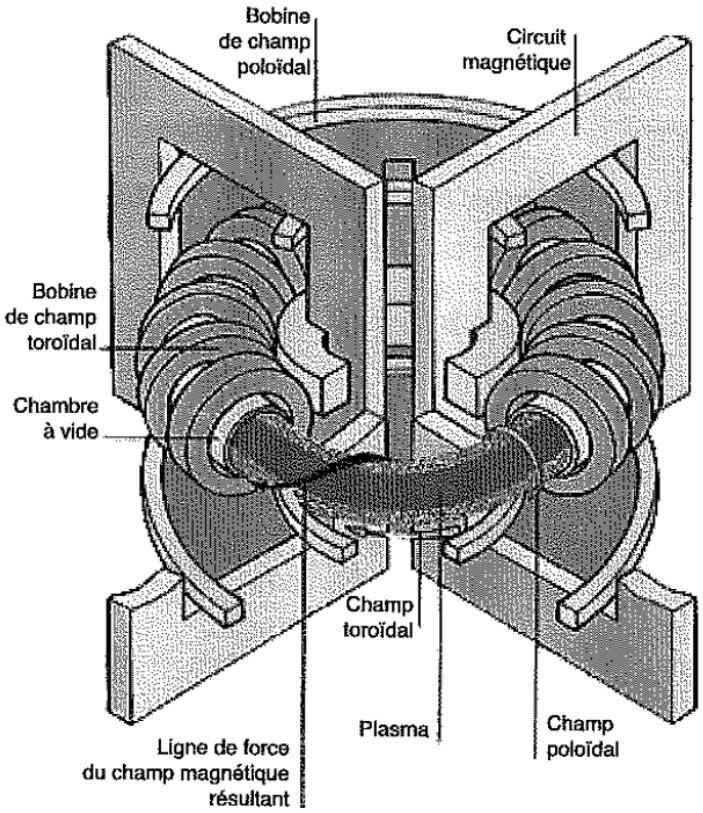
Le **critère de Lawson** impose donc

$$\boxed{\eta \times n_i \times \tau \geq \frac{12 k_B T}{\langle\sigma v\rangle \, Q_{\text{fusion}}} \simeq 1.5 \times 10^{20} \, \text{s m}^{-3}} \tag{42.11}$$

Ce critère implique que pour qu'une réaction de fusion nucléaire soit rentable, il faut

- bien confiner (n_i élevé)
- confiner longtemps (τ élevé)
- convertir efficacement (η élevé)

Le projet ITER opte pour un confinement magnétique et utilise un réacteur de type Tokamak.



On peut aussi confiner de façon inertielle avec des lasers. Dans tous les cas, c'est très gourmand en énergie. Le confinement du plasma est cependant essentiel pour ne pas qu'il entre en contact avec le métal composant le réacteur et donc ne pas qu'il endommage le matériel utilisé (n'importe quel métal fond à cette température).

Ordres de grandeur

Type de réacteur	Confinement	n (en m^{-3})	τ (en s)	$n\tau$ (en $\mathrm{s\,m}^{-3}$)	T (en K)
ITER	Magnétique	10^{20}	1	10^{20}	1.7×10^{8}
Avec lasers	Inertiel	10^{31}	10^{-11}	10^{20}	10^{8}
Étoile	Gravitationnel	7×10^{30}	10^{17}	7×10^{47}	2×10^{7}

4.4 La nucléosynthèse stellaire

✍ Basdevant p. 255

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Nucléosynthèse

Au sein d'une étoile la pression est suffisante pour que les atomes légers fusionnent naturellement. Les réactions se font en série, dans un ordre assez précis, qui forme la **séquence principale**.

Ainsi lorsqu'elle commence à briller, une étoile est en fait en train de s'effondrer sur elle même sous son propre poids au point de réaliser la réaction de fusion de l'hydrogène. Cette réaction génère de l'énergie sous forme de photons, qui vont effectuer une pression de radiation qui contrebalance la force gravitationelle [8] :

$$4\mathrm{p} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 27\ \mathrm{MeV} \tag{42.12}$$

8. https://youtu.be/COQNmu_xu04

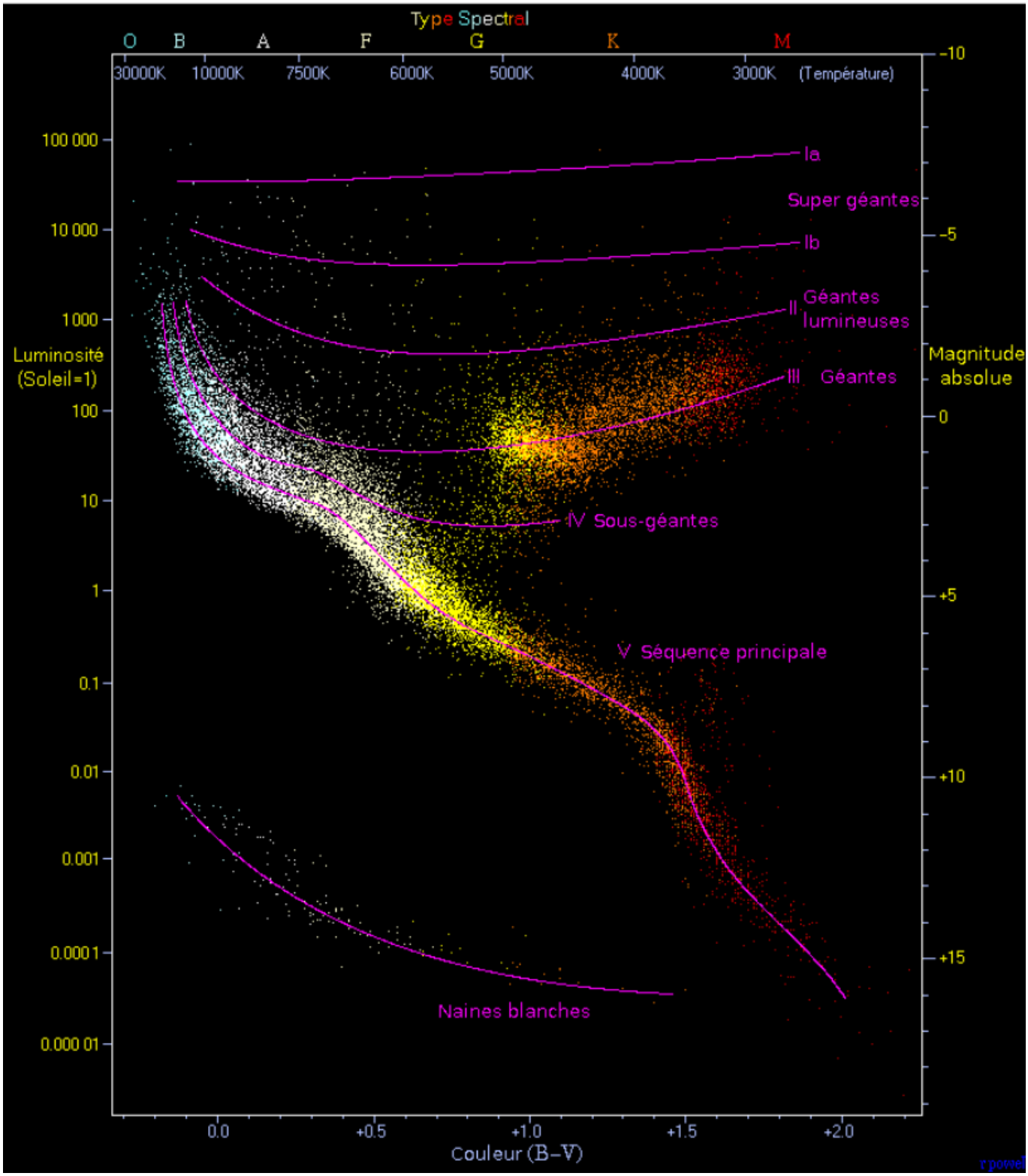


FIGURE 42.6 – Un diagramme Hertzsprung-Russell montre la relation entre les différentes caractéristiques d'une étoile. La majeure partie de celles-ci relève de branches bien distinctes, selon leur stade d'évolution. Au fil des différentes phases, les étoiles peuvent passer d'une branche à une autre.

OdG

Faisons un petit calcul d'**OdG** : Supposons le soleil à l'équilibre. Sa luminosité est de $L = 4 \times 10^{26}\,\mathrm{W} = 2.5 \times 10^{45}$eV. Quel quantité d'hydrogène consomme-t-il ?

Un kg de proton libère une énergie de 1.42×10^8 J/kg. Il faut $r = \dfrac{L}{1.42 \times 10^8}$ kg/s, soit une consommation de 2.8×10^{18} kg/s par seconde. La masse solaire est de 10^{30} kg, donc en le considérant purement fait d'hydrogène, il aurait une durée de vie restante de 12000 ans.

C'est absurde parce qu'on sait de source sure que le soleil est beaucoup plus vieux que cet OdG.

En fait il y a d'autres réactions, notamment lorsque les protons sont tous consommés, c'est l'Helium qui commence à fusionner. C'est le stade de Géante rouge. Il nous reste 5,4 milliards d'années avant ce stade.

Lorsque l'étoile poursuit son cycle de vie, elle va générer des atomes de plus en plus lourds, jusqu'à arriver au Fer qui ne peut plus fusionner, du fait qu'il est très stable.

En fonction de la taille de l'étoile, on a alors effondrement et potentiellement supernova, qui lors de l'explosion va générer tous les noyaux lourds qu'on trouve à l'état naturel.

Pour plus de détails :

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Cycle_carbone-azote-oxygène

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Chaîne_proton-proton

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Réaction_triple_alpha

LP 43

Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux

Niveau : L3

Commentaires du jury

- 2017 : Il est intéressant que les candidats s'appuient sur un exemple de système quantique à deux niveaux d'énergie pour construire cette leçon.
- 2015 : Il est étonnant de voir cette leçon s'appuyer sur les états stationnaires sans aucun élément de justification. L'évolution d'un système quantique en régime forcé est trop souvent totalement négligée.
  Jusqu'en 2014, le titre était : Oscillateurs à deux degrés de liberté en mécanique classique et en mécanique quantique

Bibliographie

✍ *12 leçons de mécanique quantique*, **Basdevant** ⟶ Intro, molécule d'ammoniac et Maser
✍ *Physique Quantique. tome 1, Fondements*, **Le Bellac** ⟶ NH_3 et RMN
✍ *Mécanique Quantique*, **Cohen-Tannoudji, Diu, Laloë** ⟶ En complément, formalisme général.
✍ *Mécanique*, **Pérez** ⟶ Analogie

Prérequis

- ➢ Puits symétriques
- ➢ Effet tunnel
- ➢ Équation de Schrödinger

Expériences

☕

1 L'ammoniac . . . 592
1.1 Modèle de la molécule d'ammoniac . . . 592
1.2 Cas de non couplage : barrière infinie . . . 593
1.3 Couplage par effet tunnel . . . 593
1.4 Étude dynamique . . . 594
1.5 Généralités sur les systèmes à deux niveaux et retour sur les hypothèses . . . 595
2 Évolution forcée . . . 596
2.1 Couplage de NH_3 à un champ électrique . . . 596
2.2 Application au MASER . . . 598
2.3 Analogie à la RMN . . . 599

Introduction

1 Système à deux niveaux : exemple de la molécule d'ammoniac

1.1 Modèle de la molécule d'ammoniac

✍ Basdevant p93, simulation : https://phet.colorado.edu/fr/simulation/legacy/covalent-bonds

La molécule d'ammoniac NH_3 a la forme d'une pyramide dont le sommet est occupé par l'azote et la base est formée par les trois hydrogènes. À proprement parler, la molécule d'ammoniac a une infinité d'états. En effet, elle peut tourner autour de n'importe quel axe, se translater dans n'importe quelle direction et vibrer. C'est pourquoi on va faire quelques hypothèses :

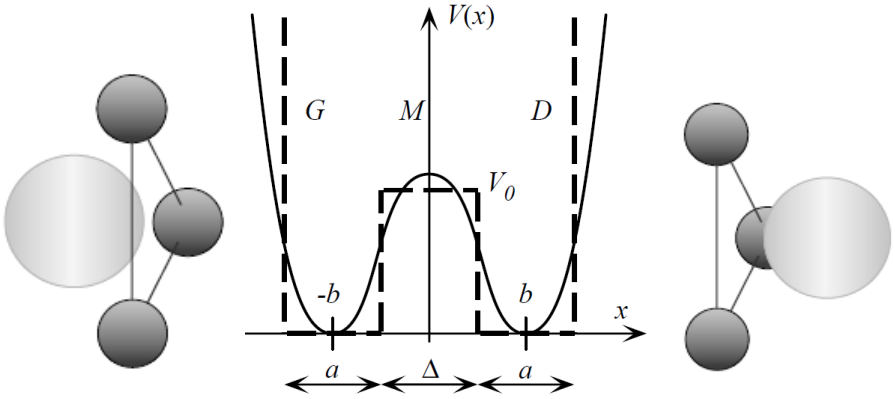
- La molécule ne tourne qu'autour de l'axe de symétrie noté $\mathcal{D}$ passant par l'azote. Elle a donc un moment cinétique défini et on peut donc définir le sens de l'axe $\mathcal{D}$ dans cette direction.
- La molécule a une impulsion nulle.
- La molécule ne vibre pas.

Grâce à ces hypothèses, on peut ramener la molécule d'ammoniac à un système à deux états : soit l'azote est à gauche du plan contenant les hydrogènes , soit il est à droite. Les deux états disponibles sont alors $|\psi_G\rangle$ quand l'azote est à gauche et $|\psi_D\rangle$ quand il est à droite.

On note Π le plan des 3 hydrogènes, $\mathcal{D}$ l'axe normal à Π passant par l'azote et, en prenant l'intersection avec le plan Π comme origine pour $\mathcal{D}$. Pour passer d'une configuration à l'autre, l'azote doit passer par le plan Π. On s'intéresse au mouvement quantique par rapport à Π d'une "particule" fictive de masse réduite m telle que

$$m = \frac{3m_H m_N}{3m_H + m_H}$$

On note x la position de cette particule fictive sur l'axe $\mathcal{D}$. On considère que les x sont croissants quand on va dans le même sens que le moment cinétique de la molécule. On peut alors se demander comment varie l'énergie potentielle réelle $\mathcal{V}(x)$ en fonction de x.



L'évolution de $\mathcal{V}(x)$ peut être comprise qualitativement de la façon suivante : si $x = b$, $\mathcal{V}(x)$ passe par un minimum, et si on oblige x à diminuer, l'énergie croît puis passe par un maximum pour $x = 0$ qui correspond à l'état instable pour lequel les quatre atomes sont dans le même plan. Si x devient négatif, nous avons "retourné" la molécule comme un parapluie. Manifestement il existe donc un autre minimum pour $x = -b$ et l'énergie $\mathcal{V}(x)$ est symétrique par rapport à l'origine : $\mathcal{V}(x) = -\mathcal{V}(-x)$. Dans la suite, nous allons remplacer le potentiel réel $\mathcal{V}(x)$ par le potentiel carré $V(x)$.

Ordres de grandeur

Pour l'ammoniac, $V_0 = 0.25$ eV et $b = 4 \times 10^{-1}$ Å.

1.2 Cas de non couplage : barrière infinie

Commençons par le cas où V_0 est infini. On a alors 2 puis symétriques dont l'étude a été vue en pré-requis (✍ LP40). À l'issue de cette étude, on a

$$\begin{cases} \psi_D(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left[\dfrac{n\pi}{a}\left(b + \dfrac{a}{2} - x\right)\right] & \text{si } x \in \left[b - \dfrac{a}{2}; b + \dfrac{a}{2}\right] \\ \psi_G(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\left[\dfrac{n\pi}{a}\left(b + \dfrac{a}{2} + x\right)\right] & \text{si } x \in \left[-b - \dfrac{a}{2}; -b + \dfrac{a}{2}\right] \end{cases} \tag{43.1}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$. On avait alors une quantification de l'énergie avec $\mathcal{E}_n = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. La situation se résume donc globalement à deux oscillateurs quantiques **indépendants**.

Raisonnons sur l'état fondamental $\mathcal{E}_0$ qui correspond à $n = 1$. Tout état quantique de la particule peut être décomposé sur la base $\{|\psi_G\rangle, |\psi_D\rangle\}$ sous la forme :

$$|\psi\rangle = c_G(t)\,|\psi_G\rangle + c_D(t)\,|\psi_D\rangle \tag{43.2}$$

Cependant, on n'a pour l'instant aucun couplage donc $|\psi\rangle = c_G(t)\,|\psi_G\rangle$ ou $|\psi\rangle = c_D(t)\,|\psi_D\rangle$, avec dans les deux cas une énergie $\mathcal{E}_0$. On peut donc écrire le hamiltonien du système sous la forme matricielle

$$H = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_0 \end{pmatrix}$$

L'équation de Schrödinger donne $i\hbar\dfrac{\partial c_G}{\partial t} = \mathcal{E}_0 c_G$ et $i\hbar\dfrac{\partial c_D}{\partial t} = \mathcal{E}_0 c_D$ si bien que

$$\begin{cases} c_G(t) = \alpha_G \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right) \\ c_D(t) = \alpha_D \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}_0}{\hbar}t\right) \end{cases} \tag{43.3}$$

Du fait que ces deux états soient symétriques par rapport à Π, ils ont la même énergie donc ils sont **dégénérés**. Si on suppose qu'à $t = 0$, la molécule est dans l'état $|\psi_G\rangle$, alors $\alpha_G = 1$ et $\alpha_D = 0$ donc pour tout instant t, $c_D(t) = 0$. La probabilité de trouver la molécule dans l'état G vaut $\mathbb{P}_G(t) = 1$ tandis que la probabilité de trouver la molécule dans l'état D vaut $\mathbb{P}_D(t) = 0$.

1.3 Couplage par effet tunnel

En réalité, V_0 n'est pas infini et on a un couplage. L'atome d'azote peut passer d'un côté ou de l'autre du plan et changer d'état, même si son énergie est inférieure à V_0 grâce à l'effet tunnel, détaillé dans la ✍ LP41. Pour écrire le nouveau hamiltonien prenant en compte ce couplage, on utilise la méthode de perturbation en écrivant

$$H = H_0 + W = \mathcal{E}_0' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad H = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0' & -A \\ -A & \mathcal{E}_0' \end{pmatrix}$$

Le terme énergétique A traduit le passage d'un état à un autre et sa valeur indique si le tunnelage est favorisé ou non, en particulier $A = 0$ correspond à un tunnelage impossible. Typiquement, $2A \sim 10^{-4}$ eV, ce qui est faible comparé aux 0.025 eV dûs à l'énergie thermique. De manière générale, il est donc difficile de tunneler. Le fait que la particule puisse être présente dans la barrière énergétique induit une délocalisation et donc un abaissement de l'énergie qui donne $\mathcal{E}_0' < \mathcal{E}_0$. On va se placer dans le cas de **faible couplage** $A \ll \mathcal{E}_0'$, et on ne s'intéresse donc qu'au fondamental. L'équation de Schrödinger donne la relation matricielle

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{c}_G \\ \dot{c}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0' & -A \\ -A & \mathcal{E}_0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_G \\ c_D \end{pmatrix} \tag{43.4}$$

Après diagonalisation du hamiltonien, on obtient 2 énergies propres :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_S = \mathcal{E}_1' - A \Rightarrow \text{état symétrique de vecteur propre} & |\psi_S\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle + |\psi_D\rangle) \\ \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_1' + A \Rightarrow \text{état antisymétrique de vecteur propre} & |\psi_A\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_G\rangle - |\psi_D\rangle) \end{cases} \tag{43.5}$$

On observe alors une **levée de dégénérescence** en énergie grâce au couplage par effet tunnel.

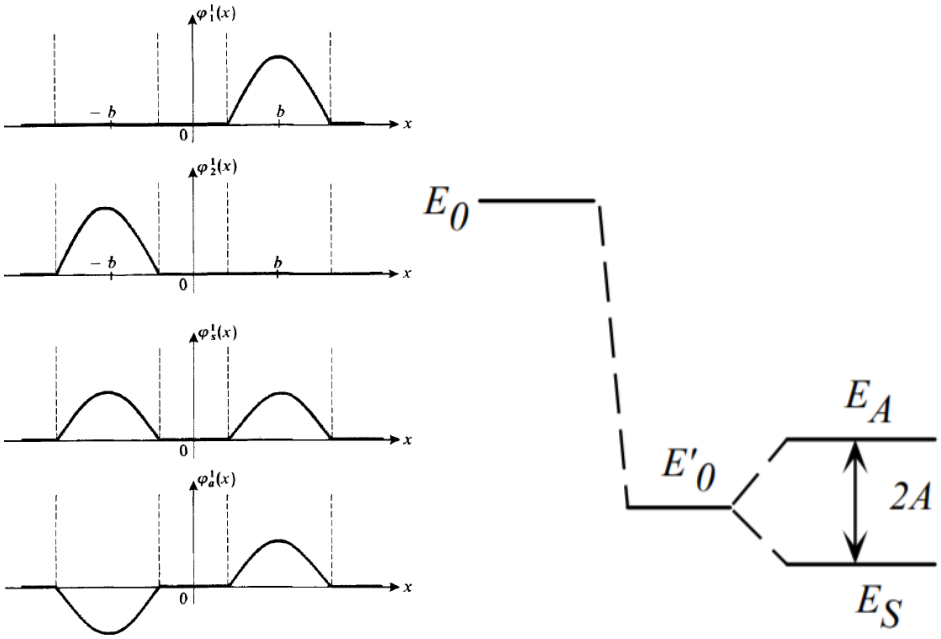


FIGURE 43.1 – À gauche : fonction d'onde $|\psi_G\rangle$ et $|\psi_G\rangle$ dans le cas découplé (en haut) et fonctions d'onde $|\psi_S\rangle$ et $|\psi_A\rangle$ dans le cas couplé (en bas). À droite : levée de dégénérescence due à l'effet tunnel.

1.4 Étude dynamique

Posons

$$\begin{cases} u_S(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(c_G(t) + c_D(t)) \\ u_A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(c_G(t) - c_D(t)) \end{cases}$$

Dans la base des états diagonalisés, on a

$$\begin{cases} u_S(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(c_G(t) + c_D(t)) = B_S \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}'_0 - A}{\hbar}t\right) \\ u_A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(c_G(t) - c_D(t)) = B_S \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}'_0 + A}{\hbar}t\right) \end{cases}$$

On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases} c_G(t) = \dfrac{B_S}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 - A}{\hbar}t\right) + \dfrac{B_A}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 + A}{\hbar}t\right) \\ c_D(t) = \dfrac{B_S}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 - A}{\hbar}t\right) - \dfrac{B_A}{\sqrt{2}} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 + A}{\hbar}t\right) \end{cases}} \tag{43.6}$$

Supposons qu'à $t = 0$ la molécule soit dans l'état $|\psi_G\rangle$. On a donc

$$\begin{cases} c_G(t=0) = 1 \\ c_D(t=0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B_S = B_A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

À l'instant t, on a donc

$$\begin{cases} c_G(t) = \dfrac{1}{2} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 - A}{\hbar}t\right) + \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 + A}{\hbar}t\right) = \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}'_0}{\hbar}t\right) \cos\left(\dfrac{A}{\hbar}t\right) \\ c_D(t) = \dfrac{1}{2} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 - A}{\hbar}t\right) - \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \exp\left(-i\dfrac{E'_0 + A}{\hbar}t\right) = i \exp\left(-i\dfrac{\mathcal{E}'_0}{\hbar}t\right) \sin\left(\dfrac{A}{\hbar}t\right) \end{cases} \tag{43.7}$$

On obtient donc les probabilité :

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{P}_G(t) = |c_G(t)|^2 = \cos^2\left(\dfrac{A}{\hbar}t\right) \\ \mathbb{P}_D(t) = |c_D(t)|^2 = \sin^2\left(\dfrac{A}{\hbar}t\right) \end{cases}} \tag{43.8}$$

On obtient alors une oscillations des probabilités à la pulsation $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2A}{\hbar}}$.

Remarque

On retrouve bien le cas découplé quand $A = 0$

Ordres de grandeur

- pour l'ammoniac, $2A \simeq 10^{-4}$ eV donc $\omega_0 = 1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, ce qui correspond à $\nu_0 = 2.4 \times 10^{1}$ GHz
- pour l'éthylène, $2A \simeq 1$ eV donc $\omega_0 = 1.5 \times 10^{15}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, ce qui correspond à $\nu_0 = 2.40 \times 10^{2}$ THz. Les électrons π de l'éthylène s'échangent plus rapidement que l'azote de l'ammoniac ne change de côté par rapport au plan des 3 hydrogènes.
- pour AsH_3, $\omega_0 = 10^{-8}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, ce qui correspond à un période de 20 ans !

1.5 Généralités sur les systèmes à deux niveaux et retour sur les hypothèses

Les systèmes à deux niveaux sont les systèmes les plus simples à étudier dans le formalisme matriciel de la mécanique quantique, d'où l'intérêt qu'on leur porte... Mais sont-ils vraiment représentatifs de la réalité ? On peut décrire un système à deux niveaux de façon ✍ Basevant p.127 :

– **exacte :** Il existe beaucoup d'exemples dans la physique quantique de système réellement à deux niveaux, comme le moment magnétique de l'électron, les mésons K et B neutres, ou le problème de masse des neutrinos.

– **approchée :** Molécule d'ammoniac et beaucoup d'autres.

Dans le cas de la molécule d'ammoniac, il est évident que la physique complète est bien plus complexe que juste deux niveaux. Comme on l'a dit, il faudrait théoriquement prendre en compte toutes les orbitales des électrons, les degrés de liberté de rotation, translation, vibration. Il est donc important de vérifier qu'approximation est valide en faisant l'hypothèse de deux niveaux (✍ Le Bellac p.157) :

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E}_{\text{vibr}} \simeq 0.1 \text{ eV} \gg A \\ \Delta\mathcal{E}_{\text{rota}} \simeq 10^{-3} \text{ eV} = 10A \end{cases}$$

donc on peut se permettre de négliger les modes de vibration et un peu moins les modes de rotations.

De plus, on a $2A \simeq 10^{-4}$ eV, et le premier état excité correspond à $n = 2$ et a pour énergie $\mathcal{E}_1 = \dfrac{2^2\hbar^2\pi^2}{2ma^2} = \dfrac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$. On a donc $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \dfrac{3\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \simeq 0.12$ eV pour $a \simeq b = 4 \times 10^{-1}$ Å et $m = \dfrac{3m_H m_N}{3m_H + m_H}$.En conclusion, on a bien $\boxed{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 \gg A}$: on a eu raison de ne s'intéresser qu'au fondamental.

Notons quand même que la molécule n'est pas dans son état fondamental de rotation à cause de l'agitation thermique puisque $k_B T \simeq 0.025$ eV $> \Delta\mathcal{E}_{\text{rota}}$ donc les modes de rotations sont thermiquement excités.
Cependant, en calculant cette énergie thermique on se rend compte que $V_0 = 0.25$ eV $> k_B T$. On a donc un phénomène que la mécanique classique prévoit comme étant impossible mais qui peut être expliqué avec la mécanique quantique.

2 Évolution forcée

2.1 Couplage de NH_3 à un champ électrique

La molécule d'ammoniac présente un moment dipolaire $\overrightarrow{D}$ porté par l'axe de la molécule, dirigé de l'atome d'azote vers le plan des hydrogènes (différence d'électronégativité, 3 contre 2.2 sur l'échelle de Pauling).

On va ainsi étudier l'influence de ce moment dipolaire sur la molécule, en champ électrique ! Dans la base $\{|\phi_G\rangle, |\phi_D\rangle\}$, l'opérateer position s'écrit $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Si on se place dans la base diagonalisant le Hamiltonien, à savoir $\{|\phi_S\rangle, |\phi_A\rangle\}$, on peut réécrire l'opérateur position $\begin{pmatrix} 0 & b' \\ b' & 0 \end{pmatrix}$. On suppose que l'observable moment dipolaire est proportionnelle à l'observable position, ce qui fait sens quand on y réfléchit.

$$\hat{D} = \frac{\hat{X}d}{b'} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{pmatrix} \tag{43.9}$$

où d est un paramètre mesurable de la molécule, de l'ordre de $3 \times 10^{-11}\,\mathrm{eV\,m\,V^{-1}} = 5 \times 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$. On vérifie bien que les valeurs propres sont $\pm d$, et que le moment dipolaire se retourne lorsque la molécule se retourne.

On place la molécule dans un champ statique $\overrightarrow{E} \parallel \overrightarrow{u_x}$ l'axe de potition. On a alors une énergie à rajouter au Hamiltonien :

$$W = -\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{E} \tag{43.10}$$

On a donc pour le Hamiltonien :

$$H_e = H + W = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_0 - A & 0 \\ 0 & \mathcal{E}'_0 + A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Ed \\ -Ed & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_0 - A & -Ed \\ -Ed & \mathcal{E}'_0 + A \end{pmatrix} \tag{43.11}$$

On va maintenant procéder à une habile restructuration [1]. On nomme $\eta = Ed$:

$$H_e = \mathcal{E}'_0 \mathbb{1} - \sqrt{A^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} \frac{A}{\sqrt{A^2+\eta^2}} & \frac{\eta}{\sqrt{A^2+\eta^2}} \\ \frac{\eta}{\sqrt{A^2+\eta^2}} & \frac{-A}{\sqrt{A^2+\eta^2}} \end{pmatrix} \tag{43.12}$$

On va habilement constater que les coefficients de cette dernière matrice sont entre -1 t 1, et poser un angle intelligent :

$$\tan(2\theta) = \frac{\eta}{A} \tag{43.13}$$

Alors on a

$$H_e = \mathcal{E}'_0 \mathbb{1} - \sqrt{A^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ \sin & -\cos \end{pmatrix} (2\theta) \tag{43.14}$$

1. This is what is called a pro-gamer move.

Une diagonalisation de l'objet donne alors, dans une base $\{|\phi_-\rangle, |\phi_+\rangle\} = \left\{\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right\}$, les valeurs propres (et donc les énergies) $\mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}'_0 \pm \sqrt{A^2+\eta^2}$.

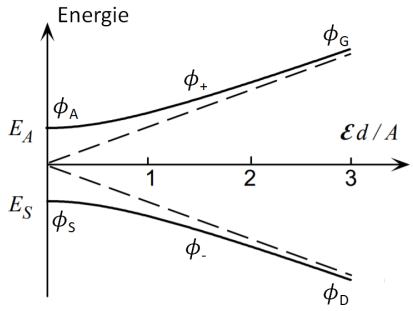


FIGURE 43.2 – On voit ici tracé les deux valeurs propres en fonction de la valeur du champ E. Ce que l'on voit c'est qu'à champ faible, on perturbe de manière minime, alors qu'à champ fort, on rapproche les deux solutions de $|\phi_G\rangle$ et $\langle\phi_D|$, car on pousse la molécule à ne se mettre que d'un côté.

Champ faible

Une étude mathématique plus avancée en faisant un petit développement limité sur $\eta \ll A$ en champ faible donne bien ce à quoi on s'attend, à savoir que le champ polarise partiellement la molécule.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}'_0 \pm \left(A + \dfrac{E^2d^2}{2A}\right) \\ |\phi_-\rangle = |\phi_S\rangle + \dfrac{Ed}{2A}|\phi_A\rangle \\ |\phi_+\rangle = |\phi_A\rangle - \dfrac{Ed}{2A}|\phi_S\rangle \end{cases} \tag{43.15}$$

On peut alors donner son moment dipolaire :

$$\left\langle \hat{D} \right\rangle_{|\phi_\pm\rangle} \sim \mp \frac{d^2}{A} E \qquad \text{avec } \frac{d^2}{A} \text{ la polarisabilité de la molécule} \tag{43.16}$$

On peut définir une énergie potentielle d'interaction avec le champ : $E_p^E = \dfrac{E^2d^2}{2A}$a On a alors une force $\vec{F}_\pm = \mp\vec{\nabla}\left(\dfrac{E^2d^2}{2A}\right)$, qui touche respectivement les états d'énergie propre $E_\pm$. En plongeant dans un champs, on sépare les deux états !

Champs fort

On fait maintenant le DL inverse : $\eta \gg A$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\pm = \mathcal{E}'_0 \pm Ed \\ |\phi_-\rangle = |\phi_D\rangle \\ |\phi_+\rangle = -|\phi_G\rangle \end{cases} \tag{43.17}$$

Et on a $\left\langle \hat{D} \right\rangle_\mp = \pm d$, on retrouve un dipôle tout ce qu'il y a de plus normal !

2.2 Application au MASER

✍ Basdevant, p. 142. C'est super bien expliqué.

Lorsque l'état de haute énergie est excité, il peut se désexciter et libérer un photon, comme dans un laser [2]. C'est d'ailleurs là le principe de l'effet MASER (1964).

Le principe de cet effet est d'obliger les molécules dans l'état excité à retomber dans l'état fondamental. Spontanément les molécules se désexitent avec une durée caractéristiques de 1 mois. Pas super pratique pour en faire une source de photons.

On va alors soumettre les molécules à un champ tournant, $E = E_0 \cos \omega t$. On note $\eta = dE_0$

$$H_e = \begin{pmatrix} \mathcal{E}'_0 - A & -\eta \cos \omega t \\ -\eta \cos \omega t & \mathcal{E}'_0 + A \end{pmatrix} \tag{43.18}$$

On applique la sacrosainte équation de Schrödinger pour connaître l'évolution de ce hamiltonien. Pour se faire on décompose $|\phi\rangle = s(t)\,|\phi_S\rangle + a(t)\,|\phi_A\rangle$, et on pose comme condition initiale $|\phi(0)\rangle = |\phi_A\rangle$.

$$\begin{cases} i\hbar \dot{s} = (\mathcal{E}_0 - A)s - \eta a \cos \omega t \\ i\hbar \dot{a} = (\mathcal{E}_0 - A)a - \eta s \cos \omega t \end{cases} \tag{43.19}$$

En divisant par $\hbar$ on fait apparaître deux pulsations, $\omega_1 = \dfrac{\eta}{\hbar}$ et $\omega_A = 2\dfrac{A}{\hbar}$.

On a les équations de départ, pour aller plus loin on effectue la méthode du référentiel tournant dont les calculs sont présentés dans le ✍ Basdevant, p.141. Il est important de noter que dans ce cas de forcage sinusoïdal, le problème n'est pas solvable analytiquement dans le cas général. Nous ne présenterons des résultats que dans le cas d'un forcage résonant, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$ en négligeant les termes oscillant rapidement, *i.e.* les termes en $\exp\left(it(\omega + \omega_A)\right)$.

Physiquement, on force en envoyant un signal oscillant à la fréquence correspondante à l'écart d'énergie entre les états A et S. On force ainsi les transferts entre ces deux états, et on fait de l'émission stimulée.

Dans ce cas là, la probabilité de transition de A vers S est $\mathbb{P}_{A\to S}(\omega = \omega_0)$ s'écrit :

$$\mathbb{P}_{A\to S}(\omega = \omega_0)(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_A)^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\sqrt{(\omega - \omega_A)^2 + \omega_1^2}\,\frac{t}{2}\right) \tag{43.20}$$

On observe les oscillations de Rabi ! On maximise la probabilité de transition pour une résonance lorentzienne, comme montré dans le code `rabi.py`. La probabilité maximale de transition est atteinte ssi $\omega = \omega_0$. On émet alors un rayonnement de fréquence $\nu = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 24$ GHz.

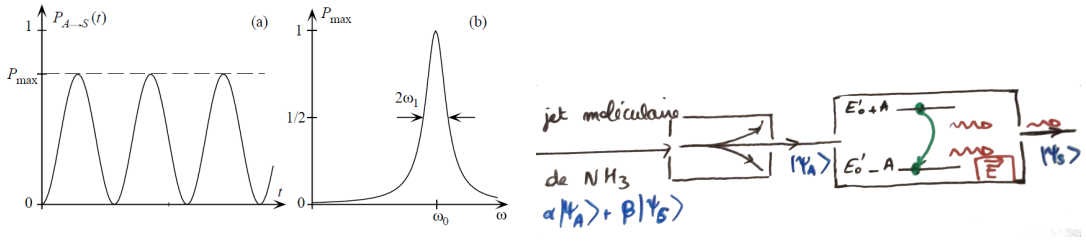


FIGURE 43.3 – Les oscillations de Rabi, et le schéma du principe du premier MASER.

OdG : $T \sim 7 \times 10^{-8}$ s pour $E_0 = 10^3$ V/m.

2. ANACHRONIIIIIISME !

2.3 Analogie à la RMN

La force de cette étude est quelle est extrapolable à tout système à deux niveau ! En particulier pour les spin 1/2... On utilise aussi les oscillations de Rabi dans la RMN. On n'a juste à dresser le tableau d'analogie !

Le moment magnétique est lié à son moment cinétique par la relation fondamentale du rapport gyromagntique : $\overrightarrow{\mu} = \gamma \overrightarrow{J}$. γ dépend des molécules, et donne des infos sur l'environnement chimique des liaisons.

	MASER	Spin 1/2 et RMN
Base de travail	$\left\|\phi_S\right\rangle, \left\|\phi_A\right\rangle$	$\left\|+\right\rangle, \left\|-\right\rangle$
Hamiltonien	$\begin{pmatrix} E_0' - A & -\eta\cos(\omega t) \\ -\eta\cos(\omega t) & E_0' + A \end{pmatrix}$	$-\frac{\gamma g}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}$
Pulsations caractéristiques	$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{2A}{\hbar} \\ \omega_1 = \dfrac{\varepsilon_0 d}{\hbar} \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_0 = -\dfrac{g\gamma B_0}{\hbar} \\ \omega_1 = \dfrac{g\gamma B_1}{\hbar} \end{cases}$
Équation de Schrödinger	$\begin{cases} i\hbar\dot{a} = (E_0' - A)a - \eta\cos(\omega t)b \\ i\hbar\dot{b} = -\eta\cos(\omega t)a + (E_0' + A)b \end{cases}$	$\begin{cases} i\dot{a}_+ = \dfrac{\omega_0}{2}a_+ + \dfrac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}a_- \\ i\dot{a}_- = \dfrac{\omega_1}{2}e^{+i\omega t}a_+ + \dfrac{\omega_0}{2}a_- \end{cases}$
Changement de variables	$\begin{cases} \alpha(t) = a(t)\exp\left(i\dfrac{E_0' - A}{\hbar}t\right) \\ \beta(t) = b(t)\exp\left(i\dfrac{E_0' + A}{\hbar}t\right) \end{cases}$	$b_\pm(t) = a_\pm(t)\exp\left(\pm i\dfrac{\omega}{2}t\right)$
Schrödinger simplifiée	$\begin{cases} 2i\dot{\alpha} = -\omega_1\left(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right)\beta \\ 2i\dot{\beta} = -\omega_1\left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t}\right)\alpha \end{cases}$	$\ddot{b}_\pm + \left(\dfrac{\Omega}{2}\right)^2 b_\pm = 0$
Approximation	Approximation séculaire	Pas d'approximation
Fonction d'onde	$\left\|\phi(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\omega_1}{2}t\right)\exp\left(-i\dfrac{E_0' - A}{\hbar}t\right) \\ \cos\left(\dfrac{\omega_1}{2}t\right)\exp\left(-i\dfrac{E_0' + A}{\hbar}t\right) \end{pmatrix}$	$\left\|\phi(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} -i\dfrac{\omega_1}{\Omega}\sin\left(\dfrac{\Omega}{2}t\right)\exp\left(i\dfrac{\omega}{2}t\right) \\ \left[\cos\left(\dfrac{\Omega}{2}t\right) + i\dfrac{\omega-\omega_0}{\Omega}\sin\left(\dfrac{\Omega}{2}t\right)\right]\exp\left(-i\dfrac{\omega}{2}t\right) \end{pmatrix}$
Probabilité de transition	$\mathbb{P}(t) = \cos^2\left(\dfrac{\omega_1}{2}t\right)$	$\mathbb{P}(t) = \left(\dfrac{\omega_1}{\Omega}\right)^2\sin^2\left(\dfrac{\omega_1}{2}t\right)$

Conclusion

L'équivalent visible du Maser, c'est le Laser, donc on expliquera le principe peut-être.

LP 44

Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques

Niveau : L3

Commentaires du jury

- **2017 :** Le jury invite les candidats à réfléchir aux conditions d'utilisation du théorème d'équipartition de l'énergie. Des explications rigoureuses de l'évolution expérimentale des capacités thermiques en fonction de la température sont attendues.
- **2015 :** Le lien entre capacité thermique et fluctuations thermiques peut être développé et doit, dans tous les cas, être maîtrisé.
- **2006-2008 :** Cette leçon ne doit pas se limiter à un long exposé de méthodes calorimétriques mais laisser une place importante aux modèles microscopiques. Les capacités thermiques sont définies à partir des dérivées partielles de l'entropie ou de l'énergie interne.

Bibliographie

- ✍ *Thermodynamique*, **BFR** ⟶ Première approche, courbes
- ✍ *Cap prépa Physique MPSI-PCSI* ⟶ Courbes
- ✍ *The Oxford Solid State Basics*, **Simon** ⟶ capacités thermiques des solides : très synthétique et courbes
- ✍ *Physique statistique*, **Diu** ⟶ Deuxième et troisième parties

Prérequis

- ➢ Gaz parfait
- ➢ Thermodynamique classique
- ➢ Identités de Maxwell (https://fr.wikipedia.org/wiki/Relations_de_Maxwell)
- ➢ Bases de quantique ?
- ➢ Phy stat (fonction de partition, ensembles, équipartition, potentiels thermo)

1 Approche thermodynamique 603
1.1 Description classique 603
1.2 Propriétés et ordres de grandeur 604
1.3 Les apports de la thermodynamique statistique 606
1.4 Théorème d'équipartition de l'énergie 607
2 Cas du gaz parfait 608
2.1 Gaz parfait monoatomique 608
2.2 Gaz parfait diatomique 608
3 Cas du solide non conducteur 612
3.1 Observations de Dulong et Petit (1819) 612
3.2 Modèle d'Einstein (1907) 612
3.3 Modèle de Debye (1912) 613

Introduction

La capacité thermique d'un système correspond à l'énergie nécessaire pour lui augmenter sa température d'un Kelvin. Cette notion est bien sûr très large, mais aussi très utile dans l'industrie, la vie de tous les jours et la recherche.

L'eau liquide par exemple a une capacité calorifique de 4,18 kJ/kg/K, qui est, nous allons le voir, anormalement élevée, ce qui permet de s'en servir comme fluide caloporteur, et explique aussi pourquoi elle chauffe moins vite que l'huile (environ 2 kJ/kg/K) !

Nous allons développer les modèles historiques et les modèles utiles de capacité calorifique. On s'appuiera sur les modèles des fluides et solides parfaits pour développer les modèles microscopiques.

Nous nous restreindrons aux composés seuls dans leur phase tout au long de la leçon.

1 Approche thermodynamique

1.1 Description classique

On a déjà vu que $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$, lors d'une transformation infinitésimale. On suppose que les forces qui s'exercent sur le système sont seulement la pression, afin d'écrire

$$\mathrm{d}U = \delta Q - P\mathrm{d}V \tag{44.1}$$

Étant donné que U est une fonction d'état, on peut écrire sa différentielle totale exacte dans le cadre d'un système fermé comme :

$$\mathrm{d}U = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,n} \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right|_{T,n} \mathrm{d}V \tag{44.2}$$

On peut alors, en rapport avec la définition que l'on a donné plus haut, donner l'expression de la capacité calorifique **à volume constant** :

$$C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,n} \quad \text{en J/K} \tag{44.3}$$

Et à pression constante ?

À pression constante, on utilise l'enthalpie : $H = U + PV$, et on définit la capacité thermique à pression constante :

$$C_P = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_{P,n} \tag{44.4}$$

Il est possible de définir C_V à partir de l'entropie : $C_V = T \left.\dfrac{\partial S}{\partial T}\right|_{V,n}$.

Du fait que $\delta Q = T\mathrm{d}S$ on peut le décomposer sur les variables du problème en $\delta Q = C_v\mathrm{d}T + \ell\mathrm{d}V$, où $\ell = T \left.\dfrac{\partial S}{\partial V}\right|_{T,n}$ s'exprime en Pa et se nomme la chaleur latente de dilatation isobare. Il s'agit de la chaleur à apporter à un système pour le garder à la même température lorsqu'il se dilate.

On peut aussi écrire en changeant les variables $\delta Q = C_P\mathrm{d}T + h\mathrm{d}P$, avec h en m^3 la chaleur latente de compression isotherme.

1.2 Propriétés et ordres de grandeur

La première partie à noter est que C_V est une **grandeur extensive**, on peut écrire $C_V = nc_V$.

La deuxième propriété est que l'on peut lier C_P et C_V par la **Relation de Mayer**.

$$\begin{aligned} C_p \mathrm{d}T + h\mathrm{d}P &= C_V \mathrm{d}T + \ell \mathrm{d}V \\ (C_p - C_V)\mathrm{d}T &= \ell \mathrm{d}V - h\mathrm{d}P \\ &= \ell \left[\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,n} \mathrm{d}T + \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,n} \mathrm{d}P \right] - h\mathrm{d}P \end{aligned} \tag{44.5}$$

La dernière égalité vient du fait qu'on a une équation d'état : $V = f(T, P, n)$.

On identifie les différentielles, ce qui donne :

$$C_P - C_V = \ell \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,n} = T \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{T,n} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,n} \tag{44.6}$$

Et par les relations de Maxwell appliquées à la fonction F, $\mathrm{d}F = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T$, on a $\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{T,n} = \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{V,n}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\boxed{C_P - C_V + T \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{V,n} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,n}} \tag{44.7}$$

- Ainsi pour un **gaz parfait**, étant donné que $PV = nRT$, on a

$$C_P - C_V = nR \simeq 8.314n \tag{44.8}$$

- Pour une **phase condensée** en revanche, on a $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_{V,n} \simeq 0$, donc

$$C_P \simeq C_V \tag{44.9}$$

OdG et observation expérimentales

- **Gaz monoatomique** : $C_V = \frac{3}{2}nR \simeq 12.5$ J/mol/K sur une grande plage de température
- **Gaz polyatomique** : en fonction de la température ça va par plateaux de $\frac{3}{2}nR$ à $\frac{7}{2}nR$.
- **Solide** : $c = c_P = c_V = 3R \simeq 24$ J/mol/K, mais tend vers 0 quand T tend vers 0

Composé	Phase	Capacité thermique massique (à pression constante pour les gaz, en $\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$)
Hélium	Gaz	5193
Diazote	Gaz	1025
Dioxygène	Gaz	920
Ethanol	Liquide	2460
Huile	Liquide	2000
Cuivre	Solide	385
Fer	Solide	444
Graphite	Solide	720
Eau	Gaz	2010
	Liquide	4185
	Solide	2060

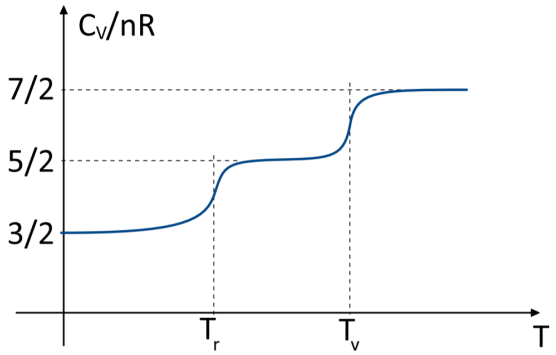


FIGURE 44.1 – La capacité calorifique à volume constant pour un gaz diatomique. On voit qu'en réalité c'est plus compliqué, mais c'est le sujet de plus tard. Il faut retenir qu'à l'ambiante, généralement, c'est $5\mathrm{k_B}T/2$.

Mesure de C_v

✍ DGLR, Thermo, p. 88, ou ✍ Perez, p. 375 ⏲

a mesure de de C_V se fonde sur la possibilité de délivrer du travail à un système sans modifier V. Il suffit, en principe, d'imposer au système une transformation adiabatique qui maintient constant V tout en mesurant à la fois l'élévation de température $\mathrm{d}T$ et le travail fourni par l'extérieur $\mathrm{d}W$. Comme la transformation est adiabatique, on a

$$C_V \mathrm{d}T = \mathrm{d}W \tag{44.10}$$

En utilisant une résistance dans de l'eau et un générateur, on apporte un travail par effet joules, et c'est gagné, on peut mesurer la capacité thermique de l'eau !

On a cependant à ce niveau là toujours pas de modèle pour l'origine de ces variations de capacité calorifique. C'est d'ailleurs le sujet de la leçon !

1.3 Les apports de la thermodynamique statistique

1.3.1 Rappels : statistique de Maxwell-Boltzmann et ensemble canonique

On rappelle que pour un système de N particules indépendantes discernables, à l'équilibre, la population de chaque niveau d'énergie est donné par la statistique de Maxwell-Boltzmann (sans dégénerescence)

$$N_i = N_0 e^{-\beta E_i} \tag{44.11}$$

On pose alors la fonction de partition $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$

On a alors les identités suivantes :

$$U = -N\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \qquad C_V = \frac{N}{\mathrm{k_B}\beta^2}\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right|_V \tag{44.12}$$

1.3.2 Le système à deux niveau pour illustrer

Adoptons cette description pour décrire un système à deux niveaux d'énergie de dégénérescence égale. Comme exemple on peut citer un système de spins 1/2 dans un champ magnétique.

Loi de répartition :

Par choix de l'origine des énergies, on peut placer le premier niveau tel que $\epsilon_1 = 0$ et donc $\epsilon_2 = \epsilon$ et on appelle g leur dégénérescence. La fonction de partition est : $Z = g(1 + e^{-\beta\epsilon})$ et on peut exprimer les populations N_1 et N_2 des deux niveaux d'énergie.

$$N_1 = \frac{N}{1 + e^{-\beta\epsilon}} \qquad N_2 = \frac{N}{1 + e^{\beta\epsilon}} \quad \text{car } N_1 + N_2 = N \tag{44.13}$$

Quand $T \to 0$, on a $N_1 = N$ et $N_2 = 0$. La limite inverse donne $N_1 = N_2 = N/2$.

On introduit alors une notion de température caractéristique intermédiaire autour de laquelle le système passe d'un état dissymétrique à un état symétrique. Appelons T_c la température telle que $\mathrm{k_B}T_c = \epsilon$ alors on a $\beta\epsilon = \dfrac{T}{T_c}$. On peut alors essayer de comprendre ce que cela implique pour la capacité thermique de ce système.

Énergie interne et capacité thermique :

On peut exprimer analytiquement C_V :

$$C_V = N\mathrm{k_B}\frac{\beta^2\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}}{(1 + e^{\beta\epsilon})^2} = N\mathrm{k_B}\left(\frac{\beta\epsilon}{2\cosh\left(\dfrac{\beta\epsilon}{2}\right)}\right)^2 = N\mathrm{k_B}\left(\frac{\dfrac{T_c}{2T}}{\cosh\left(\dfrac{T_c}{2T}\right)}\right)^2 \tag{44.14}$$

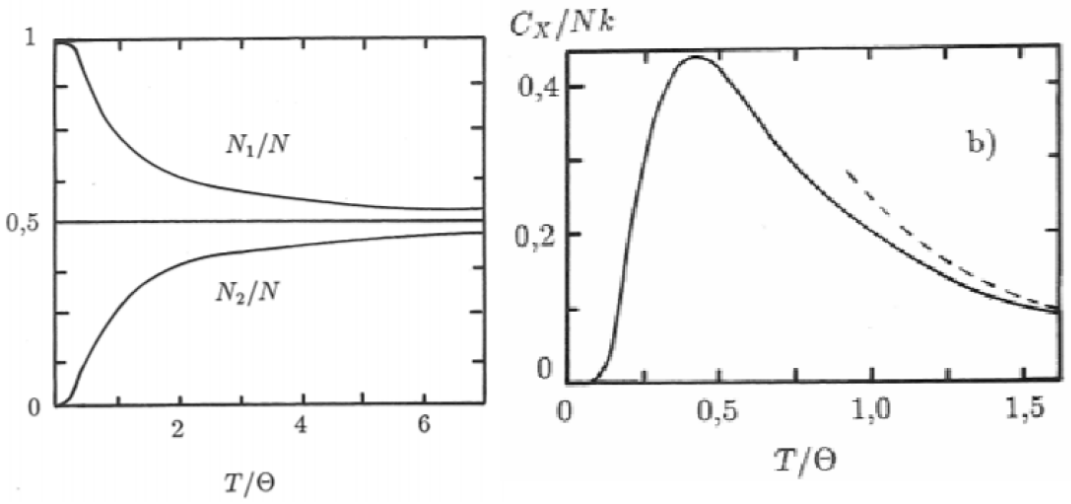


FIGURE 44.2 – Loi de répartition et capacité calorifique pour un système à deux niveaux d'énergie de même dégénérescence g en fonction de $T/T_c = T/\Theta$.

Cette fonction passe donc par un maximum. Cela correspond à la notion de capacité thermique : on comprend ici que la capacité thermique du système est maximale quand le système est en mesure de pouvoir stocker le plus d'énergie, soit ici lorsqu'une certaine partie de la population du niveau 1 peut peupler le niveau 2 lorsqu'on augmente la température. On obtient alors la notion de température de gel : autour d'une certaine température on débloque des degrés de liberté qui vont permettre de stocker de l'énergie sous forme microscopique et donc d'augmenter la capacité calorifique.

1.4 Théorème d'équipartition de l'énergie

On considère un système décrit de façon classique et régi par la statistique de Maxwell-Boltzmann. On peut décrire ce système en contact avec un thermostat par des degrés de liberté continus et classiques. L'hamiltonien décrivant ce système est lui aussi considéré classique. Cette dernière hypothèse est vérifiée si l'énergie caractéristique du thermostat $k_B T$ est très grande devant les intervalles entre les niveaux d'énergie quantifiés du système.

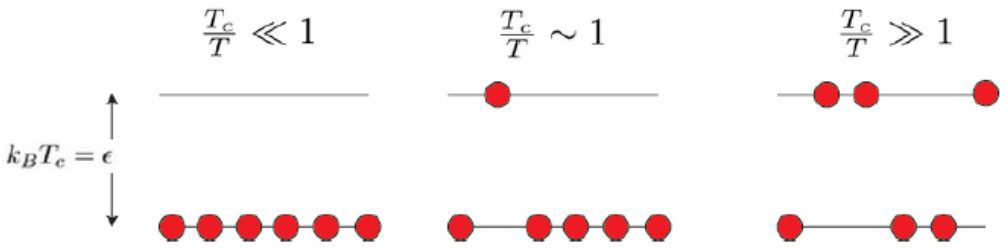


FIGURE 44.3 – Illustration du peuplement des niveaux pour des températures différentes.

Théorème : La valeurs moyenne de chaque degrès de liberté classique quadratique est indépendant et contribue pour $\frac{k_B T}{2}$ à la valeur moyenne de l'énergie du système.

On va appliquer directement ces raisonnements afin de modéliser les capacités thermiques des gaz et des solides. On verra que le théorème d'équipartition de l'énergie est un raisonnement simple qui donne la bonne valeur de la capacité à haute température et que la notion de température de gel, décrite précédemment pour le système à deux niveaux constitue la notion clé de cette leçon. Chaque degré de liberté permet bien de stocker de l'énergie dans le système.

2 Cas du gaz parfait

2.1 Gaz parfait monoatomique

✍ *Physique statistique* Diu p294

On commence avec l'exmple du gaz parfait monoatomique. Dans ce modèle, chaque atome est indépendant et n'interagit pas avec les autres atomes. L'atome a donc un hamiltonien qui est uniquement composé du terme cinétique :

$$H = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

On voit que le gaz parfait monoatomique possède 3 degrés de liberté donc le théorème d'équipartition de l'énergie nous dit que l'énergie moyenne d'un atome vaut

$$\langle e \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Pour le gaz parfait composé de N atomes, l'énergie moyenne vaut ainsi

$$\boxed{\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k_B T \qquad \text{donc} \qquad C_{V,\text{GP mono}} = \frac{3}{2} N k_B}$$

On reconnaît la première loi de Joule qui stipule que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. La relation de Mayer donne de plus la capacité calorifique à pression constante du gaz parfait monoatomique :

$$\boxed{C_{P,\text{GP mono}} = N k_B + C_{V,\text{GP mono}} = \frac{5}{2} N k_B T}$$

Le coefficient adiabatique du gaz parfait monoatomique vaut alors $\gamma_{\text{GP mono}} = \dfrac{C_{P,\text{GP mono}}}{C_{V,\text{GP mono}}} = \dfrac{5}{3}$.

2.2 Gaz parfait diatomique

✍ *Physique statistique* Diu p332

Certains gaz diatomiques, comme le dioxygène ou le diazote, peuvent également être considérés comme des gaz parfaits. Cependant, de nouveaux degrés de libertés, ceux de vibration et ceux de rotation, s'ajoutent aux degrés de liberté de translations du GP monoatomique et dont il faut tenir compte pour calculer l'énergie moyenne du GP diatomique donc le hamiltonien s'écrit alors :

$$H = H_{\text{translation}} + H_{\text{rotation}} + H_{\text{vibration}}$$

Cette fois, on va observer une évolution de la capacité thermique en fonction de la température. Pour comprendre cette évolution, on va étudier l'énergie associé aux degrés de vibration dans un premier temps, puis à celle associée aux degrés de rotation dans un second temps.

2.2.1 Degrés de liberté de rotation

Dans l'approximation du rotateur rigide, l'hamiltonien lié à la rotation de la particule s'écrit

$$H_{\text{rotation}} = \frac{\overrightarrow{L}^2}{2I}$$

avec $\overrightarrow{L}$ le moment cinétique et I le moment d'inertie de la molécule. La mécanique quantique nous enseigne que les valeurs propres d'un tel hamiltonien sont de la forme

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+)$$

où j est un nombre quantique. On peut donc définir une température caractéristique T_{rot} aux rotations telle que

$$\boxed{\frac{\hbar^2}{2I} = k_B T_{\text{rot}}}$$

En dessous de cette température, on peut considérer les degrés de rotation comme "gelés" et donc ils n'interviennent plus dans le calcul de l'énergie moyenne.

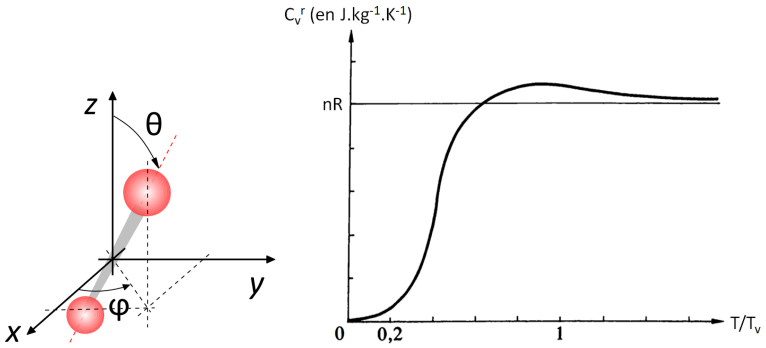
Molécule	T_r en K
H_2	85,3
D_2	42,7
Cl_2	0,35
N_2	2,9
CO	2,8

Remarque

On peut calculer cette température ? On a $I = m_1 r_1 + m_2 r_2 \simeq \mu d^2$ avec μ la masse réduite et d la distance interatomique. Ainsi, pour H_2, $\mu \simeq 10^{-27}$ kg et $d \simeq 10^{-10}$ m donc $I \simeq 10^{-47}\,\text{kg}\,\text{m}^2$ donc $T_{\text{rot}}(H_2) = 85$ K. On peut faire le calcul pour O_2 et trouver $T_{\text{rot}}(O_2) = 2$ K

Très souvent on sera au dessus de cette température qui assez basse, donc on pourra faire un traitement classique. On peut alors appliquer le théorème d'équipartition et écrire $C_{V,\text{rot}} = \frac{3}{2} N k_B$ puisqu'on a 3 degrés de rotation. En réalité, ce n'est pas vraiment la cas puisque pour la rotation autour de l'axe de la molécule, $I = mr^2$ avec r le rayon de la molécule selon son axe et donc $T_{\text{rot/axe}} = \frac{\hbar}{2mr} \simeq 10^{12}$ K en prenant $r = 10^{-15}$ m. Cette température étant très élevée, on considère qu'il n'y a que 2 degrés de rotation et que le troisième est figé. On a alors

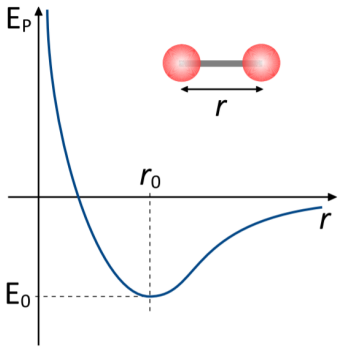
$$\boxed{C_{V,\text{rot}} = N k_B}$$



On ne représente sur le schéma que les degrés de rotation excités.

2.2.2 Degrés de liberté de vibration

La molécule est soumise à un potentiel de type Lennard-Jones :



On applique l'approximation de **Born-Oppenheimer** : on découple le mouvement des deux atomes de la molécule et on considère une particule fictive de masse réduite $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, où m_1 et m_2 sont les masses des deux atomes de la molécule, soumise au potentiel de la molécule. On se retrouve donc dans le cas d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{\mu}}$, où K est déterminée par la courbure du potentiel à son minimum. Dans une description quantique, les énergies d'un tel oscillateur sont données par la formule :

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

La fonction de partition s'écrit donc

$$Z = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp\left(-\beta\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\sinh\left(\beta\dfrac{\hbar\omega}{2}\right)}$$

L'énergie moyenne vaut alors

$$\langle U\rangle = -\frac{\mathrm{d}\ln(Z)}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\beta\frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

On obtient alors une capacité calorifique

$$C_{V,\mathrm{vib}} = \frac{\partial\langle U\rangle}{\partial T} = -\frac{1}{k_B T^2}\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial\beta}$$

Finalement,

$$\boxed{C_{V,\mathrm{vib}} = Nk_B\frac{\left(\dfrac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)^2}{\sinh^2\left(\dfrac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)}}$$

On peut introduire une nouvelle température caractéristique T_{vib} aux vibrations définie par

$$\boxed{\hbar\omega = k_B T_{\mathrm{vib}}}$$

Molécule	T_v en K
H_2	6215
D_2	4394
Cl_2	808
N_2	3374
CO	3103

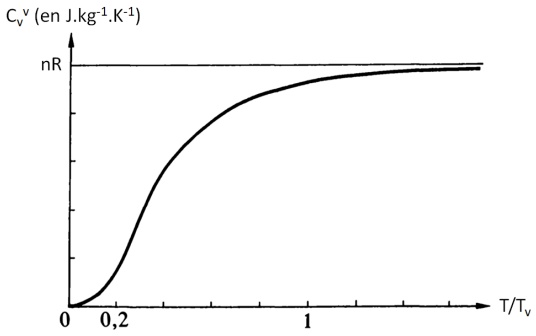
Remarque

T_{vib} est d'autant plus élevée que les forces inter-atomiques sont intenses ou que les atomes sont légers. Ainsi, $T_{\mathsf{vib}}(H_2) = 6200$ K tandis que $T_{\mathsf{vib}}(H_2) = 6200$ K.

On remarque que

$$\begin{cases} C_{V,\mathrm{vib}} \xrightarrow[T\ll T_{\mathrm{vib}}]{} 0 & \text{et} \quad C_{V,\mathrm{vib}} \underset{T\ll T_{\mathrm{vib}}}{\sim} Nk_B\left(\dfrac{T_{\mathrm{vib}}}{T}\right)^2\exp\left(-\dfrac{T_{\mathrm{vib}}}{T}\right) \\ C_{V,\mathrm{vib}} \xrightarrow[T\gg T_{\mathrm{vib}}]{} \text{cste} & \text{et} \quad C_{V,\mathrm{vib}} \underset{T\gg T_{\mathrm{vib}}}{\sim} Nk_B \end{cases}$$

Dans la limite basses-températures, on peut considérer les degrés de vibration comme "gelés" et donc ils n'interviennent plus dans le calcul de l'énergie moyenne. La limite hautes-températures est quant à elle conforme au théorème d'équipartition puisqu'on a dans notre cas 2 degrés de libertés de vibration : la vibration en translation et la vibration en rotation. On peut donc faire un traitement classique dans le cas $T \gg T_{\mathrm{vib}}$.

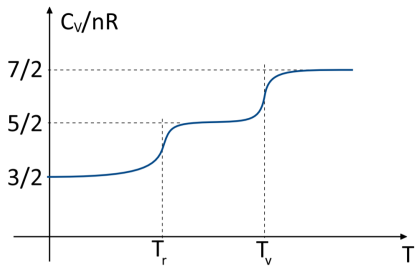


2.2.3 Bilan

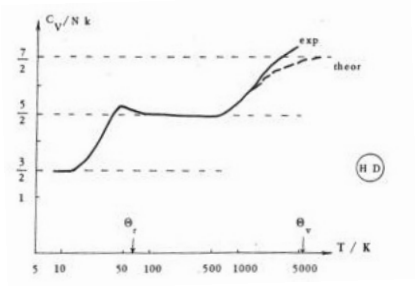
En résumé,

- pour $T < T_{\text{rot}} < T_{\text{vib}}$: on a uniquement les 3 degrés de translation, les autres degrés étant gelés
$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B$$
- Pour $T_{\text{rot}} < T < T_{\text{vib}}$: les degrés de rotation s'ajoutent aux 3 degrés de translation.
$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B + C_{V,\text{rot}} = \frac{5}{2}Nk_B$$
- Pour $T > T_{\text{rot}}$ et $T > T_{\text{vib}}$: les 2 degrés de vibration s'ajoutent aux 5 autres degrés de liberté
$$C_V = \frac{5}{2}Nk_B + C_{V,\text{vib}} = \frac{7}{2}Nk_B$$

Pour un GP diatomique, l'évolution de la capacité calorifique est donc



La capacité calorifique d'un gaz hydrogène-deutérium à différentes températures a été mesurée expérimentalement et la courbe obtenue est la suivante :



On obtient une courbe similaire à ce qu'on attendait, à quelques différences près :

- le maximum au moment du dégel de la rotation est dû à un état métastable du deutérium
- la différence aux hautes températures entre les résultats expérimentaux et la prévision théorique est due à un couplage non-négligeable entre les degrés de rotation et de vibration.

3 Cas du solide non conducteur

✍ *Physique statistique* Diu p378

3.1 Observations de Dulong et Petit (1819)

On modélise le solide par un réseau cristallin et on décrit la vibration des N atomes autour de leur position d'équilibre par un oscillateur harmonique. Ainsi, pour un atome de masse m_i, de position $\overrightarrow{r_i}$ et d'impulsion $\overrightarrow{p_i}$, on note ω_i la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre. L'énergie totale du solide est alors

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\overrightarrow{p_i}^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i \overrightarrow{r_i}^2 \right) \tag{44.15}$$

Le système possède donc $6N$ degrés de liberté quadratiques indépendants donc $< E >= 3Nk_BT$, ce qui donne

$$\boxed{C_V = 3Nk_B}$$

On retrouve la loi de Dulong et Petit, mais elle ne donne pas le bon comportement de C_V aux basses températures (expérimentalement, C_V tend vers 0 quand T tend vers 0). Le problème vient en fait de notre description classique du système : aux basses températures, k_BT devient comparable aux quanta d'énergie du système, si bien que les effets quantiques jouent un rôle non négligeable.

3.2 Modèle d'Einstein (1907)

Le modèle d'Einstein prend en compte cet aspect quantique des oscillations en gardant la même description du solide mais en supposant que les atomes sont des oscillateurs harmoniques **quantique** de même pulsation ω. Pour chaque atome,

$$E = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \qquad \text{où} \qquad n_x,\ n_y,\ n_z \in \mathbb{Z} \tag{44.16}$$

Les N atomes sont identiques donc la fonction de partition Z peut être factorisée sous la forme z^N avec z la fonction de partition d'un seul oscillateur. On obtient facilement (en tout cas d'après le ✍ Diu) :

$$Z = z^N = \left[\sum_{n_x,n_y,n_z} \exp\left(-\frac{E}{k_BT} \right) \right]^N = \left[\frac{1}{8} \sinh^{-3}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right) \right]^N \tag{44.17}$$

On en déduit la capacité calorifique du solide

$$C_V = \frac{\partial < E >}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \right) \tag{44.18}$$

$$\boxed{C_V = 3Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right)^2 \sinh^{-2}\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT} \right)} \tag{44.19}$$

Pour T grand, on retrouve bien la loi de Dulong et Petit, et on a également C_V qui tend vers 0 quand T tend vers 0. La prise en compte des phénomènes quantiques a donc permis de reproduire la chute de la capacité calorifique aux basses températures. Le comportement n'est cependant pas celui observé expérimentalement, car la loi de décroissance est ici exponentielle, et non en T^3. La prise en compte d'une relation de dispersion, et donc d'une variation de la pulsation associée aux oscillateurs permet, dans le cadre du modèle de Debye, de résoudre ce problème.

Le modèle d'Einstein n'est donc pas adapté à décrire la décroissance en T^3 à basse température. Ce n'est pas étonnant car l'hypothèse d'indépendance des oscillateurs est d'autant plus remise en question au fur et à mesure que T décroît. C'est pourquoi il fallait revoir le modèle.

3.3 Modèle de Debye (1912)

✍ Diu, Phystat ou Kittel si on veut varier les plaisirs

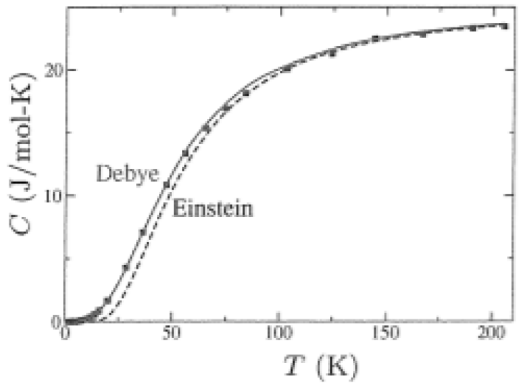


FIGURE 44.4 – Capacité thermique molaire de l'argent (même si c'est un conducteur (yolo). On voit que les interpolations de Debye et Einstein diffèrent et que seul celle de Debye donne le bon résultat.

En 1912 Peter Debye découvrit comment mieux traiter les oscillateurs quantiques décrivant des réseaux d'atomes. Le modèle de Debye consiste à considérer des oscillateurs quantiques couplés. On connaît les propriétés d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques à une dimension :

- Une solution en ondes progressives de pulsation ω et de vecteur d'onde k se propageant dans cette chaîne vérifie la relation de dispersion suivante, avec ω_0 la pulsation d'un oscillateur et l la distance entre deux atomes du cristal :

$$\omega = 2\omega_0 |\sin(kl/2)| \tag{44.20}$$

- Le vecteur d'onde pour une chaine périodique de taille N est quantifié et vaut $k_n = 2\pi n/Nl$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Les équations du mouvement, décrivant des oscillateurs couplés, conduisent à trouver des combinaisons linéaires des différentes positions des atomes obéissant à des équations d'oscillateurs harmoniques découplés. Ce sont les N "modes normaux" ou "modes propres" de vibration du système.

- La relation de dispersion est linéaire pour de faibles nombres d'onde : $\omega(k) = ck$. Cette branche de la relation de dispersion est appelée branche acoustique.

On peut généraliser ces notions à un réseau 3D, en supposant toujours que le potentiel vu par chacun des atomes du cristal est harmonique. On peut encore une fois trouver des modes normaux. On associe trois modes normaux à chaque vecteur d'onde permis dans le cristal à trois dimensions. Chaque mode normal est donc caractérisé par un vecteur d'onde k et une polarisation λ et sa pulsation ω vérifie la relation de dispersion : $\omega = \omega_\lambda(k)$. Ces modes normaux correspondent à des vibrations collectives de l'ensemble des atomes du cristal. En considérant les modes normaux, on a donc affaire à un système de $3N$ oscillateurs harmoniques quantiques indépendants : on peut utiliser les résultats du modèle d'Einstein. L'énergie d'un micro-état est :

$$E_{\{n_{k\lambda}\}} = -U_0 + \sum_{k,\lambda} \left(n_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_\lambda(k) \tag{44.21}$$

On suppose que le nombre d'atomes N est très grand donc les nombres d'onde $\mathbf{k}$ sont très proches les uns des autres : on peut remplacer la somme discrète par une intégrale. On utilise alors la densité $\rho(\omega)$ de modes normaux et la distribution de Bose-Einstein car les phonons (modes de vibrations) sont des bosons. L'énergie moyenne s'écrit alors :

$$\bar{E} = -E_0 + \int \rho(\omega)\mathrm{d}\omega \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$$

Pour finir ce calcul, on va utiliser l'approximation de Debye.

Approximation de Debye : on étend à tous les modes normaux une relation de dispersion acoustique linéaire. On interpole ainsi les hautes températures (où la relation de dispersion n'a pas d'importance) et les basses températures (où la relation de dispersion est bien linéaire). La densité en modes normaux est donnée par :

$$\rho(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 c^3}\omega^2$$

où c est la vitesse moyenne des ondes selon les polarisations. Les conditions aux limites imposent l'existence de $3N$ modes normaux au maximum. On a donc :

$$\int_0^{\omega_D} \rho(\omega)\mathrm{d}\omega = 3N$$

où ω_D est la pulsation dite de Debye telle que pour $\omega > \omega_D$ la densité de modes normaux est nulle. On obtient donc l'expression de ω_D :

$$\omega_D = c\left(\frac{6\pi^2 N}{N}\right)$$

On introduit naturellement la température de Debye $T_D = \hbar\omega_D/k_B$, l'énergie moyenne se ré-écrit donc :

$$\bar{E} = -E_0 + 9Nk_BT\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x - 1}$$

où $x = \hbar\omega/k_BT$. On obtient directement l'expression de la capacité calorifique :

$$C_v = 9Nk_B\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2}\mathrm{d}x$$

- Si $T \gg T_D$, on retrouve la loi de Dulong-Petit.
- Si $T \ll T_D$, on retrouve la décroissance en T^3 correspondant aux observations expérimentales. L'approximation de Debye est quasiment exacte car la contribution des modes normaux pour lesquels la relation de dispersion est linéaire décroît exponentiellement quand T diminue. De plus, la borne supérieure de l'intégrale tend vers l'infini.

Le modèle de Debye permet donc d'obtenir le bon comportement observé expérimentalement pour la capacité thermique d'un solide non conducteur !

Conclusion

On a montré que l'effet de la température sur la capacité thermique des gaz et des solides peut être expliqué par des modèles microscopiques de difficulté variables. On rappelle que cette étude a énormément d'intérêt car on peut effectivement mesurer C_v et C_p. Cela est utile pour repérer des transitions de phase du 2nd ordre où la capacité thermique subit une discontinuité à la transition. On a aussi abordé la notion de gel des degrés de liberté qui permet de vraiment comprendre l'origine des valeurs de la capacité thermique.

Pour les solides on a dû faire appel aux résultats de la mécanique quantique pour expliquer les données expérimentales. C'est encore ce qu'il faudrait faire pour expliquer la dépendance en $C = \alpha T + \gamma T^3$ à faible température de la capacité thermique des métaux. Enfin, on ne s'est pas intéressé à décrire les fluides, c'est parce qu'il est plus dur de dégager des lois générales pour C_v.

Remarque : Ne pas hésiter à faire un calcul à la louche pour retrouver la dépendance en T^3 et de ne pas de préoccuper de l'expression avec l'intégrale et de juste la citer. Enfin c'est à voir selon ce que vous aimez.

LP 45

Paramagnétisme, ferromagnétisme

Niveau : L3

Commentaires du jury

- **2011-2013 :** Le moment magnétique, son image semi-classique et son ordre de grandeur doivent être maîtrisés. De même, le lien avec l'ordre de grandeur de l'aimantation d'un aimant doit être connu.
- **2009-2010 :** L'origine microscopique de l'interaction d'échange doit être discutée. L'influence de la température sur les propriétés magnétiques est au coeur de la leçon.
- **2006 :** Il s'agit ici de présenter une interprétation microscopique du paramagnétisme et du ferromagnétisme.
- **1999 :** On doit faire ressortir l'aspect phénoménologique du champ moyen. Cette leçon est une occasion de faire apparaître les propriétés essentielles d'une transition de phase.
- **1997 :** L'expérience du clou chauffé au-dessus de la température de Curie n'est pas la seule illustration possible du ferromagnétisme. Il serait par exemple souhaitable que les candidats manipulent des ferrofluides et puissent citer des applications dans le domaine de l'enregistrement magnétique.

Bibliographie

✍ *Electromagnétisme 2*, **Feynmann** ⟶ Toujours très bon, même pour l'élasticité
✍ *Magnétisme. Fondements*, **Trémolet de Lacheisserie** ⟶ Base de la leçon
✍ *Physique statistique*, **Diu** ⟶ Approche statistique de la transition
✍ *ELectromagnétisme 4*, **BFR** ⟶ Bases EM, en complément
✍ *Physique de l'état solide*, **Kittel** ⟶ Complément du Diu
✍ *The theory of Magnetism I*, **D.C. Mattis** ⟶ pour aller plus (trop) loin

Prérequis

- ➢ Électromagnétisme dans la matière
- ➢ Force centrale
- ➢ Physique statistique
- ➢ Transition de phase
- ➢ moments cinétiques quantiques

Expériences

- ☕ ✍ MP16

1 Origine du magnétisme 617
1.1 Magnétisme dans la matière 617
1.2 Lien entre l'aimantation et le moment magnétique 618
1.3 Facteur gyromagnétique 619
1.4 Modèle quantique du magnétisme 620
2 Paramagnétisme 621
2.1 Cadre de l'étude 621
2.2 Calcul de l'aimantation 621
2.3 Interprétation 622
3 Ferromagnétisme 624
3.1 Interactions entre moments magnétiques 624
3.2 Approximation du champ moyen 625
3.3 Aimantation en champ nul et transition ferromagnétique/paramagnétique 625

Introduction

On a vu avant cette leçon pas mal de choses sur l'électromagnétisme dans le vide. Cependant dans la matière les choses peuvent être très différentes, et le couplage champ-matière est très important.

Barreaux dans l'électroaimant

✍ MP16 🕒

Il nous faut une explication pour ces phénomènes, Comme on l'a fait pour les matériaux diélectriques.

1 Origine du magnétisme

1.1 Magnétisme dans la matière

Dans un milieu diélectrique, un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}$ cause l'apparition d'une polarisation induite $\overrightarrow{P} = \varepsilon_0 \chi_e \overrightarrow{E}$ (pour les milieux linéaires et isotropes). Ici c'est la même chose ! On applique un champ $\overrightarrow{H}$ extérieur, et il s'en suit l'apparition d'une aimantation $\overrightarrow{M}$, dite aimantation induite.

Il apparaît donc une susceptibilité magnétique χ_m, tenseur dans le cas général, qui décrit (et c'est important) MACROSCOPIQUEMENT la réponse du milieu.

On va faire l'hypothèse du milieu homogène (χ_m indépendant de $\overrightarrow{r}$) et du milieu isotrope (χ_m scalaire). On a alors :

$$\overrightarrow{M} = \chi_m(\overrightarrow{H}, T, \dots)\overrightarrow{H} \tag{45.1}$$

On notera la dimension de χ_m : pas de dimension.

On remarque trois réactions différentes là sur les barreaux. On en a un qui s'aligne, un qui s'antialigne, et un qui se colle. Excusez-moi, quoi la baise ? !

Et bien Fred, c'est très simple. La valeur de χ_m définit le comportement ! En effet il existe une force sur les moment magnétiques :

$$\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{M}.\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{B}) \tag{45.2}$$

Si on ajoute à cela le fait que $\mu_r = 1 + \chi_m$, et que

$$\overrightarrow{B} = \mu(\overrightarrow{H})\overrightarrow{H} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) \tag{45.3}$$

On voit vite ce qu'il se passe. Si χ_m est très grand, on a des phénomènes non-linéaires et des mouvements amples : c'est le cas du **ferromagnétisme**, du fer, cobalt ou nickel. $\chi_m \sim 10^2$ à 10^6.

Si en revanche χ_m est faible, on peut écrire, en approximant $\mu \simeq \mu_0$.

$$\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{M}.\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{B}) \simeq \frac{\chi_m}{2\mu_0}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{B}^2) \tag{45.4}$$

Pour un matériau paramagnétique ($\chi_m > 0$), la force est dirigée suivant le gradient du champ. À l'inverse, pour un matériau diamagnétique ($\chi_m < 0$), la force est dirigée dans le sens opposé au gradient.

- les milieux diamagnétiques qui ne comportent que des atomes non magnétiques, ce magnétisme trouve son origine dans la modification du mouvement orbital des électrons sous l'effet de l'excitation magnétique : $\chi_d < 0$ (loi de Lenz) et $\chi_d \sim -10^{-5}$
- les milieux paramagnétiques possèdent de atomes portant des moments magnétiques permanents qui n'interagissent que très peu entre eux : $\chi_p > 0$ et $\chi_p \sim 10^{-4}$ à température ambiante
- les milieux ferromagnétiques possèdent des atomes portant des moments magnétiques permanents qui interagissent fortement entre eux : $\chi_f > 0$ et $\chi_f \gg \chi_p$.

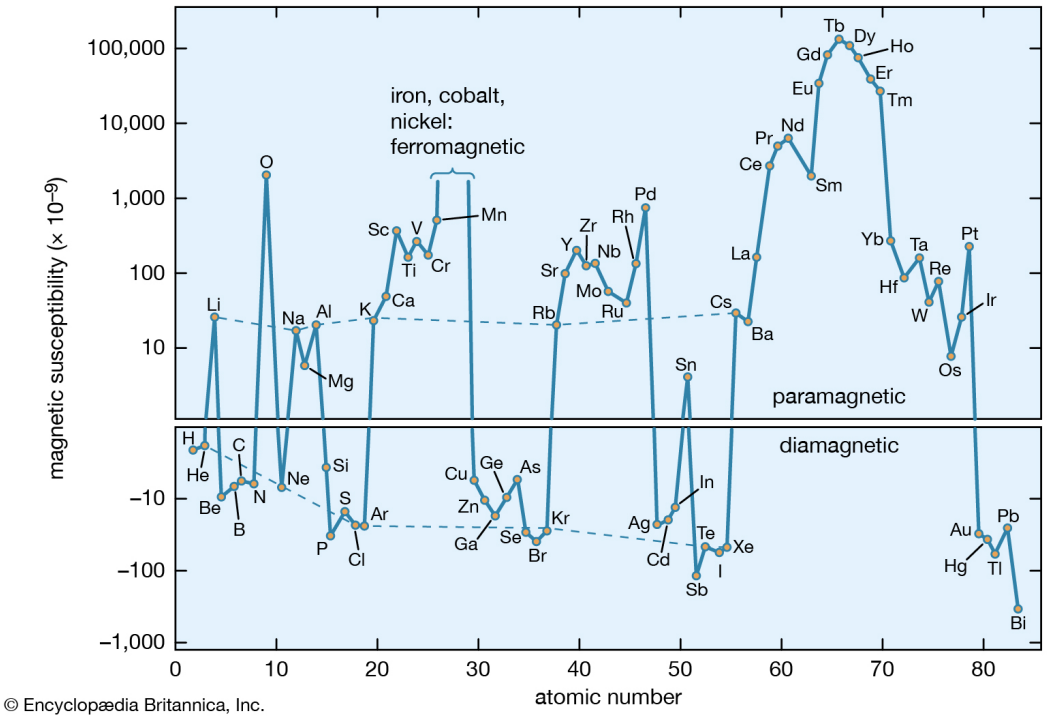


FIGURE 45.1 – La susceptibilité magnétique de quelques éléments.

Lien entre $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{H}$

$$\overrightarrow{B} = \mu(\overrightarrow{H})\overrightarrow{H} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M})$$

1.2 Lien entre l'aimantation et le moment magnétique

L'aimantation, comme on l'a déjà dit, est une grandeur macroscopique. Il existe cependant une valeur microscopique dont elle dérive, le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ (souvent aussi noté $\overrightarrow{mu}$), tel que

$$\overrightarrow{M} = \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{M}}}{\partial V} \tag{45.5}$$

La définition de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est alors, avec $\overrightarrow{r}$ la position et $\overrightarrow{j}$ la densité de courant :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V \tag{45.6}$$

Ainsi on obtient directement le couple magnétique appliqué par une induction :

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{B} \tag{45.7}$$

Cette définition permet de calculer le moment magnétique de la Terre, comme $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}}\right\| = \left\|\overrightarrow{B}\right\| \pi R_T^3/\mu_0 = 7 \times 10^{22}\,\mathrm{A\,m^2}$. L'induction magnétique terrestre, de $5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$, est faible, mais son moment est monstrueux du fait de la taille de l'engin.

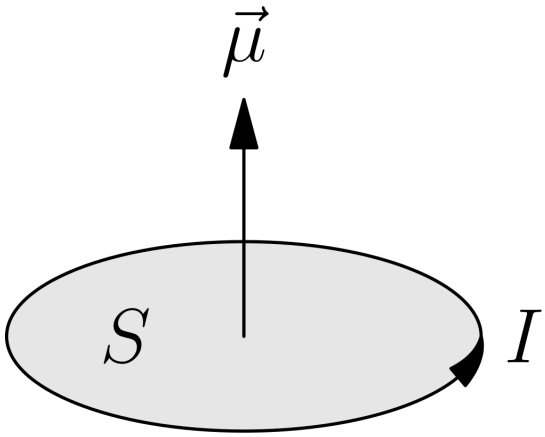


FIGURE 45.2 – Schéma d'une boucle de courant, que l'on étudie juste en dessous.

Moment d'une boucle de courant de rayon R :

On part de la définition du moment magnétique différentiel :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mu} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V$$

De là, on peut retrouver la forme intégrale de cette équation :

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{1}{2} \iiint_V \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V$$

Dans le cas d'une particule chargée en rotation, cette expression devient :

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{1}{2}\,q\,\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$$

Dans le cas d'un fil infiniment fin comme cette boucle de courant : $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = I$, d'où :

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{I}{2} \int_{\partial S} \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}r}$$

$$\overrightarrow{\mu} = I\,\overrightarrow{S}$$

Il est bon de noter qu'énergétiquement, on a un potentiel qui apparait : $U = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B}$

1.3 Facteur gyromagnétique

Nous allons donner une description théorique permettant d'expliquer ces comportements. Pour cela on va se placer en description semi-classique, en considérant un électron qui tourne autour d'un noyau. Celui-ci a un moment magnétique que l'on calcule avec le modèle de la spire de courant :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} \wedge (-e)\overrightarrow{v} = \frac{-e}{2m_e}\overrightarrow{L} = \gamma_e \overrightarrow{L} \tag{45.8}$$

On peut alors subtilement définir le facteur gyromagnétique comme le lien entre $\overrightarrow{L}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, nommé $\gamma_e \simeq 8.79 \times 10^{10}\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$. Il s'agit d'un lien qui va plus loin que le simple modèle semi-classique, puisqu'en quantique c'est toujours vérifié, si ce n'est que le facteur change selon les particules considérées.

Attention cependant, on sait que le moment cinétique est quantifié et du coup, on se doute qu'on va avoir des problèmes avec ce modèle. Par exemple l'expérience de Stern et Gerlach (1921) montre une quantification du moment magnétique d'atomes d'argent. De plus on a pas vraiment encore d'explication pour les différences de comportement.

1.4 Modèle quantique du magnétisme

✍ EdTdL p.248 ; Cohen-Tannoudji ch.VI (pour être clair sur le moment cinétique en quantique)

✍ BFR, p155 (pour la version rapide et facile)

On sait que le moment cinétique dans un électron est quantifié. Cette quantification a fait l'objet de beaucoup de cours, et nous n'entrerons pas dans les détails ici, cependant un bref rappel s'impose peut-être.

Le moment cinétique d'un atome est décomposé en son moment cinétique du noyau, et celui de son cortège électronique. Du fait de la variation en $\frac{1}{m}$ et en $\frac{1}{R}$ de ce moment, on considère que le moment cinétique du noyau est négligeable face à celui des électrons. Ainsi on a seulement à prendre en compte les électrons.

Pour un électron, le moment cinétique est quantifié. On choisi l'axe de quantification comme $O_z \parallel \overrightarrow{B}$ sans perte de généralité pour simplifier les calculs. L'électron est alors décrit par des nombres quantiques, et wikipédia sera ton ami dans le résumé de ce que cela veut dire :

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_quantique#Nombre_quantique_principal_n

Soit j le nombre quantique de moment cinétique. Il définit les valeurs prises pa l_z moment cinétique sur O_z. $l_z = \pm j\hbar$. On introduit alors le nombre de moment magnétique $m_j \in [\![-j, j]\!]$. Si j est entier, on a un nombre impair de possibilités, si il est demi-entier, on a un nombre pair.

Un mesure de $\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{u_z}$ donne $\gamma m_j \hbar$, avec $\gamma = \frac{-ge}{2m}$.

$$\mathcal{M}_z = -g\mu_B m_j \qquad \text{avec } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \times 10^{-24}\,\mathrm{A\,m^2} \text{ le magnéton de Bohr} \tag{45.9}$$

On voit l'apparition de g le facteur de Landé. Ce facteur sans dimension et proche de l'unité est caractéristique de l'état étudié, et dépend des éléments considérés. Son origine profonde théorique et ses variations viennent de la théorie quantique des champs, et là, on ne touche pas.

L'expérience de **Stern et Gerlach** [1] permet de mesurer la valeur de j et de g pour un état atomique donné. Ainsi pour les atomes d'argent on trouve $\mathcal{M}_z = \pm\mu_B$, on en déduit que $g = 2$.

interprétation de l'effet Zeeman

Les résultats précédents permettent de montrer qu'un état atomique gagne une énergie potentielle d'interraction avec le champ magnétique $U = -\mathcal{M}B = m_j g \mu_B B$.

Ainsi on a subdivision des états j en $2j+1$ sous-couches. Du fait que $\Delta E = h\nu$, on a directement une explication de la modification du spectre d'absorption et d'émission d'une lampe à vapeur sous champ magnétique.

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Expérience_de_Stern_et_Gerlach

2 Paramagnétisme

✍ BFR p166 + *Thermodynamique statistique* Diu p444

2.1 Cadre de l'étude

Nous allons étudier le magnétisme des électrons localisés. Le système est complètement décrit quand on a une équation d'état de la forme $M = M(T, B)$.
Pour cela on considère des moments magnétiques permanents, c'est à dire des espèces possédant des électrons non-appariés. On suppose que les interactions entre les différents spins sont **négligeables**.
On considère alors un ensemble de N électrons sans interactions dans un volume V, en contact avec un thermostat à température T. On se place donc dans **l'ensemble canonique**. L'énergie d'interaction est

$$U = -\overrightarrow{M}.\overrightarrow{B} = gm_j\mu_B B = \pm\mu_B B$$

2.2 Calcul de l'aimantation

Les interactions entre les électrons sont négligées donc la fonction de partition se factorise et l'aimantation totale est la somme de toutes les contributions individuelles.
On considère dans un premier temps un seul électron, qui est un fermion de spin $\frac{1}{2}$, et pour lequel on a deux états possibles, un de spin "up" $m_\uparrow = \mu_B$ aligné avec le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ d'énergie $U_\uparrow = -\frac{1}{2}g\mu_B B = -\mu_B B$; et un de spin "down" opposé au champ magnétique d'énergie $U_\downarrow = \mu_B B$. Notons qu'on peut choisir n'importe quelle direction pour la quantification du spin mais il est plus simple pour les calculs de choisir la direction du champ magnétique imposé. La fonction de partition à une particule dans l'ensemble canonique est alors :

$$z = e^{-\beta U_\downarrow} + e^{-\beta U_\uparrow} = 2\cosh(\beta\mu_B B) \tag{45.10}$$

On peut alors calculer l'aimantation moyenne pour un électron :

$$\overline{m} = \frac{m_\downarrow e^{-\beta U_\downarrow} + m_\uparrow e^{-\beta U_\uparrow}}{z} = \mu_B \frac{e^{-\beta\mu_B B} - e^{-\beta(-\mu_B B)}}{2\cosh(\beta\mu_B B)} \tag{45.11}$$

donc

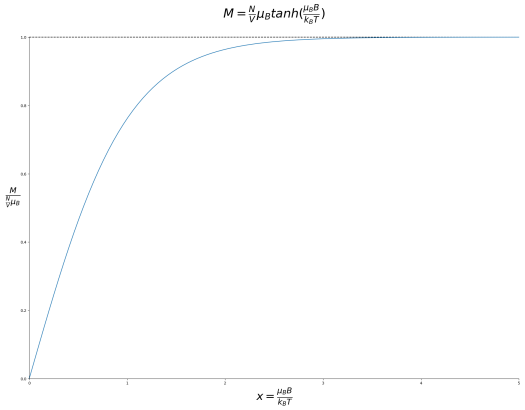
$$\overline{m} = \mu_B \tanh(\beta\mu_B B) \tag{45.12}$$

Pour N électrons, on obtient donc

$$Z_N = z^N \qquad \text{et} \qquad \overline{M} = -\frac{\langle\mathcal{E}\rangle}{VB} = \frac{1}{VB}\frac{\partial \ln(Z_N)}{\partial\beta} \tag{45.13}$$

On obtient finalement l'aimantation globale

$$\boxed{\overline{M} = \frac{N}{V}\mu_B \tanh\beta\mu_B B} \tag{45.14}$$



Remarque

Ce calcul est en réalité le cas particulier du calcul de la fonction de Brillouin (1932) dans lequel il somme sur tous les spins :

$$z = \sum_{m=-S}^{+S} e^{-\beta \mathcal{M} m B} = e^{\beta g_e S \mu_B B} \frac{1 - e^{\beta g_e \mu_B B (2S+1)}}{1 - e^{-\beta g_e \mu_B B}}$$

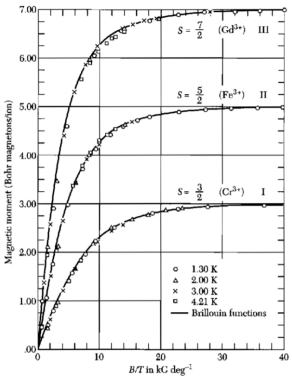
Après

$$z = \frac{\sinh\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu_B B\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2S}\beta\mu_B B\right)}$$

Finalement,

$$\overline{M} = -\frac{\langle \mathcal{E} \rangle}{NVB} = \frac{1}{NVB}\frac{\partial \ln(Z_N)}{\partial \beta} = \cdots = \frac{\mu_B}{2SV}\left[(2S+1)\coth\left(\frac{2S+1}{2S}\beta\mu_B B\right) - \coth\left(\frac{1}{2S}\beta\mu_B B\right)\right]$$

En passant, la limite classique fait apparaître la fonction de Langevin (1905) $\mathcal{L}(y) = \coth(y) - \frac{1}{y}$ en prenant $S \to +\infty$ (donc μ continu).



En prenant $S = \frac{1}{2}$ et en remarquant que $2\coth(2x) - \coth(x) = \tanh(x)$, on retrouve l'expression de $\overline{M}$ encadrée ci-dessus pour notre modèle.

2.3 Interprétation

Balancer un programme Python ou GégoGébra.

La première chose à remarquer est qu'**en l'absence de champ magnétique extérieur, l'aimantation globale est nulle**. On peut le comprendre en se disant que tous les dipôles magnétiques sont orientés aléatoirement quand il n'y a pas de champ magnétique.

On considère maintenant le cas $\overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$.

- Il y a une compétition entre l'alignement des dipôles selon les lignes de champ $(-\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B})$ et l'agitation thermique $(k_B T = \frac{1}{\beta})$, ce qui explique pourquoi le paramégnétisme dépend de la température.

- À fort champ ou à basse température, $\mu_B B \gg k_B T$ et on a une **saturation** : $\tanh(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\overline{M} = \frac{N}{V}\mu_B}$$

Tous les dipôles sont alignés.

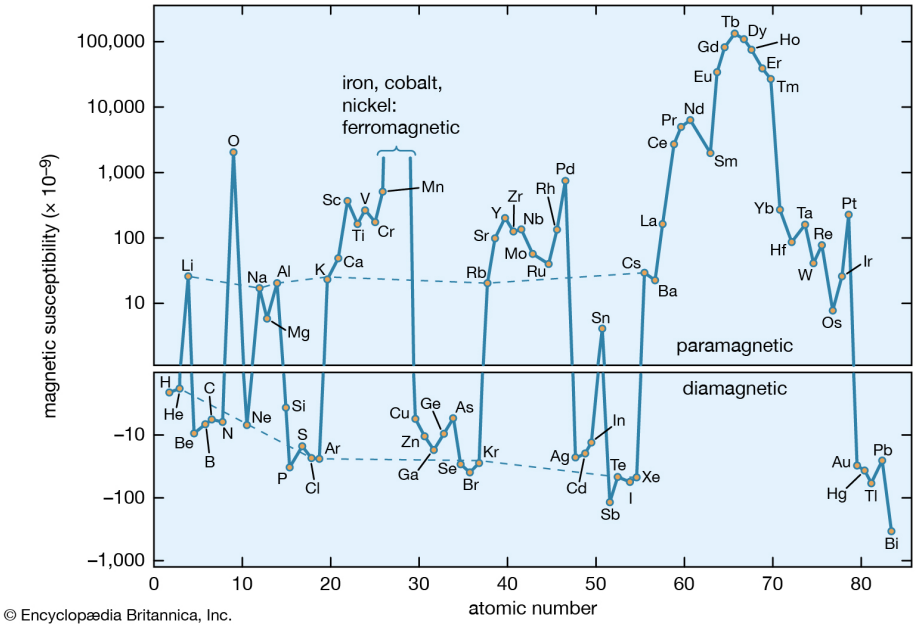
- À faible champ ou à haute température, $\mu_B B \ll k_B T$ et on peut faire un DL de $\overline{M}$ en $\beta\mu_B B$:

$$\boxed{\overline{M} = \frac{N}{V}\frac{\mu_B^2 B}{k_B T}}$$

Or $B = \mu_0(1+\chi_m)H \approx \mu_0 H$ car $\chi_m \ll 1$ donc $\overline{M} = \dfrac{N}{V}\dfrac{\mu_B^2\mu_0}{k_B T}H$. Or $\overline{M} = \chi_m H$ donc

$$\boxed{\chi_m = \frac{N}{V}\frac{\mu_B^2\mu_0}{k_B} \times \frac{1}{T}}$$

Pour un gaz, $\dfrac{N}{V} \sim 10^{25}$ m-3 donc $\chi_m \sim 10^{-7}$ à 300 K.



On retrouve la **loi de Curie** (1895) :

$$T_c = \frac{N\mu_B^2\mu_0}{V k_B}$$

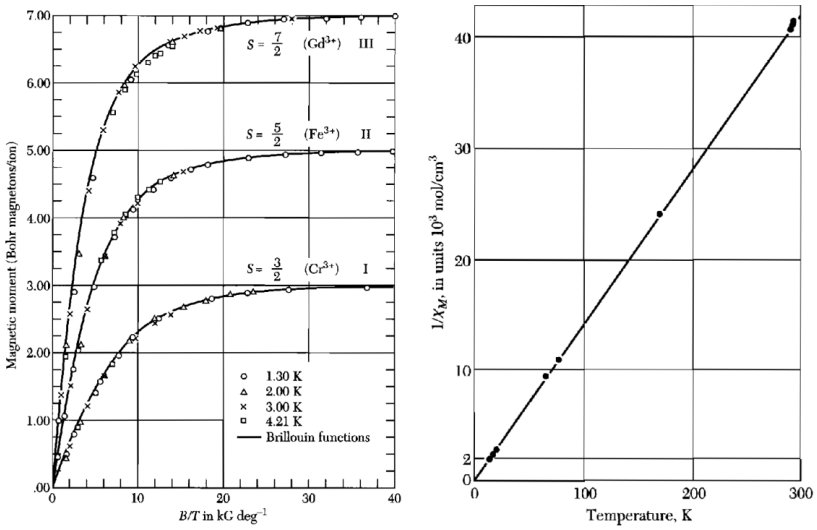


FIGURE 45.3 – À gauche : Aimantation magnétique par atome en fonction du champ magnétique appliqué B_0 pour différentes températures et pour différents échantillons (alun de chrome, alun de fer et sulfate de Gadolinium octahydrate.). À droite : Évolution de l'inverse de la susceptibilité magnétique en fonction de la température entre 0 et 300 K pour le sel de Gadolinium.

Ces résultats peuvent être généralisés aux atomes de spins plus complexes :

- Cr^{3+} est dans une configuration [Ar] $3d^3$ donc $J = |L - S| = \frac{3}{2}$
- Fe^{3+} est dans une configuration [Ar] $3d^5$ donc $J = |L - S| = \frac{5}{2}$
- Gd^{3+} est dans une configuration [Xe] $4f^7$ donc $J = |L - S| = \frac{7}{2}$

On voit dans la figure 45.3 la forte concordance entre la théorie et l'expérience.

3 Ferromagnétisme

On cherche encore et toujours une équation d'état du type $M = M(T, B)$.

3.1 Interactions entre moments magnétiques

✍ Diu p450

Contrairement au milieux paramagnétiques qui peuvent être de natures différentes (liquide, solide), le ferromagnétisme ne se manifeste que dans les milieux solides pour lesquels on ne peut plus négliger les interactions entre les moments magnétiques de différents atomes. Par exemple, le ferromagnétisme se manifeste à température ambiante dans le fer, le cobalt ou encore le nickel. Il résulte d'une interaction entre les spins des atomes voisins, qui permet l'existence d'une aimantation **rémanente**. Cette interaction est donc une interaction d'échange.

On considère deux atomes, situés sur les sites i et j, de spins $\overrightarrow{S_i}$ et $\overrightarrow{S_j}$, tels que :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_i} = p\mu_B \overrightarrow{S_i} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}_j} = p\mu_B \overrightarrow{S_j} \tag{45.15}$$

On introduit l'interaction d'échange de coefficient de couplage J_{ij} (exprimé en Joules) entre les spins de *voisins immédiats*. Le hamiltonien du système placé dans un champ $\overrightarrow{B}$ uniforme est donc le **hamiltonien d'Heisenberg** :

$$H_{\text{Heis}} = -g\mu_B \overrightarrow{B} \cdot \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{S_i} - J \sum_{\{i,j\}} \overrightarrow{S_i} \cdot \overrightarrow{S_j} \qquad \text{avec } J > 0 \tag{45.16}$$

Remarque

On n'a pas considéré l'interaction dipôle magnétique/dipôle magnétique qui a une énergie $\frac{\mu_B^3 \mu_0}{d^3} \approx 10^{-22}$ J car $k_B T \approx 10^{-20}$: ce couplage est donc détruit par l'agitation thermique.

Regardons cette interaction d'échange de plus près. Pour cela, on considère 2 électrons de fonction d'onde

$$\psi(1,2) = \phi(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2})\chi_s(1,2) \tag{45.17}$$

avec ϕ la fonction d'onde orbitale et χ_s la fonction d'onde de spin. On distingue 2 cas :

- les spins sont parallèles et $\chi_s(1,2) = \chi_s(2,1)$. On a donc $\phi(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = -\phi(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_1})$;
- les spins sont antiparallèles et $\chi_s(1,2) = -\chi_s(2,1)$. On a donc $\phi(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}) = \phi(\overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_1})$

Pour les spins parallèles, la fonction d'onde s'annule lorsque les deux électrons sont au même endroit (d'après le principe d'exclusion de Pauli) alors que des électrons de spins antiparallèles peuvent se trouver au même endroit. Deux électrons de spins parallèles sont donc en moyenne plus éloignés l'un de l'autre que deux électrons de spins parallèles, ce qui implique que leur énergie d'interaction coulombienne est plus faible. **La configuration avec des spins parallèles est donc la plus favorable.**
Lorsqu'un matériau ferromagnétique est exposé à un champ magnétique, ses spins s'orientent selon la direction du champ. Lorsque le champ disparaît, l'interaction d'échange entre les spins maintient l'aimantation du matériau.

3.2 Approximation du champ moyen

✍ Diu p454

Pour un site i, on considère l'hamiltonien

$$H_i = -g\mu_B \vec{B} \cdot \vec{S_i} - J \sum_j \vec{S_i} \cdot \vec{S_j} = -g\mu_B \vec{S_i} \cdot \left(\vec{B} + \frac{J}{g\mu_B} \sum_j \vec{S_j} \right) \tag{45.18}$$

Le champ subit par l'atome au site i s'écrit donc

$$\vec{B_i} = \vec{B} + \frac{J}{g\mu_B} \sum_{j \text{ voisin de } i} \vec{S_j} \tag{45.19}$$

où le deuxième terme correspond au champ créé par les atomes voisins de l'atome i.

En 1907, P. Weiss propose l'**approximation du champ moyen** qui consiste à considérer ce champ moléculaire comme constant et à le remplacer par sa valeur moyenne. On écrit alors

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \vec{S_j} \right\rangle = p \left\langle \vec{S_i} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \vec{M} = \frac{N}{V} g\mu_B \left\langle \vec{S_i} \right\rangle = ng\mu_B \left\langle \vec{S_i} \right\rangle$$

On obtient donc

$$\vec{B_i} \simeq \vec{B_{\text{eff}}} = \vec{B} + \frac{pJ}{(g\mu_B)^2 n} \vec{M} = \vec{B} + \lambda \vec{M} \tag{45.20}$$

On voit donc que $\vec{B_{\text{eff}}}$, $\vec{B}$ et $\vec{M}$ sont colinéaires (puisque $\vec{B}$ et $\vec{M}$ le sont).

On peut alors remplacer $\vec{B}$ dans l'expression de $\vec{M}$ dans la partie sur le paramagnétisme par $\vec{B_{\text{eff}}}$ et obtenir une équation auto-cohérente :

$$\boxed{M = \frac{ng\mu_B}{2} \tanh\left(\frac{g\mu_B}{2k_B T} (B + \lambda M) \right)} \tag{45.21}$$

$$\frac{M}{M_\infty} = \tanh\left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_\infty} + \frac{\mu_B B}{k_B T} \right) \tag{45.22}$$

en posant $M_\infty = \frac{ng\mu_B}{2}$ et $T_c = \lambda \frac{n\mu_B^2}{k_B}$.

Pour résoudre cette équation, on a besoin de l'outil numérique. On va aussi comprendre pourquoi on n'a pas tenu compte de cette interaction d'échange dans la partie traitant du paramagnétisme.

↓

3.3 Aimantation en champ nul et transition ferromagnétique/paramagnétique

✍ Diu p456

Température de Curie d'un clou ou d'une chaîne de trombone

✍ ⏲

On chauffe et on voit que ça se désaimante. Pro-tip : la chaîne de trombone se chauffe plus rapidement.

L'équation auto-cohérente peut être résolue graphiquement en champ nul ($B = 0$, appelé approximation de Bragg-Williams) pour obtenir :

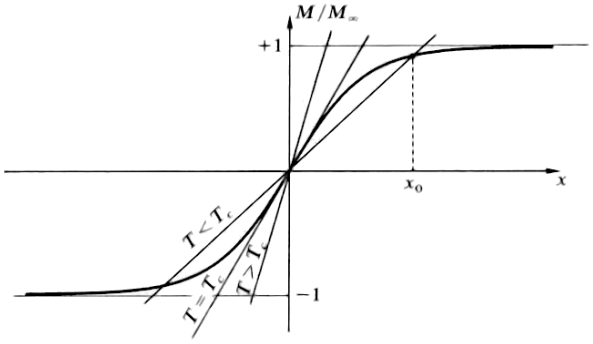
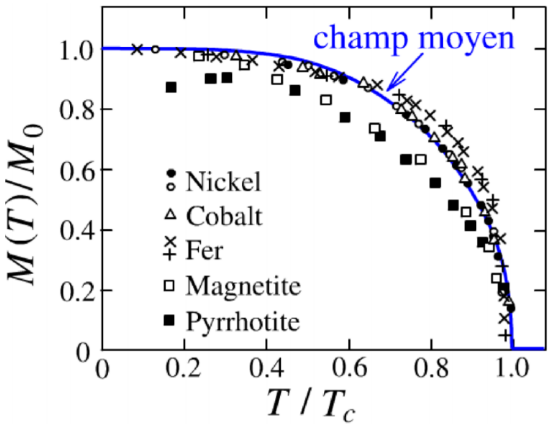


FIGURE 7
Résolution graphique de l'équation d'autocohérence en champ nul. Les points d'intersection entre la courbe $M/M_\infty = \text{th}\, x$ (en trait gras) et la droite de pente variable $M/M_\infty = xT/T_c$ (en trait léger, pour trois valeurs de T) déterminent les aimantations spontanées possibles dans l'approximation de champ moyen.

On voit qu'au-dessus d'une certaine température critique, la seule solution de l'équation auto-cohérente est $M = 0$. L'interaction d'échange est toujours présente mais l'agitation thermique la domine. Le milieu est alors paramagnétique à ces températures (champ B nul implique aimantation nulle), et c'est la raison pour laquelle on a ignoré les interactions d'échange dans la partie sur le paramagnétisme.
Cependant, si $T < T_c$, il existe 2 solutions non-nulles symétriques par rapport à l'origine à l'équation auto-cohérente qui témoignent d'une aimantation rémanente même en l'absence de champ magnétique extérieur : le milieu est alors ferromagnétique.



On appelle **température de Curie** la température critique marquant la transition de phase entre ferromagnétisme et paramagnétisme.

	T_c (K)	M_∞ ($\times 10^4$ A/m)
Fer (Fe)	1043	14
Cobalt (Co)	1388	11
Nickel (Ni)	627	4
Gadolinium (Gd)	293	16
Dysprosium (Dy)	85	24
Magnétite (Fe_3O_4)	858	4

L'application d'un champ extérieur ne fait que modifier la symétrie des solutions [2].

Remarque

L'approximation de Bragg-Williams n'est plus vraiment valable au voisinage de T_c car la transition est du second ordre et donc fait intervenir des exposants critiques.

2. Balancer les animations Python/GéoGébra pour la transition.

Questions des années précédentes

• Définir précisément le moment magnétique et l'aimantation.
→ L'aimantation est la densité de moment magnétique i.e. $\overrightarrow{M} = \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial V}$

• Ordre de grandeur du champ créé par les aimants dans l'expérience du clou ?
→ 1 T ou plutôt 1 mT?1 T ça parait gros...

• Est-ce nécessaire que B soit uniforme pour que le calcul de l'énergie potentielle soit valable ?
→ Non, seul le moment magnétique doit l'être.

• Maxwell décrit déjà le système, pourquoi on ajoute $\mu_0 \overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} - \mu_0 \overrightarrow{M}$ où $\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$?
→ Pour contraindre le système, Maxwell nous donne 8 équations (3 par équation vectorielle et 1 par équation scalaire) et on a 9 inconnues ($\overrightarrow{B}, \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{E}$) d'où cette relation supplémentaire pour fermer le système.

• C'est quoi $1 + \chi_m$?
→ La permittivité relative ϵ_r

• Pour les diamagnétiques, comment doit être le moment magnétique lorsqu'on plonge dans un champs $\overrightarrow{B}$?
→ Loi de Lenz, l'aimantation s'oppose à $\overrightarrow{B}$. Pour un diamagnétique, valeur typique de χ_m?
→ Proportionnelle à la densité, pour $H_2(g)$ c'est -10^{-9}, pour des solide est plutôt -10^{-7}

• Et pour les paramagnétiques ?
→ 10^{-4} pour Gadolinium, 10^{-3} pour $FeCl_3$ et environ 3 ordres de grandeur de moins pour les phases non condensée.

• Pourquoi l'azote liquide ne reste pas confinée dans l'entrefer de l'aimant comme l'oxygène liquide ?
→ Parce que χ_m de l'azote est 3 ordre de grandeur plus faible que l'oxygène et le gradient d'induction magnétique n'est pas suffisant pour contrebalancer le poids.

• Définir précisément le moment magnétique et l'aimantation.
→ L'aimantation est la densité de moment magnétique i.e. $\overrightarrow{M} = \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial V}$ ordre de grandeur du champ créé par les aimants dans l'expérience du clou ?
→ 1T ou plutôt 1mT ? 1 T ça parait gros...

• Est-ce nécessaire que B soit uniforme pour que le calcul de l'énergie potentielle soit valable ?
→ Non, seul le moment magnétique doit l'être. Maxwell décrit déjà le système, pourquoi on ajoute $\mu_0 \overrightarrow{H} = \overrightarrow{B} - \mu_0 \overrightarrow{M}$ où $\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$?
→ Pour contraindre le système, Maxwell nous donne 8 équations (3 par équation vectorielle et 1 par équation scalaire) et on a 9 inconnues ($\overrightarrow{B}, \overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{E}$) d'où cette relation supplémentaire pour fermer le système. c'est quoi $1 + \chi_m$?
→ La permittivité relative ϵ_r

• Pour les diamagnétiques, comment doit être le moment magnétique lorsqu'on plonge dans un champs $\overrightarrow{B}$?
→ Loi de Lenz, l'aimantation s'oppose à $\overrightarrow{B}$.

• Pour un diamagnétique, valeur typique de χ_m?
→ Proportionnelle à la densité, pour $H_2(g)$ c'est -10^{-9}, pour des solide est plutôt -10^{-7}

• Et pour les paramagnétiques ?
→ 10^{-4} pour Gadolinium, 10^{-3} pour $FeCl_3$ et environ 3 ordres de grandeur de moins pour les phases non condensée.

• Pourquoi l'azote liquide ne reste pas confinée dans l'entrefer de l'aimant comme l'oxygène liquide ?
→ Parce que χ_m de l'azote est 3 ordre de grandeur plus faible que l'oxygène et le gradient d'induction magnétique n'est pas suffisant pour contrebalancer le poids.

• Pourquoi le clou est-il attiré par l'aimant ?
→ Parce qu'il a une énorme susceptibilité magnétique et non parce qu'il a une aimantation rémanente.

• Dans la description microscopique, pourquoi $L = 0$?
→ C'est la valeur propre du moment cinétique orbitalaire dans le cas où les électrons on remplit une couche.

• Pourquoi se place-t-on à l'équilibre thermodynamique ?
→ Pour décrire la probabilité d'être dans un certain niveau d'énergie grâce à la loi de Boltzmann et pour décrire la physique à l'équilibre des matériaux.

• Pour quels éléments ce modèle est-il pertinent ?
→ Pour ceux qui ont un unique électron célibataire, c'est-à-dire les alcalins. - Qu'est-ce que l'approximation du champ moyen ?
→ C'est de dire que

$$J\sum_{i,j}\overrightarrow{J}_i\cdot\overrightarrow{J}_j\simeq\sum_i\left(J\sum_{j\in PPV}\overrightarrow{J}_j\right)\cdot\overrightarrow{J}_i$$

Hypothèse : la somme n'est pas étendue sur tout le volume mais peut se restreindre aux Plus Proche Voisins pour lesquels il existe une aimantation moyenne non nulle.

• Pourquoi y-a-t-il une aimantation non nulle à température $T < T_c$?
→ L'état d'aimantation nulle lorsque $T < T_c$ n'est pas le plus bas en énergie donc il n'est pas stable.

• Pourquoi y-a-t-il une aimantation non nulle à température $T < T_c$?
→ L'état d'aimantation nulle lorsque $T < T_c$ n'est pas le plus bas en énergie donc il n'est pas stable.

• Comment obtient-on le graphe en chapeau mexicain de E en fonction de M ?
→ Il faut exprimer l'énergie en fonction de l'aimantation, et ne pas faire l'approximation du champ moyen, pour ne plus négliger les corrélation entre les spins. Donc les S se ré-écrivent comme $S_{\text{moyen}} + S_{\text{fluctuation}}$. Il existe trois valeur d'équilibre pour l'aimantation, dont deux sont favorisée lorsque $T < T_c$. En augmentant le champ extéricur, on déplace un puits vers le haut et l'autre vers le bas et donc on favorise ce second puits comme valeur d'aimantation à l'équilibre, brisant ainsi la symétrie du système.

• A la température critique, en quoi ce système est-il particulier ?
→ Il subit une transition de phase et l'échelle caractéristique de corrélation cntre spins diverge. C'cst une conséquence de l'invariance d'échelle. Les fluctuations ne s'atténuent plus sur une distance exponentielle, mais selon des lois de puissances générales (exposants critiques).

• Comme justifier la valeur de $g = 2$ l'oxygène ?
→ Le spin électronique total est $S = 1$ car, selon la règle de Hund, les spins sont alignés. De plus, la couche électronique est remplie, donc $L = 0$. Ainsi, $J = S = 1$ et $g = 2$

LP 46

Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

Commentaires du jury

- **2017 :** L'introduction des milieux linéaires en début de leçon n'est pas judicieuse.
- **2016 :** Un bilan de puissance soigné est attendu.
- **2015 :** Le principe de fonctionnement du circuit électrique utilisé pour présenter un cycle d'hystérésis doit être connu.
- **2001 :** Il faut consacrer du temps aux applications (stockage des données, transformateurs, électroaimants, ...) en justifiant l'adéquation du type de matériau ferromagnétique à la fonction visée.
- **1999 :** Il est souhaitable de distinguer plus nettement les domaines d'application des ferro doux et des ferro durs (par exemple pourquoi une tête de lecture est-elle en ferro doux alors que le support d'enregistrement est en ferro dur ?).

Niveau : L2 (PSI)

Bibliographie

- ✍ *Electromagnétisme 4*, **BFR** ⟶ Pourquoi
- ✍ *Magnétisme I et II*, **Trémolet de Lacheisserie** ⟶ Pourquoi
- ✍ *Électrotechnique*, **Précis Bréal** ⟶ Montage cycle d'hystérésis
- ✍ *Cap Prépa PSI* ⟶
- ✍ *La physique des objets quotidiens*, **Ray et Poizat** ⟶ Disque dur
- ✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet** ⟶ Toujours utile

Prérequis

- ➢ Électromagnétisme dans la matière
- ➢ Aimantation, moments magnétiques
- ➢ Paramagnétisme, diamagnétisme

Expériences

☕

1 Phénomène de ferromagnétisme . . . 631
1.1 Équations de Maxwell dans un milieu magnétique . . . 631
1.2 Relation constitutive d'un corps ferromagnétique . . . 632
1.3 Analogie électrique/magnétique - Réluctance magnétique . . . 633
2 Aimantation d'un matériau ferromagnétique . . . 634
2.1 Montage expérimental . . . 634
2.2 Première aimantation . . . 635
2.3 Cycle d'hystérésis . . . 636
2.4 Interprétation mésoscopique : domaines de Weiss . . . 637
2.5 Aspects énergétiques - Application au transformateur . . . 638
3 Applications . . . 639
3.1 Le disque dur . . . 639
3.2 Paléomagnétisme . . . 641

Introduction

Nous connaissons déjà quelques aspects du magnétisme dans la matière grâce à notre étude préalable des phénomènes de paramagnétisme et diamagnétisme : lorsque certains matériaux sont soumis à un champ extérieur, ils acquièrent une aimantation dans le même sens que le champ extérieur (paramagnétisme) ou dans le sens opposé (diamagnétisme). Cette aimantation est *induite*.
La question que nous pouvons alors nous poser est la suivante : quel est le phénomène responsable de l'aimantation *permanente* des aimants ? Les aimants sont des matériaux ferromagnétiques, c'est-à-dire qu'ils présentent une aimantation permanente en l'absence de champ magnétique extérieur appliqué. L'objectif de la leçon est de présenter les caractéristiques macroscopiques des matériaux ferromagnétiques et plusieurs de leurs applications.

1 Phénomène de ferromagnétisme

1.1 Équations de Maxwell dans un milieu magnétique

✍ BFR p98 + Précis p49

Un milieu magnétique peut être décomposé en petits éléments volumiques (à l'échelle mésoscopique), qui possèdent chacun un moment dipolaire magnétique (orbital et spin). On définit le **vecteur aimantation** $\overrightarrow{M}$:

$$\overrightarrow{M} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{M}}}{\mathrm{d}V}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{M}}$ est le moment magnétique résultant dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}V$. L'aimantation $\overrightarrow{M}$ s'exprime alors en $\mathrm{A\,m^{-1}}$.

Nous savons déjà qu'il est possible d'associer un moment magnétique à une boucle de courant. Ainsi, puisque le vecteur aimantation $\overrightarrow{M}$ est un moment magnétique *volumique*, nous pouvons donc lui associer une distribution de courants de densité *volumique* $\overrightarrow{j_{\text{lié}}}$ définie comme :

$$\overrightarrow{j_{\text{lié}}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{M}$$

Remarque sur les courants équivalents à une aimantation

✍ BFR p105

- Ces courants sont souvent qualifiés de "fictifs", car ce ne sont pas des courants macroscopiques (ou courants de convection) de porteurs de charges libres dans la matière
- Une démonstration de la relation ci-dessus se fait à partir des potentiels vecteurs à partir de la constatation qu'à l'échelle macroscopique rien ne distingue un champ magnétique dû à des dipôles magnétiques d'un champ dû à des courants. (voir BFR p. 103)

L'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu non polarisé s'écrit alors

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{j_{\text{libre}}} + \overrightarrow{j_{\text{lié}}}) \tag{46.1}$$

En utilisant $\overrightarrow{j_{\text{lié}}} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{M}$, on obtient

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}\right) = \overrightarrow{j_{\text{libre}}} \tag{46.2}$$

On définit alors l'**induction magnétique** $\overrightarrow{H}$, exprimée en $\mathrm{A\,m^{-1}}$, par

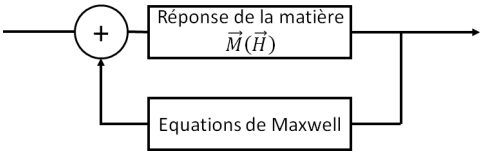
$$\boxed{\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu non polarisé devient alors

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \overrightarrow{j_{\text{libre}}} \tag{46.3}$$

L'intérêt de $\overrightarrow{H}$ réside dans le fait qu'il n'est lié qu'à $\overrightarrow{j_{\text{libre}}}$, grandeur mesurée expérimentalement sous la forme d'un courant I_{libre} à l'aide d'un ampèremètre.

On peut modéliser la réponse de la matière à un champ magnétique. Des champs extérieurs $\overrightarrow{B_0}$ et $\overrightarrow{H_0} = \dfrac{\overrightarrow{B_0}}{\mu_0}$ vont provoquer la création des champs $\overrightarrow{B_M}$ et $\overrightarrow{H_M} = \dfrac{B_M}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$. Les champs totaux sont alors $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_M}$ et $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{H_0} + \overrightarrow{H_M}$. On peut modéliser ce phénomène par un système à boucle de retour :



Avec les 3 autres équations de Maxwell (exprimées dans le cadre de la magnétostatique dans cette leçon), on dénombre 8 équations scalaires pour 9 inconnues (3 composantes de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{H}$). Il manque donc une relation pour fermer le système.

1.2 Relation constitutive d'un corps ferromagnétique

✍ Mauras p249 + Précis p53

La relation manquante est la relation constitutive entre $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{M}$. Dans le cas d'un milieu magnétique *linéaire isotrope*, les vecteurs $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{M}$ sont colinéaires et la relation constitutive reliant ces vecteurs dépend du matériau :

- **matériau diamagnétique :** $\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$ avec $\chi_m < 0$.
  On a une relation linéaire avec $\chi_m < 0$, de l'ordre de -10^{-4}
- **matériau paramagnétique :** $\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$ avec $\chi_m > 0$.
  On a toujours une relation linéaire mais cette fois avec $\chi_m \sim 10^{-6}$–10^{-3}
- **matérieu ferromagnétique :** la relation entre $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{M}$ **n'est pas linéaire**. On a $\boxed{\overrightarrow{M} = \chi_m(\overrightarrow{H})\overrightarrow{H}}$ où $\chi_m(\overrightarrow{H}) > 0$ dépend de $\overrightarrow{H}$ et peut atteindre des valeurs de l'ordre de 10^5.
  Le ferromagnétisme n'existe que dans des corps à structure cristalline, essentiellement des solides (Fe, Ni, Co, leurs alliages), alors que le paramagnétisme et le diamagnétisme existent aussi dans des liquides. Au-delà d'une certaine température, appelée **température de Curie**, le matériau devient paramagnétique.

Composé	T_C en K
Fe	1043
Co	1400
Ni	627
Mumétal $NiFe_{15}Mo_5$	~ 720
Permalloy $(80\%Ni, 20\%Fe)$	~ 720
Acier	~ 1000
Aimants NdFeB	580-670
Aimants AlNiCo	970-1130

On peut alors réécrire l'expression de $\overrightarrow{B}$ et obtenir

$$\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\overrightarrow{H} = \mu_0\mu_r\overrightarrow{H} = \mu\overrightarrow{H} \tag{46.4}$$

avec $\mu_r = 1 + \chi_m$ la **perméabilité magnétique relative** et $\mu = \mu_0\mu_r$ la **perméabilité magnétique absolue** du matériau.

1.3 Analogie électrique/magnétique - Réluctance magnétique

✍ Tremolet 2 p137

On a vu que dans les milieux conducteurs, on avait également une relation constitutive : la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. À partir de là, on peut faire une analogie entre les milieux électriques et les milieux magnétiques et définir la **réluctance magnétique**, qui est l'analogue de la résistance électrique.

	Circuit électrique	Circuit magnétique
Relation constitutive	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Conservation du flux	$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Flux	$i = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Potentiel	$U = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$	$C_m = \oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Loi macroscopique	$U = Ri$	$C_m = R_m \Phi$
Résistance/Réluctance	$R = \int \dfrac{\mathrm{d}l}{\sigma S}$	$R_m = \int \dfrac{\mathrm{d}l}{\mu S}$

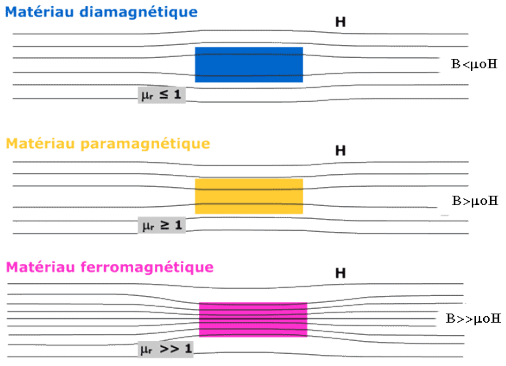
Remarque

Le théorème de Stokes-Ampère donne

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint \overrightarrow{j_{\text{libre}}} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = i_{\text{enlacé}}$$

Le théorème d'Ampère est donc toujours valable mais il s'applique à $\vec{H}$ et non plus à $\vec{B}$.

La résistance électrique caractérise la capacité d'un matériau à s'opposer à la circulation d'un courant électrique. Par analogie, la réluctance magnétique d'un matériau caractérise sa capacité à s'opposer à la pénétration d'un flux magnétique. Ainsi, de la même manière qu'un courant électrique passe par les chemins de plus faible résistance, les lignes de champ magnétique suivent les chemins de plus faible réluctance. Ainsi, puisque $\mu_{\text{ferro}} \gg \mu_{\text{air}}$, on a $R_{m,\text{ferro}} \ll R_{m,\text{air}}$, donc **un matériau ferromagnétique canalise les lignes de champ magnétique**[1].



1. Balancer le GIF.

2 Aimantation d'un matériau ferromagnétique

Le but de cette section est d'étudier le comportement de χ_m, au travers celui de $\overrightarrow{M}$, en fonction de moult paramètres.

2.1 Montage expérimental

Démonstration en direct des courbes présentées

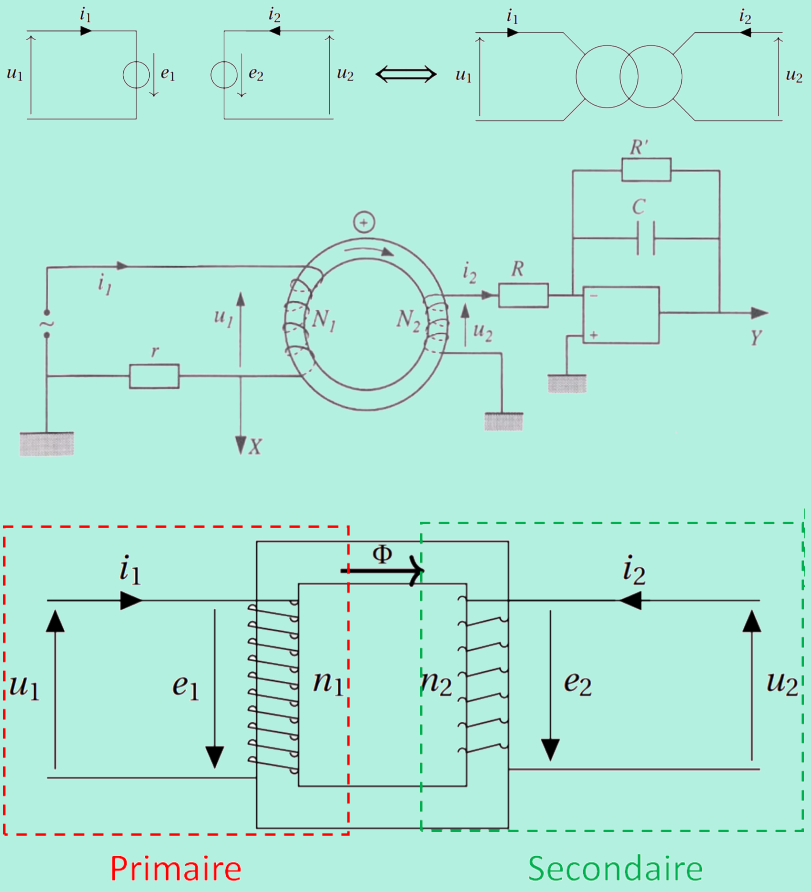


FIGURE 46.1 – Le montage utilisé pour faire les mesures.

On notera que la partie de gauche, c'est de l'électronique de puissance, donc il faut prévoir un rhéostat et un ampli pour u_1.

On suppose que les lignes de champ sont toutes canalisées à la perfection. On ajoute à cela l'hypothèse du fil parfait, sans résistance.

Mesure de l'excitation magnétique : On applique le théorème d'ampère à un contour moyen de rayon r_c du tore. $N_2 i_2$ est considéré négligeable, donc

$$2\pi r_c H(t) = N_1 i_1(t) \tag{46.5}$$

De plus, $u_1 = ri_1$, donc on a directement :

$$H(t) = \frac{N_1}{2\pi r_c} \times \frac{u_1}{r} \tag{46.6}$$

Mesure de l'induction magnétique : Pour déterminer B on utilise l'enroulement secondaire, de N_2 spires. Le flux de B génère une force électromotrice

$$e(t) = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{46.7}$$

Dans le montage, le courant i_2 au secondaire est négligeable devant les autres courants. On a alors

$$u_2(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N_2 S \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(t) \tag{46.8}$$

où S est l'aire de la section du tore. En sortie de l'intégrateur, on obtient ainsi

$$w(t) = -\frac{1}{RC}\int u_2(t)\mathrm{d}t = +\frac{N_2 S}{RC\int \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = \frac{N_2 S}{RC} + \text{cste}} \tag{46.9}$$

Il faut alors annuler cette constante qui provient de la dérive de l'intégrateur. La mise à zéro est effectuée en déchargeant le condensateur dans une résistance en parallèle. On obtient finalement $B(t)$ par la relation :

$$\boxed{B(t) = \frac{RC}{N_2 S} w(t)} \tag{46.10}$$

2.2 Première aimantation

Lorsque l'on soumet un ferromagnétique à une excitation magnétique, une aimantation apparaît. Elle est d'abord linéaire en $\overrightarrow{H}$, puis une zone de croissance plus rapide apparaît, avant de tomber sur une zone de saturation pour les valeurs de H de l'ordre de 10^6 A/m, soit B de l'ordre du Tesla.

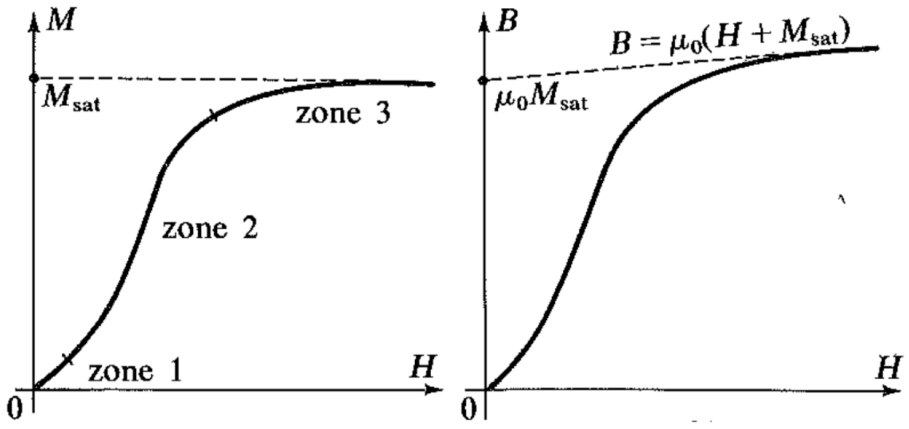


FIGURE 46.2 – Courbes de première aimantation d'un ferromagnétique.

Les valeurs de saturation (à 20°C), ainsi que les température de Curie Ferro et Para sont données ci-dessous.

Métal	M_{sat} (10^6 A m^{-1})	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	T_f (K)	T_p (K)
Fer	1.7	2.14	1043	1101
Cobalt	1.4	1.76	1393	1410
Nickel	0.48	0.6	631	650

À proximité de la température de Curie, la susceptibilité suit une loi de Curie-Weiss (transition du second ordre) de type

$$\chi_m \propto \frac{1}{T - T_p} \tag{46.11}$$

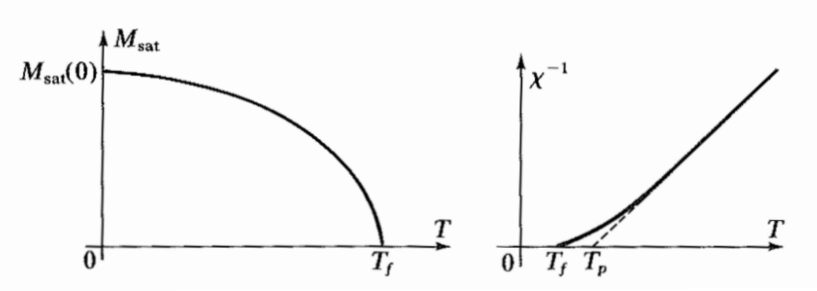


FIGURE 46.3 – Variations de l'aimantation de saturation et de la susceptibilité en fonction de la température.

Et maintenant que se passe-t-il si on baisse H ?

2.3 Cycle d'hystérésis

Expérimentalement on sait que les aimants existent, donc on va voir comment on les fabrique !

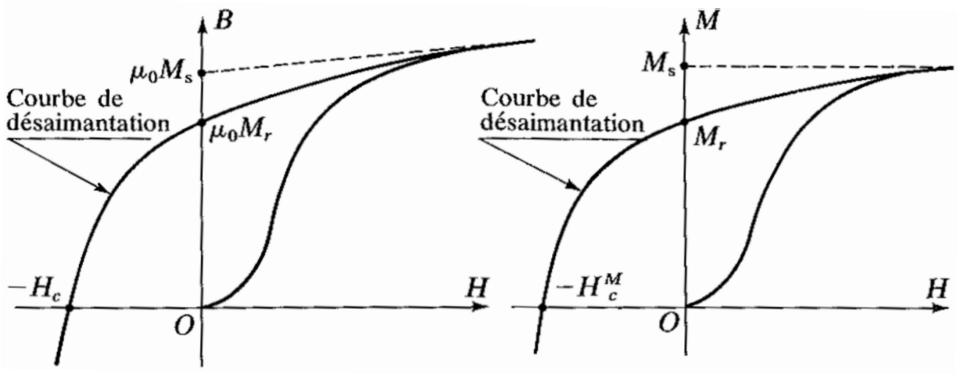


FIGURE 46.4 – Courbes de désaimantation après saturation, appelées aussi "courbes de recul"

Si on abaisse H on constate que le champs B et donc M ne reprennent pas le même chemin ! Ils baissent plus lentement qu'ils avaient augmenté. Plusieurs grandeurs sont alors d'intérêt : l'aimantation rémanente M_r qui est ce que l'on a dans un aimant, et le champ coercitif $-H_c$ qui est nécessaire à annuler B. (Il y a aussi le champ coercitif d'aimantation, pour annuler M, noté H_c^M.)

L'aimantation dépend de l'histoire de l'échantillon, et c'est ce que l'on peut voir si on continue de parcourir le cycle.

Deux cas extrêmes se dégagent. Le ferromagnétique **doux** est celui à faible champ coercitif, de l'ordre de 100 A/m, d'aimantation facilement modifiable, et de très petite aire dans le cycle. Un exemple est le fer dopé au silicium à 2%. Le ferromagnétique **dur** est celui qui a un champ coercitif fort, supérieur à 1000 A/m, et qui permet de réaliser des aimants permanents, comme le Néodyme, ou l'Alcalino5 (51.5% Fe, 13.5% Ni, 24% Co, 8% Al, 3% Cu).

Désaimantation totale du matériau : On peut forcer la désaimantation totale du matériaux en le soumettant à un courant alternatif rapide, d'amplitude d'abord forte puis décroissante.

2.4 Interprétation mésoscopique : domaines de Weiss

Pour interpréter les résultats, il peut être bon de se pencher sur le hamiltonien d'intéraction. On a vu que les changements d'aimantation entre deux voisins coûtent énergétiquement cher, par conséquent il est favorable que le matériaux fasse des zones de même aimantation. Ça s'appelle les domaines de Weiss !

L'interprétation est basée sur l'hypothèse formulée en 1907 par Pierre Weiss, physicien français, selon laquelle un matériau ferromagnétique est divisé en domaines, chacun étant aimanté spontanément (les directions spontanées de l'aimantation correspondant à des orientations d'aimantation préférentielles, dépendantes de la structure du cristal. Ainsi pour le fer, qui cristallise en cc, ces directions sont celles des arêtes du cube de la maille conventionnelle. Pour le nickel, en cfc, il s'agit des diagonales du cube.)

Lorsque l'échantillon n'est pas aimanté, les différents domaines ont des orientations très diverses, ce qui résulte en une aimantation macroscopique nulle. Les frontières entre domaines, les "parois", sont des zones où M change de direction. Ces parois ont une épaisseur typique de 0,1 μm. Dans le cas d'un retournement à 180°de l'aimantation, on parle de parois de Bloch.

Visualisation des domaines de Weiss

✍ ⏲

Microscope P16.29, Ueye + caméra 32.17 + objectif 32.16, Couche de ferrite P66.8, Analyseur (polariseur intégré au microscope), Lampe QI + anticalo (augmenter la luminosité)

`domaines_weiss_deplacement.gif`

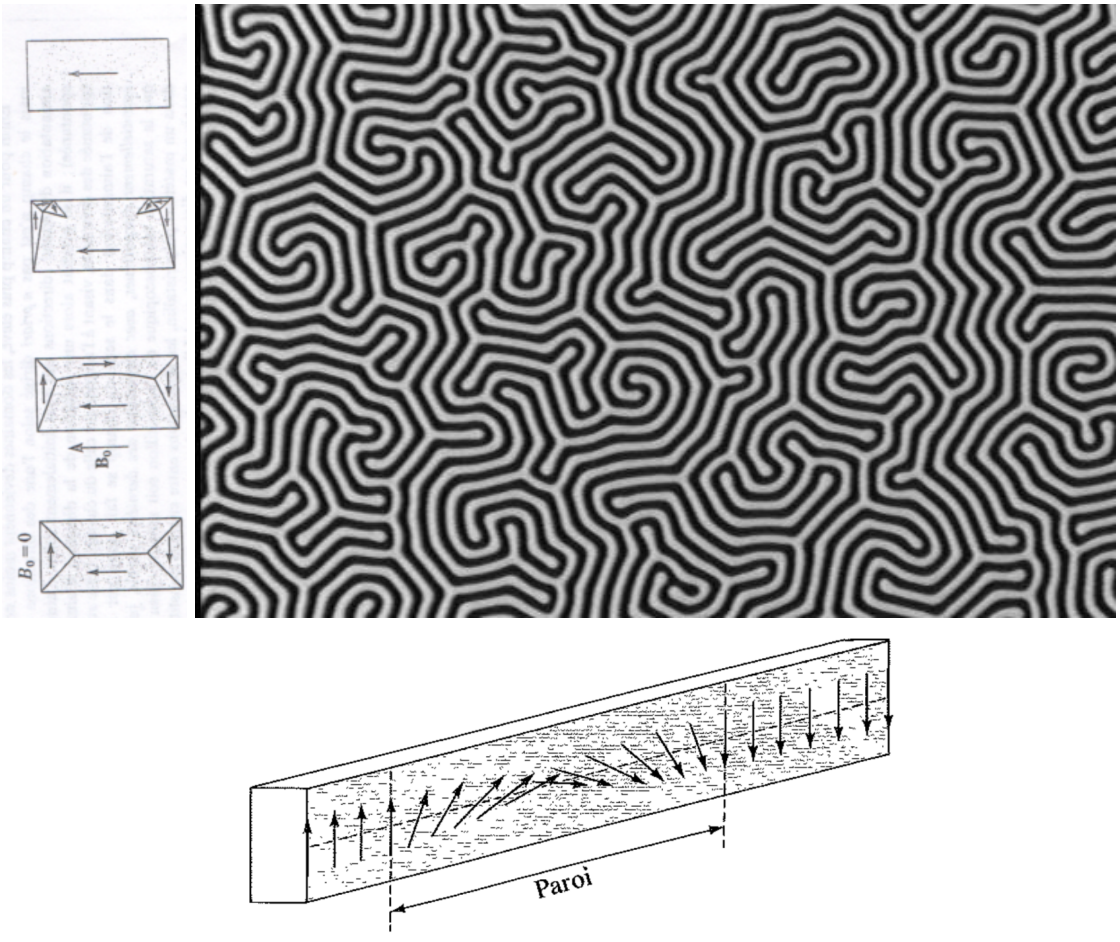


FIGURE 46.5 – Les domaines de Weiss et leurs parois.

La séparation en plusieurs domaines d'aimantations différentes permet de diminuer le champ magnétique créé par l'aimantation et donc l'énergie magnétostatique en résultant. En revanche, la création d'une paroi nécessite un apport d'énergie proportionnel à la surface de ces parois. Il y a donc une compétition visant à minimiser l'énergie totale, menant à un état d'équilibre fixant la taille des domaines. Il est alors possible d'observer des domaines de fermeture pouvant diminuer voir annuler le champ extérieur.

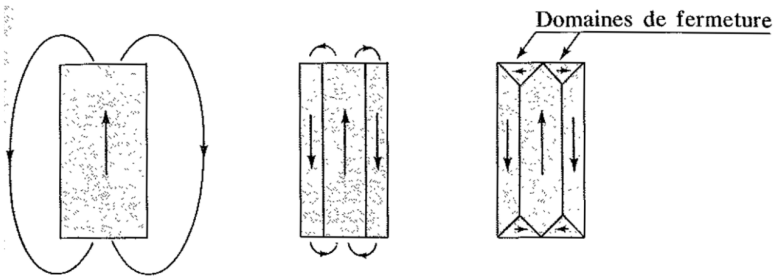


FIGURE 46.6 – La subdivision d'un monocristal en domaines diminue le champ magnétique créé (cas du fer). On observe des domaines de fermeture.

Effet d'un champ magnétique extérieur :

Lorsqu'un champ magnétique est appliqué au matériau, certains domaines sont énergétiquement favorisés face aux autres dont le volume diminue. Il y a alors déplacement des parois. Pour des champs faibles le déplacement est réversible. Mais, lorsque le champ devient fort et que les parois rencontrent des "obstacles", comme des impuretés, leur déplacement devient irréversible, au sens thermodynamique du terme. Pour un champ encore plus élevé, les domaines deviennent moins nombreux et les directions des aimantations ne sont plus celles de l'aimantation spontanée. Il y a rotation de l'aimantation, disparition de parois et l'on arrive à la saturation. Il est possible de le montrer à l'aide de la manip précédente.

Nous avons donc une explication de la courbe de première aimantation, mais aussi de la courbe de désaimantation où l'aimantation rémanente existe à cause des déplacements irréversibles des parois. Pour forcer les parois à s'agencer de manière à annuler M, il faut alors appliquer un champ opposé, d'où le champ coercitif.

2.5 Aspects énergétiques - Application au transformateur

✍ Précis Bréal p. 64

La présence d'une hystérésis traduit une perte énergétique lors de son parcours. Nous allons montrer que l'aire du cycle d'hystérésis correspond à l'énergie volumique dissipée par le matériau ferromagnétique pendant le temps de parcours du cycle.

La puissance instantanée consommée au primaire est

$$\mathcal{P}_1(t) = u_1(t)i_1(t) = \left(r_1 i_1(t) + N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right) = r_1 i_1^2(t) + N_1 i_p(t)\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} \tag{46.12}$$

Or le théorème d'Ampère donne $N_1 i_1(t) = 2\pi r_e H(t)$, et on a $\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = S\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(t)$ donc

$$\mathcal{P}_1(t) = R_1 i_1^2(t) + 2\pi r_e S H(t)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}(t) \tag{46.13}$$

La puissance moyenne vaut alors

$$\langle \mathcal{P}_1(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{P}_1(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T R_1 i_1^2(t)\mathrm{d}t + 2\pi r_e S\frac{1}{T}\int_0^T H(t)B(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(après une IPP)} \tag{46.14}$$

avec T la période de la tension excitatrice

- Le premier terme est la **puissance Joule** $\boxed{\mathcal{P}_J = r_1 I_1^2}$ consommée par la résistance d'entrée (avec I_1 la valeur efficace de $i_1(t)$).

- le second est ce que l'on appelle les **pertes fer**. On voit apparaître l'aire A sous la courbe, et le volume V du tore, ainsi on a $\boxed{\mathcal{P}_f = \dfrac{VA}{T}}$, avec T la période du cycle.

✍ BFR p. 188

Dans les systèmes où aimantations et désaimantations sont fréquentes, on cherche à diminuer ce processus dissipatif d'énergie. Pour cela on utilise des alliages à faibles pertes donc ayant un cycle d'hystérésis d'aire petite : des matériaux doux.

Exemple en industrie

En industries, on utilise des transformateurs au fer dopé par du silicium à 3%, pour lesquels les pertes sont de 100 J/m^3/cycle, pour un champs maximal de 1 T.

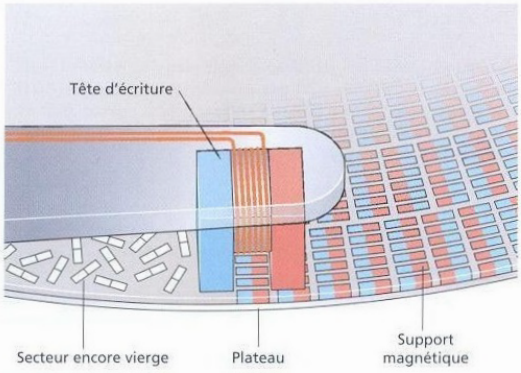
La nature des pertes fer est double : par courants de Foucault dans le matériau, que l'on limite en feuilletant ce dernier ; et par hystérésis, qui sont dues aux déplacements et à la destruction des domaines de Weiss.

3 Applications

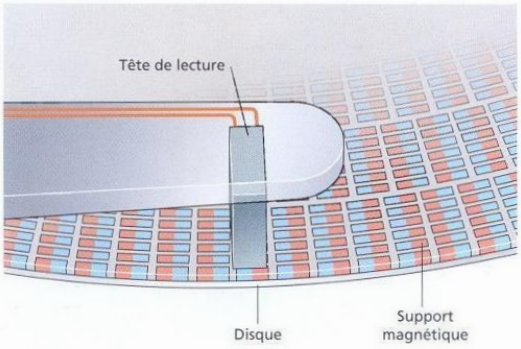
3.1 Le disque dur

✍ *La Physique par les objets quotidiens* p100 + Taillet

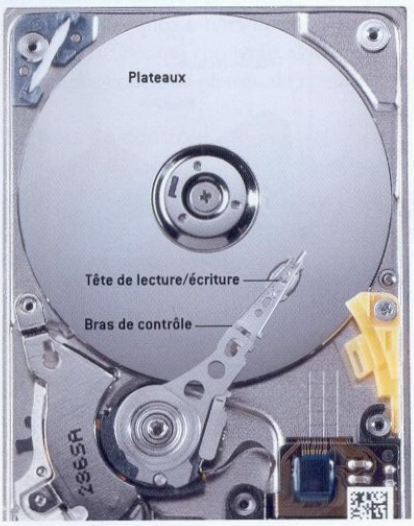
Un disque dur (HDD) est constitué d'un ensemble de plateaux recouverts d'une couche ferromagnétique qui stocke les données sous forme binaire. Les têtes d'écriture sont des bobinages miniatures parcourus par un courant électrique : chacune aimante les zones d'un plateau dans un sens ou un autre, en fonction du sens du courant. La lecture des données est fondée sur la variation de la résistance d'un circuit placé dans la tête de lecture, provoquée par le changement du sens de l'aimantation des zones visitées. La variation de la résistance d'un matériau selon la champ magnétique auquel ce matérieu a été soumis s'appelle la **magnétorésistance géante** (GMR), découverte en 1988 par le français Albert Fert, prix Nobel en 2007. Le champ magnétique joue donc sur la résistance d'un matériau, et puisque le capteur est très sensible et localisé, les disques durs sont de plus en plus miniaturisés.
Pour le support magnétique, on utilise un ferromagnétique dur afin de tirer profit de l'effet de mémoire (aimantation rémanente) dû à l'hystérésis, tandis que la tête d'écriture est composée d'un ferromagnétique doux.



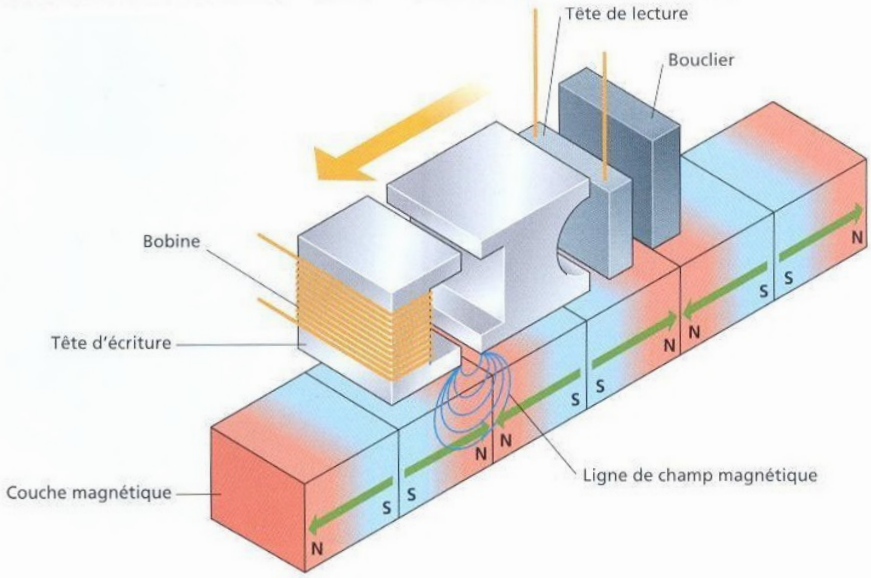
5 Principe de l'écriture des données sur un matériau ferromagnétique. La direction de l'aimantation à l'intérieur des différentes zones magnétiques est symbolisée par un code de couleurs : en gris sont représentés les domaines dont l'aimantation possède une orientation quelconque, ce qui correspond aux secteurs vierges du disque dur ; la couleur indique les domaines dont l'aimantation a été modifiée par la tête d'écriture pour y enregistrer des données.



6 Principe de la lecture des données. La résistance d'un circuit électrique se déplaçant à proximité d'une zone magnétique varie lorsque l'orientation de l'aimantation de la zone change brusquement. Cet effet permet de lire les données inscrites sur le support magnétique.



7 Cette photo de l'intérieur d'un disque dur montre les éléments indispensables à son fonctionnement : les plateaux et la tête de lecture/écriture à l'extrémité du bras de contrôle. On aperçoit également une partie de l'électronique du contrôleur qui transmet les données à l'ordinateur.



9 Détail de la tête de lecture/écriture. La tête d'écriture est constituée d'une bobine qui produit un champ magnétique suffisamment intense pour orienter les zones de la couche magnétique. La tête de lecture mesure la variation de résistance provoquée par le changement d'orientation de l'aimantation à l'intérieur de zones contiguës. Le bouclier magnétique limite les interférences avec les zones précédentes lors de la lecture des données.

3.2 Paléomagnétisme

✍ Tremolet 2 p. 397

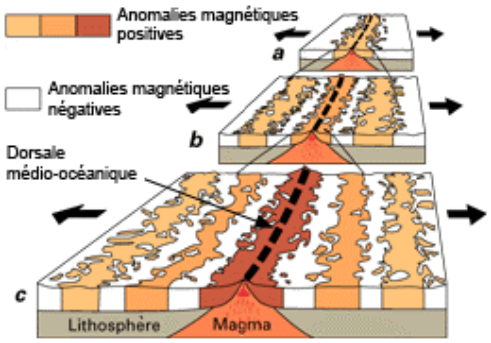
Le paléomagnétisme[2] est l'étude des variations du champ magnétique terrestre sur des échelles de temps allant de quelques milliers d'années à quelques milliards d'années. Le paléomagnétisme s'appuie sur l'étude de l'aimantation des roches magnétiques qui se sont déposées sur des couches sédimentaires à différentes époques, en gardant la trace de l'orientation et de l'amplitude du champ magnétique ambiant (OdG : 10^{-4} T).
Des roches de basalte, contenant de la magnétite (Fe_3O_4, matériau ferromagnétique), se forment à l'issue de la dérive des continents au fond des océans. La température de Curie de la magnétite étant de 580°C, on a apparition du ferromagnétisme à température ambiante. Au contact de l'eau des océans, la lave se refroidit et les domaines vont s'orienter dans le sens du champ magnétique terrestre. Cette orientation sera alors totalement figée une fois la roche solidifiée.
Ces observations peuvent être exploitées pour déterminer :

- l'intensité et la direction du champ ;
- l'âge de la roche si on connaît l'évolution du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T}$ dans le temps ;
- le mouvement subi par la roche depuis l'instant t_0 et la direction de $\overrightarrow{B_T}(t_0)$.

Comme il existe d'autres techniques de datation des roches, on peut remonter à l'historique des variations du champ magnétique terrestre ! Ces résultats ont permis, entre autres, d'apporter dans les années 60 une preuve supplémentaires de la dérive des continents.

Ordres de grandeur

Le champ magnétique terrestre, produit par des effets dynamo au sein du noyau de fer liquide, s'inverse tous les 750 000 ans environ, et le phénomène d'inversion lui-même durerait environ 1000 ans.



On peut ainsi en déduire que les plus vieux planchers océaniques ont 180 Ma d'années.

2. Balancer le GIF.

LP 47

Mécanismes de la conduction électrique dans les solides

Commentaires du Jury

- **2017 :** Cette leçon ne concerne pas que la conduction dans les métaux.
- **2014 :** Dans la présentation du modèle de Drude, les candidats doivent être attentifs à discuter des hypothèses du modèle, en particulier celle des électrons indépendants. Le jury se permet par ailleurs de rappeler aux candidats que les solides ne sont pas tous métalliques.
- **2009-2010 :** Dans cette leçon, il est important de bien distinguer les grandeurs microscopiques et les grandeurs moyennes.
- **2008 :** La conduction électrique dans les semi-conducteurs est en général présentée de manière très approximative.
- **2001** : Si l'on utilise le modèle de Drude, on s'efforcera d'en préciser les limites. Une approche probabiliste peut être envisagée. La théorie quantique de la conduction peut être évoquée.
- **1996** : Trop peu de candidats réalisent que la relation $\mathrm{j} = \rho \mathrm{v}$ est une définition de la vitesse d'ensemble v, plutôt que de j. Par ailleurs, trop de candidats se figurent que le modèle de Drude est une description suffisante de la réalité microscopique.

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Physique des solides*, **Ashcroft et Mermin** ⟶ Tout
- ✍ *BUP 550* ⟶ Fait tout très bien
- ✍ *Physique des électrons dans les solides. Tome 1.*, **Alloul** ⟶ Compléments
- ✍ *Physique de l'état solide*, **Kittel** ⟶ Théorie des bandes

Prérequis

- ➢ Loi de l'électrocinétique
- ➢ Mécanique quantique ondulatoire et opératorielle
- ➢ Thermodynamique statistique (équipartition)
- ➢ Fermi-Dirac

Expériences

☕

1 Modèle historique de Drude . . . 645
1.1 Densité électronique . . . 645
1.2 Hypothèses . . . 645
1.3 Mécanisme de conduction . . . 646
1.4 Modèle de Drude et comportement dynamique . . . 647
1.5 Victoires et défaites du modèle . . . 647
2 Modèle de Sommerfeld . . . 648
2.1 Obtention du modèle . . . 648
2.2 Calcul de la vitesse des électrons . . . 648
2.3 Discussion du modèle . . . 650
3 Théorie des bandes . . . 651
3.1 Obtention des bandes . . . 651
3.2 Interprétation et classification des matériaux . . . 652
3.3 Application aux semi-conducteurs . . . 654

Introduction

Usuellement on distingue clairement les matériaux conducteurs et isolant, en mettant à l'occasion de la nuance avec les semi-conducteurs. Cependant cette distinction en trois catégories ne nous renseigne pas sur les mécanisme qu'il y a derrière, seulement sur la phénoménologie. Aujourd'hui, nous allons détailler 4 modèles qui décrivent la conduction électrique à partir des lois fondamentales de la physique.

1 Modèle historique de Drude

✍ LP29

Le modèle de Drude, établit en 1900 par, vous l'aurez deviné, Drude, s'applique au métaux et plasmas, et globalement à toute matière qui a des électrons mobiles susceptibles d'être mis en mouvement par un champs électrique.

Notons également que ce modèle a été développé peu après la découverte de l'électron par Thomson en 1897.

1.1 Densité électronique

Dans un conducteur, on va distinguer les électrons de conduction, supposés libres, capables de se déplacer, et les électrons de valence, qui restent localisés autour du noyau. Cette description à l'époque empirique est aujourd'hui appuyée par le fait que la liaison métallique est délocalisée.

On finit par considérer un réseau cristallin d'ions, baignant dans un gaz d'électrons. On peut alors définir la densité électronique de conduction n, avec ρ la masse volumique du métal, $\mathcal{N}_A$ le nombre d'Avogadro, M la masse molaire du métal et N_{val} le nombre d'électrons de valence par atome :

$$n = \rho \frac{\mathcal{N}_A N_{\text{val}}}{M} \tag{47.1}$$

OdG

Pour le cuivre et l'aluminium, on trouve $n \sim 10^{28}$ m^{-3}. Comparé à la densité du gaz parfait, qui est de l'ordre de 10^{25} m^{-3}, il y a quand même un facteur 1000.

1.2 Hypothèses

Afin de pouvoir faire le calcul qui va suivre, il nous faut faire des hypothèses sur le comportement des électrons :

1. Malgré l'ordre de grandeur qui précède, on va supposer que les électrons de valence peuvent être décrits par la théorie cinétique du gaz parfait neutre dilué.
2. Le système est assimilé à un ensemble de n électrons par unité de volume, libres et indépendants, de charge -e, placés dans un milieu de particules ponctuelles de masse m sans interaction entre elles.
3. Le métal est supposé à l'équilibre thermodynamique local (ce qui va permettre de définir localement une température).
4. On peut décrire classiquement les électrons, c'est à dire les soumettre au principe fondamental de la dynamique.
5. Les électrons subissent des collisions. La probabilité de subir une collision entre t et $t + \mathrm{d}t$ est donnée par $\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$, où τ est le temps moyen entre deux collisions consécutives, appelé également le temps de relaxation.
6. Après collision l'électron prend une vitesse de direction aléatoire et de norme qui suit la distribution de vitesses d'agitation thermique locale, de moyenne v_*, via $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e v_*^2 = \frac{1}{2} \mathrm{k_B} T$, soit $v_* = \sqrt{\frac{\mathrm{k_B} T}{m}}$

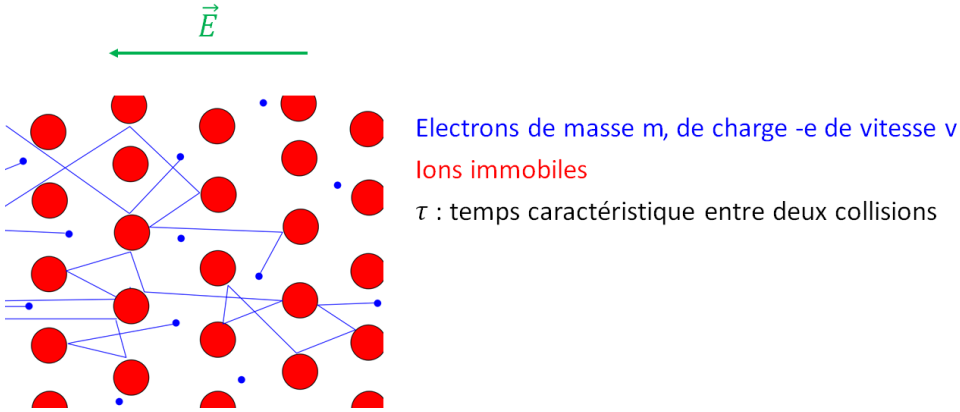


FIGURE 47.1 – Schématisation de la physique qui sous-tend le modèle de Drude

1.3 Mécanisme de conduction

Notre objectif à peine masquer c'est de justifier par la théorie la loi d'Ohm. Pour ce faire il faut trouver un lien entre $\vec{j} = -ne\langle\vec{v}\rangle$ et le champ électrique $\vec{E}$. Pour se faire, nous allons faire un **bilan de quantité de mouvement** moyenne sur un électron dans un champ électrique, dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire.

$$\langle\vec{p}(t+\mathrm{d}t)\rangle = \mathbb{P}(\text{collision}) \times m_e\langle\vec{v_*}\rangle + (1-\mathbb{P}(\text{collision})) \times \left(\langle\vec{p}(t)\rangle - e\vec{E}\,\mathrm{d}t\right) \tag{47.2}$$

Sauf que si on remplace $\mathbb{P}(\text{collision}) = \dfrac{\mathrm{d}t}{\tau}$ et $\langle\vec{v_*}\rangle = \vec{0}$ par leur expression, on a directement

$$\langle\vec{p}(t+\mathrm{d}t)\rangle = \langle\vec{p}(t)\rangle - e\vec{E}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\tau}\langle\vec{p}(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \frac{e}{\tau}\vec{E}\,\mathrm{d}t^2 \tag{47.3}$$

En négligeant l'ordre 2 et en divisant par dt on obtient l'équation fondamentale du mouvement moyen des électrons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{p}(t)\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle\vec{p}(t)\rangle - e\vec{E} \tag{47.4}$$

On peut ainsi voir l'anal[1]ogie avec une force de frottement, dont le coefficient de frottement serait $f = \dfrac{1}{\tau}$. Comme dans le cas de la chute libre on va s'intéresser à la vitesse en régime stationnaire.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\vec{v}\rangle = -\frac{e\tau}{m_e}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\vec{E} \tag{47.5}$$

On trouve ainsi une expression de la conductivité en régime continu, qui est celle qui donnera la résistance une fois la relation intégrée sur tout un conducteur :

Loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma_0\vec{E} \qquad \text{en régime permanent, avec} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \tag{47.6}$$

OdG

Si on prend un fil conducteur de section S et de longueur L, on a $j = \dfrac{I}{S}$ et $U = EL$, d'où $R = \dfrac{L}{\sigma S}$. On peut mesurer σ en mesurant R.

On en déduit $\tau_{\text{Cu}} = 10^{-14}$ s à température ambiante.

1. lol

Mesure de Tau

✍ La tête de Yohann 🕒 2 minutes

Prendre une bobine de longueur et de section connue (on peut déterminer la section en connaissant la longueur et la masse de la bobine), mesurer R, remonter à σ_0 puis à τ.

Élément	n ($\times 10^{28}$ m^{-3})	ρ (77 K)	ρ (273 K)	τ (77 K)	τ (273 K)
Li	4.70	1.04 $\mu\Omega$cm	8.55 $\mu\Omega$cm	7.3×10^{-14} s	0.88×10^{-14} s
Ag	5.86	0.3 $\mu\Omega$cm	1.51 $\mu\Omega$cm	20×10^{-14} s	4.0×10^{-14} s
Zn	13.2	1.1 $\mu\Omega$cm	5.5 $\mu\Omega$cm	2.4×10^{-14} s	0.49×10^{-14} s
Fe	17.0	0.66 $\mu\Omega$cm	8.9 $\mu\Omega$cm	3.2×10^{-14} s	0.24×10^{-14} s
Cu	8.47	0.2 $\mu\Omega$cm	1.56 $\mu\Omega$cm	21×10^{-14} s	2.7×10^{-14} s

On peut calculer le **libre parcours moyen** ℓ d'un électron. Il s'agit de la distance moyenne entre deux collisions, $\ell = \tau \langle v \rangle$. Ainsi on trouve une distance typique de l'ordre de 1 à 10 Å.

On peut aussi rappeler que la vitesse v_* est de l'ordre de 10^6 m/s, contre 10^{-4} pour la vitesse de groupe. Cela est dû au caractère aléatoire de la vitesse thermique.

1.4 Modèle de Drude et comportement dynamique

La ✍ LP29 détaille la façon dont le modèle de drude permet de prévoir le comportement passe-bas des matériaux conducteurs, par un habile passage en notation complexe.

1.5 Victoires et défaites du modèle

C'est cool parce qu'on a une expression simple de la conductivité... En plus à l'époque, ce qui a vraiment fait que ce modèle a été retenu c'est qu'il permet de retrouver la loi empirique de Wiedeman- Franz. Je pense pas qu'on ait besoin, dans le cadre de cette leçon de rentrer dans les détails de cette loi... Mais on donne quand même quelques éléments de compréhension pour les questions. On note κ la conductivité thermique. Son expression (non démontrée ici) est $\kappa = \frac{1}{3} v_* c_v \ell$

$$\frac{\kappa}{\sigma} = LT$$

Pour un gaz d'électrons on a $c_v = \mathrm{k_B} T$, et comme pour Drude ℓ est indépendant de T on obtient la **loi empirique de Wiedeman-Franz** :

$$\begin{cases} \sigma \propto T^{-1/2} \\ \kappa \propto T^{1/2} \end{cases} \tag{47.7}$$

Par contre on peut attaquer le modèle de Drude sur de nombreux aspects... Et on va même voir que toutes ses victoires ne sont que des **coïncidences** !

Première remarque, dans la loi de WF, il y a un facteur L qui apparaît, et bien le modèle de Drude trouve un facteur 2 par rapport aux mesures expérimentales.

On ensuite peut comparer les valeurs théoriques de ℓ à l'expérience car il est possible, en prenant des films métalliques toujours plus minces d'obtenir un ordre de grandeur du libre parcours moyen. En effet, quand l'épaisseur du film devient de l'ordre de ce dernier, la résistivité augmente car les chocs contre les parois se font plus fréquents et

s'ajoutent aux diffusions des électrons sur le réseau. On trouve alors $\ell \sim$300 Å, soit un ordre de grandeur de plus que celui donné par le modèle de Drude.

Un autre problème du modèle concerne l'**équipartition de l'énergie**. En effet on a considéré que l'énergie thermique était de $\frac{3}{2}k_B T$ par électron, sauf que la loi de Dulong et Petit annonce une capacité thermique de $3Nk_B$, deux fois plus haute. En même temps on se base pour DP sur les vibration du cristal, il n'empêche que les deux modèles ne concordent pas !

Enfin le dernier problème c'est que la loi de WF est une loi empirique pas tout à fait juste, et que la dépendance réelle est plus complexe.

Bilan : Le modèle de Drude, c'est bien, ça donne des comportements généraux, mais on peut faire mieux en prenant en compte le caractère quantique du comportement des électrons !

2 Modèle de Sommerfeld

✍ BUP + Ashcroft p33 + Alloul p117

2.1 Obtention du modèle

Puisque le modèle de Drude semble fonctionner un peu par chance, tout ne devrait pas être à jeter... On garde donc l'expression de la conductivité électrique [2].
En 1926, Fermi et Dirac introduisent la statistique de Fermi-Dirac qui régit le comportement des fermions comme les électrons. En 1927, Sommerfeld applique cette statistique aux électrons responsables de la conduction électrique dans les métaux. Les électrons sont maintenant considérés comme des particules **quantiques** mais toujours libres. Il est important de clarifier le but de cette partie : puisque σ garde la même forme, on cherche à mieux maîtriser le terme τ . On cherche donc une nouvelle expression de la vitesse des électrons, en cohérence avec les valeurs de τ et l imposées par l'expérience.

2.2 Calcul de la vitesse des électrons

Puisqu'on étudie maintenant l'électron confiné dans un cube de métal de volume V en tant que particule quantique, on décrit son état par la fonction d'onde ψ solution de l'équation de Schrödinger stationnaire avec potentiel nul :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r}) = \mathcal{E}\psi(\vec{r}) \tag{47.8}$$

La solution de cette équation étant une onde plane, on a donc

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \text{d'énergie } \mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde.

Il est important de remarquer que $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ est un vecteur propre de l'opérateur impulsion $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ associé à la valeur propre $\hbar\vec{k}$, car

$$-i\hbar\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \hbar\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Or, si une particule est dans un état propre d'un opérateur donné, la valeur définie de l'observable associée à l'opérateur est alors la valeur propre associée à cet état propre. Dans notre cas, on peut donc associer à l'électron décrit par la fonction d'onde $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ une impulsion

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

2. Et celle de la conductivité thermique, bon à savoir en cas de questions.

et donc une énergie

$$\mathcal{E}(\overrightarrow{k}) = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}$$

En prenant des conditions aux limites périodiques dans la volume $V = L^3$, conditions appelées *conditions de Born-Von Karman*, on obtient

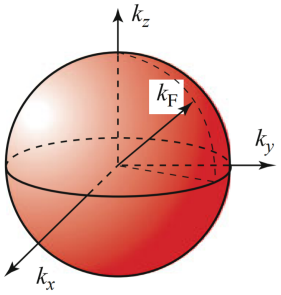
$$\begin{cases} \psi_{\overrightarrow{k}}(x+L,y,z) = \psi_{\overrightarrow{k}}(x,y,z) \\ \psi_{\overrightarrow{k}}(x,y+L,z) = \psi_{\overrightarrow{k}}(x,y,z) \\ \psi_{\overrightarrow{k}}(x,y,z+L) = \psi_{\overrightarrow{k}}(x,y,z) \end{cases} \tag{47.9}$$

Ces conditions imposent d'avoir $e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = e^{ik_zL} = 1$ et donc de quantifier le vecteur d'onde :

$$k_i = \frac{2\pi}{L} a_i \qquad \text{avec } i \in \{x,y,z\} \text{ et } a_i \in \mathbb{Z}$$

L'espace des k est donc constitué d'un réseau cubique de côté $\dfrac{2\pi}{L}$, donc chaque point occupe un espace $\dfrac{(2\pi)^3}{L^3} = \dfrac{(2\pi)^3}{V}$. Cet espace des k a ainsi une densité uniforme $\dfrac{V}{(2\pi)^3}$.

À partir de là, il est enfin possible de construire un état fondamental à N électrons. Les électrons remplissent les niveaux d'énergie par énergie croissante (principe d'Aufbau) en respectant le principe de Pauli. On part donc du niveau le plus en énergie jusqu'à atteindre le niveau d'énergie maximale $\mathcal{E}_F$ appelée **énergie de Fermi**, à qui on associe le **vecteur d'onde de Fermi** k_F avec la relation $\mathcal{E}_F = \dfrac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$. Dans notre situation, l'expression de l'énergie $\mathcal{E}_{\overrightarrow{k}}$ traduit l'isotropie du système. Puisqu'aucune direction n'est privilégiée, l'ensemble des états occupés représente donc une sphère, appelée **sphère de Fermi** de rayon k_F dans l'espace des k.



Le nombre N d'électrons dans cette sphère vaut donc [3]

$$N = 2\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right) g(k) = 2\left(\frac{4}{3}\pi k_F^3\right) \times \frac{V}{(2\pi)^3} \tag{47.10}$$

où le facteur 2 vient de la dégénérescence liée au spin des électrons. La densité volumique d'électron est ainsi

$$n = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \tag{47.11}$$

On a donc pu relier une grandeur macroscopique connue n à une grandeur microscopique k_F à laquelle on n'avait pas accès auparavant. À partir de cette valeur, on peut exprimer une vitesse typique des électrons v_F, appelée **vitesse de Fermi**, par l'expression

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{p_F}{m} \tag{47.12}$$

Ordres de grandeur

Pour le cuivre, on a une densité électronique $n \sim 10^{28}$ m^{-3}, on obtient donc $k_F \sim 10^{10}$ m^{-1}. Pour un cube de volume V de côté $L = 1$ m, on a $\frac{2\pi}{L} \simeq 6$ m^{-1} : les états sont donc très resserrés. La vitesse de Fermi vaut pour le cuivre $v_F \sim 10^6$ m/s. Une telle vitesse amène à un libre parcours moyen des électrons $\ell \sim 10^2$ Å, ce qui est en accord avec l'expérience.

3. Calculs fait dans l'annexe.

Élément chimique	n $(\times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3})$	ϵ_F (en eV)	T_F $(\times 10^4\ \mathrm{K})$	k_F $(\mathrm{Å}^{-1})$	v_F $(\times 10^6\ \mathrm{m\,s}^{-1})$	l (en Å)
Cu	8,49	7,04	8,17	1,36	1,57	893,33
Zn	13,13	9,42	10,93	1,57	1,82	189,28
Ag	5,86	5,50	6,38	1,20	1,39	121,21
Cd	9,26	7,47	8,66	1,40	1,62	196,02
Au	5,90	5,53	6,42	1,20	1,39	785,35

2.3 Discussion du modèle

La contribution principale de Sommerfeld a été d'appliquer la statistique de Fermi-Dirac à des électrons, ce qui peut paraître normal actuellement mais ça n'a pas été décisif. Une réussite majeure du modèle de Sommerfeld a été de retrouver la valeur du libre parcours moyen mesurée expérimentalement, ce que le modèle de Drude n'était pas capable de faire.

L'expression de la conductivité n'a pas changée, on a toujours

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} = \frac{ne^2\ell}{m_e v_F}$$

avec v_F la vitesse de Fermi, qui est cette fois indépendante de T et donc σ est indépendante de T avec ce modèle.

On peut également réexprimer la capacité calorifique c_v pour obtenir $c_v = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F}\right) nk_B$, ce qui permet d'obtenir l'expression de la conductivité thermique κ pour un gaz de fermions.

Le rapport $\frac{\kappa}{\sigma T}$ peut ainsi être réévaluée, et on retrouve la loi de Wiedemann-Franz

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = 2.44 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,\Omega\,K^{-2}}$$

On retrouve donc la valeur expérimentale sans avoir le facteur 2 parasite du modèle de Drude.

	Drude	Sommerfeld
Conductivité électrique	$\sigma = \frac{ne^2\ell}{m_e v_*}$ $v_* = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ $\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$	$\sigma = \frac{ne^2\ell}{m_e v_F}$ $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$ σ indépendante de T
Conductivité thermique	$\kappa = \frac{1}{3} v_* c_v \ell$ $c_v = \frac{3}{2} nk_B$ $\kappa \propto \sqrt{T}$	$\kappa = \frac{1}{3} v_F c_v' \ell$ $c_v = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F}\right) nk_B$ $\kappa \propto T$
Loi de Wiedemann-Franz	$\frac{\kappa}{\sigma T} = \text{cste}$	$\frac{\kappa}{\sigma T} = \text{cste}$

On peut énoncer tout de même quelques limitations du modèle de Sommerfeld :

- On ne tient pas compte des interactions électrons/ions dans ce modèle (les électrons sont libres), alors qu'un rapide ordre de grandeur montre que l'énergie typique d'interaction est de l'ordre de l'énergie de Fermi.
- On n'explique toujours pas pourquoi certains matériaux sont conducteurs, alors que d'autres sont isolants. Par exemple, le bore est un isolant alors que l'aluminium juste en-dessous dans la classification périodique est conducteur. De même, le carbone graphite est conducteur, alors que le carbone diamant est isolant.
- De plus, on n'explique pas non plus la dépendance en $\frac{1}{T}$ de la conductivité électrique observée expérimentalement et introduite *ad hoc* à travers le terme empirique τ.

3 Théorie des bandes

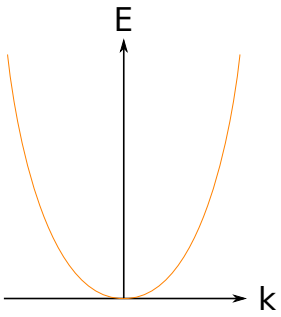
3.1 Obtention des bandes

Le problème de ces deux modèles est qu'ils ne considèrent des gaz parfaits d'électrons, et ne prennent à aucun moment en compte la structure du solide, en particulier sa structure périodique. Dans cette partie, on va décrire avec les mains ce qu'il se passe pour un réseau 1D afin de voir la conséquence de la périodicité. On ne remet en cause que le caractère libre des électrons, et non pas leur caractère indépendant. La théorie des bandes peut être abordée de plusieurs manières.

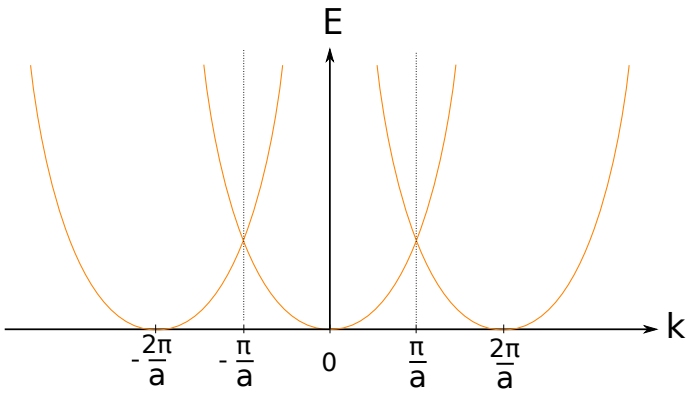
- **Première approche :** ✍ BUP 550

Une première méthode consiste à partir des électrons libres et de construire un modèle perturbé ayant des électrons quasi-libres. On a vu que l'énergie d'un électron libre était

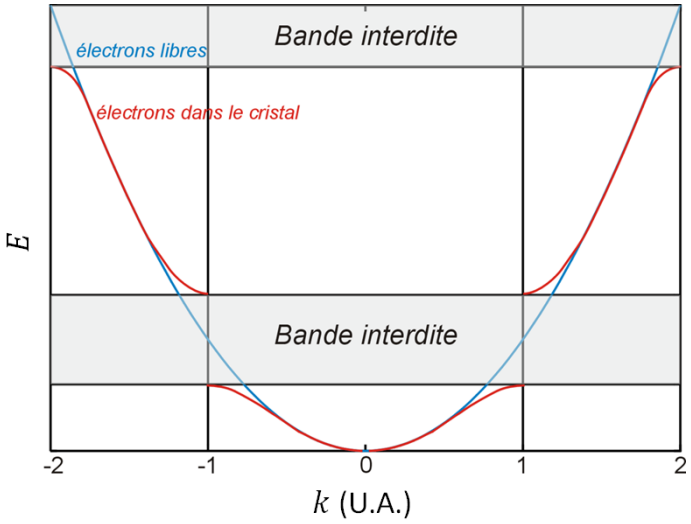
$$\mathcal{E}(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$



Considérons un réseau unidimensionnel périodique de pas a. Le théorème de Bloch nous permet d'affirmer que l'on retrouve cette périodicité dans l'espace réciproque et donc que $\mathcal{E}(k) = \mathcal{E}\left(k + n\frac{2\pi}{a}\right)$ avec n un entier et k le vecteur d'onde de l'onde associée à l'électron. On peut donc se restreindre à l'intervalle $k \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$ (*i.e.* la première zone de Brillouin) et les énergies possibles sont, avant perturbation, le résultats d'une convolution entre $\mathcal{E}(k)$ et un peigne de Dirac.



Lorsque $k \sim 0$, la longueur d'onde de l'onde associée à l'électron est grande devant le pas du réseau et les ondelettes diffusées par le réseau n'interfèrent pas avec cette onde de manière constructive. Dans ce cas, le réseau n'influe quasiment pas sur le mouvement de l'électron. Cependant, lorsqu'on s'approche des bords de la zone (*i.e.* $k \sim \frac{\pi}{a}$), ces interférences deviennent constructives et le réseau a une influence non-négligeable sur le mouvement de l'électron, et notamment les énergies sont modifiées aux bords :



Cette perturbation résulte en une levée de dégénérescence et donc en une discontinuité de l'énergie dans la distribution $\mathcal{E}(k)$. On constate alors l'apparition d'une bande interdite d'énergie (un "gap") pour laquelle il n'existe pas d'OPPH associée à l'électron qui soit solution du problème. Les énergies accessibles ne sont plus un continuum et on forment des **bandes d'énergie**.

- **Seconde approche :**

On peut également considérer le solide comme un molécule géante où chaque atome est relié à son voisin par un ressort. On sait que lorsque deux oscillateurs harmoniques sont en contact, on observe une levée de dégénérescence et l'apparition de niveaux d'énergie correspondant aux énergies propres (état symétrique et état antisymétrique). Ainsi, quand on a $\mathcal{N}_A = 6 \times 10^{23}$ oscillateurs en contact, on aura autant de niveaux d'énergie qui seront séparés par un quantité d'énergie suffisamment faible pour qu'on considère avoir des **bandes d'énergie** dans lesquelles on a une distribution continue de niveaux.

Remarque :

L'approche des liaisons fortes suppose que les électrons restent localisés autour de l'atome, donc leur fonction d'onde ne se recouvre qu'avec les plus proches voisins. Dans le formalisme des fonctions de Bloch, ça se traduit par l'apparition d'un terme perturbatif non diagonal dans le hamiltonien du système qui mène à la levée de dégénérescence des niveaux. Ici, le terme perturbatif est l'attraction d'un électron dans la sphère d'influence des ions voisins.

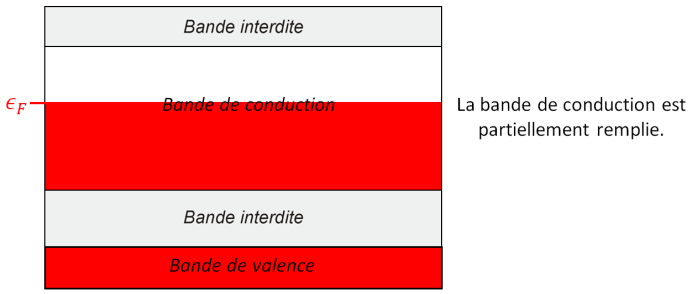
3.2 Interprétation et classification des matériaux

On est donc arrivé à la conclusion que les niveaux électroniques accessibles formaient des bandes permises séparées par des bandes interdites. Parmi ces bandes permises, on distingue 2 bandes particulièrement importantes :

- **la bande de valence :** il s'agit de la bande *entièrement remplie* la plus haute en énergie ;
- **la bande de conduction :** il s'agit de la bande juste au-dessus de la bande de valence.

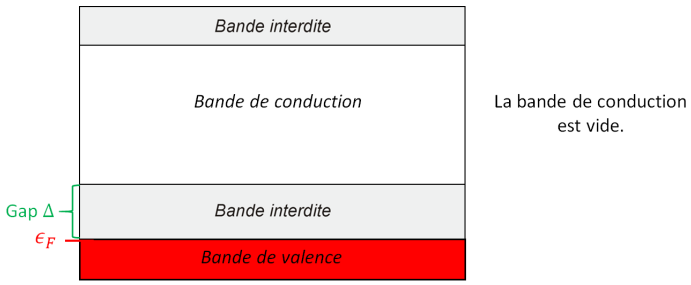
Le remplissage de la bande de conduction va déterminer le comportement du matériau :

– les **conducteurs** sont les matériaux pour lesquels la bande de conduction est partiellement remplie, *i.e.* pour lesquels le niveau d'énergie $\mathcal{E}_F$ est au milieu d'une bande. L'application d'un champ électrique même peu intense permet de déplacer les électrons au dessus du niveau de Fermi sans aucun problème. Pour les métaux conducteurs, la bande de conduction est à moitié remplie.



Exemples : l'hydrogène, les alcalins, les métaux dont le nombre d'électrons de valence est impair.

– les **isolants** sont les matériaux pour lesquels la bande de conduction est totalement vide, *i.e.* pour lesquels le niveau d'énergie $\mathcal{E}_F$ est le dernier niveau d'une bande. L'application d'un champ électrique ne pourra donc pas déplacer les électrons au dessus du niveau de Fermi à cause du gap énergétique (gap $\gtrsim 0.2$ eV).



Exemples : les alcalino-terreux.

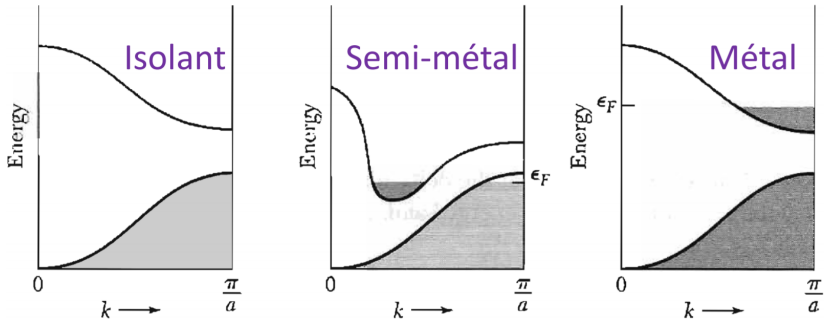
À température non-nulle, d'autres comportements apparaissent :

– les **semi-métaux** sont les matériaux dont la bande de conduction recouvre partiellement la partie supérieure de la bande de valence. Il y a donc une population non négligeable de cette bande menant à de la conduction. Puisque celle-ci peut être indirecte, il faut être à température non nulle.

Exemples : arsenic ($n_e = 2 \times 10^{20}\,\mathrm{cm}^{-3}$), antimoine, bismuth ($n_e = 3 \times 10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$), ...

– les **semi-conducteurs** sont les matériaux dont la bande d'énergie interdite est suffisamment faible ($\lesssim 1$ eV) pour qu'à température ambiante, la distribution de Fermi-Dirac permette un recouvrement non négligeable à partir de la bande de valence menant à une densité électronique faible ($10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$) mais qui a la particularité d'augmenter avec la température. Ce sont donc des isolants à $T = 0$ K.

Exemples : silicium, germanium...



3.3 Application aux semi-conducteurs

Pour augmenter la conductivité à température ambiante d'un semi-conducteur, on peut le doper. Pour cela, on considère deux types de dopage :

- **le dopage n :** on insére dans le réseau des atomes d'un autre élément qui ont un électron de valence de plus que les atomes de silicium. On met donc à disposition dans le cristal des électrons supplémentaires, non impliqués dans la formation des liaisons et étant libres de conduire le courant. Ces électrons supplémentaires vont alors peupler la bande de conduction.

  Exemple : on ajoute des atomes de phosphore dans un réseau de silicium.

- **le dopage p :** on fait pareil mais avec des atomes qui ont un électron de valence de moins. Ainsi, on crée des places vacantes dans la bande de valence, ce qui permet d'exciter les électrons de la bande de valence et donc de conduire le courant. On peut également interpréter cela en disant que des trous (quasi-particules de charge +e) conduisent le courant dans la bande de valence (d'où le nom du dopage d'ailleurs).

  Exemple : on ajoute des atomes de bore ou d'aluminium dans un réseau de silicium.

Ordre de grandeur

On peut constater en regardant des données expérimentales que le dopage améliore effectivement la conductivité, par exemple pour le silicium celle-ci peut passer de 10^{-4} S/m dans le cas non dopé à 10^{4} S/m dans le cas dopé.

On peut alors expliquer si on le souhaite le principe d'une jonction PN, d'abord non polarisée puis polarisée, et de montrer que ceci crée une diode qui est par exemple très utile pour faire du redressement de tension. En vrac, on insiste sur les concepts suivants :

- Flux d'électrons du dopé n au dopé p (flux de recombinaison).
- Flux d'électrons du dopé p au dopé n (flux de génération ou flux inverse) qui équilibre le flux de recombinaison quand la jonction n'est pas polarisée et qui est dû à l'apparition d'une zone (zone de charge d'espace) dans laquelle la densité volumique de charges est non nulle, ce qui crée un champ électrique, lui-même responsable de ce flux de génération.
- Jonction polarisée en inverse : on augmente la hauteur du gap car la différence de potentiel imposée va dans le même sens que celle déjà présente dans la zone de charge d'espace, donc on défavorise le courant de recombinaison, alors que le courant de génération est inchangé et peu dépendant du potentiel imposé à la jonction, le courant électrique résultant est dirigé de la borne + vers la borne - et il est très faible.
- Jonction polarisée en direct : on diminue la hauteur du gap car la différence de potentiel imposée va dans le sens opposé à celle déjà présente dans la zone de charge d'espace, on favorise ainsi le courant de recombinaison qui augmente avec le potentiel appliqué et qui domine largement le courant de génération. On obtient alors un fort courant de la borne + vers la borne -.
- La caractéristique de la diode en convention récepteur est

$$I = I_0 \left[\exp\left(\frac{eU}{k_B T} \right) - 1 \right]$$

  avec U le potentiel imposé à la jonction et s'ajoutant au potentiel déjà présent dans la zone de charge d'espace. On voit donc qu'on peut assez facilement contrôler un courant unidirectionnel via cette caractéristique exponentielle.

LP 48

Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Niveau : L2

Commentaires du jury

- 2015 : Présenter l'exemple célèbre du pont de Tacoma n'est pas pertinent, sauf s'il s'agit d'effectuer une critique d'une interprétation erronée très répandue.
- 2010 : L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté.
- 2008, 2007 : Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées.
- 2006 : L'aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n'est liée qu'à l'existence d'un maximum d'amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées.
- 2003 : La leçon porte sur l'étude de phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique. Le candidat ne doit pas se limiter à l'électricité et à la mécanique. Il doit prendre soin de dégager les propriétés communes aux différents exemples présentés. Quel lien y a-t-il entre le circuit RLC et la résonance du sodium ? Jusqu'en 2001, le titre était : Phénomènes de résonance dans les systèmes linéaires. Exemples.
- 1998 : Il est bien entendu nécessaire d'insister sur la généralité du phénomène de résonance en physique et de ne pas cantonner l'exposé à un domaine unique (mécanique ou électricité). Les relations entre le comportement des systèmes forcés et les propriétés des mêmes systèmes, libres, doivent être soulignées, de même que les aspects énergétiques des phénomènes de résonance.

Bibliographie

✍ *Cap prépa MPSI-PCSI-PTSI*, **Renvoizé** ⟶ Filtre RLC
✍ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** ⟶ Corde de Melde
✍ *Mécanique 1 et 2*, **Feynman** ⟶ Esprit de la leçon
✍ *Dictionnaire de Physique*, **Taillet** ⟶ Définitions
✍ *Mécanique Quantique*, **Basdevant et Dalibard** ⟶ MQ
✍ *Optique*, **Houard** ⟶ Fabry-pérot
✍ *Hprépa ondes*, **Brébec** ⟶ Corde de Melde
✍ *BUP 851 (1), Expérience de Melde*, **Jean-Paul Roux** ⟶ Corde de Melde
✍ *Physique PC*, **Sanz** ⟶ Lasers
✍ *Chimie Physique*, **Atkins** ⟶ RMN

Prérequis

- Mécanique du point
- Électrocinétique
- Fabry-Pérot + laser
- Électromagnétisme dans la matière
- Modèle de Drude

Expériences

1 L'oscillateur harmonique amorti . . . 657
1.1 Mise en équation . . . 657
1.2 Apparition de la résonance . . . 658
1.3 Acuité de la résonance . . . 658
1.4 Aspect énergétique . . . 659
1.5 Analogie mécanique . . . 660
1.6 Mode propre – mode résonant . . . 660
2 Plusieurs degrés de liberté et cavités . . . 661
2.1 Oscillateurs couplés . . . 661
2.2 Corde de Melde . . . 662
2.3 Interféromètre de Fabry-Pérot - Lasers . . . 663
2.4 Effet Larsen . . . 664
3 Résonance optique . . . 664
3.1 Absorption de lumière par une vapeur métallique . . . 664
3.2 Application . . . 666
4 Autres applications . . . 667
4.1 La montre à quartz . . . 667
4.2 Les instruments de musique . . . 667
4.3 Autres résonances . . . 667
5 Résonance paramétrique . . . 667

Introduction

Lorsque l'on pense à la résonance, on peut s'imaginer un enfant sur une balançoire : Il y a un oscillateur qui est le pendule, et un forçage qui est la personne qui vient périodiquement pousser l'enfant en lui communiquant de l'énergie. On peut déjà voir une notion importante, pour que l'amplitude augmente, il faut pousser à la bonne fréquence.

On peut alors tenter de définir ce qu'est la résonance : phénomène par lequel l'excitation d'un système oscillant à une pulsation ω proche de l'une de ses fréquences propres ω_0 provoque une réponse de très forte amplitude.

On va s'attacher dans cette leçon à revenir sur des systèmes déjà rencontrés pour montrer la généralité du concept de résonance.

1 Une introduction : L'oscillateur harmonique amorti

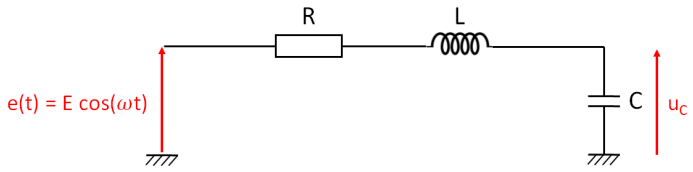


FIGURE 48.1 – Le circuit RLC série, exemple classique d'oscillateur harmonique amorti.

En électrocinétique on a déjà vu le RLC série, et on sait que, soumis à un échelon de tension, c'est un oscillateur harmonique amorti. On a ici étudier son comportement, et montrer que sa résonnance caractéristique est généralisable à d'autre systèmes.

1.1 Mise en équation

https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

Loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t) + u_c \qquad \text{et} \qquad i = C\dot{u}_c(t) \tag{48.1}$$

Un circuit RLC est un système linéaire d'ordre 2, régi par l'équation

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c = e$$

Les grandeurs d'intérêt sont :

- $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ (on le note parfois λ, coefficient de frottement)
- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- $\xi = \dfrac{\alpha}{\omega_0} = \dfrac{R}{C}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 1/2Q$
- $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta_{5\%}\omega} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

On peut alors réécrire l'équation simplement comme

$$\ddot{u}_c(t) + 2\alpha\dot{u}_c(t) + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 e(t) \tag{48.2}$$

1.2 Apparition de la résonance

On a une équation **linéaire**. Après un régime transitoire de Q pseudo-périodes environ, soit $\tau = \frac{1}{\alpha}$, on tend vers la solution particulière qui correspond au régime sinusoïdal forcé, d'où le traitement en RSF :

$$\frac{U_c}{E} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega}$$

La dérivée du module de ce nombre complexe s'annule pour la pulsation de résonance $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$.

On est ainsi passé d'une équation différentielle à une équation algébrique. En posant $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$ le facteur de qualité et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite on a directement l'équation générale d'un système passe bas d'ordre 2 :

$$\underline{u_c} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\underline{e} \tag{48.3}$$

On peut alors simplement se ramener aux grandeurs réelles par une valeur absolue.

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}E \tag{48.4}$$

Deux cas sont alors à distinguer, en fonction de la valeur de Q.

Le premier cas est celui d'un facteur de qualité faible, plus petit que $1/\sqrt{2}$ (régime apériodique, c'est donc un régime transitoire de 0 périodes). Alors on a simplement une fonction décroissante, et rien de bien marrant.

Le deuxième cas cependant, c'est celui où Q est assez grand (*i.e.* $> \frac{1}{\sqrt{2}}$, régime pseudo-périodique) pour que la fonction qui décrit l'amplitude de sortie ne soit pas monotone en x. On a alors une **résonance en amplitude** à $x \sim 1$, c'est à dire que l'amplitude de sortie est plus grande que l'amplitude d'entrée.
Il est bon de remarquer que cette résonance n'est pas exactement à $x = 1$, mais plutôt à $x_{\text{res}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

$$u_m(x_{\text{res}}) = E\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \tag{48.5}$$

Et pour un très grand facteur de qualité, on a même $u_m/E \simeq Q$, le facteur de qualité est donc un renseignement direct sur l'amplitude de la résonance.

On peut alors tracer les diagramme de bode de ce type de système. Nous ne ferons pas l'offense au lecteur de lui montrer un millième diagramme de bode, cependant de nombreux codes sont disponibles.

1.3 Acuité de la résonance

Pour montrer l'acuité de la résonance, et montrer que ce phénomène n'est pas réservé à l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur, on peut étudier le système **aux bornes de la résistance**. C'est alors un **passe bande**, qui a été extensivement traité dans ✍ MP31. On a alors :

$$\frac{U_R}{E} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{2\alpha j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega} \tag{48.6}$$

On posant toujours $Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a

$$\underline{u_c} = \frac{j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}\underline{e} \tag{48.7}$$

$$u_m = \frac{\frac{x}{Q}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}E \tag{48.8}$$

On a alors TOUJOURS une résonance, puisque le gain est toujours maximal en $x = 1$ (on peut ici invoquer le théorème de Rolle[1] et faire de grand gestes, ou simplement tracer la fonction). Cependant, en fonction de la valeur de Q on observe que la largeur de la résonance change.

Définition : On définit l'acuité de la résonance comme la grandeur $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, où ω_0 est le centre de la résonance et $\Delta\omega$ est sa largeur à -3dB, soit la largeur de l'intervalle de ω qui donne $I > I_{\max}/\sqrt{2}$.

Ici pour la déterminer rien de plus simple. On cherche x_1, x_2 tels que

$$\frac{1}{1 + Q^2(x + \frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2} \tag{48.9}$$

Un calcul de niveau lycée donne assez rapidement, en prenant seulement les pulsations positives :

$$x_{2,1} = \frac{1}{2Q}\left(\sqrt{1 + 4Q^2} \pm 1\right) \tag{48.10}$$

Et on trouve la belle formule suivante :

L'acuité de l'oscillateur harmonique amorti vaut Q :

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q \tag{48.11}$$

1.4 Aspect énergétique

Si on considère maintenant l'aspect énergétique de la chose, on peut facilement écrire

$$ei = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_c i \iff \mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C \tag{48.12}$$

Du fait de la quadrature de phase entre intensité et tension aux bornes de la bobine et du condensateur qui résulte en une valeur moyenne nulle pour la puissance, on a donc en moyenne :

$$\langle \mathcal{P}_G \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle \tag{48.13}$$

Sauf que $ei = e\frac{u_R}{R} =$ donc

$$\langle \mathcal{P}_G \rangle = \frac{E^2}{R}\frac{1}{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2} \tag{48.14}$$

1. Si une fonction dérivable a la même valeur en deux points, sa dérivée s'annule au moins une fois entre les deux points.

Et voilà, on a un maximum en puissance fournie, à $x = 1$, et d'acuité similaire. Cependant elle est ici en puissance, ce qui est plus intéressant pour la généralisation, car on travaille généralement dans des systèmes étudiés en puissance.

Définition finale d'un système en résonance : On dit qu'un système est en résonance si la puissance échangée entre le système et son excitateur est maximale.

1.5 Analogie mécanique

Si on prend un système composé d'une masse et d'un ressort, dans un milieu qui frotte proportionnellement à la vitesse (l'air par exemple), on obtient par le PFD l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = x_0(t) \tag{48.15}$$

Ce qui est la même équation, on retrouve dans les deux cas la pulsation d'oscillation propre du système non-amorti ω_0, et un terme de frottement proportionnel à la "vitesse", que l'on peut mettre sous la forme $\frac{\omega_0}{Q}$, où Q est le facteur de qualité.

Analogie	Mécanique	Electrique
Équation	$m\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + kv = F$	$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$
Variable	Vitesse v	Intensité i
Inertie	Masse m	Inductance L
Dissipation	Frottement γ	Résistance R
Raideur	Raideur k	Élastance $1/C$
Excitation	Force F	Variations de tension $\dot{e}$
Pulsation de résonance	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité	$\frac{\sqrt{mk}}{\gamma}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

1.6 Mode propre – mode résonant

La résonance d'un système excité est, on l'a vu, d'autant plus importante que l'amortissement au sein du système est faible. À la limite où Q tend vers $+\infty$, l'amplitude de la résonance diverge et pour la fréquence de résonance converge vers la fréquence propre du système non-amorti. Cela nous amène à distinguer clairement un mode de résonance d'un mode propre :

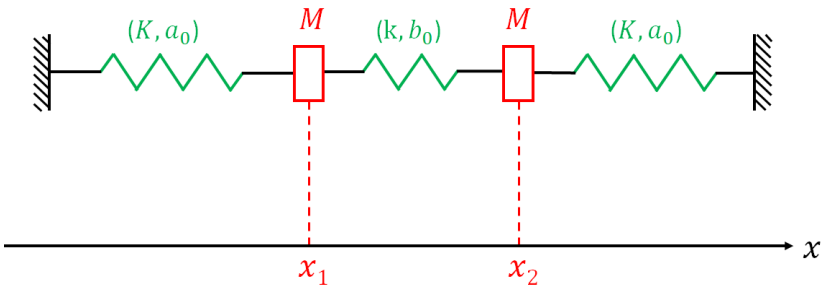
- Un mode propre est un mode d'oscillation stationnaire et libre d'un système non-amorti.
- Au contraire, les modes résonants ne sont définis que pour des systèmes amorti et excité. Ils sont définis par un maximum de la réponse à l'excitation.

À la limite où l'amortissement d'un système tend vers 0, ses modes de résonance convergent vers les modes propres du système non-amorti équivalent. Dans tous les cas, les modes de résonance ont en général des pulsations proches de celles des modes propres du système non-amorti équivalent, ce qui justifie qu'on assimile souvent les deux notions par abus de langage.

2 Plusieurs degrés de liberté et cavités

2.1 Oscillateurs couplés

On considère deux masses M identiques reliées entre elles par un ressort de raideur k et de longueur au repos b_0. On suppose de plus que chaque masse est reliée à un support fixe par un ressort de raideur K et de longueur au repos a_0. On néglige les frottements et on ne prend pas en compte les effets de gravité.



On note x_1 et x_2 les positions positions des deux masses et L la distance totale entre les 2 supports fixes. Le PFD appliqué sur chacune des 2 masses donne :

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = -K(x_1 - a_0) + k(x_2 - x_1 - b_0) \\ M\dfrac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = +K(L - x_2 - a_0) - k(x_2 - x_1 - b_0) \end{cases} \tag{48.16}$$

En notant u_i le déplacement de la masse i par rapport à sa position d'équilibre, on obtient

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = -Ku_1 - k(u_1 - u_2) \\ M\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = -Ku_2 + k(u_1 - u_2) \end{cases} \tag{48.17}$$

Pour résoudre ce système, on pose $X = u_1 + u_2$ et $Y = u_1 - u_2$. On obtient alors

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -KX & \Rightarrow \text{oscillations de pulsation } \omega_S = \sqrt{\dfrac{K}{M}} \\ M\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} = -(K+2k)Y & \Rightarrow \text{oscillations de pulsation } \omega_A = \sqrt{\dfrac{K+2k}{M}} \end{cases} \tag{48.18}$$

En peut introduire un terme de forçage dans le système en supposant par exemple qu'un des support fixe est excité de façon sinusoïdale. On obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \omega_S^2 X = \dfrac{F_0}{M}\cos(\omega t) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_S^2 Y = \dfrac{F_0}{M}\cos(\omega t) \end{cases} \tag{48.19}$$

On est ainsi dans un régime sinusoïdal forcé et on obtient en notation complexe

$$\begin{cases} \underline{X} = \dfrac{F_0}{M}\dfrac{1}{\omega_S^2 - \omega^2} \\ \underline{Y} = \dfrac{F_0}{M}\dfrac{1}{\omega_A^2 - \omega^2} \end{cases} \tag{48.20}$$

Le système possède alors 2 pulsations propres ω_S et ω_A pour lesquelles les amplitudes et les vitesses des oscillations divergent.

Généralisation

Pour un système à N oscillateurs couplés, on obtient N pulsations propres.

2.2 Corde de Melde

https://youtu.be/xFOPUaoRl_8

La corde de Melde constitue la limite continue $N \to +\infty$ de ce qu'on vient de voir avec les oscillateurs couplés. Chaque segment infinitésimal de corde est ainsi un oscillateur couplé aux deux segments adjacents. La corde de Melde possède alors une infinité de pulsations propres.

Pour étudier la corde de Melde, on note L sa longueur et on suppose qu'elle est excitée par un pot vibrant à l'une de ses extrémités en $x = 0$ tandis que l'autre extrémité en $x = L$ est fixe. On cherche à exprimer l'amplitude de vibration en tout point M de la corde. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- il n'y a pas de frottements fluides
- la raideur de la corde est négligeable

Les coefficients de réflexion en $x = 0$ et $x = L$ sont respectivement notés R et R'. L'amplitude complexe de l'excitation au niveau du pot vibrant est notée a tandis que l'amplitude complexe en x de l'onde réfléchie p fois est noté $A_p(x)$, en notant qu'à chaque réflexion l'onde est déphasée de π.

En régime établi, le point M est donc soumis à la superposition d'une infinité d'ondes qui ont subi des réflexions aux extrémités de la corde. Au total, en posant $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}L$ et $\varphi_x = \dfrac{2\pi}{\lambda}x$ l'onde en M a pour amplitude

$$\begin{aligned} A(M) &= \sum_p A_p(M) \\ &= ae^{-i\varphi_x} + e^{i\pi}aRe^{-i(2\varphi-\varphi_x)} + e^{2i\pi}aRR'e^{-i(2\varphi-\varphi_x)} + \cdots \\ &= a\sum_p e^{i2p\pi}R^p(R')^p e^{-i(2p\varphi-\varphi_x)} + a\sum_p e^{i(2p+1)\pi}R^{p+1}(R')^p e^{-i2p\varphi}e^{-i(2\varphi-\varphi_x)} \\ &= ae^{-i\varphi_x}\frac{1}{1-RR'e^{-2i\phi}} - aRe^{-i(2\varphi-\varphi_x)}\frac{1}{1-RR'e^{-2i\phi}} \end{aligned} \tag{48.21}$$

donc

$$A(x) = a\frac{e^{-\varphi_x} - Re^{-i(2\varphi-\varphi_x)}}{1-RR'e^{-2i\phi}} \tag{48.22}$$

Intéressons-nous au module de cette amplitude complexe [2] :

$$|A(x)|^2 = AA^* = a^2\frac{(1+R)^2 + 4R\sin^2(\varphi-\varphi_x)}{(1-RR')^2 + 4RR'\sin^2(\varphi)} \qquad \text{et} \qquad A_{\max}^2 = a^2\frac{(1+R)^2}{(1-RR')^2 + 4RR'\sin^2(\varphi)} \tag{48.23}$$

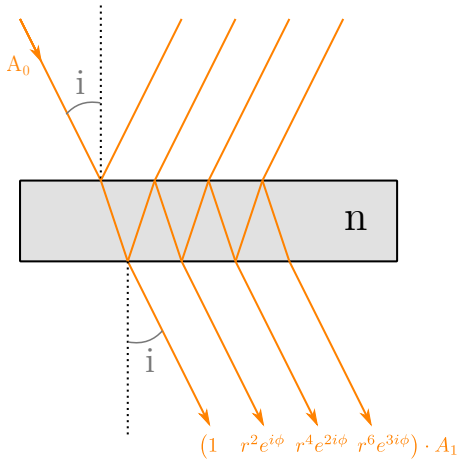
On observe donc une résonance pour $\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$ donc pour $\boxed{L = p\dfrac{\lambda}{2}}$ avec $p \in \mathbb{N}$. Le facteur de qualité dans ce cas vaut $Q = p\dfrac{\pi\sqrt{RR'}}{1-RR'}$

Remarque

On appelle un résonateur pour lequel la dimension spatiale fixe les fréquences propres une **cavité résonante**. On en verra un autre exemple dans la partie sur le Fabry-Pérot.

2. Rappelons nous qui la seule variable dans ce problème est x, présente dans φ_x

2.3 Interféromètre de Fabry-Pérot - Lasers



On considère une cavité optique de Fabry-Pérot, constituée de deux miroirs semi-réfléchissants parallèles de coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et t, espacés d'une distance e. Pour simplifier les expressions, on considère que les miroirs sont dans le vide $n = 1$. Le déphasage entre deux rayons successifs est donc

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne\cos(i) = \frac{4\pi}{\lambda} ne\cos(i)$$

.

Entre deux rayons sortants successifs, on a $A_{m+1} = r^2 e^{j\phi} A_m$, ainsi on en tire directement l'amplitude sortante :

$$A_t = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m = \frac{t^2}{1 - r^2 e^{j\phi}} A_1 \tag{48.24}$$

Ainsi l'intensité en sortie de la cavité est $I_t = I_i \dfrac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\phi} = I_i \dfrac{(1-R)^2}{1 + R^2 - 2R\cos\phi}$, avec $R = r^2$ et $T = 1 - R = t^2$ (c'est OK parce qu'on est dans le vide).

On peut définir la transmittance de la cavité comme

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + \dfrac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{\lambda} ne\cos(i)\right)} \tag{48.25}$$

En sortie, on obtient seulement les pulsations résonantes de la cavité, *i.e.* celles pour lequelles le sinus vaut 0. Si on envoie un rayon incliné, il ressortira pour chaque angle la où les pulsations résonantes. Cela permet de séparer le doublet du sodium par exemple.

On peut alors définir la finesse du Fabry-Pérot comme $\mathcal{F} = \dfrac{\Delta\phi}{\delta\phi}$. Il s'agit du rapport entre l'écart entre deux pics et la largeur à mi-hauteur de ces derniers. Un DL autour d'un pic donne $\delta\phi = \dfrac{4}{\sqrt{M}}$, avec $M = \dfrac{4R}{(1-R)^2}$. On a alors directement

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} \tag{48.26}$$

OdG :

Pour $R = 0.8$, on a $\mathcal{F} = 14$, et pour $R = 0.99$ on a $\mathcal{F} = 313$. Les meilleurs FP ont une finesse de l'ordre de 100 000.

Les cavités résonantes présentent un autre type de résonance, qui ne repose pas sur le comportement fréquentiel d'éléments mis en chaîne, mais sur la propriété de superposition des ondes. Dans les deux cas, on retrouve la même phénoménologie : fréquence de résonance et facteur de qualité.

L'astuce du Laser, c'est de faire un système bouclé filtré par une cavité Fabry-Pérot, mais pour plus d'explication, on se renvoie à ✍ LP37.

2.4 Effet Larsen

https://youtu.be/zh06395s_MY

L'effet Larsen est un effet de résonance qui se produit lorsqu'on approche un microphone d'un haut parleur. Les deux sont en général relié par un amplificateur. Les bruits captés par le micro sont donc amplifiés, émis par le haut parleur puis recaptés par le micro, à nouveau amplifiés, etc... Si le micro est suffisamment proche du haut-parleur, le gain de l'amplificateur va pouvoir compenser les pertes entre haut-parleur et micro. Un bruit strident est alors émis par le haut-parleur dont le spectre est constitué de modes propres acoustiques de la pièce dans laquelle le dispositif est placé. Cela s'explique par le fait que les ondes sonores sont réfléchies et diffractées par tous les objets environnants en raison de longueurs d'onde de l'ordre du mètre.

Effet Larsen : ✍ BUP 794

Le principe consiste à enfermer un micro et un haut-parleur dans un tube en PVC. Attention à choisir le bon ampli : s'il n'est pas assez puissant ça ne marche pas et s'il l'est trop, on grille le HP. Normalement, quand on réduit la longueur du tube, la fréquence de l'effet Larsen augmente, ce qui n'est pas le cas si on ne fait que déplacer le micro à l'intérieur de la cavité. De manière moins spectaculaire, mais plus facile à mettre en place, on peut faire du Larsen avec les émetteur ultrasons.

3 Résonance dans le domaine microscopique : la résonance optique

On a vu pour l'instant des phénomènes de résonance mécaniques, électriques et optiques, mais ils étaient tous à notre échelle. On va voir dans cette partie qu'on peut trouver des phénomènes de résonance même à l'échelle microscopique.

3.1 Absorption de lumière par une vapeur métallique

On considère une onde électromagnétique, harmonique, transverse qui se propage au travers d'une vapeur métallique (typiquement du sodium) dont les noyaux sont supposés fixes et les électrons de valence décrits par le modèle de l'électron élastiquement lié. Le champ électrique incident s'écrit sous la forme d'une OPPH

$$\overrightarrow{E} = Ee^{i(\omega t - kx)}\overrightarrow{u_z} \tag{48.27}$$

On suppose qu'un électron subit les forces suivantes :

- une force de Lorentz $\overrightarrow{F_L} = -e\overrightarrow{E}$;
- une force de rappel élastique e$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = -m_e\omega_0^2\overrightarrow{r}$
- une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F_f} = -m_e\gamma\dot{\overrightarrow{r}}$, conséquence du rayonnement des électrons accélérés par $\overrightarrow{E}$.

Le PFD appliqué à l'électron donne

$$m_e\ddot{\overrightarrow{r}} = -e\overrightarrow{E} - m_e\omega_0^2\overrightarrow{r} - m_e\gamma\dot{\overrightarrow{r}} \tag{48.28}$$

En passant en notation complexe ($\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}e^{i\omega t}$), on obtient

$$\overrightarrow{r} = -\frac{e}{m_e}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\overrightarrow{E} \tag{48.29}$$

Le moment dipolaire de l'électron vaut alors $\overrightarrow{p} = -e\overrightarrow{r}$ et il peut être relié à la polarisation $\overrightarrow{P}$ de la vapeur dans l'hypothèse des milieux dilués par $\overrightarrow{P} = n^*\overrightarrow{p}$ où n^* est la densité électronique de la vapeur. On peut donc exprimer $\overrightarrow{P}$ comme :

$$\overrightarrow{P} = \frac{n^*e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\overrightarrow{E} = \varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}\overrightarrow{E} \tag{48.30}$$

avec $\omega_p^2 = \dfrac{n^*e^2}{m\varepsilon_0}$. La susceptibilité de la vapeur vaut alors

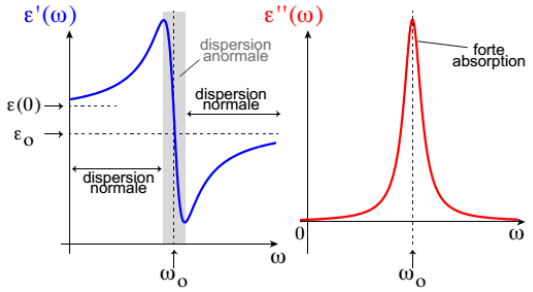
$$\chi = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \tag{48.31}$$

Lorsqu'on s'intéresse à la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique, on obtient la relation de dispersion $k^2 = n^2\dfrac{\omega^2}{c^2}$ avec n l'indice optique du milieu, qui est relié à χ par la relation $n^2 = 1 + \chi$. Si on suppose que $\chi \ll 1$, on obtient alors

$$n = n' + in'' \simeq 1 + \frac{\chi}{2} = 1 + \frac{\chi'}{2} + i\frac{\chi''}{2}$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} n'(\omega) &\simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \\ n''(\omega) &\simeq \frac{1}{2}\gamma\omega\frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2\gamma^2\omega^2} \end{aligned}} \tag{48.32}$$



L'indice n'' intervient dans l'amplitude de l'onde (et donc son atténuation) alors que n' intervient dans sa phase (donc sa propagation), c'est pourquoi n'' est appelé l'**indice d'absorption** tandis que n' est appelé l'**indice de dispersion**. Dans la suite, on va s'intéresser uniquement à n''. Quand on observe l'évolution de n'' avec ω, on voit que lorsque ω et ω_0 ont des valeurs bien différentes, n'' est faible : il n'a pas d'absorption donc la vapeur est transparente.
Cependant, on observe une **résonance** en ω_0 : si $\omega \simeq \omega_0$, n'' prend alors des valeurs non négligeables et le milieu absorbe l'onde incidente.

Expérimentalement, on observe que pour des longueurs d'ondes très précises, la vapeur métallique absorbe sensiblement la lumière alors qu'elle est transparente pour les autres longueurs d'onde. Par ailleurs, lorsque la vapeur absorbe de la lumière, elle la réémet sous forme d'un rayonnement isotrope à la même longueur d'onde. Ainsi, l'absorption de lumière par le sodium, peut s'interpréter comme un phénomène de résonance entre l'excitateur constitué par l'onde électromagnétique incidente, et le résonateur formé par l'électron, confiné au voisinage de l'atome. Ceci n'est pas étonnant, si l'on se réfère à la nature fondamentale des phénomènes d'absorption et d'émission de lumière : ceux-ci s'accompagnent de transitions entre niveaux d'énergie électronique.
Un système à plusieurs niveaux d'énergie, peut donc subir des transitions, chacune d'elles étant caractérisée par l'intervalle énergétique entre les niveaux. Or, à cet intervalle est naturellement associé une pulsation $\omega = \Delta\mathcal{E}/\hbar$. On retrouve donc la condition nécessaire d'accord entre l'excitation, c'est à dire la pulsation de l'onde électromagnétique, et le système, et plus précisément la pulsation caractéristique des échanges d'énergie au sein de ce système. Quand l'onde électromagnétique à exactement la bonne fréquence, l'électron entre en résonance et accumule de l'énergie. Évidement, dans les conditions de l'absorption, l'hypothèse de faible susceptibilité n'est plus valable, et il faudrait un calcul faisant intervenir la mécanique quantique pour décrire quantitativement l'absorption de lumière.

Autre vision de la situation

On modélise chaque atome par un noyau supposé fixe et ponctuel (point N) de charge Ze et un nuage électronique assimilé à une sphère centrée en N, de rayon $a_0 = 53$ pm (rayon de Bohr), uniformément chargée avec une densité volumique de charge ρ et donc de charge totale $-Ze = \frac{4}{3}\pi a_0^3$. On suppose que le nuage électronique subit les forces suivantes :

- une force de Lorentz $\overrightarrow{F_L} = -Ze\overrightarrow{E}$;
- une force de rappel exercée par le noyau pour ramener le nuage à sa position d'équilibre. En un point P du nuage électronique, cette force vaut

$$\overrightarrow{F_{noy/e^-}} = -\overrightarrow{F_{e^-/noy}} = -Ze\overrightarrow{E_{e^-}}(P)$$

avec $\overrightarrow{E_{e^-}}(P)$ le champ créé en P par les électrons. On a alors

$$\overrightarrow{F_{noy/e^-}} = -Ze\frac{\rho\frac{4}{3}\pi PN^3}{4\pi\varepsilon_0 PN^2}\overrightarrow{e_{NP}} = +\frac{(Ze)^2 PN}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\overrightarrow{e_{NP}}$$

$$\overrightarrow{F_{noy/e^-}} = -\frac{(Ze)^2 PN}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\overrightarrow{e_{PN}}$$

- une force de frottement de la forme $\overrightarrow{F_f} = -\frac{Zm_e}{\tau}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{PN}}{\mathrm{d}t}$, conséquence du rayonnement des électrons accélérés par $\overrightarrow{E}$.

En posant $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{PN}$, le PFD appliqué au point P donne

$$m\ddot{\overrightarrow{r}} = -Ze\overrightarrow{E} - \frac{(Ze)^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}\overrightarrow{r} - \frac{m}{\tau}\dot{\overrightarrow{r}} \qquad \text{avec } m = Zm_e \tag{48.33}$$

Et on continue le calcul comme ça.

3.2 Application

Ce phénomène est utilisé dans les fours à micro-ondes afin de réchauffer les aliments. On utilise pour cela une fréquence de résonance de la molécule d'eau $f = 10$ GHz. Ainsi, seuls les aliments sont réchauffés, et aucune énergie n'est consommée pour chauffer le plats ou une éventuelle plaque de cuisson. Les molécules d'eau convertissent en agitation thermique l'énergie qu'elles reçoivent de l'onde électromagnétiques.

En pratique cependant, les fours à micro-ondes fonctionnent à 2.5 GHz. En effet, on l'a vu, l'excitation du milieu va de pair avec l'absorption de l'onde. Cette dernière ne pénètre dans le milieu que sur une profondeur d'autant plus faible que l'absorption est importante. Le choix de la fréquence résulte donc d'un compromis pour réchauffer effectivement les aliments, mais en permettant à l'onde de s'y propager un minimum, afin de pouvoir chauffer légèrement en profondeur.

Comme on l'a vu, la description quantique de l'absorption de lumière fait intervenir la différence de peuplement entre les niveaux haut et bas de la transition :

$$n'' \propto (N_- - N_+)$$

Une valeur négative de n'' correspond à une amplification de l'onde électromagnétique, on retrouve le cas des lasers où un diélectrique excité électriquement joue le rôle d'amplificateur tandis qu'une cavité Fabry- Pérot permet de sélectionner les modes résonants.

4 Autres applications

4.1 La montre à quartz

Un quartz est un matériaux piézoélectrique qui a la propriété de résonner avec un facteur de qualité très élevé, de l'ordre de 10^4. Ainsi bouclé avec un amplificateur et un pile, on peut faire un montage ampli-filtre qui sélectionne avec grande précision la fréquence d'évolution d'un système, et donc en faire une montre.

4.2 Les instruments de musique

Les instruments de musique dont tous des applications plus ou moins directes de la corde de Melde. Ils ont des fréquences de résonance que l'on excite à la main (ou à la bouche, ou à la baguette). La largeur des pics de résonance dans le spectre définira la propreté du son, sa netteté en quelque sorte, leur position définira la justesse, et leur hauteurs respectives le timbre.

4.3 Autres résonances

Oscillations de Rabi, LP43, pot d'échappement, résonateurs de Helmoltz, spin/orbite, pont de Tacoma, effet pogo https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_pogo, *etc.*

5 Résonance paramétrique

✍ Landau + MP31 + BUP 661 (8753) ✍ http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/86/5/s2019_agreg_externe_physique_chimie_A_1_1093865.pdf

Commentaires de l'oral blanc du 4 juin 2020

- Rajouter un peu de physique dans la leçon : donner des exemples concrets de résonance sur chaque partie (exemple : oscillateur à quartz pour la partie résonance électrique)
- Il est possible de parler de l'OH amorti en mécanique, faire l'analogie avec l'électrocinétique, puis rajouter des degrés de liberté avec les oscillateurs couplés et le corde de Melde pour lesquels il ne faut pas être calculatoire.
- Insister sur le fait qu'ajouter des degrés de liberté rend la physique plus riche MAIS fondamentalement on reste sur la même physique.
- Dans cette leçon, il faut traiter des exemples simples puis généraliser à des systèmes différents plus complexes (exemple : RLC $\rightarrow$ Oscillateur à quartz)
- Savoir comment montrer la résonance expérimentalement (tracer un Bode, montrer la résonance avec un Fabry-Pérot, on translate les miroirs, on voit la résonance, ...)
- Dans le laser, la cavité sélectionne un λ qui n'est pas forcément le plus grand pic d'absorption/émission du milieu amplificateur. En général, la cavité sélectionne un pic qui correspond à un maximum local mais pas global.

LP 49

Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités

Niveau : L3

Commentaires du jury

- 2017 : Les définitions d'un oscillateur et d'un portrait de phase sont attendues. La leçon doit présenter des systèmes comportant des non-linéarités.

- 2015 : L'intérêt de l'utilisation des portraits de phase doit ressortir de la leçon.

- 2013 : [À propos du nouveau titre] Les aspects non-linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur.

- 2011, 2012 : Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

- 2010 : L'analyse de l'anharmonicité des oscillations du pendule pesant ne constitue pas le coeur de la leçon. Différents effets des non linéarités doivent être présentés.

- 2007, 2008 : Le régime forcé des oscillateurs non linéaires est également envisageable.

- 2003 : La leçon ne doit pas se limiter à une résolution d'équations différentielles non linéaires. Une discussion des effets en liaison avec la forme de l'énergie potentielle peut être intéressante. La présentation d'un oscillateur de van der Pol précablé sur une plaquette reste trop souvent théorique. En quoi ce système est-il représentatif de problèmes usuels en électronique ?
  Jusqu'en 2002, le titre était : Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur.

- 2000 : Celle leçon est parfois présentée de façon très abstraite. Par ailleurs on doit s'efforcer de varier les exemples, en tout cas de ne pas les limiter exclusivement à l'électronique.

- 1999 : La simple étude de la non-linéarité du pendule simple et du vase de Tantale ne peut suffire. Il faut dégager clairement, sur différents exemples, l'impact des non-linéarités sur (selon les cas) la période, l'amplitude des oscillations, voire la forme du signal, sa valeur moyenne.

- 1997 : Le jury regrette que certains candidats passent beaucoup de temps à traiter de l'effet relativement banal de certaines non-linéarités, comme l'influence de l'amplitude du mouvement sur la période d'oscillation d'un pendule, sans évoquer les phénomènes, beaucoup plus riches, d'instabilités ou de transition vers le chaos.

Bibliographie

- ✍ *Mécanique 1*, **Faroux, Renault** ⟶ Pendule Non-linéaire
- ✍ *Non-linear dynamics and Chaos*, **Strogatz** ⟶ Généralités sur les Systèmes dynamiques
- ✍ Cours des mines de Sainté ⟶ Plus court que le Strogatz
- ✍ *Electronique expérimentale*, **Krob** ⟶ Aspects pratiques du Van der Pol, si jamais
- ✍ *Physique des solitons*, **Peyrard, Dauxois** ⟶ Dispensable, Des équations non-linéaires en physique
- ✍ *Leçon de Vincent Martos*, **Vincent Martos** ⟶ http://perso.ens-lyon.fr/vincent.martos

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Plan de phase
- ➢ Électrocinétique
- ➢ Oscillateurs linéaires
- ➢ Mathématiques (Taylor)

1 Oscillateurs linéaires . . . 671
1.1 Définition du plan de phase . . . 671
1.2 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique . . . 671
1.3 Portrait de phase de l'oscillateur amorti . . . 672
2 Le pendule simple et ses non-linéarité . . . 672
2.1 Équation du mouvement . . . 672
2.2 Étude théorique des non linéarités - Formule de Borda . . . 673
2.3 Portrait de phase et non-linéarités . . . 675
3 Oscillateur entretenu : Van der Pol . . . 676
3.1 Motivation . . . 676
3.2 Mise en équation . . . 676
3.3 Régime quasi-sinusoïdal . . . 677
3.4 Oscillateur à relaxation . . . 677
4 Étudier par le portrait de phase . . . 678
4.1 Oscillateur amorti par des frottement solides . . . 678
4.2 Système proie-prédateur . . . 679
4.3 La glycolyse . . . 682
5 Introduction aux bifurcations . . . 683
6 Annexe : remarques sur les systèmes non linéaires . . . 684

Introduction

Un oscillateur est un système décrit par une ou plusieurs grandeurs périodiques. La grande star des oscillateurs est bien entendu l'oscillateur harmonique qui est un modèle très utilisé de par le fait que tout système conservatif peut être ramené à un oscillateur harmonique oscillant autour de sa position d'équilibre. De plus, cet oscillateur a le bon goût d'être linéaire, et l'étdue des systèmes linéaires est également très répandue en physique. En effet, les systèmes linéaires ont la propriété de vérifier le principe de superposition : on peut alors les diviser en parties indépendantes plus faciles à résoudre puis ensuite recombiner les résultats pour trouver la solution générale. La transformée de Fourier ou de Laplace sont d'ailleurs des exemples d'outils analytiques développés pour étudier les systèmes linéaires.

Malheureusement, la réalité n'est pas aussi simple. En effet, la plupart des systèmes ne sont pas linéaires et l'oscillateur harmonique n'est souvent qu'une approximation de la réalité. Cette leçon a ainsi pour objectif d'étudier les systèmes non-linéaires à travers les oscillateurs.

1 Oscillateurs linéaires

1.1 Définition du plan de phase

Lorsqu'on étudie un oscillateur linéaire à un degré de liberté caractérisé par un variable x, on peut définir au sens de la mécanique lagrangienne la variable conjuguée $y = \dot{x}$. L'équation différentielle d'ordre 2 décrivant l'évolution du système peut alors s'écrire sous la forme d'une système de 2 équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y = \dot{x} \\ \dot{y} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x \end{cases} \tag{49.1}$$

Notons que cette technique peut être appliquée à n'importe quelle équation d'ordre 2 à une dimension de la forme $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$.

On peut alors représenter l'état d'un système à un degré de liberté à tout instant par un point dans le plan (x, y) appelé **plan de phase**. Le système décrit alors au cours de son évolution une trajectoire dans le plan de phase appelée **trajectoire de phase**. L'ensemble des trajectoires de phase que peut décrire un système forme son **portrait de phase**.

L'intérêt des portraits de phase est de remplacer deux graphes $x(t)$ et $y(t)$ par un seul graphe $y(x)$ où le temps devient un paramètre implicite. Les trajectoires de phase ne dépendent alors que des conditions initiales et d'un éventuel forçage, phénomène qu'on appelle le *déterminisme mécanique*.

1.2 Portrait de phase de l'oscillateur harmonique

En étudiant les propriété du portrait de phase, on peut en déduire des informations sur le système (ou l'inverse)

- Trajectoires fermées $\iff$ L'évolution du système est périodique : après un certain temps, il revient dans le même état (x, y)
- Trajectoires elliptiques $\iff$ Caractéristique de l'oscillateur harmonique : la conservation de l'énergie mécanique donne l'équation d'une ellipse. On peut l'obtenir en multipliant l'équation d'évolution par $\dot{x}$ et en intégrant : on obtient alors

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = \mathcal{E}$$

Remarque

On peut appliquer cette méthode à tout système de la forme $\ddot{x} + f(x) = 0$ pour obtenir $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + F(x) = \mathcal{E}$. On peut alors tracer l'allure du potentiel et en déduire qualitativement les trajectoires de phase.

- Non-croisement des trajectoires $\iff$ Système libre : L'unicité de la solution de l'équation différentielle impose que deux systèmes de conditions initiales différentes ne peuvent pas se trouver au même point du plan de phase au même moment.
- Symétrie par rapport à l'axe des x $\iff$ Mouvement réversible : la transformation $t \leftrightarrow -t$ change y en $-y$ mais n'a aucun impact sur x. Notons que la symétrie par rapport à l'axe des y n'est pas une propriété générale des oscillateurs et est liée à la symétrie du problème.
- Unique point fixe en $(0,\,0)$ $\iff$ Système linéaire libre : $(0,\,0)$ est forcément une solution, et si elle existe alors c'est une position d'équilibre. Il n'y a donc aucun déplacement en ce point, et les oscillations se font autour de ce point.

1.3 Portrait de phase de l'oscillateur amorti

Maintenant, on ajoute un terme de dissipation à l'équation d'évolution, qui devient $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. L'ajout de ce terme dissipatif va modifier l'évolution du système et le faire tendre vers le point $(0,0)$ du portrait de phase peu importe les conditions initiales. On dit alors que le point $(0,0)$ est un **attracteur**.

De manière générale, un attracteur et un sous-espace de l'espace des phases vers lequel tend une partie ou la totalité des trajectoires des phases. Pour un système à un degré de liberté, l'attracteur peut être un point ou une courbe fermée.
Un système de ce type possède un facteur de qualité $Q = \tau\omega_0$, dont la valeur définit deux régimes : le régime *pseudo-périodique* pour $Q > \frac{1}{2}$ et le régime amorti pour $Q < \frac{1}{2}$. Le portrait de phase permet de distinguer ces régimes de manière qualitative. Si les trajectoires s'enroulent autour de l'attracteur, on parle de spirale stable ; et sinon on parle de noeud stable. On remarque également que le portrait de phase n'est plus symétrique par rapport à l'axe des abscisses, signe que le système n'est pas conservatif (et donc irréversible).

Le pendule pesant à faibles amplitudes, le système masse-ressort avec frottements ou encore le RLC libre sont d'autant de systèmes décrits par un oscillateur amorti.

☕

Portrait de phase du pendule linéaire amorti

✍ FLTCLD p483-485 ⏲

Lancer le pendule avec un petit angle initial et tracer son portait de phase

Quelqu'un a parlé de pendule pesant ?

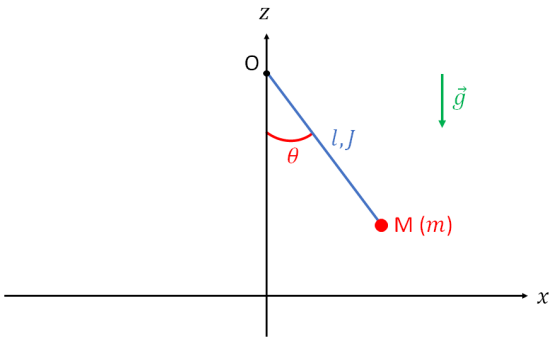
2 Le pendule simple et ses non-linéarité

Entrons dans le vif du sujet et intéressons-nous au cas du pendule "simple"... qui n'est pas si simple que ça.

2.1 Équation du mouvement

Un rapide TMC permet de trouver facilement l'équation du pendule simple, à savoir

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\sin\theta = 0$$



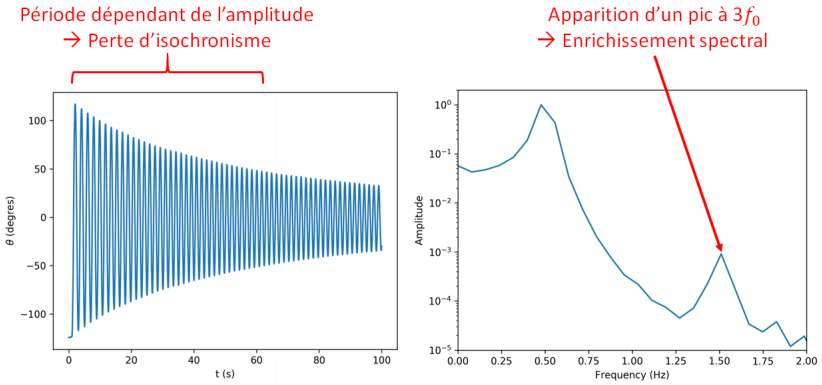
On voit que c'est une équation différentielle d'ordre 2 qui est **non linéaire** de par la présence du sinus. Ainsi, la combinaison linéaire de deux solutions θ_1 et θ_2 n'est pas une solution de l'équation, ce qui montre que le principe de superposition n'est plus respecté.

Jusque là, on se débarrassait de cette non linéarité en faisant l'approximation des petits angles, ce qui permet d'avoir $\sin\theta \simeq \theta$ et donc de revenir à une équation linéaire. La solution de l'équation était alors sinusoïdale : sans vitesse initiale, on a $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgl}{J}}$. La période ne dépend pas de l'amplitude initiale : on parle d'**isochronisme** des solutions, et l'analyse de Fourier des oscillations donne un spectre avec un seul pic. Cependant, on veut maintenant voir ce qu'il se passe quand on sort du régime linéaire.

Pendule pesant non linéaire

✍ ⏲

Réaliser l'acquisition de l'oscillation du pendule pesant avec un grand angle initial (mais une vitesse initiale nulle.



On observe deux différences notoires avec le pendule pesant linéaire :

- on perd l'isochronisme des solutions : la période dépend de l'amplitude initiale ;
- l'analyse de Fourier des oscillations donne un spectre avec plusieurs pics : on parle d'**enrichissement spectral**.

2.2 Étude théorique des non linéarités - Formule de Borda

L'approximation $\sin\theta \simeq \theta$ n'est plus valable quand θ prend une trop grande valeur, et on ne sait plus résoudre l'équation différentielle décrivant le système. On peut cependant faire un développement de Taylor à l'ordre 3 du sinus et voir ce qu'il se passe :

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + o(\theta^3)$$

Remarque

On pourrait aller jusque l'ordre 5 en écrivant

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + o(\theta^5)$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a alors

$$\begin{cases} \sin\theta = 1 & \\ \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 = 0.924832 & \Rightarrow 7\% \text{ d'erreur} \\ \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 = 1.004524 & \Rightarrow 0.4\% \text{ d'erreur} \end{cases}$$

On voit donc que l'ordre 3 suffit.

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0 \tag{49.2}$$

On peut se demander comment résoudre cette équation. Si on y injecte la solution de l'ordre 1 $\theta_0\cos(\omega t)$, on voit apparaître un $\cos^3(\omega_0 t)$, qui se développe en

$$\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t)$$

Il semble donc être une bonne idée de chercher une solution de la forme

$$\theta(t) = \theta_0[\cos(\omega t) + \epsilon\cos(3\omega t)]$$

On a alors

$$\begin{aligned} \theta^3 &\simeq \theta_0^3[\cos^3(\omega t) + 3\epsilon\cos^2(\omega t)\cos(3\omega t)] \qquad \text{à l'ordre 1 en } \epsilon \\ &\simeq \theta_0^3\left[\frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t) + 3\epsilon\cos^2(\omega t)\cos(3\omega t)\right] \end{aligned} \tag{49.3}$$

En injectant ce terme dans l'équation différentiel on a,

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0 \tag{49.4}$$

$$\begin{aligned} \iff 0 = {} & \theta_0\omega^2[-\cos(\omega t) - 9\epsilon\cos(3\omega t)] \\ & + \omega_0^2\theta_0\left[\cos(\omega t) + \epsilon\cos(3\omega t) - \frac{\theta_0^2}{6}\left(\frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t) + 3\epsilon\cos^2(\omega t)\cos(3\omega t)\right)\right] \end{aligned} \tag{49.5}$$

Le terme en $\theta_0^2\epsilon$ peut être négligé il correspond à un $\cos(2\omega t)$ qui n'apparaît pas quand on fait l'expérience. On vérifiera que ce terme est bien négligeable un peu plus tard. On obtient donc

$$\cos(\omega t)\left[\omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) - \omega^2\right] + \cos(3\omega t)\left[-\frac{\theta_0^2}{24}\omega_0^2 + \epsilon(\omega_0^2 - 9\omega^2)\right] = 0 \tag{49.6}$$

Puisque $\cos(\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$ forment une famille libre de fonction, une combinaison linéaire de ces 2 fonctions est nulle si et seulement si chaque terme de la combinaison linéaire est nul. On en déduit

$$\begin{cases} 0 = \omega_0^2\left(1-\dfrac{\theta_0^2}{8}\right) - \omega^2 & \iff \omega^2 = \omega_0^2\left(1-\dfrac{\theta_0^2}{8}\right) \\ 0 = -\dfrac{\theta_0^2}{24}\omega_0^2 + \epsilon(\omega_0^2 - 9\omega^2) & \iff \epsilon \simeq \dfrac{\theta_0^2}{192} \end{cases} \tag{49.7}$$

On peut alors faire plusieurs remarques :

- Déjà, $\epsilon \sim \dfrac{\theta_0^2}{192}$ donc $\theta_0^2\epsilon \sim \dfrac{\theta_0^4}{192}$. C'est un terme d'ordre 4, donc on a bien fait de le négligé dans notre développement à l'ordre 3.
- On retrouve la perte de l'isochronisme des solutions. La période des oscillations est donnée par la **formule de Borda** :

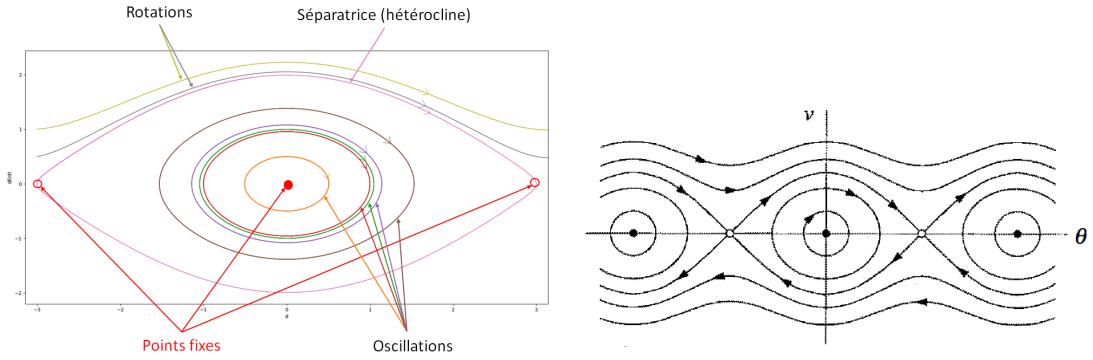
$$\boxed{T = T_0\left(1+\frac{1}{16}\theta_0^2\right)}$$

- On retrouve l'enrichissement spectral.

Cette méthode est intéressante mais on ne peut aller que jusque l'ordre 3. On va donc utiliser un autre outil dont on a déjà parlé : le portrait de phase.

2.3 Portrait de phase et non-linéarités

Dans le cas du pendule simple linéaire, le portait de phase a cette allure



En effet, en notant $x = \theta$ et $y = \dot{\theta}$, on a une équation du type $\dot{y} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x$ qui donne $x^2 + \left(\dfrac{y}{\omega_0^2}\right) = 1$, *i.e.* l'équation d'une ellipse. Sur le portrait de phase, on distingue différents points fixes : des points fixes stables en $x = 2p\pi$ ($p \in \mathbb{N}$) et des points fixes instables en $x = \pi + 2p\pi$. La trajectoire reliant ces points fixes est appelée une **hétérocline**. Elle sépare deux types de trajectoires différentes : les trajectoires à l'extérieur de l'hétérocline correspondent au cas où le pendule est en rotation complète tandis que celles à l'intérieur de l'hétérocline correspondent à celles où le pendule oscille. On remarque que le portrait de phase est 2π-périodique selon l'axe des x.

Cependant, on peut se dire que ce portrait de phase n'est pas valable puisqu'il montre des trajectoires correspondant à des angles grands et donc au cas du pendule non linéaire. On a alors $\dot{y} = \ddot{x} = -\omega_0^2\sin(x)$. Cependant, on s'en sort avec la conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}ml^2y^2 + mgl(1-\cos(x)) \iff \widetilde{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}y^2 - \omega_2^2\cos(x) \iff \boxed{y = \pm 2\sqrt{\widetilde{\mathcal{E}} + \cos(x)}}$$

Les trajectoires de phase ne sont donc pas exactement des ellipses mais elles y ressemblent.

Simulation de portrait de phase

✍ ⏲

```
python3 LP49_pendule_simple_apparition_non_linearite.py
```

Remarque

SI on avait pris en compte la dissipation par frottements, on n'aurait plus des trajectoires fermées mais des spirales.

3 Oscillateur entretenu : Van der Pol

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_de_Van_der_Pol

3.1 Motivation

Essayons de retrouver simplement une équation décrivant un oscillateur entretenu. On peut partir de l'équation de l'oscillateur harmonique, ou de l'oscillateur harmonique amorti. Outre le problème de l'amortissement qui fait tendre l'amplitude des oscillations vers 0, on a un autre problème qui est celui de l'invariance par dilatation : si $x(t)$ est solution d'une telle équation, alors $\alpha x(t)$ avec α réel est aussi solution. C'est une conséquence directe de la linéarité (principe de superposition). Or les oscillations entretenues que l'on veut décrire, comme les battements du coeur, se font à une amplitude bien définie, et on veut que notre nouvelle équation puisse en rendre compte. Mathématiquement, un moyen simple d'y parvenir (proposé par Balthazar Van der Pol) est de faire dépendre le terme d'amortissement de l'amplitude des oscillations. On veut que des petites oscillations soient amplifiées (terme d'amortissement négatif) mais que les grandes soient amorties (terme positif). On peut proposer γ comme frottement de la forme

$$\gamma(x) = -\gamma_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \tag{49.8}$$

Après un changement de variable, on tombe sur VdP :

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{49.9}$$

Ho mon dieu, c'est non linéaire!!

Historiquement, cette équation a été introduite par Van der Pol pour expliquer des oscillations observées dans un tube à vide.

3.2 Mise en équation

✍ MP28

On observe une valeur critique de résistance pour laquelle le coefficient μ change de signe. Le point fixe $(0, 0)$ passe de point fixe stable à instable, et un cycle attracteur apparaît.

Il s'agit d'une bifurcation dite de Hopf!

3.3 Régime quasi-sinusoïdal

VdP commercial

✍ ⏲

p42.5, avec une boite à décade pour R_{NL}.

On trace en x, y et on montre que si la résistance est faible, il ne se passe rien, si la résistance augmente, on a une oscillation quasi sinusoïdale, et si on augmente encore, ça part en cacahouète.

En effet si $\mu \ll 1$ on a un oscillateur dont l'équation est presque celle d'un oscillateur harmonique !

D'un point de vue énergétique, l'élément non linéaire apporte autant d'énergie que n'en consomme le système, ce qui permet d'entretenir l'oscillation.

3.4 Oscillateur à relaxation

Si $\mu \gg 1$, c'est plus la même.

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = -x \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x} + \mu F(x)\right) = -x \quad \text{avec } F(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

On pose $y = \dfrac{\dot{x}}{\mu} + F(x)$, et on a alors

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - F) \\ \dot{y} = -\dfrac{x}{\mu} \end{cases} \tag{49.10}$$

On peut ainsi représenter facilement l'espace des phases en x, y, qui du coup n'est pas exactement l'espace des phases, mais qui donne une bonne conpréhension physique de la chose.

On trace $F(x)$ et on explique pour chaque zone comme ça se passe :

- Si $y > F$, on a $\dot{x} > 0$, et même $|\dot{x}| \ll |\dot{y}|$
- Sinon, on a $\dot{x} < 0$, mais toujours $|\dot{x}| \ll |\dot{y}|$

Ainsi partout où l'on se situe, le système évolue horizontalement hors de la courbe de F, et reste sur F sinon :

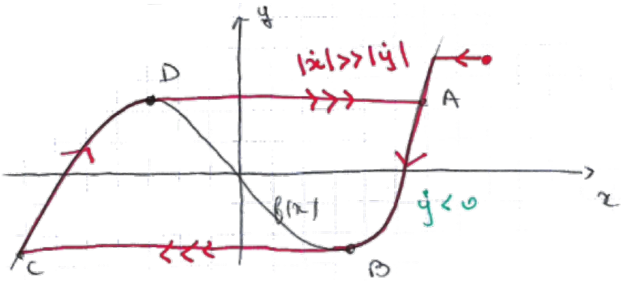


FIGURE 49.1 – Forme des oscillations. On en fait une version prpre un jour ?

On parle d'oscillateur à relaxation car le cycle se réroule comme alternance entre les phases lentes de charges, sur F, et les phases rapides de relaxation, sur les horizontales.

OdG de la période

$$\begin{aligned} T &= T_{AB} + T_{BC} + T_{CD} + T_{DA} \\ &\simeq 2\int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{x_A}^{x_B} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\ \text{or } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= F'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (x^2-1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{x}{\mu} \\ \text{donc } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{x}{\mu}\frac{1}{x^2-1} \end{aligned} \tag{49.11}$$

Finalement on a

$$T = \mu(3-2\ln 2) \simeq \mu \tag{49.12}$$

4 Étudier par le portrait de phase

Nous allons dans cette section nous intéresser à deux systèmes dynamiques assez classiques, mais dont l'intérêt historique est fondamental.

4.1 Oscillateur amorti par des frottement solides

On considère un pavé de masse m, attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est maintenue fixe. Ce solide repose sur le sol, ce qui est à l'origine d'une force de frottement solide entre le solide et le sol. On néglige cependant toute dissipation du type frottements fluides. La position à vide du ressort est prise comme origine des abscisses. On écarte le solide à la position $x_0 > 0$ suffisante pour que la force de rappel du ressort le mette en mouvement malgré le frottement solide (*i.e.* $kx_0 \geq \mu_S mg$). Tant qu'il y a glissement, la norme de la force de frottement solide est donnée par la loi de Coulomb $\left\|\overrightarrow{T}\right\| = \mu_D mg$, et par ailleurs $\overrightarrow{T}$ est de même direction et de sens opposé à la vitesse $\overrightarrow{v}$ du solide. L'application du principe fondamental de la dynamique donne :

$$\ddot{x} + \mu_D g\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + \frac{k}{m}x = 0$$

On voit déjà qu'on a affaire à une équation non linéaire via le terme de frottement, on va donc traiter le problème via les portraits de phases.

Dans la première phase du mouvement, puisque $x_0 > 0$, on a $\dot{x} < 0$ et donc $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = -1$. L'équation devient alors

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x-a) = 0 \qquad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } a = \mu_D\frac{mg}{k}$$

En tenant compte des conditions initiales, la solution de cette équation est

$$\begin{cases} x(t) = a + (x_0 - a)\cos(\omega_0 t) \\ \dot{x}(t) = -\omega_0(x_0 - a)\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Dans un portrait de phase en coordonnées $(x, \dot{x}/\omega_0)$, ceci correspond simplement à un demi-cercle inférieur de centre $(a, 0)$ et de rayon $x_0 - a$. A la fin de cette étape, on est en $x_1 = -x_0 + 2a$ et on a $\dot{x} = 0$.

On entre alors dans la deuxième phase du mouvement, pour laquelle on a deux possibilités. En effet, pour que le ressort puisse repousser le solide, il faut que $k(x_0 - 2a) \geq \mu_S mg$, autrement dit $x_0 \geq a(2 + \mu_S/\mu_D)$. Si cette condition n'est pas vérifiée, le mouvement s'arrête là.
Si cette condition est vérifiée, on a dorénavant $\dot{x} > 0$ et on va donc obtenir un demi-cercle supérieur de centre $(-a, 0)$ et de rayon $x_1 - a$. On procède ainsi de suite jusqu'à invalidation de la condition $|x_n| \geq a\mu_S/\mu_D$.

Remarque

Sur chacune de ces phases du mouvement, l'équation est linéaire (il n'y a donc pas de génération d'harmoniques d'ordres supérieurs).

4.2 Système proie-prédateur

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Équations_de_prédation_de_Lotka-Volterra

Les équations de prédation de Lotka-Volterra, que l'on désigne aussi sous le terme de modèle proie-prédateur, sont un couple d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 19251 et Vito Volterra en 1926

4.2.1 Les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = & x(t)\ (\alpha - \beta y(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = & y(t)\ (\delta x(t) - \gamma) \end{cases} \tag{49.13}$$

où

- t est le temps ;
- $x(t)$ est l'effectif des proies en fonction du temps
- $y(t)$ est l'effectif des prédateurs en fonction du temps
- α, taux de reproduction intrinsèque des proies (constant, indépendant du nombre de prédateurs)
- β, taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés
- δ, taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées
- γ, taux de mortalité intrinsèque des prédateurs (constant, indépendant du nombre de proies)

4.2.2 Interprétation physique

Première équation :
Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire exponentiellement si elles ne sont soumises à aucune prédation ; cette croissance exponentielle est représentée dans l'équation ci-dessus par le terme $\alpha x(t)$. Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies ; il est représenté ci-dessus par $\beta x(t)y(t)$. Si l'un des termes est nul, alors il ne peut y avoir aucune prédation.

Avec ces deux termes, l'équation peut alors être interprétée comme : la variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui leur est appliqué.

Deuxième équation :
Dans cette équation, $\delta x(t)y(t)$ représente la croissance de la population prédatrice. Notons la similarité avec le taux de prédation ; cependant, une constante différente est utilisée car la vitesse à laquelle la population des prédateurs augmente n'est pas nécessairement égale à celle à laquelle il consomme la proie. De plus, $\gamma y(t)$ représente la mort naturelle des prédateurs ; c'est une décroissance exponentielle. L'équation représente donc la variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles.

4.2.3 États d'équilibre

Un état d'équilibre de la population est observé quand aucune des deux populations en présence n'évolue, c'est-à-dire quand les dérivées correspondantes sont nulles, ce qui se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} x(t)(\alpha - \beta y(t)) &= 0 \\ -y(t)(\gamma - \delta x(t)) &= 0 \end{cases}$$

qui a pour solutions :

$$\{y(t) = 0, x(t) = 0\} \quad \text{ou} \quad \left\{y(t) = \frac{\alpha}{\beta}, x(t) = \frac{\gamma}{\delta}\right\}$$

La première solution correspond à une extinction définitive des deux espèces, la seconde à des valeurs dépendant des quatre paramètres pour lesquelles les deux populations restent stables indéfiniment.

4.2.4 Stabilité des points fixes

La stabilité des points fixes peut être déterminée par une linéarisation du système aux dérivées partielles. La matrice jacobienne du système est

$$J(x(t), y(t)) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y(t) & -\beta x(t) \\ \delta y(t) & \delta x(t) - \gamma \end{bmatrix}$$

- Au premier point fixe $(0, 0)$, cette matrice prend la valeur :

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix},$$

qui a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\gamma$$

Ces valeurs propres sont toujours de signes opposés, ce qui montre que ce point fixe est un **point col**. Ce n'est donc **pas un point fixe stable**, ce qui montre en particulier que, suivant ce modèle, l'extinction des deux espèces en jeu est difficile à obtenir.

- En évaluant la matrice jacobienne au second point fixe, la valeur suivante est obtenue :

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\beta\gamma}{\delta} \\ \dfrac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$$

Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.

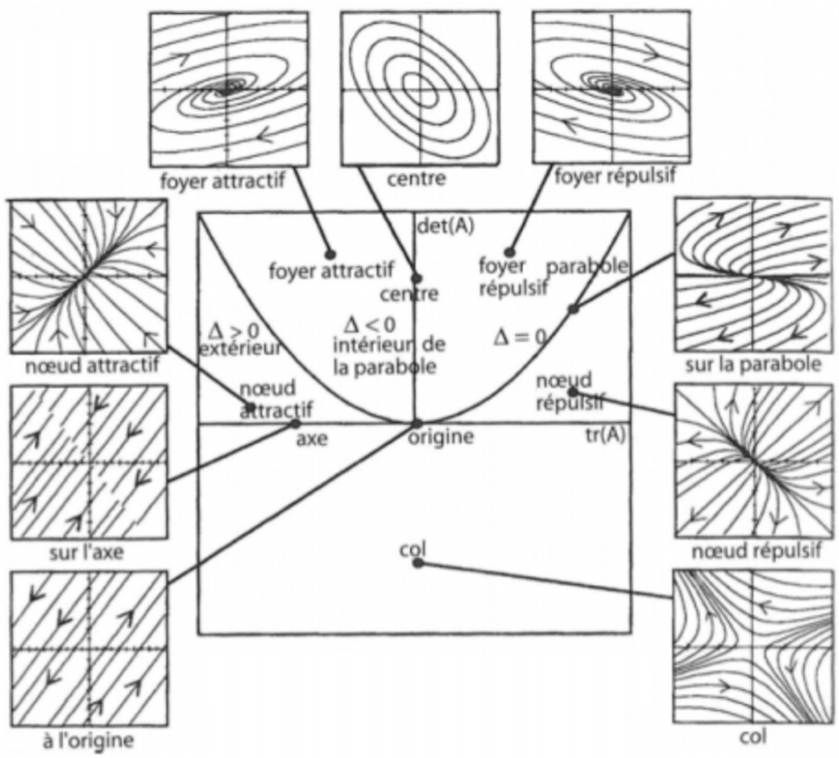
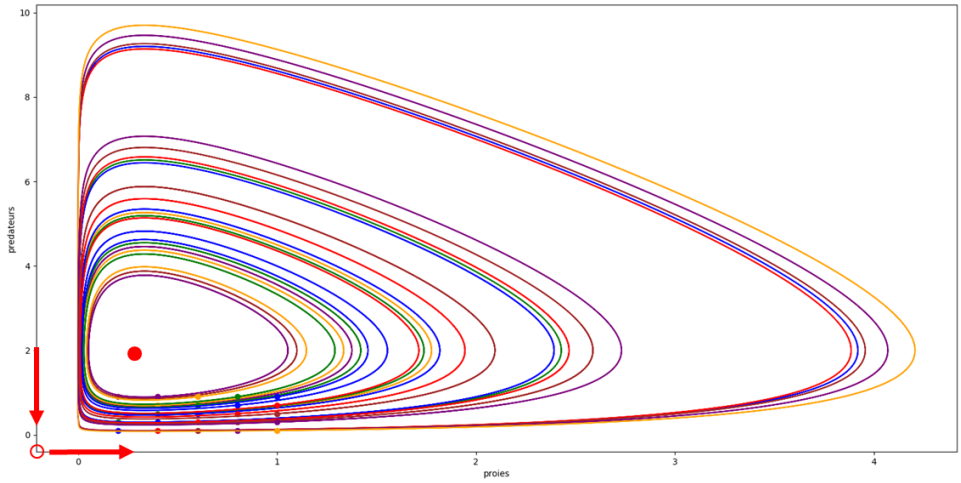


FIGURE 49.2 – Petit rappel sur l'interprétation de la Jacobienne.

4.2.5 Tracé du portrait de phase

À la main, ce que l'on voit, c'est que si le nombre de prédateurs augmente, alors le nombre de proies diminue, et de part la rétroaction de cette diminution, le nombre de prédateurs diminue aussi, et ainsi de suite. Si on devait tracer le portrait de phase à la main, on aurait en fait des sortes de ronds, centrés sur un point fixe !



Les trajectoires sont fermées, et les orbites sont stables ! Il y a une quadrature de phase entre les prédateurs et les proies. Pour avoir des données expérimentales :

✍ https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/irem/proies_predateurs_diaporama.pdf

4.2.6 Méthodes numériques de résolution

Ici, pour résoudre les équations, on a utilisé un algorithme plus poussé que le schéma de résolution d'Euler. Il a fallu en effet utiliser le schéma Runge Kutta 4 [1], qui a une meilleure convergence malgré son coût computationnel plus élevé.

Les codes sont disponibles en annexe.

4.3 La glycolyse

✍ https://febs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1432-1033.1968.tb00175.x

4.3.1 Principe

Il s'agit du processus de brisure du sucre pour sa consommation dans l'organisme. Ce phénomène est la principale source d'énergie du corps humain.

$$\frac{dx}{dt} = -x + ay + x^2 y \tag{49.14}$$

$$\frac{dy}{dt} = b - ay - x^2 y \tag{49.15}$$

On nomme x la concentration en ADP et y la concentration en F6P. Si il n'y a rien dans notre système, la concentration en F6P augmente due au début du cycle de la glycolyse. Ce F6P est alors consommé avec un taux a pour former de x (ADP) et (fructose 1,6 bisphosphate = but de l'étape). Le terme supplémentaire est du à une rétroaction de l'ADP sur sa propre formation, en effet un ADP formé = un ATP utilisé (oui ce cycle consomme de l'ATP à cette étape mais en reproduit plus tard), donc plus il y a d'ADP et plus il faut que le cycle s'accélère et donc on en produit toujours plus, mais cela nécessite la consommation de F6P.

a et b sont des paramètres cinétiques de la réaction, réels strictement positifs.

4.3.2 Construction du portrait de phase

Pour construire le portrait de phase, on utilise l'outil nommé *nullclines*. Ce sont les courbes sur lesquelles la vitesse est purement horizontale ou verticale. Attention, ce ne sont pas des trajectoires de l'espace des phases.

☕

Simulation numérique de la glycolyse

✍ ⏲

`Glycolyse.py`

Cela nous permet ensuite de voir qualitativement comment ce comporte le système.

Remarque : l'intersection des nullclines nous donne les points fixes, ici il y en a un, en $(b, \frac{b}{a+b^2})$. On peut montrer qu'il est stable pour certaines valeurs du couple (a,b) (✍ Strogatz).COn peut évidemment aussi le faire à l'ordinateur.

Interêt d'avoir tracé le portrait de phase : Dans les cas où le point est instable, on peut définir une région fermée de l'espace sans point fixe, avec un flux rentrant partout sur la surface d'un champ de vecteur partout

1. En l'occurrence on a utilisé une variante qui donne une meilleure vitesse de calcul, mais fondamentalement, ça fait la même chose.

différentiable. On peut alors appliquer le théorème de Poincaré-Bendixon qui affirme qu'il existe un cycle limite dans cet intervalle. Ce type de solution 'fixe' est particulier aux systèmes de dimension supérieure ou égale à 2. Quelque soit la condition initiales, la trajectoire finit sur le cycle limite. On a alors un oscillateur qui parcourt le cycle. Ce cycle est en général difficile à expliciter mais c'est possible dans certains cas (On peut parler du Van der Pol). Cependant, lorsque le point fixe est stable, on n'a a priori pas de cycle limite et seulement une convergence vers un point fixe. (en fait, on a une spirale stable si on calcule le Jacobien [2]). Ce changement de comportement (de point fixe stable à instable avec cycle limite stable) est ce qu'on appelle une bifurcation (de Hopf).

> *Dans le cas de la glycolyse, on a mise en évidence une caractéristique de la non linéarité : le phénomène de bifurcation. Dans le cas de la glycolyse, c'est une bifurcation de Hopf. Les bifurcations sont très communes dans les problèmes qui présentent des symétries.*

↓

5 Introduction aux bifurcations

✍ Sanz

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_des_bifurcations

✍ https://www.emse.fr/~bonnefoy/Public/SD-EMSE.pdf, p. 12

Il peut être intéressant de présenter le pendule à double puits, qui est détaillé dans le montage ✍ MP28. Une simulation python, `doublepuits.py`, accompagne cette démonstration.

Conclusion

Une première approche des systèmes dynamiques, qui mérite tout à fait sa petite leçon à part entière. Il est cependant bon de noter que là, on a gratté que la surface du problème, parce que les systèmes dynamiques et autres joyeusetés non linéaires et chaotiques, c'est généralement un cours de L3 d'un semestre entier (généralement fait par Thierry Dauxois quand il est pas trop occupé par son poste de Vice-président recherche).

2. Calcul fait dans le Strogatz

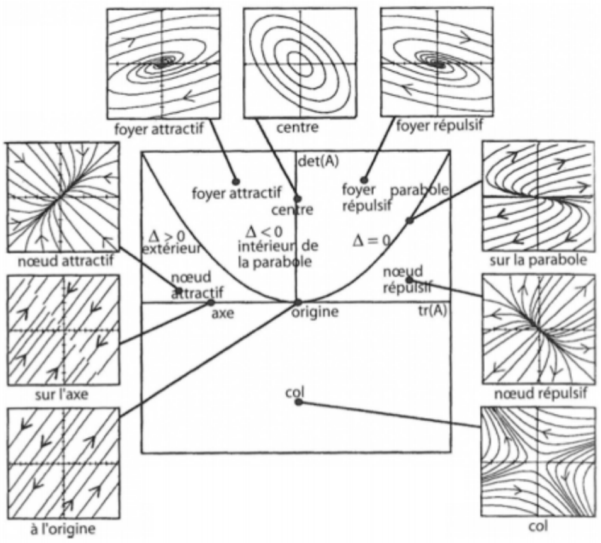
6 Annexe : remarques sur les systèmes non linéaires

Généralités, types de bifurcation

On considère un système décrit par une variable x et une équation différentielle d'ordre 2. En posant $y = \dot{x}$, on peut décrire le système de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{J}$ la matrice jacobienne du système. Pour chaque point fixe du système, le calcul de la trace τ et du déterminant Δ de la jacobienne évalués en ce point fixe permettent de prédire à quel type de point fixe on a affaire.



Ainsi, les termes de non linéarités peuvent changer la nature du point fixe et sa stabilité quand on est sur les axes ou sur la courbe $\tau^2 - 4\Delta = 0$. Ce changement de comportement des points fixes selon un changement de paramètres extérieurs entraîne des **bifurcations**. On a par exemple

- la bifurcation **noeud-col** : $\dot{x} = r - x^2$

  Si $r < 0$, il n'y a pas de point fixe.
  Si $r > 0$, on a 2 points fixes : $x^* = +\sqrt{r}$, qui est stable, et $x^* = -\sqrt{r}$, qui est instable.

- la bifurcation **transcritique** : $\dot{x} = rx - x^2$

  Les points fixe sont $x^* = 0$, qui est stable pour $r < 0$ et instable pour $r > 0$, ainsi que $x^* = r$, qui est instable pour $r < 0$ et stable pour $r > 0$.

  Cette bifurcation décrit par exemple l'effet laser ou la naissance des oscillations dans l'oscillateur à pont de Wien.

- la bifurcation **fourche** : $\dot{x} = rx - x^3$

  Si $r < 0$, le seul point fixe est $x^* = 0$, qui est stable.
  Si $r > 0$, on a 3 points fixes : on a toujours $x^* = 0$ mais qui devient instable auquel on ajoute les deux points $x^* = \pm\sqrt{r}$ qui sont tous les deux stables.

  Cette bifurcation décrit par exemple la transition ferro/para.

- la **bifurcation de Hopf** : le système admet des solutions complexes dont la partie réelle change de signe. Par exemple, pour la bifurcation fourche supercritique, on passe d'un cycle stable à un cycle instable. Il existe également une bifurcation fourche sous-critique.

  La bifurcation fourche supercritique modélise l'arrachement des ailes d'avion.

Méthode des échelles multiples

On réalise un développement perturbatif à toutes les échelles du système en posant

$$x(t,\epsilon) = x_0(\tau,T) + \epsilon x_1(\tau,T) + \epsilon^2 x_2(\tau,T) + \cdots$$

On injecte cette solution dans l'équation différentielle et on trouve les solutions ordre par ordre en prenant soin de supprimer les termes résonnants pour éviter une divergence.

Théorème de Poincaré-Bendixson

Ce théorème donne l'existence d'un cycle limite. En gros, il dit que puisqu'il ne peut y avoir d'intersection dans un portrait de phase, un point à l'intérieur d'une zone délimitée par une trajectoire circulaire ne peut pas sortir de cette zone : on a donc un cycle limite.

Le point en question peut décrire une trajectoire de tendant pas vers le cycle limite (oscillateur harmonique par exemple), ou bien il peut décrire une spirale se rapprochant ou s'éloignant du cycle limite.

Réaction chimique de Belousov-Zhabotinski

C'est une réaction chimique caractérisée par des oscillations auto-entretenues de façon analogue à l'oscillateur de Van der Pol.

Notion de chaos

Pour un système déterministe, un comportement chaotique est un comportement apériodique aux temps longs qui met en évidence une forte sensibilité aux conditions initiales. On parle alors d'*attracteur étrange* lorsqu'un attracteur dépend des conditions initiales.

Exposants de Lyapunov

La divergence de la trajectoire entre 2 conditions initiales proches se fait en e^{λ} où λ est un coefficient de Lyapunov.

Autres remarques

- Pour un soliton, la partie non linéaire compense la dissipation.
- Un exemple d'oscillateur anharmonique est l'oscillateur de Morse qui modélise la liaison chimique (potentiel de Morse).
- En mécanique, la présence de trajectoires fermées indique la conservation du vecteur de Runge-Lenz.
- Un exemple de système toujours instable est le système décrit par $\dot{x} = \sin^2 x$
- Pour avoir un comportement chaotique, il faut forcément avoir un ordre 2 puisque l'ordre 1 ne donne qu'un point fixe ou un cycle limite (d'après Poincaré-Bendixson)
- Exemples d'équations non linéaires :
  - équation de Schrödinger non linéaire qui donne lieu à l'effet Kerr
  - équation de sine-Gordon
  - l'équation de Duffing $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$ (oscillateur non linéaire)

LPX A

Électrocinétique

Niveau : L2 (PCSI-MP)

Bibliographie

- ✍ *Electrocinétique* **H-Prépa**
- ✍ *Souvenirs du temps jadis*

Prérequis

- ➢ Base d'électricité
- ➢ Notation complexe
- ➢ Lois des mailles et des noeuds
- ➢ Régime sinusoïdal forcé

Expériences

- Tracé d'un Bode
- Atténuation
- Débruiter un signal

1 Impédance complexe . . . 688
1.1 Définition générale . . . 688
1.2 Impédance équivalente . . . 688
2 Rappels . . . 689
2.1 Lois de Kirschoff . . . 689
2.2 Ponts diviseurs . . . 690
2.3 Théorème de Millman . . . 691
3 Fonction de transfert . . . 692
3.1 Définition . . . 692
3.2 RC série . . . 692
3.3 RLC série . . . 693
3.4 Remonter à l'équation différentielle . . . 693
4 Filtrage . . . 693
4.1 Effet d'une fonction de transfert sur un sinus . . . 693
4.2 Notion de filtrage . . . 694
4.3 Diagramme de Bode . . . 694
4.4 Utilisation dans la vraie vie . . . 694

Introduction

L'électrocinétique, au delà de développer un cadre mathématique universellement intéressant, a des applications directes en électronique et en physique. Cette leçon a pour but de remettre le formalisme en contexte et de l'appliquer aux premiers exemples de filtrage linéaire.

1 Impédance complexe

L'impédance est la première notion à définir lorsque l'on parle d'électrocinétique. "C Kwa ?" demanda le petit Timéo de ses grands morts du fond de la classe.

Au cours de toute cette section, on se place en convention récepteur (**image**), et on nomme u la tension aux bornes des dipôles considérés et i l'intensité les traversant.

1.1 Définition générale

Un dipôle linéaire est caractérisé par le lien qui unit la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse. Pour une résistance, on nomme ce lien la... La résistance, oui, bravo Timéo. Le lien s'exprime sous la forme :

$$u = Ri \tag{A.1}$$

Or on a vu (prérequis) que les équations qui régissent un condensateur ou une bobine parfaites (une capacité et une inductence) sont des équations différentielles.

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i_c}{\mathrm{d}t} \tag{A.2}$$

Si on se place en régime sinusoïdal forcé, ces équations deviennent, en notation complexe :

$$\underline{i_c} = jC\omega\underline{u_C} \qquad \underline{u_L} = jL\omega\underline{i_L} \tag{A.3}$$

On peut alors simplifier le lien qui unit tension et intensité :

$$\underline{u_c} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i_C} \qquad \underline{u_L} = jL\omega\underline{i_L} \tag{A.4}$$

Par analogie avec la résistance, on définit des résistance complexes, des *impédences*. On les notes traditionnellement $\underline{Z}$.

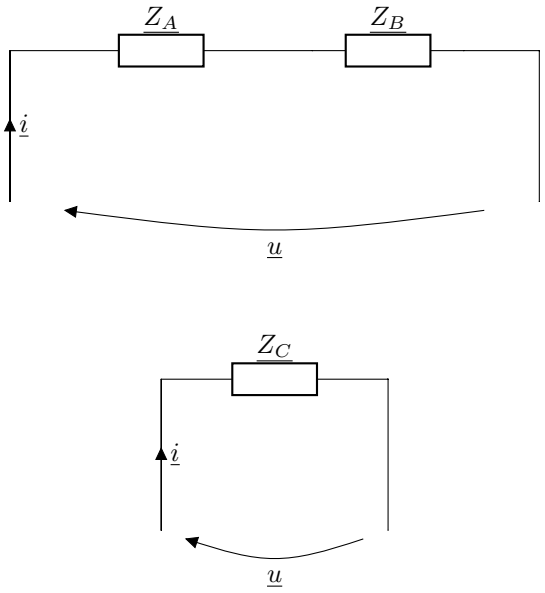
$$\underline{Z_R} = R \qquad \underline{Z_L} = jL\omega \qquad \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} \tag{A.5}$$

1.2 Impédance équivalente

Ces impédances obéissent aux mêmes lois que les résistances, puisque ce ne sont rien d'autres que des résistances complexes. Nous allons rapidement redémontrer les lois d'équivalences.

1.2.1 Série

Supposons que l'on a 2 dipôles en série, d'impédances $\underline{Z_A}$ et $\underline{Z_B}$. Alors on a le schéma suivant



On peut écrire

$$\underline{i_A} = \underline{i_B} = \underline{i_C} \qquad \underline{u_A} + \underline{u_B} = \underline{u_C} \tag{A.6}$$

Or on a $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, d'où

$$\underline{u_C} = (\underline{Z_A} + \underline{Z_B})\underline{i_C} \tag{A.7}$$

On retrouve la loi qu'en série, les Impédances s'additionnent.

1.2.2 Parallèle

Même chose en parallèle, on trouve immédiatement :

$$\underline{Z_C} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z_A}} + \frac{1}{\underline{Z_B}}} \tag{A.8}$$

Les lois usuelles sont donc alors toutes valides, mais en complexe !

2 Rappels

2.1 Lois de Kirschoff

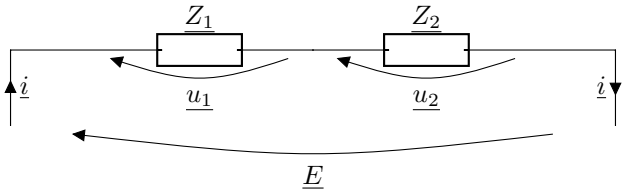
Les lois de Kirschoff sont toujours valides en notation complexes. Ainsi, les 2 lois suivantes sont toujours respectées :

- **Loi des noeuds :** la charge électrique ne peut pas s'accumuler aux noeuds d'un circuit (conséquence de l'ARQS). Ainsi, **la somme des courants arrivant sur un noeud est égale à la somme des courants qui en repartent** :
$$\sum_k \epsilon_k \underline{i}_k = 0 \tag{A.9}$$
où ϵ_k vaut 1 si le courant arrive sur le noeud et -1 si le courant en repart.

- **Loi des mailles :** les tensions sont additives, si bien que $\underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC} = \underline{u}_{AC}$. Pour une maille composée de n dipôles, on a donc $\underline{u}_{A_1A_2} + \cdots + \underline{u}_{A_nA_{n+1}} + \underline{u}_{A_{n+1}A_1} = \underline{u}_{A_1A_1} = 0$. Ainsi, **la somme des tensions (orientées dans le même sens) le long d'une maille orientée est nulle** :
$$\sum_k \epsilon_k \underline{u}_k = 0 \tag{A.10}$$
où ϵ_k vaut 1 si la tension est orientée dans le sens de la maille et -1 sinon.

2.2 Ponts diviseurs

2.2.1 Pont diviseur de tension

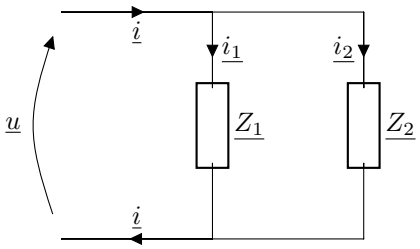


On veut calculer la tension $\underline{u_1}$ aux bornes du dipôle d'impédance $\underline{Z_1}$ en connaissant la tension $\underline{E}$ aux bornes de deux dipôles en série. Pour cela, on écrit la loi des mailles :
$$\underline{E} = \underline{u_1} + \underline{u_2} \tag{A.11}$$
On veut ensuite éliminer $\underline{u_2}$. Pour cela, on utilise deux fois la définition de l'impédance :
$$\underline{u_2} = \underline{Z_2}\underline{i} = \underline{Z_2}\frac{\underline{u_1}}{\underline{Z_1}} \tag{A.12}$$
On obtient donc
$$\underline{E} = \underline{u_1} + \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}\underline{u_1} \tag{A.13}$$
Finalement, on peut écrire la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{u_1} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{E} \tag{A.14}$$

Ainsi, on utilisant des impédances équivalents, on peut se ramener au schéma électrique ci-dessus et donc appliquer cette formule. Il faut cependant faire attention à ne pas avoir de branche connectée avant ou après les dipôles.

2.2.2 Pont diviseur de courant



On veut calculer l'intensité $\underline{i_1}$ traversant le dipôle d'impédance $\underline{Z_1}$ en connaissant l'intensité $\underline{i}$ qui sera répartie entre les dipôles en parallèle. Pour cela, on utilise la loi des noeuds :

$$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} \tag{A.15}$$

On veut ensuite éliminer $\underline{i_2}$. Pour cela, on utilise deux fois la définition de l'impédance :

$$\underline{i_2} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_2}} = \frac{\underline{Z_1 u}}{\underline{Z_2}} \tag{A.16}$$

On obtient donc

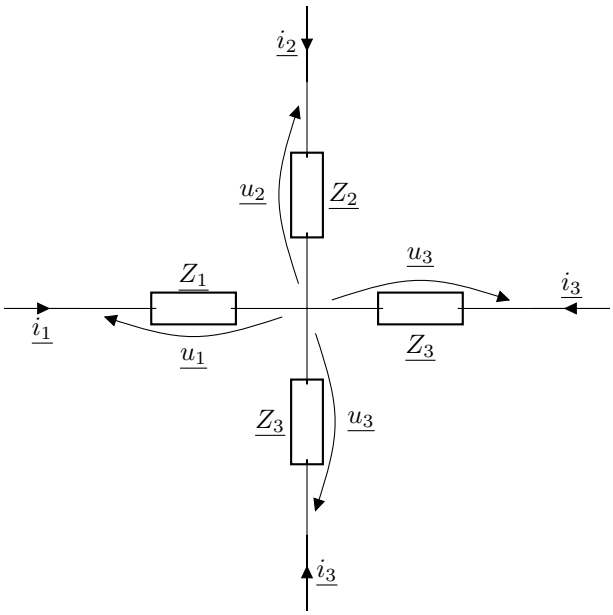
$$\underline{i} = \underline{i_1} + \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\underline{i_1} \tag{A.17}$$

Finalement, on peut écrire la formule du pont diviseur de courant :

$$\underline{i_1} = \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}\underline{i} \tag{A.18}$$

Ainsi, on utilisant des impédances équivalents, on peut se ramener au schéma électrique ci-dessus et donc appliquer cette formule. Il faut cependant faire attention à ne pas avoir de branche connectée avant ou après les dipôles.

2.3 Théorème de Millman



Prenons un noeud sur lequel sont branchés 4 dipôles d'impédance $\underline{Z_k}$. Notons $\underline{V_{\text{noeud}}}$ le potentiel du noeud et $\underline{V_k}$ le potentiel au bout de la branche k. La tension aux bornes du dipôle de la branche k est $\underline{u_k} = \underline{V_k} - \underline{V_{\text{noeud}}}$ Chaque branche est k est parcourue par une intensité $\underline{i_k}$.

On applique la loi des noeuds :

$$\sum_k \underline{i_k} = 0$$

Ici, on a orienté l'intensité vers le noeud pour chaque branche, ce qui n'a aucun sens physique, mais cela importe peu car les signes dû à l'orientation de $\underline{i_k}$ se compensent avec les signes dûs à la convention récepteur/générateur prise à chaque dipôle, si bien que mathématiquement on peut choisir tous les $\underline{i_k}$ allant vers le noeud.

Par définition de l'impédance, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{\underline{u_k}}{\underline{Z_k}} &= 0\\ \sum_k \frac{\underline{V_k} - \underline{V_{\text{noeud}}}}{\underline{Z_k}} &= 0\\ \sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} &= \sum_k \frac{\underline{V_{\text{noeud}}}}{\underline{Z_k}}\\ \sum_k \frac{\underline{V_k}}{\underline{Z_k}} &= \underline{V_{\text{noeud}}} \sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}}\end{aligned} \tag{A.19}$$

Finalement, en notant $\underline{G_k} = \frac{1}{\underline{Z_k}}$ la conductance complexe du dipôle k, on obtient le théorème de Millman :

$$\underline{V_{\text{noeud}}} = \frac{\sum_k \underline{G_k}\underline{V_k}}{\sum_k \underline{G_k}} \tag{A.20}$$

3 Fonction de transfert

Grâce à ces théorèmes, on peut définir une impédance équivalente pour des circuits très complexes, d'ordre 1 ou deux (donc différentiels). La notion d'impédance laisse alors place à celle de fonction de transfert.

3.1 Définition

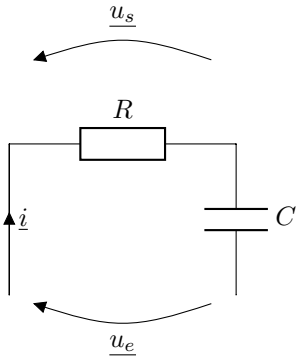
En toute généralité une fonction de transfert est le rapport entre une quantité considérée comme la sortie d'un système et une quantité considérée comme l'entrée. On la note $\underline{H}$, et si on nomme l'entrée $\underline{e}$ et la sortie $\underline{s}$ on a :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \tag{A.21}$$

L'impédance d'un dipôle n'est alors qu'un cas particulier de fonction de transfert ou l'entrée et la sortie sont respectivement le courant et la tension aux bornes du dipôle.

On peut alors définir des fonctions de transfert pour des circuits électrique. Supposons que l'on impose une tension complexe aux bornes d'un circuit RC série, on peut définir comme entrée cette tension, et comme sortie la tensio aux bornes de la résistance.

3.2 RC série



Alors un pont diviseur de tension donne directement

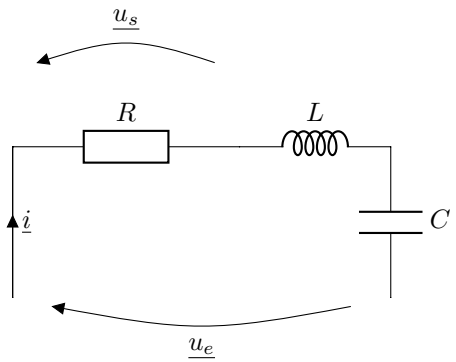
$$\underline{u_s} = \frac{R}{R + \underline{Z_C}} \underline{u_e} \tag{A.22}$$

Soit encore en remplaçant l'impédance du condensateur :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \tag{A.23}$$

3.3 RLC série

Pour un circuit RLC série ce n'est pas beaucoup plus vache, on fait les calculs en live au tableau et on est content.



$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \tag{A.24}$$

3.4 Remonter à l'équation différentielle

Ça on l'a vu, mais on va le refaire un peu :

$$\underline{s} = \underline{He} \Rightarrow RC\dot{u}_e = u_s + RC\dot{u}_s + LC\ddot{u}_s \tag{A.25}$$

Et on va pas se mentir, la formulation en impédance elle est vachement plus facile.

4 Filtrage

Cette notion de fonction de transfert va nous permettre de faire ce que l'on appelle du filtrage.

4.1 Effet d'une fonction de transfert sur un sinus

Si on prend un signal sinusoïdal en entrée d'une fonction de transfert, celle-ci étant, à ω fixé, un simple nombre complexe, on peut écrire que u_s sera simplement la multiplication par un nombre complexe de u_e. Ainsi on définit le gain et la phase de H comme le module et la phase de ce nombre.

(Montrer des exemples de courbe de gain)

Courbes de gain :

On met un sinus à des fréquences différentes en entrée d'un filtre RLC série avec résonance, et on trace le diagramme de bode (mais on l'appelle pas comme ça pour le moment).

4.2 Notion de filtrage

Lorsque l'on étudie un signal, on peut le décomposer comme une somme de signal sinusoïdaux de pulsations fixées. Un signal carré par exemple est une superposition infinie de signaux sinus :

$$x_{\text{carré}}(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)2\pi f t\right)}{(2k+1)} \tag{A.26}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(2\pi f t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi f t) + \frac{1}{5}\sin(10\pi f t) + \cdots\right). \tag{A.27}$$

On peut s'amuser à calculer ce qu'il arrive à un créneau dans un RC série !

Entendre le filtrage

On met un créneau en entrée d'un RC série amplifié. On branche sur un HP, et on visualise en même temps.

On voit que le signal est déformé, parce que chacun de ses cosinus est affecté différement par le système. (Faire le calcul du gain)

Quand $\omega < \omega_0$, on est pas affecté. Si $\omega > \omega_0$, le signal est atténué. On dit que l'on effectue un *filtrage passe-bas*.

4.3 Diagramme de Bode

Si on a le temps.

C'est le gain en dB et la phase, en fonction de $\log(\omega)$.

Une représentation pratique, qui montre tout de suite l'effet du filtre.

faire un dessin d'un passe bas et des harmoniques du carré.

4.4 Utilisation dans la vraie vie

nettoyer un signal bruité

On prend un signal que l'on bruite et que l'on écoute au HP. On passe dans un passe bas d'ordre 2 avec Q=1 et pouf !

LPX B

Élasticité et déformations

Niveau : L2

Bibliographie

- ✍ *Theory of elasticity*, **Landau** ⟶
- ✍ *The Feynman lectures on physics 2, mainly electromagnetism and matter*, **Feynman, Leyton, Sands** ⟶ À partir du chap 38
- ✍ `https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_à_l'élasticité` ⟶ Wikipédia sauve encore la mise !
- ✍ `https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Hooke` ⟶ Exemples
- ✍ `clement.de-la-salle` ⟶ On les aimes nos cléments <3
- ✍ *Introduction to seismology*, **Stein** ⟶ Réflexion/transmission ondes élastiques

Prérequis

- ➢ Mécanique du point
- ➢ Mécanique des fluides

1 Loi fondamentale : loi de Hooke . . . 696
1.1 Noter la déformation . . . 696
1.2 Loi empirique de Hooke . . . 696
1.3 Cisaillement . . . 697
2 Formalisme tensoriel . . . 698
2.1 Tenseur des déformations . . . 698
2.2 La vraie loi de Hooke . . . 699
3 Ondes élastiques . . . 699
3.1 Mise en équation . . . 699
3.2 Apparition des ondes . . . 700
3.3 Réflexion et transmission d'ondes élastiques . . . 701
3.4 Expérience : le dural . . . 702
4 Exemples . . . 702
4.1 Solide sous pression homogène : compressibilité . . . 702
4.2 Cas général du ressort . . . 703

Introduction

L'étude que nous allons faire est, comme dans le cas du ressort, celle des petites déformations. En effet si on prend un ressort, ou une poutre, et qu'on la tord au delà de son domaine de réversibilité, elle se détruit, on parle d'élasticité entropique.

On se concentre ici sur l'élasticité linéaire, celle qui est réversible, et qui se fait aux faibles déformations. Les milieux que l'on considère sont homogènes et isotropes, ce qui signifie qu'à l'échelle d'un cristal (par éxemple métallique), on se place au delà de la longueur de cohérence de la maille.

1 Loi fondamentale : loi de Hooke

1.1 Noter la déformation

On doit définir les grandeurs que l'on étudie. Si on prend un parallélépipède et qu'on exerce une force $\overrightarrow{F}$ sur deux de ses surfaces opposées S , par exemple une compression par une presse hydraulique, on applique une contrainte. Cette contrainte est une pression, c'est à dire une..? Force surfacique ! Oui Timéo, bravo !

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ est la contrainte subie par le matériaux.} \tag{B.1}$$

On observe alors une déformation, c'est à dire un changement relatif de longueur.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} \text{ est la déformation du matériaux.} \tag{B.2}$$

Maintenant on veut une loi pour relier ces deux valeurs, de la même manière qu'on a une loi pour les ressort qui relient leur élongation à la force exercée.

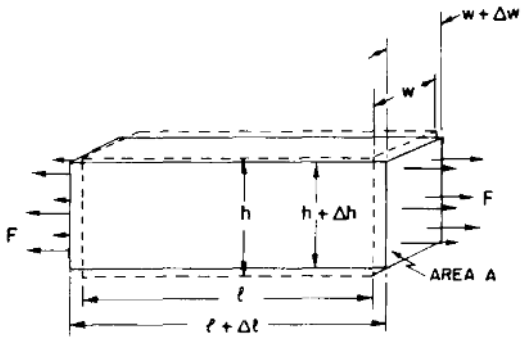


FIGURE B.1 – Schématisation de la situation.

1.2 Loi empirique de Hooke

On suppose que l'on applique une contrainte σ_x sur la direction x, et on veut la relier aux déformation ε_i sur chaque direction $\{x_i\} = \{x, y, z\}$.

Loi **Empirique** de Hooke :

$$\begin{cases} \sigma_x = E\varepsilon_x & \text{avec } E \text{ le } \textbf{module d'Young} \text{ du matériaux.} \\ \varepsilon_{y,z} = -\nu\varepsilon_x & \text{avec } \nu \text{ le } \textbf{coefficient de Poisson} \text{ du matériaux.} \end{cases} \tag{B.3}$$

On remarque que cette loi est **linéaire**, on pourra donc appliquer le théorème de superposition, et on ne va pas s'en priver !

Le module d'Young E est proportionnel à une pression, et il est dans le cas des solides de l'ordre de quelques GPa. On verra plus tard que la vitesse du son dans un matériaux est en $\sqrt{E/\rho}$.

Pour ce qui est du coefficient de Poisson, on s'attend instinctivement à ce qu'il soit positif, parce que quand on compresse dans une direction, on dilate dans l'autre. Cependant il exite des matériaux, dit *métamatériaux*, qui ont un $\nu < 0$. En général, $-1 \leq \nu \leq 1/2$. Le cas limite à $\nu = 1/2$ correspond aux matériaux incompressibles.

Exemple : section 4.1, on traite le cas de la pression uniforme.

1.3 Cisaillement

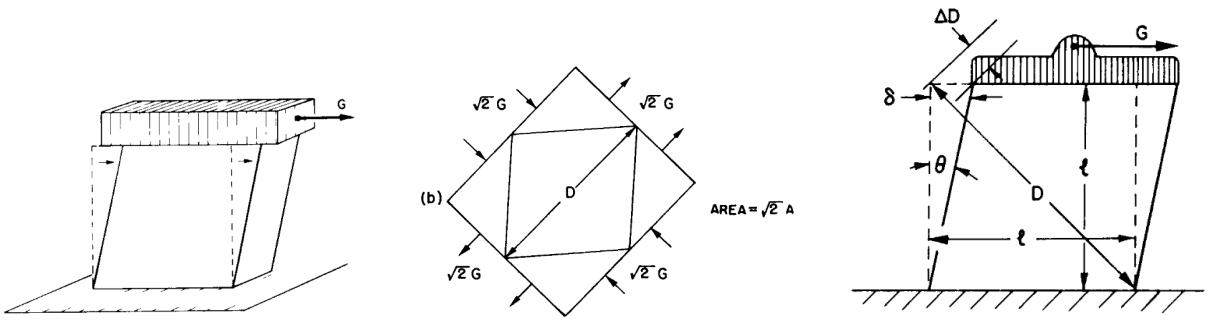


FIGURE B.2 – Un cube sous cisaillement uniforme.

On considère maintenant une force $\overrightarrow{F}$ cisaillante, qui fait faire un angle θ à l'arrête du cube. Si on regarde d'un point de vue géométrique cela revient à appliquer une force de compression $\sqrt{2}F$ sur une diagonale et $-\sqrt{2}F$ sur l'autre. On pose alors x' et y' les nouveaux axes, pris sur les diagonales, et on a alors :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\sqrt{2}F}{ES'} \tag{B.4}$$

Ainsi un petit théorème de superposition sur les deux effets considérés plus haut donne :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\sqrt{2}F}{S'} = \frac{\Delta D}{D} \quad \text{où } D \text{ est la diagonale} \tag{B.5}$$

Or un peu de géométrie au premier ordre donne que $\theta = 2\dfrac{\Delta D}{D}$, et finalement avec $S' = \sqrt{2}S$ on obtient :

$$\frac{F}{S} = \frac{E}{2(1+\nu)}\theta = G\theta \tag{B.6}$$

On nomme $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ le module de cisaillement du matériaux. On le nomme aussi deuxième coefficient de Lamé, μ.

2 Formalisme tensoriel

Dans la vérité vraie des choses véritables, on utilise des outils puissants et efficaces[1], le tenseur des contrainte et le tenseur des déformations. Ces deux tenseurs sont des matrices qui permettent de limiter le calcul.

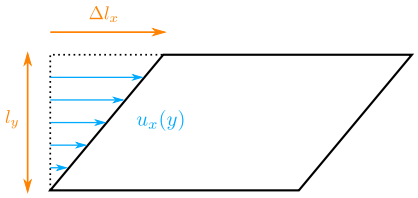
2.1 Tenseur des déformations

Considérons un point quelconque du solide, repéré par sa position $\overrightarrow{r}$ et regardons son déplacement sous l'effet d'une déformation longitudinale homogène. La nouvelle position de ce point après le déplacement est notée $\overrightarrow{r}'$.

On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r}' - \overrightarrow{r}$ le vecteur déplacement du point. On a alors, si la déformation est simplement un étirement uniforme dans la direction x, c'est à dire si on se place à échelle suffisament petite pour considérer qu'elle l'est :

$$u_x = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_x} x = \varepsilon_{xx} x \tag{B.7}$$

Ainsi $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$. Dans les autres directions, on a le même résultat (*i.e.* $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial u_y}{\partial y}$ et $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}$), mais il faut aussi ajouter les cisaillements !

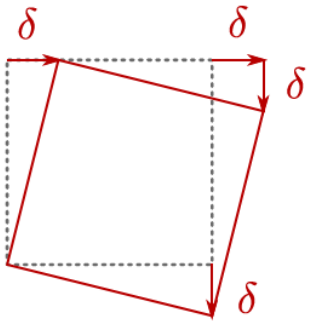


Pour un cisaillement uniforme on a

$$u_x = \frac{\Delta \ell_x}{\ell_y} y = \varepsilon_{xy} y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{B.8}$$

Remarque

On peut être tenté d'écrire directement $\varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$ par analogie avec ce qu'on vient de faire. Cependant, cette formule n'est en réalité pas la bonne : par exemple une rotation (*i.e.* la superposition d'un petit cisaillement $\Delta \ell_x = +\delta$ et d'un autre petit cisaillement $\Delta \ell_y = -\delta$) n'induit pas de déformation mais pourtant on aurait $\varepsilon_{xy} \neq 0$ avec cette formule.



Ainsi, en prenant l'expression générale proposée au dessus, cohérente avec celle de ε_{ii}, on obtient l'expression du **tenseur des déformations** :

1. *"Propres"*, comme dirait Dirty Gadget.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{B.9}$$

Notons d'ailleurs que ce tenseur est symétrique.

2.2 La vraie loi de Hooke

On a alors en tenseurs :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{\bar{C}}}}\,\bar{\bar{\varepsilon}} \quad i.e. \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{B.10}$$

Nous nous proposons de ne pas détailler le calcul des coefficients C_{ijkl}, cependant ils sont très liés, et il est possible de retrouver avec beaucoup de travail :

Loi de Hooke tensorielle

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \dfrac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ll}\delta_{ij}\right) \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\sigma_{ll}\delta_{ij} \end{cases} \tag{B.11}$$

3 Ondes élastiques

✍ Feynmann chap 39

Pour l'instant, on s'est intéressé au solide élastique en équilibre pour lequel les contraintes internes s'ajustent pour obtenir un état d'énergie minimale. Cependant, on va maintenant regarder le cas où ces forces internes ne sont pas à l'équilibre.

3.1 Mise en équation

Pour cela, on considère un volume V de matériau qui est délimité par une surface A. Si ce volume est à l'équilibre, alors la force $\overrightarrow{F}$ totale qui est exercée sur ce volume est nulle. Cette force peut être décomposée en deux parties :

- une force totale extérieure $\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \iiint_V \overrightarrow{f_{\text{ext}}} \mathrm{d}V$ qui s'exerce sur le volume (par exemple la gravité)
- une force totale intérieure $\overrightarrow{F_{\text{int}}}$ qui s'exerce sur la surface A du volume par la matière voisine

À l'équilibre, ces forces se compensent. Cependant, hors équilibre (par exemple si le volume bouge), le PFD donne

$$\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \overrightarrow{F_{\text{int}}} = \iiint_V \rho \ddot{\overrightarrow{r}} \mathrm{d}V \tag{B.12}$$

On obtient alors que

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = -\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \iiint_V \rho \ddot{\overrightarrow{r}} \mathrm{d}V = \iiint_V \left(\rho \ddot{\overrightarrow{r}} - \overrightarrow{f_{\text{ext}}}\right) \mathrm{d}V = \iiint_V \overrightarrow{f} \mathrm{d}V \tag{B.13}$$

La force volumique $\overrightarrow{f}$ peut être reliée aux contraintes subies par le volume via la loi de Hooke tensorielle :

$$\overrightarrow{f} = \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}$$

On peut donc écrire la résultante des forces internes comme

$$\overrightarrow{F_{\text{int}}} = \iiint_V \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}} \mathrm{d}V = \oiint_A \bar{\bar{\sigma}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{B.14}$$

et on a également

$$\rho \ddot{\overrightarrow{r}} - \overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \text{div } \overline{\overline{\sigma}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in \{x,y,z\},\ \rho \ddot{r}_i = \partial_k \sigma_{ki} + f_i^{\text{ext}} \tag{B.15}$$

Remarque

Si on considère un volume immobile (ou on translation rectiligne uniforme), on obtient

$$\text{div } \overline{\overline{\sigma}} + \overrightarrow{f_{\text{ext}}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i \in \{x,y,z\},\ \partial_k \sigma_{ki} + f_i^{\text{ext}} = 0 \tag{B.16}$$

Tâchons maintenant de calculer $\partial_k \sigma_{ki}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ki} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ll}\delta_{ki}\right) \\ \Rightarrow \partial_k \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\partial_k \varepsilon_{ki} + \frac{\nu}{1-2\nu}\partial_i \varepsilon_{ll}\right) \end{aligned} \tag{B.17}$$

On sait cependant que les composantes du tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ s'expriment en fonction du vecteur déformation $\overrightarrow{u}$ par l'expression

$$\varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\partial_k u_i + \partial_i u_k\right) \tag{B.18}$$

On a donc

$$\begin{cases} \partial_k \varepsilon_{ki} = \dfrac{1}{2}\left[\partial_k \partial_k u_i + \partial_i(\partial_k u_k)\right] \\ \partial_i \varepsilon_{ll} = \partial_i \partial_l u_l \end{cases} \tag{B.19}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \partial_k \sigma_{ki} &= \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left[\partial_k \partial_k u_i + \partial_i(\partial_k u_k)\right] + \frac{\nu}{1-2\nu}\partial_i \partial_l u_l\right] \\ &= \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\right)\partial_i(\partial_k u_k) + \frac{E}{1+\nu}\frac{1}{2}\partial_k \partial_k u_i \end{aligned} \tag{B.20}$$

En notation vectorielle, cette équation équivaut à

$$\text{div } \overline{\overline{\sigma}} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta \overrightarrow{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div } \overrightarrow{u}) \tag{B.21}$$

On peut alors réécrire le PFD en notant que $\ddot{\overrightarrow{r}} = \ddot{\overrightarrow{u}}$ et en prenant $\overrightarrow{f_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}$ pour obtenir

$$\boxed{\frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta \overrightarrow{u} + \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u}\right)} \tag{B.22}$$

3.2 Apparition des ondes

On a obtenu une équation qui n'est pas sans rappeler une équation d'onde mais qui comporte un terme en plus qui complique les choses. Pour un matériau dont les propriétés élastiques sont partout les mêmes, on peut décomposer les solutions de l'équation B.22 (comme n'importe quel autre vecteur en passant) en la somme d'un vecteur de divergence nulle et un autre vecteur de rotationnel nul. On écrit alors

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{B.23}$$

En injectant cette expression dans l'équation B.22, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) = \frac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta\left(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}\right) + \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{u_2}\right) \tag{B.24}$$

En prenant la divergence de cette équation et en interchangeant l'opérateur divergence avec l'opérateur laplacien, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}\cdot\left[\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta\overrightarrow{u_2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u_2}\right] = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\cdot\left[\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u_2}\right] = 0 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Or on sait que $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$ donc le rotationnel de ce qu'il y a entre crochets est nul. Ainsi, ce qu'il y a entre crochets est à la fois de divergence nulle **et** de rotationnel nul, donc ce terme est forcément nul :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_2}}{\partial t^2} - \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u_2} = 0 \tag{B.26}$$

On tombe cette fois sur une vraie équation d'onde avec une vitesse $c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$. On a obtenue cette équation pour une déformation $\overrightarrow{u_2}$ qui par définition a un rotationnel nul et qui n'est donc pas associée à un cisaillement. Il s'agit alors d'une **onde de compression** (onde acoustique, onde longitudinale, onde P).

Quid du terme $\overrightarrow{u_1}$? Pour ce terme, on prend le rotationnel de l'équation B.22 pour obtenir l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{u_1}}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{u_1} = 0 \tag{B.27}$$

Cette équation décrit quand à elle des ondes se propageant à la vitesse $c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$. Puisque cette équation a été obtenue pour une déformation $\overrightarrow{u_1}$ de divergence nulle, on en déduit que cette déformation n'induit pas de variation dans la densité du matériau. Il s'agit alors d'une **onde de cisaillement** (onde transverse, onde S).

Remarque

Puisque toute déformation $\overrightarrow{u}$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, on peut en déduire que toute onde élastique est une superposition d'une onde longitudinale et d'une onde transverse.

3.3 Réflexion et transmission d'ondes élastiques

✍ Stein

Les ondes élastiques sont, comme toute autre onde, sujettes à la réflexion et à la réfraction au passage d'un dioptre. Dans le cas le plus simple avec une incidence normale au dioptre, l'onde élastique ne change pas de nature : une onde incidente purement longitudinale donne une onde transmise purement longitudinale et de même pour une onde purement transverse.
Cependant, les choses se compliquent quand on n'est plus en incidence normale : alors toute onde incidente va donner une onde longitudinale réfléchie et onde transverse réfléchie ainsi qu'une onde longitudinale transmise et onde transverse transmise.

Mettons ça en équation. On considère une onde élastique se propageant selon l'axe des x et on suppose qu'il y a un dioptre entre un milieu 1 et un milieu 2 dans le plan $x = 0$. On note θ_i l'angle que forme le vecteur d'onde $\overrightarrow{k_i}$ de l'onde incidente avec la normale au dioptre, et on fait de même pour l'onde réfléchie et l'onde transmise. Les 3 ondes s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{u_{i,0}} e^{j(\omega_i t - \overrightarrow{k_i} \cdot \overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{r,0}} e^{j(\omega_r t - \overrightarrow{k_r} \cdot \overrightarrow{r})} \\ \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{t,0}} e^{j(\omega_t t - \overrightarrow{k_t} \cdot \overrightarrow{r})} \end{cases} \tag{B.28}$$

À tout instant t et en tout point de l'interface $x = 0$, on peut écrire la continuité du champs des déformations comme

$$\overrightarrow{u_{i,0}} e^{j(\omega_i t - k_{i,y} y)} + \overrightarrow{u_{r,0}} e^{j(\omega_r t - k_{r,y} y)} = \overrightarrow{u_{t,0}} e^{j(\omega_t t - k_{i,y} y)} \qquad \forall t, \forall y \tag{B.29}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ k_{i,y} = k_{r,y} = k_{t,y} \end{cases} \tag{B.30}$$

La deuxième inégalité est très intéressante puisqu'elle donne que $k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$. En divisant par les pulsations, on obtient

$$\frac{k_i}{\omega_i} \sin\theta_i = \frac{k_r}{\omega_r} \sin\theta_r = \frac{k_t}{\omega_t} \sin\theta_t \tag{B.31}$$

On obtient alors la loi de Snell pour un milieu élastique :

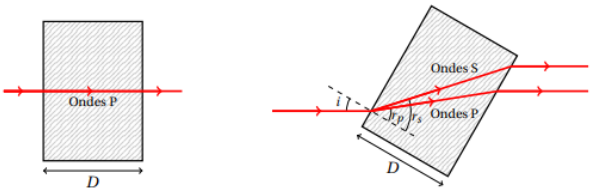
$$\boxed{\frac{\sin\theta_i}{c_i} = \frac{\sin\theta_r}{c_r} = \frac{\sin\theta_t}{c_t}} \tag{B.32}$$

Cette relation s'applique sur les ondes longitudinales et transverses, et puisque ces ondes ont des vitesses différentes elles auront des angles différents par rapport à la normale. On comprend donc pourquoi une onde incidente donne deux ondes réfléchies et deux ondes transmises.

3.4 Expérience : le dural

✍ voir le MP30 - Acoustique

Avec la manip sur le dural, on distingue bien les 2 ondes.



4 Exemples

4.1 Solide sous pression homogène : compressibilité

On considère un solide sous pressions hydrostatique, c'est à dire une pression P orthogonales à toutes ses surfaces.

Ainsi sur une direction, disons x, on a

$$\begin{cases} -P = \sigma_x = E\varepsilon_x^{\sigma_x} \\ \dfrac{\nu}{E}P = \varepsilon_y^{\sigma_x} = \varepsilon_z^{\sigma_x} \end{cases} \tag{B.33}$$

Or on a une contribution sur chaque face, et en sommant on obtient

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{2\nu - 1}{E}P \tag{B.34}$$

Ainsi pour les volumes on a

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -3(1-2\nu)\frac{P}{E} \tag{B.35}$$

On nomme alors $\kappa = 3(1-2\nu)$ la compressibilité du matériaux, et $\dfrac{1}{\kappa}$ le module de compressibilité isostatique.

4.2 Cas général du ressort

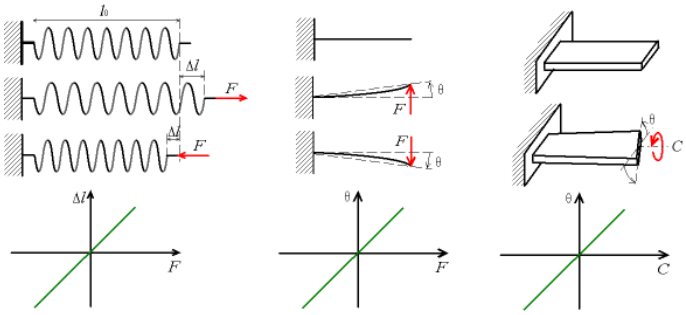
Pour des petites déformations (*i.e.* tant qu'elles sont linéaires), la variation de longueur $\Delta\ell$ d'un ressort en traction/compression est proportionnelle à la force F de traction/compression générée par le ressort. On appelle le coefficient de proportionnalité la **raideur** du ressort, exprimée en N/m et notée k. On a alors

$$F = -k\Delta\ell$$

Le signe "-" indique que cette force s'oppose à toute déformation du ressort.

On peut également définir la raideur k d'un matériau pour d'autres types de déformations :

- $F = k_f\theta$ pour une flexion (ici, θ est l'angle de déformation et k_f est en N/rad)
- $C = k_t\theta$ pour une torsion (ici, C est le couple, θ est l'angle de déformation et k_t est en N.m/rad)



LPX C

Moments magnétiques, notion de spin

Niveau : L2/L3

Bibliographie

- ✍ MP16
- ✍ LP45
- ✍ LP04
- ✍ https://fr.wikipedia.org/

Prérequis

- ➢ Mécanique classique
- ➢ Électromagnétisme

Expériences

☕

1 Moment magnétique classique 706
1.1 Manifestations usuelles 706
1.2 Rapport à l'aimantation 706
1.3 Origine physique 707
1.4 Manifestations 707
1.5 Rapport gyromagnétique 708
2 Moment magnétique intrinsèque : le spin 709
2.1 Définition 709
2.2 Moment magnétique de spin de l'électron 709
2.3 Moment magnétique de spin du proton 710
2.4 Moment magnétique d'un atome 710
2.5 Application à la précession de Larmor 710
2.6 Applicaton à la RMN 710

Introduction

En physique, le moment magnétique est une grandeur vectorielle qui permet de caractériser l'intensité d'une source magnétique. Cette source peut être un courant électrique, ou bien un objet aimanté. L'aimantation est la distribution spatiale du moment magnétique.

Nous allons aujourd'hui tenter de comprendre plus en détail les mécanismes derrière cette quantité, et ses manifestations expérimentales.

1 Moment magnétique classique

✍ LP04

1.1 Manifestations usuelles

La manifestation principale de l'existence du moment magnétique est l'apparition d'une aimantation dans une boussole, ou dans un solénoide. Le moment magnétique d'un corps se manifeste par la tendance qu'a ce corps à s'aligner dans le sens d'un champ magnétique

Pour quantifier cet alignement on va définir une quantité $\overrightarrow{\mu}$, telle que la force qui s'applique sur un moment magnétique μ soit un couple $\overrightarrow{tau}$ tel que

$$\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B} \tag{C.1}$$

Cette définition donne donc une méthode permettant, en théorie, de mesurer le moment magnétique d'un échantillon inconnu placé dans un champ magnétique connu. La même méthode permet symétriquement de mesurer le champ magnétique en un point, à partir d'un système comportant un moment magnétique déterminé.

L'unité du moment magnétique est donc le $\mathrm{N\,m\,T^{-1}}$.

1.2 Rapport à l'aimantation

L'aimantation $\overrightarrow{J}$ correspond à une densité volumique de moment magnétique. Elle est définie par l'équation suivante, où $\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}$ est le moment magnétique élémentaire, et $\mathrm{d}V$ le Volume élémentaire :

$$\overrightarrow{J} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mu}}{\mathrm{d}V}$$

Le moment magnétique s'exprimant $\mathrm{A\,m^2}$, l'intensité d'aimantation J (le module ou la valeur algébrique de l'aimantation $\overrightarrow{J}$) se mesure en ampères par mètre (A/m).

Cette équation mène à une définition générale du moment magnétique, comme intégrale de l'aimantation sur l'ensemble du volume du corps considéré :

$$\overrightarrow{\mu} = \iiint \overrightarrow{J}\,\mathrm{d}V$$

où $\overrightarrow{\mu}$ est le moment magnétique total.

De ce fait, le moment magnétique et l'aimantation sont complètement analogues au dipôle électrostatique $\overrightarrow{p}$ et à la polarisation $\overrightarrow{P}$. Cette analogie conduit à parler de dipôle magnétique par analogie avec un dipôle électrostatique.

1.3 Origine physique

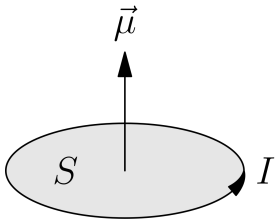


FIGURE C.1 – Représentation d'une spire de courant.

Comme cela à été dit en intro, l'origine physique du moment magnétique est usuellement la rotation d'une charge. En effet une charge qui tourne autour d'une axe va générer un champs électromagnétique, et va tendre à l'alignement avec le champs magnétique présent.

On définit le **moment magnétique différentiel** comme

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mu} = \frac{1}{2}\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{j}\,\mathrm{d}V \tag{C.2}$$

où $\overrightarrow{r}$ est la position de la charge et $\overrightarrow{j}$ la densité de courant électrique.

Dans le cas d'une charge seule tournant autour d'un axes, on a par intégration :

$$\overrightarrow{\mu} = \frac{1}{2}q\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v} \tag{C.3}$$

Soit encore, dans le cas d'une boucle de courant de surface S :

$$\overrightarrow{\mu} = I\overrightarrow{S} \tag{C.4}$$

1.4 Manifestations

Le smanifestations du moment magnétique sont multiples. On a déjà cité plus haut l'aimantation des matériaux, ainsi que l'alignement des boussoles et solénoïdes, mais il en existe d'autres.

Sans entrer dans le détail, on peut citer la précession de Larmor, qui est le mouvement de précession que décrit un moment magnétique soumis à un champs $\overrightarrow{B}$, sans frottements d'aucune forme.

La precession de Larmor est ce qui est utilisé dans la RMN, résonnance magnétique nucléaire, pour faire de l'imagerie du corps humain.

> *Une question reste cependant non élucidée, d'où vient le moment magnétique de la boussole ? Non parce que le solénoïde pas de soucis, ça tourne, mais la boussole ?*

1.5 Rapport gyromagnétique

L'astuce à laquelle ont d'abord pensé des physiciens de renom comme Bohr ou de Broglie est celle de l'électron qui tourne autour de son noyau. En effet un électron qui tourne, c'est une spire de courant, et même si on sait aujourd'hui que c'est plus compliqué qu'un truc qui tourne, à l'époque (années 10-20) c'était pas évident !

Considérons le modèle atomique de Bohr, avec un électron tournant autour d'un noyau atomique. C'est un modèle empirique qui permet de s'affranchir de l'étude précise en mécanique quantique du système, et qui (par chance ou presque) mène aux mêmes résultats.

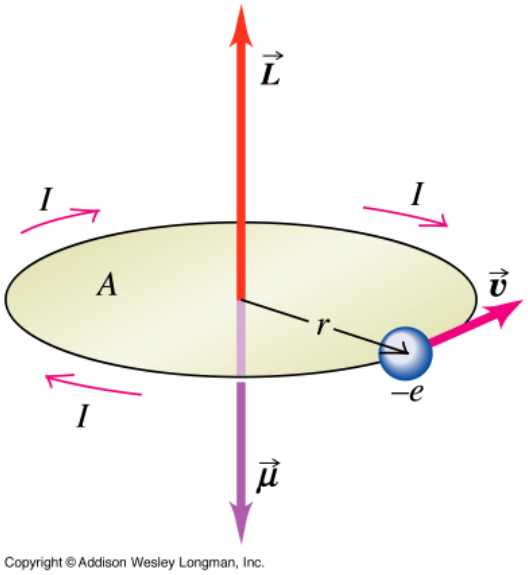


FIGURE C.2 – Modèle de Bohr

L'électron possède un moment cinétique

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge m_e \overrightarrow{v} = mvr\overrightarrow{n}$$

où $\overrightarrow{n}$ est un vecteur unitaire normale à la surface délimitée par le mouvement de l'électron.

Il possède alors également un moment magnétique dit **orbital** $\overrightarrow{\mu_L}$ définit par $\overrightarrow{\mu_L} = iA\overrightarrow{n}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mu_L} &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\pi r^2 \overrightarrow{n} \\ &= \frac{-e}{T}\pi r^2 \overrightarrow{n} \qquad \text{où} \qquad T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{la période de rotation} \\ &= -\frac{evr}{2}\overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{C.5}$$

On obtient donc finalement :

$$\overrightarrow{\mu_L} = \gamma \overrightarrow{L} \qquad \text{où} \qquad \gamma = -\frac{e}{2m_e} \simeq -8.8 \times 10^{+10}\,\mathrm{C\,kg^{-1}} \quad \text{le rapport gyromagnétique.} \tag{C.6}$$

limite

Comme indiqué précédemment, ce résultat trouvé avec un modèle classique, le modèle de Bohr, reste valide dans la théorie quantique. Il faut tout de même noter la principale faiblesse du modèle : un électron qui tourne, ça rayonne, et donc ça perd de l'énergie, et donc ça s'effondre sur le noyau.

On a cependant une explication de l'origine du moment magnétique dans les matériaux, c'est une histoire d'électron

qui tourne. Cependant la physique moderne nous a montré que l'atome a un spin, comme si un électron tournait autour, mais sans électron qui tourne [1]...

On a détaillé le phénomène, et les conséquences, mais on a pas détaillé la cause, parce qu'on a pas vraiment de truc qui tourne là.

2 Moment magnétique intrinsèque : le spin

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magnétique_de_spin
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magnétique

2.1 Définition

On a vu dans la partie précédente qu'on pouvait associer un moment magnétique orbital $\overrightarrow{\mu_L}$ à une particule de charge q et de masse m ayant un moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$. Les deux grandeurs étaient d'ailleurs reliées par la relation

$$\overrightarrow{\mu_L} = \frac{q}{2m}\overrightarrow{L} = \gamma\overrightarrow{L}$$

avec γ le rapport gyromagnétique.

Cependant, on sait également qu'une particule possède une caractéristique intrinsèque au même titre que sa masse ou sa charge et qui est analogue à un moment cinétique : le **spin** $\overrightarrow{S}$. Ainsi, il est également possible de définir un moment magnétique intrinsèque associé à ce 'moment cinétique intrinsèque' qu'est le spin : le **moment magnétique de spin** $\overrightarrow{\mu_S}$. Cette grandeur est reliée au spin $\overrightarrow{S}$ d'une particule via une relation similaire à celle reliant $\overrightarrow{\mu_L}$ et $\overrightarrow{L}$:

$$\overrightarrow{\mu_S} = g\frac{q}{2m}\overrightarrow{S} \tag{C.7}$$

où g est un nombre appelé **facteur de Landé** et dont la valeur dépend de la particule étudiée.

2.2 Moment magnétique de spin de l'électron

observations, échecs du modèle classique

La première particule à laquelle on peut penser quand on parle de spin est l'électron. Pour un axe donné, on sait que l'électron n'a que 2 valeurs de spin qui sont $\overrightarrow{S_z} = \pm\frac{\hbar}{2}\overrightarrow{e_z}$, et l'équation de Dirac prédit que $g_e = -2$ pour l'électron. On obtient donc que le moment magnétique intrinsèque de l'électron vaut

$$\overrightarrow{\mu_{S,\text{électron}}} = -2\frac{-e}{2m_e}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)\overrightarrow{e_z} = \pm\frac{e\hbar}{2m_e}\overrightarrow{e_z} \tag{C.8}$$

On introduit alors le "quantum magnétique" appelé **magnéton de Bohr** donc l'expression est $\boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}}$, et on a $\overrightarrow{\mu_{S,\text{électron}}} = \pm\mu_B\overrightarrow{e_z}$.

Cependant, des expériences conduites dès 1947 sur la structure hyperfine de l'hydrogène et du deutérium décèlent un écart entre la valeur expérimentale de g_e et sa valeur théorique de -2. En 2014, la valeur expérimentale admise vaut

$$g_e \simeq -2,002\ 319\ 304\ 361\ 82(52)$$

On dit alors que le moment magnétique de spin de l'électron est **anomal** [2].

1. Les joies de la mécanique quantique
2. Plus d'infos sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Moment_magnétique_anomal

2.3 Moment magnétique de spin du proton

Une autre particule à laquelle on peut penser est le proton. Pour le proton, on a $g_P = +2$ et on obtient donc

$$\overrightarrow{\mu_{S,\text{proton}}} = +2\frac{e}{2m_p}\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)\vec{e_z} = \pm\frac{e\hbar}{2m_p}\vec{e_z}$$

On introduit alors le **magnéton nucléaire** donc l'expression est $\boxed{\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}}$, et on a $\overrightarrow{\mu_{S,\text{proton}}} = \pm\mu_N\vec{e_z}$.

2.4 Moment magnétique d'un atome

On a vu que chaque électron que possède un atome ont un moment cinétique orbitale et un moment cinétique de spin. Ainsi, on peut sommer les contributions de chaque électron pour attribuer un moment cinétique orbital total $\overrightarrow{L_{\text{tot}}}$ et un moment cinétique de spin total $\overrightarrow{S_{\text{tot}}}$. L'atome possède alors un moment cinétique total $\vec{J} = \overrightarrow{L_{\text{tot}}} + \overrightarrow{S_{\text{tot}}}$, et on peut alors définir le moment magnétique résultant de l'atome comme :

$$\mu_{\text{atome}} = g_J\mu_B\sqrt{J(J+1)} \qquad \text{(vecteur propre de l'opérateur } \vec{J}^2\text{)} \tag{C.9}$$

avec g_J le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr. La composante selon l'axe z de ce moment est donnée par

$$\mu_{\text{atome},z} = -m_J g_J \mu_B \qquad \text{(vecteur propre de l'opérateur } J_z\text{)} \tag{C.10}$$

avec m_J le nombre quantique magnétique pouvant prendre les $2J+1$ valeurs entières entre $-J$ et J.

Ainsi pour faire les calculs complets, il faut prendre en compte l'intégralité de ces contributions, qui se somment de manière linéaire !

2.5 Application à la précession de Larmor

Détailler les calculs de Larmor ✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Précession_de_Larmor

2.6 Applicaton à la RMN

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Rapport_gyromagnétique

Les rapports gyromagnétiques des differents atomes et même des différents isotopes étant différents, leur pulsation de Larmor change. Ainsi on a des résonnance en pulsation qui apparaissent quand on applique un champs tournant à un échantillon.

Grâce à cela on peut déterminer précisément la composition d'un échantillon :

✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance_magnétique_nucléaire

LPX D

Hystérésis dans différents domaines de la physique

Niveau :

Bibliographie

✍
✍

Prérequis

➢

Expériences

☕

1 **Notion d'hystérésis** **712**
2 **Exemple mécanique** **712**
2.1 Aller 712
2.2 Retour 713
2.3 Dans l'autre sens : 714
3 **Exemple électrique** **714**
4 **Exemple électromagnétique : les matériaux ferromagnétiques** **715**
5 **Exemple en thermodynamique** **716**

Introduction

La notion d'hystérésis décrit un phénomène très large, qui est que certains systèmes physico-chimiques ne se comportent pas de la même façon quand on les change de sens.

Dit comme ça, ça a l'air bête, mais pour l'imaginer il faut voir une voiture qui va du point A au point B, et qui prend un chemin différent pour l'aller et le retour à cause d'un sens interdit.

1 Notion d'hystérésis

L'origine usuelle d'une hystérésis est la non réversibilité d'un phénomène. En effet si on considère un système avec une grandeur d'entrée $x(t)$ et une de sortie, $y(t)$, mais que $y(t)$ est une fonction de x ET de $y(t-\mathrm{d}t)$, alors on comprend que faire augmenter puis diminuer x change le résultat.

On parle généralement de *cycle d'hystérésis* parce que l'on regarde des variations cycliques de l'entrée, ce qui donne des courbes comme celle là :

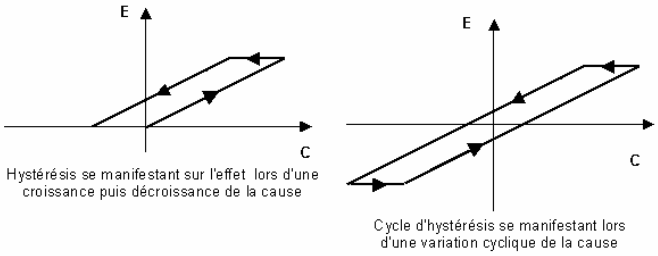


FIGURE D.1 – Cycle d'hystérésis classique, les courbes aller et retour ne se superposent pas.

Il est intéressant de voir que certains cycles nécessitent d'être mis en place, comme nous allons le voir dans la partie ci-après.

2 Exemple mécanique

On prend un solide de masse m sur un support, avec un coefficient de frottement f (statique = dynamique). On l'attache à un ressort, de longueur à vide ℓ, et de raideur k. On repère la position du bout du ressort par x_1 (à droite), et la position du solide par x_2 (à gauche).

Dans un premier temps, on tire de manière quasistatique sur le ressort dans le sens de x_1 croissant, en partant de $x_1 = 0$, et de $x_2 = -\ell$ (qui reste fixé tant qu'il n'y a pas glissement), sur une distance a. Dans un deuxième temps on pousse dans l'autre sens, et x_1 va jusqu'à $-a$

https://www.geogebra.org/m/nxuu8fjp

1) Donner la condition sur k, ℓ et a pour que le solide glisse, et que la situation reste physique (pas de longueur négative de ressort).
2) Tracer $x_2(x_1)$, et mettre en évidence le cycle d'hystérésis.

2.1 Aller

Non glissement :

On part de $x_1 = 0$ et on étire le ressort (donc x_1 devient positif). Tant qu'il n'y a pas de glissement, x_2 ne varie pas et vaut $-\ell$. La loi de Coulomb donne alors la condition de non glissement :

$$|T| < f|N|$$

Avec un PFD, on vois que cette condition équivaut à

$$|k(\ell - x_1 + x_2)| < fmg$$

Or $x_2 = -\ell$ donc la condition de non glissement devient

$$x_1 < \frac{fmg}{k}$$

Glissement :

Condition sur les données du système : on doit avoir

$$a > \frac{fmg}{k}$$

Maintenant, on continue de tirer x_1 vers la droite pour avoir $x_1 = a > \frac{fmg}{k}$. On a alors glissement de x_2 qui bouge à la même vitesse que x_1, *i.e.* le ressort a une longueur constante valant $\ell + \frac{fmg}{k}$. À la fin de l'aller, on a donc

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = x_1 - \left(\ell + \frac{fmg}{k}\right) = a - \left(\ell + \frac{fmg}{k}\right) \end{cases}$$

2.2 Retour

Non glissement :

Pour le retour, on part de $x_1 = a$ et de $x_2 = -\ell + a - \frac{fmg}{g}$. On va donc diminuer x_1 jusqu'à ce que la longueur du ressort soit de $\ell - \frac{fmg}{k}$, c'est à dire jusqu'à ce que la condition de glissement soit vérifiée.

Nouvelle condition : La longueur du ressort devant être positive, on doit forcément garder

$$\ell > \frac{fmg}{k}$$

Ainsi on a alors juste avant le début du glissement $x_1 = a - 2\frac{fmg}{k}$ puisque la longueur du ressort aura variée de $2\frac{fmg}{k}$ et qu'on a toujours $x_2 = -\ell + a - \frac{fmg}{g}$.

Glissement :

On continue à déplacer x_1, la longueur du ressort est fixée à $\ell - \frac{fmg}{k}$, et on finit à

$$\begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = x_1 - \left(\ell - \frac{fmg}{k}\right) = -a - \left(\ell - \frac{fmg}{k}\right) \end{cases}$$

2.3 Dans l'autre sens :

On refait la même chose mais cette fois en contractant le ressort dans un premier temps pour arriver en

$$(x_1, x_2) = \left(-a + 2\frac{fmg}{g}, -l - a + \frac{fmg}{k}\right)$$

, puis en l'étirant pour arriver en

$$(x_1, x_2) = \left(a, -\ell + a - \frac{fmg}{g}\right)$$

.

On a les mêmes points que quand on étire d'abord puis on contracte, mais les conditions de glissements vont donner des valeurs de basculement pour x_1 qui sont différentes : on peut alors tracer le cycle $x_2 = f(x_1)$ pour observer l'hystérésis.

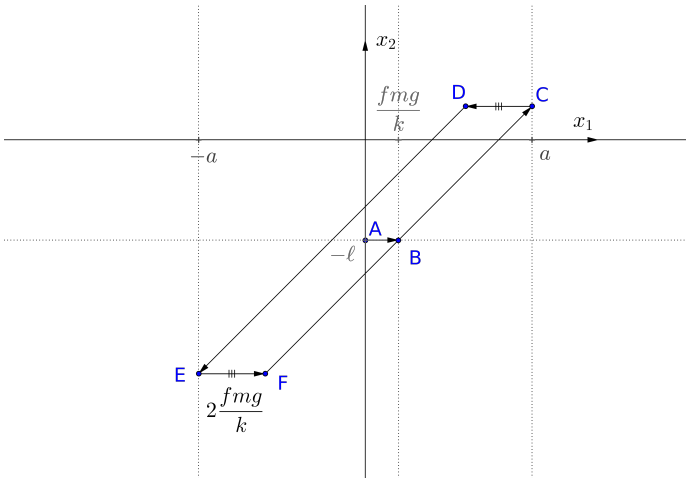
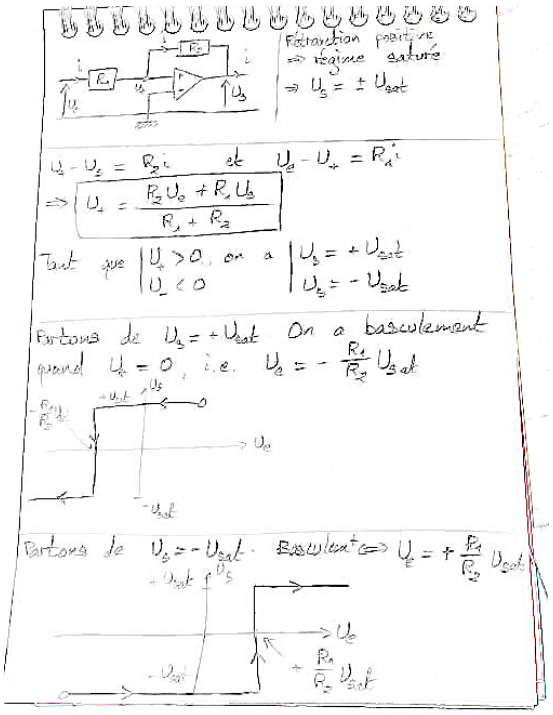


FIGURE D.2 – Portrait de phase de l'exemple mécanique.

3 Exemple électrique

✍ http://pcsipsiauxulis.com/IMG/pdf/Poly_TD_electronique.pdf, exercice 7 ou 8 du TD2. Signal seuil, montée et descente.



4 Exemple électromagnétique : les matériaux ferromagnétiques

✍ MP16 pour l'aspect expérimental + LP45
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Hystérésis_magnétique
✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Stoner-Wohlfarth pour la théorie

On peut modéliser les atomes composant un matériau ferromagnétique par des dipôles électriques. Ainsi, lorsqu'un champ magnétique externe est appliqué à un matériau ferromagnétique, ces dipôles vont s'aligner avec ce champ magnétique. Si on retire le champ magnétique externe, on observe qu'une partie de l'alignement des dipôles est conservée et on dit que le matériau est alors **aimanté**.

Quand on veut faire les calculs, on se rend compte que les équations de Maxwell ne suffisent pas à décrire le problème car elles n'apportent que 8 équations pour 9 inconnues (les composantes de $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ et $\overrightarrow{B}$). Pour fermer le système, on introduit l'expression $\overrightarrow{M} = \chi(\overrightarrow{H})\overrightarrow{H}$ (cf ✍ LP45). Pour un matériau ferromagnétique, cette relation n'est pas linéaire puisque χ va dépendre de $\overrightarrow{H}$.

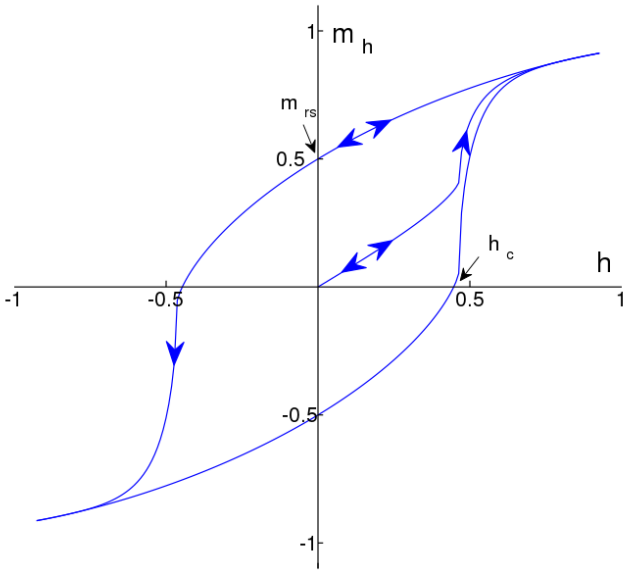
Partons d'une situation où le matériau est désaimanté (donc $\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{M}$). Si on augmente $\overrightarrow{H}$, on obtient la **courbe de première aimantation** qui augmente rapidement avant de devenir asymptotique en atteignant le point de saturation magnétique. Cette saturation s'explique par le fait qu'en augmentant $\overrightarrow{H}$, de plus en plus de dipôles vont s'aligner dans la direction de $\overrightarrow{H}$ jusqu'à ce qu'ils soient tous alignés dès que le champ H atteint une valeur particulière appelée **champ coercitif** H_C. À partir de là, augmenter $\overrightarrow{H}$ n'aura plus d'effet.

Maintenant qu'on est à saturation pour $H > 0$, on choisit de diminuer H jusqu'à des valeurs négatives. On se rend alors compte que M ne suit pas la courbe d'aimantation mais une courbe différente. En effet, tant que le champ magnétique n'atteint pas en valeur absolue la valeur de champ coercitif H_C (*i.e. tant que* $H > -H_C$), l'aimantation va "résister" au changement du champ magnétique. Une fois la valeur de H_C atteinte, l'aimantation de chaque atome se retourne brusquement (on a alors $\dfrac{\partial M}{\partial H} < 0$) pour s'aligner avec le champ magnétique négatif. Tous les atomes seront alors de nouveau alignés avec $\overrightarrow{H}$, on a donc atteint le point de saturation magnétique pour $H < 0$.

Si on veut ensuite retourner au point de saturation magnétique pour $H > 0$, on doit augmenter H. De la même façon que lorsqu'on a diminué H, l'aimantation du matériau varie peu quand H change de signe tant que $|H| < H_C$. Quand $H > +H_C$, l'aimantation se retourne à nouveau brusquement ($\dfrac{\partial M}{\partial H} > 0$) et on atteint le point de saturation

magnétique.

Ainsi, on constate qu'on a bien tracé un cycle d'hystérésis puisque M suit un chemin différent en fonction de si on augmente ou on diminue H. On remarque que pour $H = 0$ l'aimantation n'est pas nul et sa valeur est appelée **aimantation rémanente**. Ce phénomène permet l'existence des aimants que l'on peut croiser dans notre vie, allant du petit aimant à placer sur le frigo à l'aimant au néodyme qui finit toujours éclaté sur le sol en TP parce que quelqu'un l'a lâché...



5 Exemple en thermodynamique

Un diagramme de Clapeyron est un diagramme qui montre l'évolution de P en fonction de V dans un système thermodynamique comme un moteur, de préférence cyclique.

Le principe est de parcourir un cycle en respectant la thermodynamique, donc en augmentant l'entropie à chaque étape. Ainsi on parcoure le cycle par un chemin hystérétique !

La grandeur non réversible ici est évidemment l'entropie totale !

LPX E

Amplificateur opérationnel, modèles et usages

Niveau : CPGE (PSI)

Bibliographie

- ✍ *Electronique PSI*, Précis Bréal — chap 3 p 67
- ✍ *Electronique*, **Pérez** — chap 8, p 257
- ✍ http://physiquenetappliquee.free.fr/ampli_op1.php
- ✍ https://www.les-electroniciens.com/sites/default/files/cours/lampli_op.pdf

Prérequis

➢ Électrocinétique de MPSI/PCSI

1 Le modèle de l'AO/ALI . . . 718
1.1 Présentation de l'AO . . . 718
1.2 Fonction de transfert en tension . . . 719
1.3 Deux régimes de fonctionnement . . . 720
1.4 Modèle de l'AO idéal . . . 721
1.5 Limites du modèle . . . 722
1.6 Calcul de la fonction de transfert, exemple . . . 723
2 Les montages classiques d'amplification . . . 724
2.1 But de l'amplification . . . 724
2.2 La liste . . . 724

Introduction

L'amplificateur opérationnel est un dispositif qui est utilisé pour amplifier mais également comparer des signaux électrique. Il est fondamental dans l'électronique de prépa car c'est le seul dispositif actif officiellement au programme.

Par **dispositif actif** on entend un composant électrique qui apporte de une puissance supérieure à celle qu'il reçoit dans le système.

1 Le modèle de l'AO/ALI

1.1 Présentation de l'AO

L'AO est un dispositif alimenté avec des tensions symétriques $\pm E$, dont la sortie dépend de la différence entre les deux entrées. On le symbolyse comme suit :

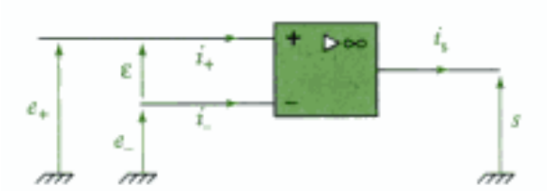


FIGURE E.1 – Symbole de l'AO. Il existe aussi une norme américaine avec un triangle.

Le lemniscate est là pour indiquer que l'amplification est très élevée, comme on va le voir tout de suite.

La tension de sortie de l'AO est produite à partir de la **tension différentielle**, c'est à dire la différence entre la tension à ses deux bornes, $\varepsilon = e_+ - e_-$.

La sortie est donnée par ce graphe :

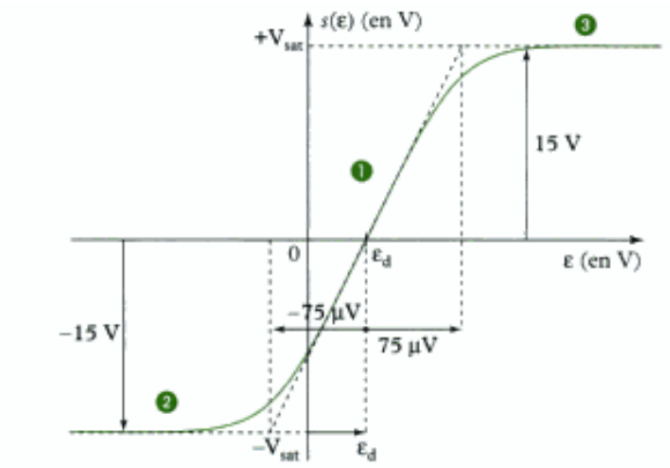


FIGURE E.2 – Caractéristique de l'AO. En continu la caractéristique réelle, en pointillés, la caractéristique idéale.

La tension de saturation est donnée par E. On prendra en pratique que $\varepsilon_d = 0$ (en vrai c'est environ 1 mV, et ça se règle avec une petite molette), et on nomme la pente de la partie linéaire μ, le gain de l'ampli. Dans un cas classique, $\mu \simeq 10^5$. C'est pour cela qu'on considère généralement que c'est infini, et que l'AO bazarde 0 si $e_+ = e_-$, $+E$ si $e_+ > e_-$, et $-E$ si $e_+ < e_-$.

Il y a deux zones, la zone linéaire, et la zone de saturation.

1.2 Fonction de transfert en tension

En général, on utilise un AO en *boucle fermée*, c'est-à-dire en reliant une de ses entrées à la sortie. Cependant, ce sera l'objet de la partie suivante. Dans cette partie, on va s'intéresser à l'AO en *boucle ouverte.* La connaissance de la structure interne de l'AO n'est pas nécessaire pour obtenir l'équation reliant la tension de sortie s à la tension différentielle $\varepsilon = e_+ - e_-$. En effet, une étude expérimentale peut montrer que le comportement de l'AO *en boucle ouverte* peut être décrit par l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\tau_c \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = \mu\varepsilon \tag{E.1}$$

avec une constante de temps de l'AO τ_c de l'ordre de 10 ms et une amplification différentielle **stationnaire** μ entre 10^4 et 10^7. Le terme "stationnaire" vient du fait qu'en régime stationnaire l'équation différentielle devient

$$s = \mu\varepsilon = \mu(e_+ - e_-)$$

Avec cette expression, on voit que si e_+ est reliée à la masse, s et e_- ont des signes opposés. Inversement, si on relie e_- à la masse, s et e_+ ont le même signe. Ainsi, l'entrée e_+ est dite **non-inverseuse** tandis que l'entrée e_- est dite **inverseuse**.
Remarquons également que cette équation différentielle ressemble fortement à celle obtenue dans l'étude d'un filtre passe-bas RC.

Remarques

- L'AO étant un composant actif, la fonction linéaire entre la sortie et l'entrée différentielle ne peut être obtenue que sous réserve de le polariser grâce à deux sources de tension stationnaires symétriques E et $-E$. Ainsi, la tension de sortie est limitée en amplitude selon la relation

  $$-E < s < E \quad \text{soit encore} \qquad -V_{\text{sat}} \leq s \leq V_{\text{sat}}$$

  avec V_{sat} la tension de saturation, légèrement inférieure aux tensions de polarisation de l'AO.
- Afin d'éviter la saturation en courant, l'intensité i_s du courant de sortie doit vérifier la condition

  $$i_s < i_{s,\text{max}}$$

  avec $i_{s,\text{max}}$ l'intensité maximale du courant de sortie donnée par le fabricant.
- On évitera une déformation du signal de sortie par saturation en vitesse en garantissant une variation maximale de s au cours du temps, d'où la condition

  $$\max\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| \leq v_m$$

  avec v_m la vitesse maximale de balayage (ou *slew rate*) de l'AO.

Si on passe en régime sinusoïdal, la tension différentielle s'écrit $\varepsilon(t) = \varepsilon_m e^{j\omega t}$. La sortie de l'AO s'écrit alors également sous la forme $s = s_m e^{j\phi_s} e^{j\omega t}$. En injectant ces deux expressions dans l'équation différentielle, on obtient la fonction de transfert de l'AO :

$$H = \frac{s}{\varepsilon} = \frac{\mu}{1 + j\omega\tau_c} \tag{E.2}$$

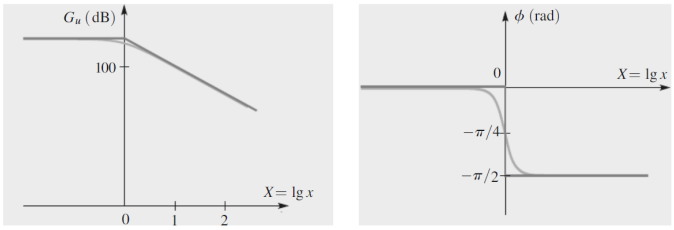
Le module et l'argument de cette fonction de transfert sont données par

$$\begin{cases} |H| = \dfrac{\mu}{\sqrt{1 + \omega_2\tau_c^2}} \\ \arg(H) = \phi_s = -\arctan(\omega\tau_c) \end{cases} \tag{E.3}$$

En posant $\omega_c = \dfrac{1}{\tau_c}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_c}$, on obtient la forme canonique de la fonction de transfert :

$$\begin{cases} |H| = \dfrac{\mu}{\sqrt{1 + x^2}} \\ \arg(H) = \phi_s = -\arctan(x) \end{cases} \tag{E.4}$$

On obtient les diagrammes de Bode suivant (figures tirées du Pérez d'électronique) en introduisant le gain en tension $G_u = 20 \log |H|$:



On voit que puisque l'AO est un système actif, son gain passe par une valeur maximale non nulle donnée par $G_{u,\max} = 20 \log \mu$. La pulsation ω_c peut également être identifiée en tant que pulsation de coupure à -3 dB.

Remarque

Pour un AO, il existe une seconde fréquence caractéristique : la *fréquence de transition*. Elle correspond à la fréquence par laquelle le gain G_u est nul. On a alors

$$f_t = f_c \sqrt{\mu^2 - 1} \sim f_c \mu$$

Cette fréquence représente la transition entre le mode d'amplification ($G_u > 0$) et le mode d'atténuation ($G_u < 0$) de l'AO. Cette fréquence est généralement donnée par le constructeur sous le nom de *produit facteur d'amplification bande passante PAB* (ou *gain-bandwidth*).

1.3 Deux régimes de fonctionnement

On s'intéresse maintenant à l'AO en boucle fermée, c'est à dire que l'on va relier la sortie à l'une des entrées (ou aux deux) !

L'amplificateur linéaire a deux entrées et une sortie. Les deux entrées n'étant pas symétrique, on comprend bien que deux régimes différents puissent apparaître en fonction de la façon dont on branche la bête.

- **La réaction positive** : Si l'AO est branché de telle sorte à ce qu'une augmentation de la sortie rétroagissent sur elle même en augmentant e_+, on parle de **réaction positive**.

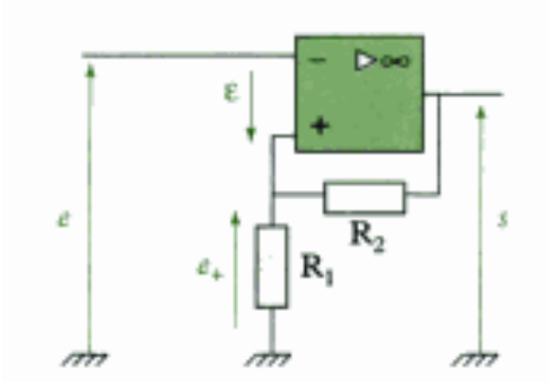


FIGURE E.3 – Exemple de montage à rétroaction positive.

On voit ici que si s augmente, e_+ augmente, et donc ε augmente, et don s augmente. On comprend ainsi que ce mode de fonctionnement soit **saturé**. L'AO est toujours en saturation dans ce régime.

- **La réaction négative** : Dans le cas inverse ou l'on branche la sortie sur l'entrée –, on tempère la sortie avec elle même. C'est la **contre-réaction**. L'AO est alors tout le temps en régime **linéaire**.

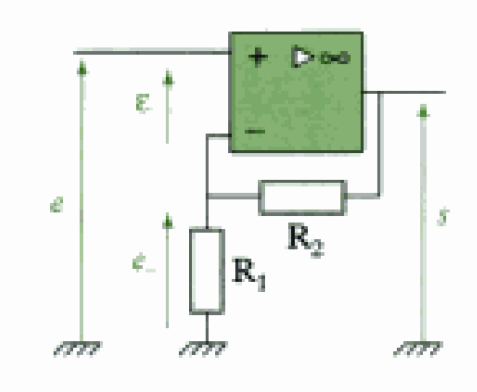


FIGURE E.4 – Exemple de montage à réaction négative.

- **Réaction double** : Dans ce cas là c'est d'abord la plus rapide qui prime, puis la plus forte.

1.4 Modèle de l'AO idéal

Le modèle de l'**AO idéal** repose sur les hypothèses suivantes :

- l'impédance de sortie Z_s est nulle ;
- l'impédance d'entrée Z_e est infinie ;
- les courants de polarisation I_{P1} et I_{P2} sont nuls ;
- la tension de décalage ε_d est nulle ;
- l'amplification μ est infinie

Ces hypothèses ont diverses conséquences. Par exemple, le modèle de l'AO réel donne les expressions suivantes pour les intensités en entrée :

$$\begin{cases} i_+ = I_{P1} + i_d = I_{P1} + \dfrac{\varepsilon}{Z_e} \\ i_- = I_{P2} - i_d = I_{P1} - \dfrac{\varepsilon}{Z_e} \end{cases} \tag{E.5}$$

Avec les hypothèses de l'AO idéal, on a Z_e qui est infinie et $I_{P1} = 0 = I_{P2}$.

pour un AO idéal, les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls.

De plus, le régime linéaire de l'AO donnait

$$s = \mu(\varepsilon - \varepsilon_d) \iff \varepsilon = \frac{s}{\mu} + \varepsilon_d$$

Les hypothèses de l'AO idéal donnent $\varepsilon_d = 0$ et μ infinie.

Pour un AO idéal *en régime linéaire*, $\varepsilon = e_+ - e_- = 0$.

Cela se répercute sur la caractéristique de l'AO idéal : la zone linéaire étant caractérisée par $\epsilon = 0$, elle correspond à une droite verticale dans le tracé de la caractéristique de l'AO idéal. Cette zone linéaire est encadrée par les zones de saturation pour lesquelles $s = +V_{\text{sat}}$ si $\varepsilon > 0$ et $s = -V_{\text{sat}}$ si $\varepsilon < 0$.

Pour un AO idéal *en régime de saturation*, $s = \mathbf{sign}(\varepsilon)V_{\mathbf{sat}}$ (avec la convention sign(0)=0).

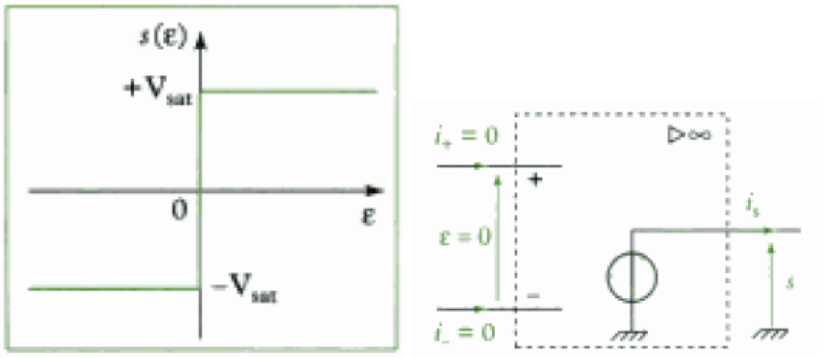


FIGURE E.5 – Gauche : caractéristique de l'AO idéal. Droite : Schéma électrique équivalent de l'AO idéal **en régime linéaire**. Les 2 figures sont tirées du Précis Bréal d'électronique PSI.

1.5 Limites du modèle

aspects dynamiques, courants non nuls, vitesse de montée, etc.

Les limites du modèle sont légions, mais sont généralement corrigées ou négligeables. Nous allons ici tenter de les lister.

- **La tension de décalage** :

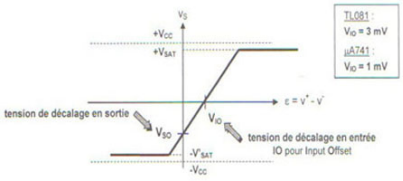


FIGURE E.6 – Caractéristique de transfert décalée.

En général, dans le régime linéaire, il arrive que la tension différentielle (la différence entre le + et le −) soit nulle, mais pas la sortie. Il y a alors un décalage de la tension de sortie.

Il y a généralement une molette sur les AO qui sert à régler cet offset.

- **Le temps de monté (Slew Rate)** :

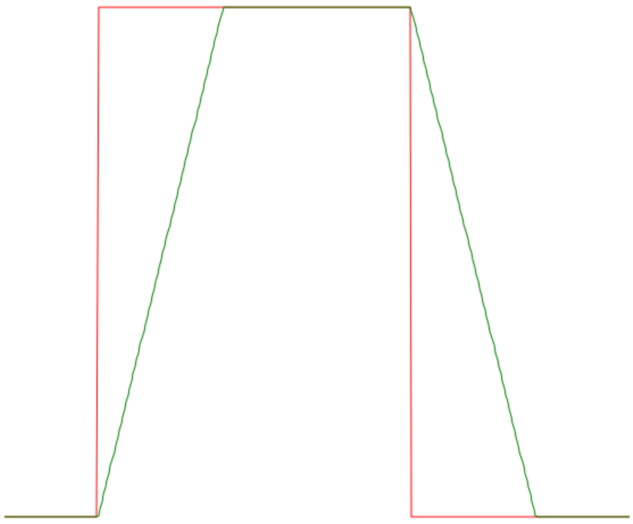


FIGURE E.7 – Image du Slew Rate.

Le Slew Rate, c'est le temps que met le signal de sortie à suivre celui d'entrée. Plus mathématique, c'est la pente maximale que peut avoir le signal de sortie.

$$\mathrm{SR} = \max \left| \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{out}}}{dt} \right| \tag{E.6}$$

Ainsi on voit que les signaux plus rapides ou plus amples que la limite de l'AO ne vont pas être retranscrits fidèlement. Typiquement, le SR vaut environ $5 \times 10^{-1}\,\mathrm{V\,\mu s^{-1}}$. Ainsi, un signal sinusoïdal de 25 kHz et de 10 V d'amplitude deviendra un magnifique triangle !

- **Les courants d'entrée et de sortie** :

  On a supposé que les courants d'entrée de l'AO sont nuls, cependant ils sont en réalité existants, mais faibles. Ainsi $i_{\pm} \sim 200$ nA environ.

  Le courant de sortie pour sa part ne peut pas atteindre une valeur infinie, et est généralement limité à une vingtaine de mA, afin de protéger l'AO. Une fois cette valeur atteinte, la tension de sortie chute.

  On peut alors modéliser l'AO réel par le schéma électrique suivant :

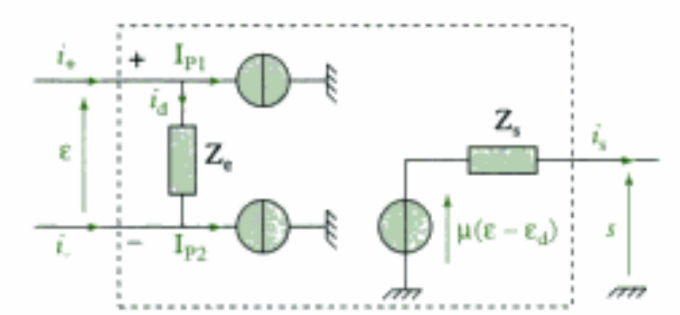


FIGURE E.8 – Schéma équivalent d'un AO réel. (Précis Bréal électronique PSI)

1.6 Calcul de la fonction de transfert, exemple

Si on reprend un exemple de fonctionnement linéaire dans l'AO parfait, donc de rétroaction négative, on peut calculer sa fonction de transfert comme suit :

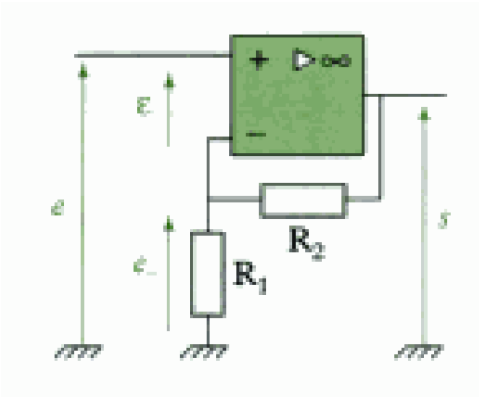


FIGURE E.9 – Exemple de réaction négative.

$$H = \frac{s}{e}$$

Or ici $e = \varepsilon + e_-$, et on a de plus que

$$e_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

On est de plus en fonctionnement linéaire, donc $e_+ = e_-$, ce qui signifie que $e = e_-$. On a alors

$$H = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Cas de l'AO non idéal

On doit alors considérer la fonction de transfert de l'AO, et prendre $s = \underline{H_0}(j\omega)\varepsilon$.

On a alors

$$\underline{H} = \frac{\underline{H_0}}{1 + \frac{\underline{H_0}}{H_{parfait}}}$$

2 Les montages classiques d'amplification

2.1 But de l'amplification

Le but de l'amplification n'est pas forcément d'amplifier la tension, mais plutôt d'amplifier la puissance de sortie. En effet on met entrée de l'ampli une source de faible puissance, par exemple une pile, ou le bruit blanc d'une résistance, ce qui est à très faible puissance. C'est à cela que sert l'alimentation ± 15 V !

2.2 La liste

✍ http://physiquenetappliquee.free.fr/ampli_op1.php

LPX F

Faisceaux gaussiens

Niveau : PC

Bibliographie

- ✍ *Les lasers*, **Dangoisse**, chap 2
- ✍ http://pcjoffre.fr/Data/cours/OD6_DE_Physique_du_laser.pdf — Très bonnes figures
- ✍ http://alain.lerille.free.fr/2014/Poly20.pdf

Prérequis

- ➢ Optique
- ➢ Électromagnétisme
- ➢ Partie quantique du laser

Expériences

☕

1 Le faisceau du laser . . . 726
1.1 La forme générale du faisceau . . . 726
1.2 Le rayon de courbure complexe . . . 726
1.3 Paramètres importants . . . 727
1.4 Le terme de phase . . . 728
1.5 Modélisation . . . 729
1.6 Application . . . 729
2 Propagation d'un faisceau Gaussien à travers un système optique . . . 729
2.1 Passage au travers d'une lentille mince . . . 729
2.2 Focalisation d'un faisceau laser par une lentille . . . 731
2.3 Élargissement du faisceau avec deux lentilles . . . 732

Introduction

Les faisceaux des lasers sont fondamentaux dans la technologie moderne, puisqu'ils sont le support de nombreux appareils de mesure et de transmission d'information. Nous allons aujourd'hui étudier leur propriétés en partant du postulat que leur forme est dite *Gaussienne fondamentale*.

1 Le faisceau du laser

1.1 La forme générale du faisceau

Lorsque l'on cherche l'expression de l'onde en sortie d'un laser (dans l'approximation paraxiale), l'amplitude du champs électrique $\mathcal{E}$ de vecteur d'onde k doit être solution de l'équation [1]

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0 \tag{F.1}$$

Les solutions de cette équation sont discrètes mais en nombre infini, et nous ne nous intéresserons dans ce cours qu'à la première solution, la solution fondamentale, le *mode Gaussien*. Il s'agit du mode qui respecte la symétrie cylindrique, par conséquent on a tout intérêt à se placer en coordonnées cylindriques.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}\right) = 2ik\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \tag{F.2}$$

On peut remarquer que l'onde plane et l'onde sphérique marchent là dedans, mais étant donné qu'on veut un système physique, on cherche une solution de la forme

$$\mathcal{E}(r,z) = A(z)\exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \tag{F.3}$$

Les différents termes de l'équations peuvent s'interpréter comme suit :

- $A(z)$: variation de la phase en fonction de z et de l'amplitude pour conserver l'énergie totale. **Complexe.**
- $\exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right)$: variation Gaussienne du profil en x, y. Pour un z fixé, l'amplitude du champs diminue d'un facteur $1/e$ à une distance $r = w(z)$ de l'axe optique.
- $w(z)$ est donc l'extension radiale du faisceau
- $\exp\left(-i\frac{kr^2}{2R(z)}\right)$: Il s'agit de la définition du front d'onde, c'est à dire qu'on définit ainsi les surfaces de phase.
- $R(z)$ est alors le rayon des fronts d'ondes, qui serait le rayon d'une onde sphérique équivalente.

On voit ainsi que le faisceau Gaussien est entièrement caractérisé par la donnée de w et de R.

1.2 Le rayon de courbure complexe

On peut commencer par définir le *rayon de courbure complexe* $Q(z) = \left(\frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw^2(z)}\right)^{-1}$. L'intérêt premier de cette quantité est de pouvoir "*sphérifier*" l'expression de l'onde :

1. c'est l'équation de Schrödinger si tu regardes bien.

$$\mathcal{E}(r,z) = A(z)\exp\left[-i\frac{kr^2}{2Q(z)}\right] \tag{F.4}$$

L'insertion de cette forme dans l'équation différentielle 1.1 donne le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z} = 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{A}{Q} \end{cases} \tag{F.5}$$

La résolution donne alors $Q(z) = z + a$ avec $a = z_0 + iz_R$ un complexe quelconque. On peut choisir de placer l'origine de z en z_0 et pouf, magie :

$$Q(z) = z + iz_R \tag{F.6}$$

En z_0 on a un rayon de courbure infini, le front d'onde est plan, et $R(z) = \pm\infty$. On nomme z_R la *longueur de Rayleigh*. Sa signification physique viendra, ne t'en fais pas.

Par un habile report on obtient ensuite, avec $k = 2\pi/\lambda$

$$w(z=0) = w_0 = \sqrt{\frac{z_R\lambda}{\pi}} \tag{F.7}$$

puis dans un plan quelconque

$$\begin{cases} R(z) = z\left[1 + \dfrac{z_R^2}{z^2}\right] \\ w(z) = w_0\sqrt{1 + \dfrac{z^2}{z_R^2}} \end{cases} \tag{F.8}$$

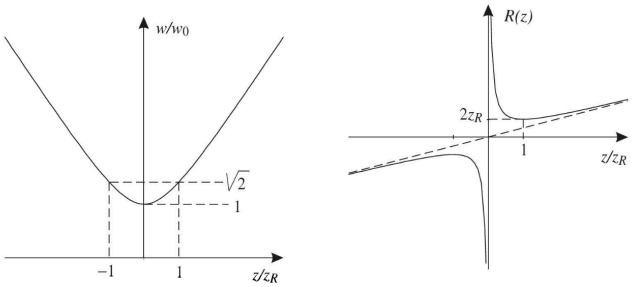


FIGURE F.1 – Les fonctions w (rayon de ceinture) et R (rayon de courbure) normalisées.

1.3 Paramètres importants

On peut intégralement définir le mode Gaussien par deux paramètres : w_0 et z_R. Ces deux paramètres, nommé *waist* (ou *rayon de ceinture minimal*) et *longueur de Rayleigh*, sont reliés par l'équation :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{F.9}$$

Le point $z = 0$ est le point d'étranglement du faisceau, celui qui a le rayon minimal, w_O. On a de plus que $w(z_R) = \sqrt{2}w_0$.

La longueur de rayleigh est donc une mesure de la divergence du faisceau, tandis que w_0 mesure le pincement de ce dernier. Le bilan étant que plus le faisceau est pincé, plus il diverge rapidement.

Lorsque $z \gg z_R$, on peut écrire la relation

$$w(z) \simeq w_0 \frac{z}{z_R} \tag{F.10}$$

Cela donne naissance au concept d'*angle de divergence du faisceau* :

$$\tan\theta \simeq \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{F.11}$$

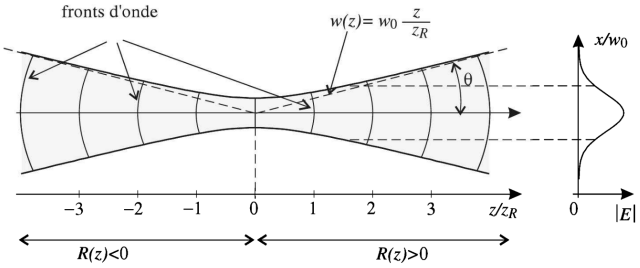


FIGURE F.2 – Récapitulatif de tout ce bazard.

OdG

Les pointeurs lasers standards émettent dans le rouge à $\lambda = 700$ nm, avec un waist de $w_0 = 1$ mm. Alors $z_R = 4.5$ m. Le faisceau est peu divergent, d'où son usage comme pointeur. Certains laser atteignent des longueurs de rayleigh de l'ordre du kilomètre.

1.4 Le terme de phase

On a laissé de côté le problème du terme $A(z)$, cependant comme cela a été indiqué, par conservation de l'énergie, on peut le retrouver. En effet une intégration de 1.2 donne, avec C une constante arbitraire qu'on prendra à 1, et $\phi(z) = -\arctan\frac{z}{z_R}$:

$$A(z) = \frac{C}{1 - i\frac{z}{z_R}} = \frac{C}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}} e^{-i\varphi(z)} = C\frac{w_0}{w(z)} e^{-i\varphi(z)} \tag{F.12}$$

Bilan :

$$E(x,y,z) = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] \exp\left[-ikz - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right] \tag{F.13}$$

Modes supplémentaires

Les modes d'ordres supérieurs sont décrits dans le ✍ Dangoisse, p. 45.

1.5 Modélisation

Une modélisation intéressante à faire du faisceau est celle du **Cône-Cylindre-Cône** (ou CCC).

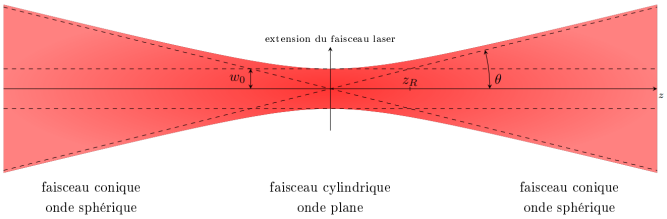


FIGURE F.3 – Modèle CCC.

Pour $|z| < z_R$, l'onde est quasi plane, on la considère comme plane, c'est le domaine *cylindre*. Pour $|z| > z_R$, l'onde est quasi sphérique, on la considère comme sphérique, c'est la zone *cône*. Le cône a une ouverture $\theta = \dfrac{\lambda}{\pi w_0} = \dfrac{w_0}{z_R}$.

1.6 Application

Une application très standard de ces résultat est l'augmentation de la capacité des disques optiques, comme les DVD et les blueray. En effet, z_R est donné par la forme du lecteur, puisque le faisceau doit pouvoir faire un aller-retour entre le capteur et le disque sans trop s'élargir ($z_R \simeq$ quelques mm). On a alors une densité d'information limitée par w_0, puisque les cases du disque ne doivent pas se superposer.

Ainsi en jouant sur la longueur d'onde, on peut diminuer w_0 et s'en sortir, comme le montre ce tableau !

disque optique	année	λ	couleur	capacité
CD	1982	780 nm	IR	0.7 Go
DVD	1997	650 nm	rouge	4.7 Go
blu-Ray	2006	405 nm	bleu	25 Go

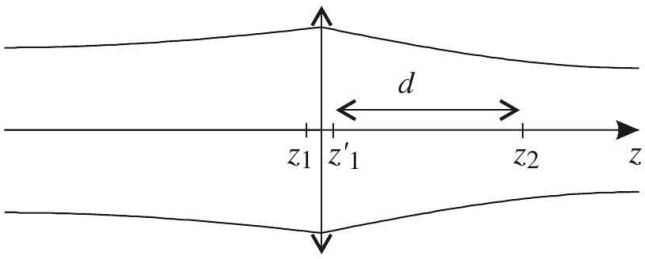
Nous allons maintenant nous intéresser à ce qu'il se passe quand on utilise une lentille mince avec des faisceaux Gaussiens, afin de mieux comprendre les problèmes de focalisation et le fonctionnement des lentilles.

2 Propagation d'un faisceau Gaussien à travers un système optique

2.1 Passage au travers d'une lentille mince

On a vu qu'un faisceau Gaussien était complètement caractérisé par son rayon minimal w_0 (*a.k.a.* le *waist*) et son rayon de courbure $R(z)$. On a également constaté que ces deux informations pouvaient être rassemblées dans une seule grandeur : le rayon de courbure complexe $Q(z) = z + iz_R$, où z_R est la longueur de Rayleigh. Ainsi, dans le cas d'une propagation libre d'un faisceau laser entre deux plans z_1 et z_2, on écrit

$$Q(z_2) = Q(z_1) + d \qquad \text{avec} \qquad d = z_2 - z_1 \tag{F.14}$$



Si on prend maintenant le cas d'une lentille mince, on se place dans une situation où les plans d'entrée et de sortie de la lentille sont confondus (car c'est une lentille *mince*) et la taille du faisceau $w(z)$ est identique que l'on soit juste avant ou juste après la lentille. Ainsi, la lentille ne va introduire qu'un terme de phase qui va modifier le rayon de courbure $R(z)$ du laser. On admet (après avoir utilisé les matrices de Jones, cf ✍ Dangoisse) que les rayons de courbures du laser avant et après la lentille sont liés par la relation suivante :

$$\frac{1}{R(z_2)} = \frac{1}{R(z_1)} - \frac{1}{f} \tag{F.15}$$

Ainsi, en fonction de la valeur de f, la rayon de courbure d'un faisceau sortant peut être négatif (convergence en sortie de la lentille) ou positif (divergence en sortie de la lentille).

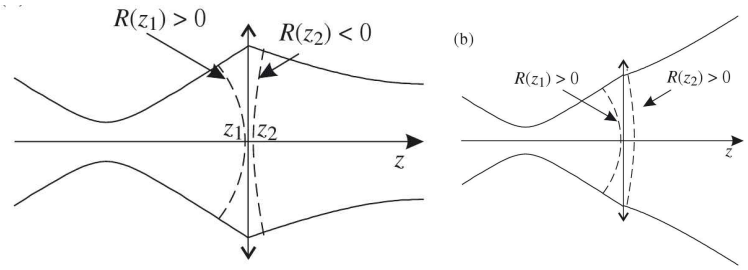


FIGURE F.4 – Cas où $R(z_2) < 0$ à gauche et cas où $R(z_2) > 0$ à droite.

Remarque

Cette relation ressemble furieusement à la relation de conjugaison d'une lentille parce qu'on peut approximer le faisceau incident comme étant une onde sphérique émanant d'une source ponctuelle à la distance $R(z_1)$ en amont de la lentille et le faisceau sortant comme une onde sphérique convergeant vers un point image à la distance $R(z_2)$ en aval de la lentille.

Étant donné qu'on a établi que $w(z_1) = w(z_2)$, cette pseudo-relation de conjugaison est valable également pour les rayons de courbure complexes :

$$\frac{1}{Q(z_2)} = \frac{1}{Q(z_1)} - \frac{1}{f} \tag{F.16}$$

On peut maintenant s'attaquer au passage d'un laser à travers une lentille mince suivi d'une propagation libre. Pour cela, on note z_1 le point situé juste avant la lentille, z_1' celui situé juste après la lentille et enfin z_2 le point situé à une distance $d = z_2 - z_1'$ de z_1'. La relation F.16 nous permet d'obtenir

$$Q(z_1') = \frac{Q(z_1)}{1 - \dfrac{Q(z_1}{f}}$$

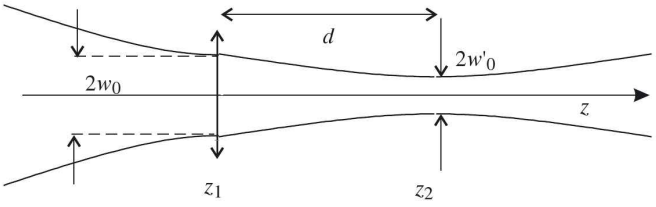
et la relation F.14 donne alors

$$\boxed{Q(z_2) = Q(z_1') + d = \frac{\left(1 - \dfrac{d}{f}\right) Q(z_1) + d}{\left(-\dfrac{1}{f}\right) Q(z_1) - 1}} \tag{F.17}$$

On peut mettre alors $Q(z_2)$ sous la forme $\dfrac{AQ(z_1)+B}{CQ(z_1)+D}$ et ainsi retrouver la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ caractérisant le système optique dans le formalisme de Jones [2].

Bilan : On peut relier le rayon de courbure juste avant la lentille avec le rayon de courbure juste après la lentille, et donc on peut intégralement définir le rayon sortant avec la focale et le rayon incident.

2.2 Focalisation d'un faisceau laser par une lentille



Plaçons-nous dans le cas d'un faisceau laser arrivant sur une lentille de sorte que son *waist* soit dans le plan d'entrée de la lentille, *i.e.* en z_1. On cherche à connaître le nouveau *waist* w_0' ainsi que sa position z_2 qui est à la distance d en aval de la lentille. Le faisceau incident a pour rayon de courbure complexe

$$Q(z_1) = \frac{ikw_0^2}{2} = iz_R \qquad \text{où on rappelle que} \qquad w_0 = \sqrt{\frac{z_R\lambda}{\pi}}$$

car $w(z_1) = w_0$ et donc $R(z_1)$ est infini. On a de même en z_2

$$Q(z_2) = \frac{ik(w_0')^2}{2} = iz_R'$$

puisque $w'(z_2) = w_0'$ et donc $R'(z_2)$ est infini. La relation reliant $Q(z_2)$ à $Q(z_2)$ donne quant à elle

$$Q(z_2) = \frac{d + iz_R\left(1-\dfrac{d}{f}\right)}{1 - i\dfrac{z_R}{f}} = d - \frac{f}{1+\left(\dfrac{f}{z_R}\right)^2} + i\frac{z_R}{1+\left(\dfrac{z_R}{f}\right)^2} \tag{F.18}$$

Puisqu'il faut annuler la partie réelle, on obtient

$$\boxed{d = \frac{f}{1+\left(\dfrac{f}{z_R}\right)^2}}$$

On peut également identifier la partie imaginaire pour obtenir la longueur de Rayleigh et donc le *waist* du laser en sortie :

$$z_R' = \frac{z_R}{1\left(\dfrac{z_R}{f}\right)^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{w_0' = w_0\sqrt{\frac{1}{1+\left(\dfrac{z_R}{f}\right)^2}}} \tag{F.19}$$

Ainsi, le faisceau est localisé à la distance d de la lentille.

Cas d'un faisceau peu divergent

Si le faisceau est peu divergent, notamment si $z_R \gg f$, alors on peut simplifier la formule précédente :

$$w_0' = w_0\frac{f}{z_R}$$

2. Plus d'infos dans les compléments du ✍ Dangoisse, notamment des exemples de matrices pour divers systèmes optiques.

2.3 Élargissement du faisceau avec deux lentilles

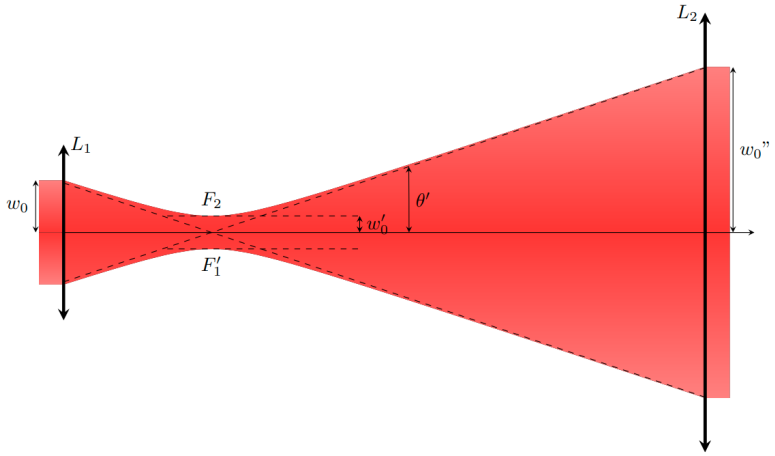


FIGURE F.5 – Schéma du montage d'élargissement de faisceau.

On peut encore une fois partir de ce qu'on vient de voir précédemment et regarder ce qu'il se passe quand on fait passer un faisceau Gaussien dans un système afocal composé de 2 lentilles convergente.

Lorsque le faisceau laser arrive sur une première lentille de sorte à ce que son *waist* w_0 soit au niveau du plan d'entrée de cette lentille, il sort de la lentille avec un nouveau *waist* w_0' positionné à une distance d de la lentille, conformément à ce qu'on vient de voir.

Le faisceau va ensuite se propager librement jusqu'à atteindre la seconde lentille. Puisque le *waist* w_0' est proche du point focal image F_1' de la première lentille et que le système est afocal, on sait que le *waist* du faisceau est également proche du point focal objet de la seconde lentille. On en déduit que le faisceau sortira de la seconde lentille de sorte à ce que son nouveau *waist* w_0'' soit proche du plan de sortie de la seconde lentille.

Tâchons maintenant d'exprimer w_0''. Pour cela, on sait qu'après la première lentille, on a

$$w_0' = w_0 \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{z_R}{f_1}\right)^2}}$$

Pour la seconde lentille, on peut se rendre compte qu'on est dans la même situation que la partie précédente en considérant un faisceau allant dans le sens inverse, *i.e.* de la droite vers la gauche. Grâce au principe de retour inverse de la lumière, on a donc

$$w_0' = w_0'' \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{z_R''}{f_2}\right)^2}}$$

On trouve finalement

$$w_0'' = w_0 \sqrt{\frac{1+\left(\frac{z_R''}{f_2}\right)^2}{1+\left(\frac{z_R}{f_1}\right)^2}} \tag{F.20}$$

En considérant **l'approximation du faisceau faiblement divergent**, *i.e.* $z_R'' \gg f_2$ et $z_R \gg f_1$, on trouve :

$$\boxed{w_0'' = w_0 \frac{f_2}{f_1}} \tag{F.21}$$

LPX G

Régimes transitoires en électronique

Niveau : CPGE/L2

Bibliographie

- ✍ http://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/ancien_site/phys_appl/Cours/electrocin/EC4.pdf
- ✍ MP33

Prérequis

➢

Expériences

☕

1 Régime transitoire du premier ordre 734
1.1 Décharge d'un condensateur dans une résistance 734
1.2 Établissement du courant continu dans un RL 734
1.3 Propriétés générales du régime transitoire 735
2 Régime transitoire d'ordre 2 735
2.1 RLC général 735
2.2 Résolution détaillée de l'équation, apparition de 3 régimes 735
2.3 En pratique : temps de réponse et dépassement 737

1 Régime transitoire du premier ordre

1.1 Décharge d'un condensateur dans une résistance

Commençons simplement avec un circuit RC série alimenté par un générateur de tension E constante. La loi des mailles donne alors

$$E = Ri + u_C$$

avec u_C la tension aux bornes du condensateur. Or pour un condensateur on sait que $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ donc on obtient l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

Cette équation se résout aisément pour donner une solution de la forme

$$u_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) + E \qquad \text{avec} \qquad \tau_C = RC$$

La constante A est déterminée par la condition initiale. Si on prend par exemple $u_C(t=0) = 0$ (typiquement on ferme le circuit à $t = 0$), on obtient $A = -E$ et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right)\right]}$$

Le régime établi est défini pour $t \to \infty$ et correspond à $u_{C,\infty} = E$ tandis que le régime transitoire correspond à la montée exponentielle de $u_C(t=0) = 0$ à $u_{C,\infty} = E$. Notons que l'on peut retrouver la valeur de τ_C en mesurant la pente à l'origine de la montée exponentielle.

1.2 Établissement du courant continu dans un RL

On peut faire la même chose avec un RL série, toujours alimenté par un générateur de tension E constante. On a cette fois

$$E = Ri + u_L$$

avec u_L la tension aux bornes de la bobine. Pour une bobine on sait que l'on a $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ donc on obtient

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

Encore une fois, on résoud facilement cette équation pour trouver

$$i(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) + \frac{E}{R} \qquad \text{avec} \qquad \tau_L = \frac{L}{R}$$

Si on prend $i(t=0) = 0$ comme exemple de condition initiale, on obtient $A = -\frac{E}{R}$ et donc

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond à $i_\infty = \dfrac{E}{R}$ tandis que le régime transitoire correspond à la montée exponentielle de $i(t=0) = 0$ à $i_\infty = \dfrac{E}{R}$. Notons que l'on peut retrouver la valeur de τ_L en mesurant la pente à l'origine de la montée exponentielle.

1.3 Propriétés générales du régime transitoire

Ce régime transitoire d'ordre 1, bien que peu courant car les systèmes réels sont généralement plus complexes, a des propriétés intéressantes en pratique.

En effet, son temps de réponse peut être adapté en changeant les propriétés des composants, et sans créer de dépassement de commande, c'est à dire sans dépasser la valeur finale de tension. C'est un grand avantage car cela permet d'éviter une mauvaise surprise comme par exemple un composant qui grille parce que sa tension a été trop élevé sans qu'on le veuille.

Jusque là, rien de très excitant. Passons à la vitesse supérieure, et regardons des systèmes plus complexes.

2 Régime transitoire d'ordre 2

2.1 RLC général

Considérons maintenant un RLC série, alimenté par un générateur de tension E constante. La loi des mailles donne

$$E = Ri + u_L + u_C$$

en gardant les mêmes notations que la partie précédente. On a toujours $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et on a $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ donc cette fois on obtient une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

On écrire de façon générale cette équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ la pulsation propre et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ la facteur de qualité.

2.2 Résolution détaillée de l'équation, apparition de 3 régimes

Puisqu'on est à tension E constante, la solution particulière de cette équation est triviale puisque $u_C = E$ convient. On va donc surtout regarder la solution homogène de l'équation.

Pour trouver la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, on pose le polynôme caractéristique de la-dite équation et on cherche ses racines. Dans notre cas, on s'intéresse donc au polynôme $X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2$. Son discriminant est alors

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

On peut donc obtenir des racines réelles ou bien complexes, il faut alors distinguer 3 cas différents :

- **Premier cas :** $\Delta > 0 \iff Q < \dfrac{1}{2}$

Les deux racines sont réelles et valent

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$$

L'équation différentielle a donc une solution de la forme

$$u_C(t) = A\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)t\right] + B\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)t\right] + E$$

ou plutôt

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left\{A\exp\left(-\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right) + B\exp\left(+\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)\right\} + E$$

Cette fois, il nous faut 2 conditions initiales pour trouver à la fois A et B. Si on prend comme condition initiale $u_C(t=0) = 0$ (condensateur initialement déchargé) et $i(t=0) = 0$ (circuit fermé à $t = 0$), *i.e.* $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$, on trouve

$$\begin{cases} A + B + E = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $A = B = -\dfrac{E}{2}$, et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cosh\left(\omega_0 t\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond de nouveau à $u_{C,\infty} = E$. Cependant, dans le régime transitoire on observe une croissance monotone de u_C en partant de $u_C(t=0) = 0$ et jusqu'à atteindre $u_{C,\infty} = E$. C'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime apériodique**.

- **Second cas : $\Delta = 0 \iff Q = \dfrac{1}{2}$**

  Cette fois, il n'existe qu'une racine au polynôme mais cette racine est toujours réelle et vaut

$$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

  L'équation admet alors des solutions de la forme

$$u_C(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t) + E$$

  On garde les mêmes conditions initiales, qui donnent alors

$$\begin{cases} B + E = 0 \\ A - \omega_0 B = 0 \end{cases}$$

  On obtient donc $A = -\omega_0 E$ et $B = -E$, et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - (\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)\right]}$$

  Le régime établi correspond encore à $u_{C,\infty} = E$ et dans le régime transitoire correspond toujours à une croissance monotone de u_C en partant de $u_C(t=0) = 0$ et jusqu'à atteindre $u_C = E$. Cependant, on imagine bien que cela va changer quand Q va finalement devenir supérieur à $\dfrac{1}{2}$, et c'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime critique**.

- **Troisième cas : $\Delta < 0 \iff Q > \dfrac{1}{2}$**

  Dans ce troisième et dernier cas, le polynôme possède de nouveau 2 racines mais qui sont complexes :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

L'équation différentielle admet alors des solutions de la forme

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left\{A\exp\left(-j\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right) + B\exp\left(+j\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)\right\} + E$$

Avec une fois de plus les mêmes conditions initiales, on obtient de manière similaire au premier cas

$$\begin{cases} A + B + E = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

On a donc de nouveau $A = B = -\dfrac{E}{2}$ et donc

$$\boxed{u_C(t) = E\left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos\left(\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)\right]}$$

Le régime établi correspond toujours à $u_{C,\infty} = E$, mais le régime transitoire à complètement changé de forme. En effet, il correspond cette fois à des oscillations de période ω_0 contenues dans une enveloppe exponentielle qui fera tendre u_C vers $u_{C,\infty} = E$. C'est pourquoi on qualifie ce régime de **régime pseudo-périodique**.

2.3 En pratique : temps de réponse et dépassement

✍ http://fltsi.fr/tsi/tsi2/TP%20preparation%20oraux/3_MODELISATION%20EXPERIMENTALE_MCC/M%C3%A9thodes%20et%20abaques%20d%27identification%202014.pdf

En pratique, dans un système électrique ou plus généralement un système technologique, il faut prendre en compte deux facteurs : le temps de réponse à la commande et le dépassement de commande. En effet, si on prend l'exemple très simple d'un robot à laver les voitures (le gros rouleau), on ne veut pas attendre 20 minutes que le rouleau se mette en place, mais on ne veut pas non plus qu'il aille trop loin et casse la voiture.

Dans le cadre d'une réponse $s(t)$ à l'échelon $e(t)$, on définit le **dépassement de commande** D comme

$$D = \frac{s(+\infty) - \max_{t>0}(s(t))}{s(+\infty) - s(0)} \tag{G.1}$$

Généralement, on considère que $s(0) = 0$.

On définit également le temps de réponse à $n\%$ noté τ_n comme le temps à partir duquel la valeur de sortie reste à moins de $n\%$ de sa valeur finale.

Ces deux valeurs sont typiquement données par les paramètres standards du système, à savoir son coefficient d'amortissement et sa pulsation apparente.

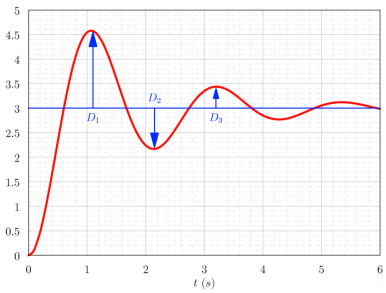


FIGURE G.1 – Illustration des dépassements.

Les résultats principaux que l'on peut citer dans le régime pseudo périodique (c'est à dire le régime avec déplacement) sont que les dépassements sont situés à

$$t_i = i \times \frac{T_p}{2} = i\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \tag{G.2}$$

Et l'amplitude du $n$ieme vaut :

$$D_n = e^{\frac{-n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \tag{G.3}$$

L'abaque ci-dessous permet de connaître la valeur du $k$ieme dépassement pour cent en fonction du facteur d'amortissement. Lorsque l'amortissement tend vers 1, on peut ainsi mettre en évidence que la valeur des dépassements est de plus en plus faible.

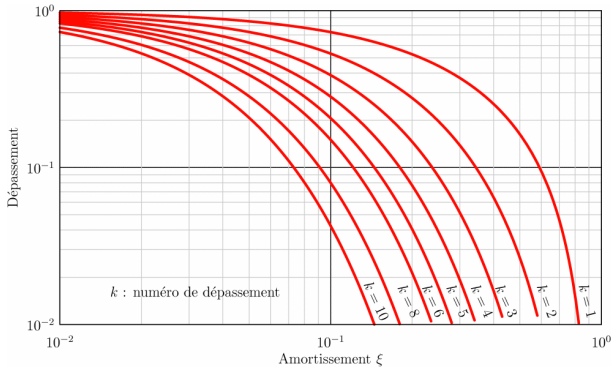


FIGURE G.2 – Abaque des dépassements.

Le temps de réponse réduit se lit pour sa part sur une abaque de temps de réponse réduit. Ce que l'on nomme temps de réponse réduit c'est $\tau_{5\%}\omega_0$.

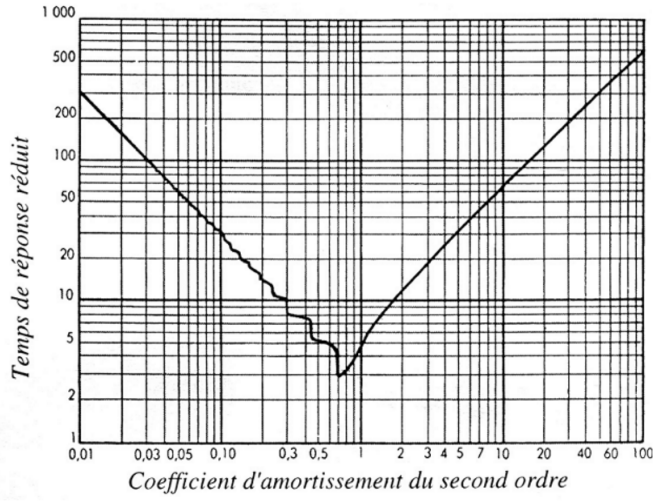


FIGURE G.3 – Abaque de temps de réponse réduit.

On voit que le temps de réponse est minimal pour un amortissement de $\xi = \sqrt{2} \simeq 0.7$. La structure en escalier de la gauche de l'abaque est due aux dépassements successifs. Ainsi on peut en pratique mener l'étude d'un système et en prévoir les propriétés du régime transitoire simplement grâce à des abaques, qui sont en fait des courbes tracées numériquement pour nous limiter le travail !

Les autres régimes transitoires : ✍ MP33

Deuxième partie

Leçons de Chimie

1 Séparation, purifications, contrôle de pureté 743

2 Polymères 751

3 Chimie durable 759

4 Synthèses inorganiques 769

5 Stratégie et sélectivité en synthèse organique 779

6 Dosages 787

7 Cinétique et catalyse 795

8 Caractérisations par spectroscopie en synthèse organique 803

9 Du macroscopique au microscopique dans les synthèses organiques 819

10 Capteurs électrochimiques 829

11 Molécules de la Santé 839

12 Stéréochimie et molécules du vivant 847

13 Acides et bases 857

14 Liaisons chimiques 863

15 Solvants 875

16 Classification périodique 885

17 Solides cristallins 897

18 Corps purs et mélanges binaires 905

19 Application du premier principe de la thermodynamique à la réaction chimique 919

20 Détermination de constantes d'équilibre 931

21 Cinétique homogène 941

22 Évolution et équilibre chimique 949

23 Diagrammes potentiel-pH (construction exclue) 959

24 Optimisation d'un procédé chimique 971

25 Corrosion humide des métaux 981

26 Conversion réciproque d'énergie électrique en énergie chimique 993

27 Solubilité 1003

28 Cinétique électrochimique 1011

LC 1

Séparation, purifications, contrôle de pureté

Niveau : Lycée

Bibliographie

- La leçon de 2017
- Wikipedia
- https://youtu.be/3wKTiLfnSNs

Prérequis

- nomenclature
- états de la matière
- solubilité
- sécurité au laboratoire
- spectroscopie
- espèce chimique
- Evaporateur rotatif

Expériences

- Extraction de l'huile essentielle de clou de girofle par hydrodistillation
- Extraction liquide[2]
- Purification à l'évaporateur rotatif
- Paracétamol : Banc Kofler
- Recristalisation
- Filtration

1 Cas d'un liquide : l'eugénol . . . 744
1.1 Relargage et extraction par solvant . . . 745
1.2 Évaporation du solvant . . . 746
1.3 Contrôle de pureté par CCM . . . 746
2 Cas d'un solide : le paracétamol . . . 747
2.1 Test de pureté : le banc Kofler . . . 747
2.2 Purification par recristallisation . . . 748
2.3 Essorage sur büchner . . . 748
2.4 Retour au banc . . . 749
3 Étude spectroscopique . . . 749

Introduction

Avoir un produit de synthèse pur, c'est important. En effet, en médecine, il faut administrer la bonne dose et la bonne molécule, ce qui est compromis si le produit n'est pas pur. Par exemple, le paracétamol, médicament le plus consommé au monde, est comme nous allons le voir plus tard synthétisé à partir d'une molécule qui est CMR (cancérigène, reprotoxique et mutagène), et nocive pour l'environnement, le 4-aminophénol.

Nous allons au cours de cette leçon étudier les méthodes de séparation, qui visent à transformer un mélange de substances en deux ou plusieurs composants distincts, dans le but de purifier une substance chimique d'intérêt, et nous allons étudier les méthodes de vérification du bon fonctionnement de la purification : les contrôles de pureté.

On s'adresse à une terminale STL, sachant que la distillation et la décantation sont au programme de seconde.

Allumer le banc Kofler avant de commencer la leçon.

1 Cas d'un liquide : l'eugénol

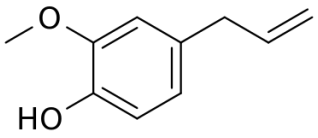


FIGURE 1.1 – La molécule d'eugénol (2-méthoxy-4-(2-propènyl)-phénol).

[ceci est abordable en SECONDE GÉNÉRALE]

Dans de nombreuses synthèses, on se retrouve avec un produit de réaction dissout dans un solvant, qui serait à l'état liquide s'il était pur. Je souhaite isoler ce produit, en dépensant le moins d'énergie possible bien sûr.

Ici la situation initiale est la suivante. On extrait l'huile essentielle de clou de girofle, l'eugénol, utilisé entre autres comme un antidouleur en dentisterie, par hydrodistillation selon le protocole suivant (fait en préparation) :

Hydrodistilation de l'eugénol

✍ Le pdf TP-eugénol ⏲ 30 minutes passives

matériel :

- 10g de girofle
- mortier
- ballon bicol de 250ml
- chauffe ballon
- colonne de distillation
- 100mL d'eau

Bien que l'eugénol présente un point d'ébullition élevé (253°C) et soit insoluble dans l'eau, il forme avec ce dernier un « azéotrope » distillant à une température voisine de 100°C.

On vaporise, on obtient une émulsion, que l'on peut ensuite traiter.

Le résultat est un mélange eau-eugénol émulsifié, donc que l'on ne peut pas simplement traiter par décantation, dont on veut extraire l'eugénol.

1.1 Relargage et extraction par solvant

Le but de cette étape est d'extraire le produit de l'eau au maximum. C'est une molécule peu polaire, organique, donc on va privilégier les solvants organiques. Il est peu soluble dans l'eau donc on a déjà deux phases, on veut que la phase organique contienne **autant de produit** que possible, et soit dans un solvant **aussi peu dangereux que possible**. Idéalement on veut solubiliser dans un solvant qui soit utilisable ou éliminable.

Le solvant doit :

- être non miscible avec le solvant initial (eau).
- solubiliser d'avantage l'eugénol.
- être le moins toxique possible.
- avoir une basse température d'ébullition, soit être volatil (cf après).

	Eau	Cyclohexane	Eau salée	Eugénol
$T_{Ebullition}$	100°C	80,7°C	> 100°C	253°C
Densité	1,00	0,780	1,10	1,06
Solubilité dans l'eau		~ nulle		Faible
Solubilité dans l'eau salée		~ nulle		Très faible
Solubilité dans le cyclohexane	~ nulle		~ nulle	Très bonne

FIGURE 1.2 – Propriétés de quelques solvants usuels vis à vis de l'eugénol

Il est intéressant de remarquer que saler l'eau peut aider à relarguer l'eugénol, c'est à dire à le faire quitter la phase aqueuse. C'est d'ailleurs comme ça qu'on récupère traditionnellement l'eugénol, en salant le distillat, cependant on peut faire mieux !

On voit en effet que le solvant le plus adapté à solubiliser l'eugénol est le cyclohéxane. Il est très peu miscible avec l'eau (car totalement apolaire et de densité très différente), et solubilise très bien l'eugénol (mieux que l'eau). De plus, il a une température d'ébullition beaucoup plus faible que l'eugénol, ce qui permettra plus tard de l'éliminer.

Ici, on fait une **extraction** car le produit d'intérêt change de phase. Si ce sont les impuretés que l'on veut faire changer de phase, on aurait appelé cette opération un *lavage*.

Extraction liquide-liquide

✍ Le pdf TP-eugénol ⏲ 3 minutes

matériel :

- ampoule à décanter
- 10mL de cyclo
- du sel

On verse dans l'ampoule à décanter le contenu de l'erlenmeyer ainsi que 10 mL environ de cyclohexane.

On agite au moins pendant deux minutes en maintenant le bouchon et sans oublier de lâcher de temps à autre l'éventuelle surpression : le dégazage se fait robinet en l'air vers la vitre de protection !

Le cyclohexane a une densité de 0,780. La phase aqueuse est donc la plus dense ici : il faut la soutirer d'abord avant de récupérer la phase organique qui est la moins dense (garder la phase aqueuse dans un becher).

(Ajouter du sel au mélange permet un relargage)

Pour s'assurer d'avoir bien identifié les phases organique et aqueuse, on peut utiliser la technique de la goutte d'eau : on fait tomber une goutte d'eau distillée dans l'ampoule à décanter et on regarde dans quelle phase la goutte est tombée.

Sécher la phase organique avec du $MgSO_4$ anhydre.

On se retrouve avec de l'eugénol solubilisé dans du cyclohéxane.

1.2 Évaporation du solvant

À l'évaporateur rotatif, présent dans le programme de terminale STL, on évapore le solvant, et seulement le solvant, ce qui est possible car il a une température d'ébullition plus basse que le produit d'intérêt.

http://culturesciences.chimie.ens.fr/utilisation-de-l%C3%A9vaporateur-rotatif

On met le ballon contenant l'eugénol et le solvant sur l'évaporateur rotatif et on allume l'arrivée d'eau permettant la recondensation des vapeurs de solvant, coulant alors dans le ballon de récupération.

On lance alors le dispositif de rotation et enfin la pompe pour faire le vide. En fin de manipulation, on pense à remettre doucement le système à pression atmosphérique.

Ici le solvant est du cyclohexane dont la température d'ébullition à pression atmosphérique est de 80°C. Chauffer à une quarantaine de degrés est alors suffisant en descendant la pression à 10 mmHg.

On évalue la masse d'Eugénol récupérée, et on montre qu'on a bien extrait plus que si on avait pas utiliser le cyclo.

1.3 Contrôle de pureté par CCM

Pour évaluer la pureté du produit final, il est intéressant de procéder à une chromatographie sur couche mince. Le principe est que le liquide, mobile, va monter dans le solide, phase fixe, et en fonction de l'affinité des composants du liquide avec le solide (ici de la silice), ces derniers montent plus ou moins haut sur la plaque. La ligne sur laquelle on dépose les composés analysés est la ligne de base, et on définit le **rapport frontal** d'un composé comme étant le rapport entre la distance ligne de base - tâche du composé et la distance ligne de base - front de solvant (ligne à laquelle l'éluant s'est arrêté de monter).

Ainsi, cette méthode permet de déterminer si un produit est pur, mais pas forcément de déterminer si c'est le bon produit. Ici on est plutôt certain de ce que l'on récupère, donc on peut s'en servir sans remords.

On fait une CCM du résultat avec comparaison au produit pur, sous une lampe à UV, avec du cyclohexane comme éluant.

On peut aussi regarder par rapport au rapport frontal tabulé, mais cela sort du programme de terminale.

Conclusion

On a une pureté relative, qu'il faudrait évaluer plus finement, mais si tout se passe bien, elle est assez bonne, et les "déchets" ne sont gère plus dangereux que ce que l'on trouve dans un bouillon de légume contenant des clous de girofle. Pour s'assurer de manière plus fine de sa pureté, on peut penser à des méthodes de spectroscopie RMN et IR.

Le rendement est cependant difficile à évaluer, car on ne sait pas combien d'eugénol il y avait initialement dans le distillat. On pourrait simuler une extraction-purification en faisant nous même le mélange eau-eugénol, à partir d'une quantité connue. C'est pédagogiquement moins intéressant, mais ça permet d'évaluer le rendement du procéder, et de l'extrapoler aux cas réels.

Et si on a un solide ?

2 Cas d'un solide : le paracétamol

Le paracétamol est une molécule que nous rencontrons assez souvent dans notre vie puisqu'il s'agit du principe actif d'une grande partie de médicaments luttant contre la fièvre et les douleurs bénignes (maux de tête, maux de dent, etc.). On comprend donc assez facilement que sa synthèse doit faire l'objet d'un procédé rigoureux en terme de contrôle de pureté : il faut en effet savoir ce qu'on fait avaler au patient et en connaître les effets sur sa santé, et ensuite il faut garder en tête les enjeux économiques de la synthèse.

On a fait la synthèse du paracétamol (fichier TP-paracetamol), à partir du para-aminophénol et d'anhydride éthanoïque.

On obtient un solide blanc, mais un des réactifs est également un solide blanc, on veux donc vérifier qu'on a bien le produit recherché, surtout que l'un des réactifs est CMR.

2.1 Test de pureté : le banc Kofler

Le but de cette partie est de montrer que le résultat n'est pas pur.

On explique comment marche le banc (gradient de température), et **on l'allume en avance**.

Le produit pur fond à 169°C.

Kofler

✍ 5 minutes

- On réalise l'expérience avec le produit de référence, ce qui constitue l'étalonnage.
- On essuie le banc Kofler avec un morceau de coton ou du papier sec (et suffisamment épais pour ne pas se brûler) pour en retirer les résidus du produit précédemment utilisé, avant d'y placer l'échantillon à analyser.

  Attention, on ne **lavera pas** à l'éthanol entre les deux utilisations le banc sous peine de le refroidir localement et donc de devoir attendre qu'il atteigne de nouveau l'équilibre thermique.
- Une fois le point de fusion du produit brut obtenu, on essuie le banc Kofler, cette fois, avec un bout de coton ou un papier imbibé d'éthanol.

Ainsi on voit que le produit n'est pas pur ! Il faut donc le purifier, et pour cela on va utiliser une recristallisation.

2.2 Purification par recristallisation

Un produit, en se solidifiant, emprisonne en général des impuretés dans son édifice cristallin. Dans le but de les éliminer, on va jouer sur le fait que le produit d'intérêt et les impuretés ont des propriétés de solubilité différentes dans un solvant donné. Il faut s'arranger pour que les impuretés se trouvent solubilisées en milieu liquide pendant que le solide cristallise lentement. On utilise pour cela un solvant de recristallisation dans lequel on va dissoudre le solide à purifier.

Ce solvant ne doit pas dissoudre le solide à froid, sinon on le perd. Par contre, expérimentalement, on constate en général que la solubilité d'une espèce dans un solvant donné croît lorsque la température croît. On va se servir de cette propriété et on va donc chauffer le solvant par un dispositif à reflux pour dissoudre le solide et ses impuretés, ce qui va disperser les impuretés dans le solvant.

Si on veut que la recristallisation soit efficace, il faut que **le solvant solubilise aussi les impuretés à froid**. Ainsi, en laissant la solution refroidir, le composé d'intérêt va recristalliser mais pas les impuretés qui resteront en solution.

Par ailleurs il faut que cette cristallisation soit **lente** pour éviter au maximum d'emprisonner de nouveau des impuretés, c'est pourquoi on laisse en général le milieu refroidir à l'air libre, sans utiliser de bain de glace.

Il faut noter que le produit d'intérêt est toujours un peu soluble, même à froid, dans le solvant utilisé. C'est pourquoi on perd toujours du produit d'intérêt lors de l'étape de filtration qui suit la recristallisation. C'est la raison pour laquelle on doit toujours **utiliser le moins de solvant possible** et que toute étape de recristallisation doit se justifier par un contrôle préalable de la pureté du composé cible.

Recristallisation du paracétamol

10 minutes

- On effectue la recristallisation du paracétamol avec de l'eau (environ 25 mL pour 0.85g de produit brut), ce qui permet de retirer les impuretés ainsi que les restes de para-aminophénol. Le but est d'être à saturation à chaud, donc on utilise une ampoule de coulée isobare.
- On pense à retirer l'agitateur magnétique une fois tout le solide solubilisé à chaud pour éviter qu'il recristallise dessus et donc de perdre du produit.
- Si jamais la recristallisation est trop lente, on peut triturer le ballon et en dernier recours le plonger dans la glace, mais on risque d'emprisonner quelques impuretś de nouveau.
- garder un peu de produit initial pour la comparaison d'aspect.

L'aspect est déjà un peu différent, puisque la poudre auparavant grisatre est maintenant très blanche. Elle est cependant mouillée, et ça c'est pas cool.

2.3 Essorage sur büchner

Buchner

3 minutes

Effectuer un **essorage** sur filtre Büchner, avec très peu de solvant (eau) si possible, afin de limiter les pertes.

AVEC LE SOLVANT DE RECRISTALLISATION, donc de l'eau, et sans en mettre trop, sinon le solide se redissout.

> Faire la différence entre un essorage et séchage, où on veut récupérer le solide (sec), et une filtration où on veut récupérer le liquide.

2.4 Retour au banc

Et paf ça marche ! !

On peut également calculer le rendement, en sachant que 2,75 g = 25,2 mmol au maximum, et on a $M_{\text{paracétamol}} = 151.163$ g/mol.

Ainsi on a une évaluation du rendement, ce qui est fondamental en synthèse industrielle.

3 Étude spectroscopique

Est-ce qu'on la rajoute ? En ouverture ? Cadre théorique ?

Conclusion

La séparation et la purification sont des étapes de transition indispensables entre la synthèse d'un produit et l'évaluation de son rendement, puisqu'on ne peut en effet pas évaluer le rendement d'un produit impur. Les techniques sont diverses mais la logique qu'elles suivent est toujours plus ou moins la même : exploiter les différences de propriétés entre l'espèce recherchée et ses impuretés/solvants. Les exemples que nous avons vu ici sont généralisables, et se retrouveront tout au long de l'année au cours des tp, puisque chaque synthèse peut (et devrait) inclure une purification (ou du moins un contrôle de pureté).

Les procédés développés ici sont réutilisables et généralisables, y compris à des processus hors chimie organique, comme par exemple la métallurgie, science des diagrammes binaires, qui relève plus du cours de classes préparatoires.

Idée de manipulation introductive/fil rouge : ampoule a décanter et diode, c'est super visuel et ça montre ce que l'on veut.

LC 2

Polymères

Niveau : Lycée (Première STD2A ! ! (anciennement Term STL)

Bibliographie

- ✍ La leçon de l'année dernière
- ✍ Wikipedia

Prérequis

- ➢ Formules de Lewis, topologiques, semi-développées

Expériences

- ☕ Propriétés thermomécaniques de quelques polymères
- ☕ Synthèse du nylon 6-10

correctrice : Anne-Laure Bacchetta.

annelaure.bacchetta@free.fr

Ce qui s'est mal passé

- beaucoup de phrases n'ont pas de fin, ou finissent en "oui m'enfin voilà".
- Attention à équilibrer les réactions.
- Érreur sur la réaction projetée pour le nylon.
- Il faudrait analyser un peu plus la réaction du nylon. Rendement ?
- on manque un tout petit peu de temps sur la fin : on attaque le III au bout de 25 minutes.
- On voit vraiment rien sur l'expérience.

Commentaires du jury

Les questions :

- *Synthèse du Nylon, nom officiel pour l'hexaméthilènediamine ?*
- *Est-ce que le polytéréphtalate c'est simple ?* Non c'est une condensation, c'est un polyester. Ne pas l'appeler "polyéthylène téréphtalate".
- *Qu'est-ce-que vous entendez par malléable ? Un autre terme ?* Plutôt élastomère, flexible et déformable. **Élastique**.

- *Connaissez-vous les numéros conventionnels des polymères courants ?* Ils existent, mais les connaître c'est compliqué. L'information est contenue dans un petit triangle sur le plastique, avec un texte ou un numéro indiquant la composition. *Ça peut être intéressant de l'inclure à la leçon.*
- *C'est quoi le code PP ? J'vous aide le premier P c'est pour "poly".*
- *Est-ce que le PET se recycle parfaitement, par exemple les bouteilles ? Le PET transparent pas de problème, l'opaque c'est plus compliqué ou même impossible.* En effet les couleurs sont des additifs qui peuvent nuire aux propriétés de recyclage.
- *La différence entre un polymère et une matière plastique ?* Plastique = polymère + additifs, colorants, etc. Le glycérol est le plastifiant dans l'expérience du polymère biodégradable. Il fait glisser les chaînes les unes sur les autres, comme du beurre.
- *Parmi les mécanismes en chaîne, y'a d'autres façons que la polymérisation radicalaire ?* Oui, par exemple la polymérisation cationique ou anionique.
- *transition vitreuse ?* Passage d'un solide à un truc mou, sous l'effet de la température. Cela correspond à la rupture des liaisons faibles. Il y a une petite expérience marrante à faire là.
- *Le petit logo écoemballage veut-il dire recyclé ?* Non, ça veut juste dire que l'entreprise qui fabrique l'emballage paie une contribution au recyclage.
- *Des polymères de la nature ?* Amidon, kératine, etc.

La question *valeurs de la république.*

Un élève vient te voir pour te dire qu'un de tes collègues le traite mal et lui met que des mauvaises notes. Tu fais quoi ?

Il faut rester objectif, et ne pas faire grand bruit trop vite. La première chose à faire c'est de rassurer l'élève et de lui dire "je vais lui en parler". Faire remonter au prof principal, puis si c'est toi le PP, en parler avec le prof, et si c'est de la récidive ou si il y a un prétexte évident à la haine, en parler avec la direction.

Les remarques :

- être plus démonstratif sur l'intro, ne pas hésiter à faire passer les échantillons.
- Montrer des exemples de traitements différents : polyst. expanse ou durci par exemple.
- On a pas assez donné le fil directeur de la leçon en intro. Il faut poser une problématique. On veut montrer quoi ?
- Les titres ne correspondent pas au contenu.
- Attention la liste de définitions c'est moyen.
- Accentuer le lien au réel.
- Attention à pas parler de radical et de mécanisme. Par contre les modèles moléculaires c'est bien !
- Les couleurs c'est bien aussi, parce que là le tableau il était noir et blanc.
- Plus d'éthymologie.
- Montrer la thermoplasticité, faire chauffer un truc avec un briquet et expliquer le côté malléable.

1 Qu'est-ce qu'un polymère . . . 753
1.1 Définitions et exemples . . . 753
1.2 Degré de polymérisation . . . 754
2 Synthèse d'un polymère . . . 754
2.1 Polyaddition . . . 754
2.2 Polycondensation . . . 755
3 Les polymères dans la vie courante . . . 756
3.1 Propriétés thermiques et mécaniques . . . 756
3.2 Enjeux environnementaux . . . 757

Introduction

Les polymères représentent un groupe d'espèces chimiques extrêmement courant et présent dans notre vie quotidienne. On en trouve naturellement, comme par exemple le caoutchouc issu de la sève du caoutchoutier ou encore la cellulose, ou bien on peut en synthétiser nous mêmes comme en témoignent les innombrables plastiques que l'on peut trouver un partout autour de nous. Bien que toutes ces espèces soient regroupées sous l'appellation de polymère, ils peuvent avoir des propriétés bien différentes. Ainsi, la plastique composant un sac plastique est facilement pliable tandis que celui composant une bouteille est bien plus rigide. De même, tous les polymères n'ont pas le même comportement quand on les chauffe : certains vont se ramollir sous l'effet de la chaleur puis redurcir en se refroidissant (ils sont dits thermoplastiques) alors que d'autres durcissent ou bien ne sont pas sensibles à un apport de chaleur (ils sont dits thermodurcissables).

L'objectif de cette leçon est alors de caractériser les polymères pour ensuite étudier leur synthèse avant de finalement s'intéresser à leurs applications ainsi qu'à leur impact sur l'environnement. Le fil directeur restera la grande diversité des polymères.

Exemples de polymères :

On accompagne l'introduction d'une illustration avec différents types de polymères. On peut montrer une bouteille d'eau, un pull, une plaque de PVC, et s'en servir d'exemple suivi.

1 Qu'est-ce qu'un polymère

1.1 Définitions et exemples

Commençons pour le commencement : qu'est-ce qu'un polymère ? Un **polymère** est un ensemble de **macromolécules** de longueur variable et engendrées par la répétition de ce qu'on appelle un **motif**. Il est ainsi possible d'observer un enchaînement de milliers de motifs, ce qui justifie l'appellation de macromolécule. On peut citer comme exemple le polystyrène montré figure 2.1.

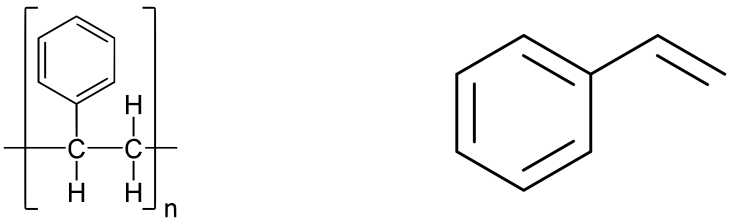


FIGURE 2.1 – Formules topologiques du polystyrène (à gauche) ainsi que du styrène (à droite) *(source : Wikipédia)*

Comme on peut le voir pour le polystyrène, la formule d'un polymère est donnée en encadrant le motif entre des crochets et en ajoutant un indice n qui indique la répétition de ce motif. On montre également le styrène à partir duquel on forme le polystyrène, mais il est important de faire la distinction entre le MOTIF et le MONOMÈRE qui nous permet de former le motif (dans le cas du polystyrène, le styrène est le monomère et non pas le motif).

Remarquons qu'un polymère peut être constitué de plusieurs motifs. On appelle **homopolymère** un polymère constitué de l'enchaînement d'un seul motif et **copolymère** un polymère constitué de l'enchaînement d'au moins deux motifs différents.

Contrairement à une molécule standard, un polymère est composé de macromolécules de longueur différente et donc de masse molaire différente. Définir un polymère par sa masse molaire n'a donc pas de sens et on préfère plutôt le caractériser par son degré de polymérisation.

1.2 Degré de polymérisation

Un polymère est constitué de chaînes de longueur différente. On définit alors le DEGRÉ DE POLYMÉRISATION EN NOMBRE qui représente le nombre moyen de motifs constituant le polymère (et donc la longueur moyenne de la chaîne.

Degré de polymérisation :

$$DP = \frac{M_{polymère}}{M_{motif}} \tag{2.1}$$

La masse molaire moyenne d'un polymère peut être connue en mesurant sa viscosité ou son osmose. On peut également remonter à DP par RMN en se focalisant sur les protons des fonctions terminales dont on compare la courbe d'intégration à leur nombre connu. Par exemple, la masse molaire du polystyrène vaut 280,8 kg/mol tandis que celle du styrène vaut 104,15 g/mol donc le degré de polarisation vaut 2696 environ. Ainsi, la longueur moyenne d'une chaîne dans le polystyrène est 2696 motifs. Un polymère dont le degré moyen de polarisation en nombre est inférieur à quelques dizaines est appelé OLIGOMÈRE.

Pour voir les effets statistiques, on peut faire une CCM : tâche étalée.

*On va maintenant s'intéresser à la méthode de synthèse d'un polymère, ou plutôt **aux** méthodes.*

2 Synthèse d'un polymère

2.1 Polyaddition

Définition : Une réaction de **polyaddition** correspond à la réaction d'un type de monomère avec lui-même par croissance linéaire de la chaîne carbonée par réorganisation des liaisons covalentes, sans création d'autres molécules.

Plus simplement, la polyaddition consiste en une succession d'additions dans la chaîne. L'exemple typique est celui du polyéthilène. Pour faire la polymérisation, on commence par **amorcer** la réaction en déstabilisant le monomère, le rendant apte à réagir. Le monomère activé va réagir sur un autre monomère, l'activant au passage, et propageant l'instabilité ; c'est la phase de **propagation**. Enfin, deux faisceaux activés se rencontrent, et se rejoignent, ce qui est la phase de **terminaison**. Cette terminaison arrive de manière aléatoire, ce qui explique la longueur aléatoire des polymères.

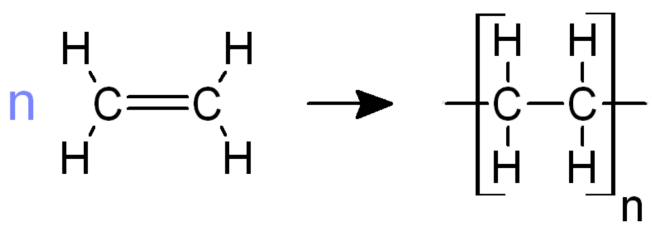


FIGURE 2.2 – Synthèse du polyéthylène à partir d'éthylène.

$$\begin{aligned} X^* \ + \ CH_2 = CH_2 &\iff XCH_2 - CH_2^* \\ Y^* \ + \ CH_2 = CH_2 &\iff YCH_2 - CH_2^* \\ &\dots \\ YCH_2 - CH_2^* \ + \ C^*H_2 - CH_2X &\iff YCH_2 - CH_2 - CH_2 - CH_2X \end{aligned} \tag{2.2}$$

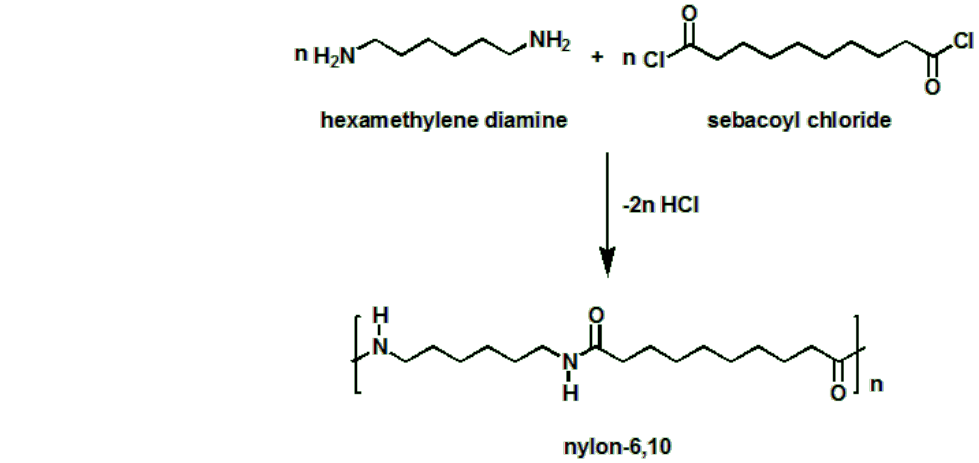
Modèles moléculaires pour montrer les étapes en même temps qu'on explique la polyaddition.

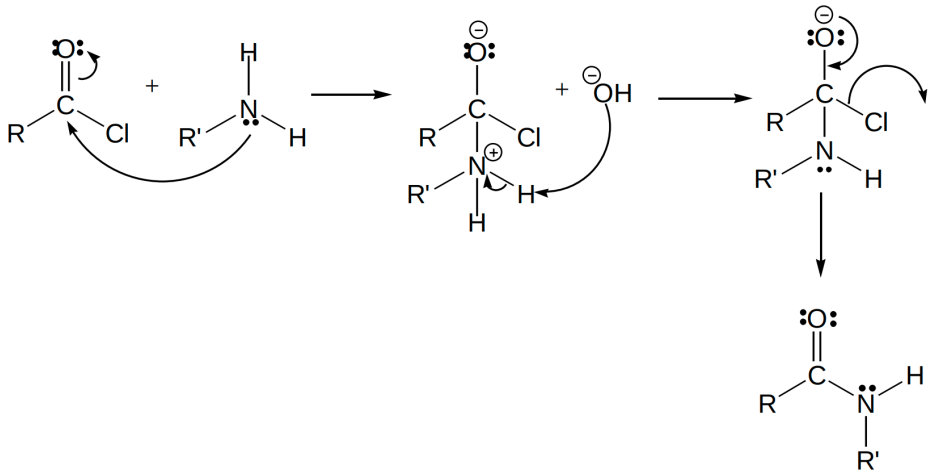
2.2 Polycondensation

Définition : la **condensation** de deux molécules est une réaction entre deux molécules qui en créent une plus grosse, avec un dégagement d'une petite molécule (de l'eau ou du HCl par exemple).

Définition : une réaction de **polycondensation** est une condensation et polymérisation de molécules polyfonctionnelles.

Exemple et illustration : si on note f_i une fonction chimique, on peut avoir $f_1 - X - f_1 \ + \ f_2 - Y - f_2$. L'exemple typique est le **nylon**, détaillé en dessous. La synthèse du nylon nécessite de prendre des précautions car elle dégage du HCl.





Synthèse du Nylon 6-10

✍ Le livre de TP / https://youtu.be/N44WDLKD6yI 5 minutes

matériel :

- 2 erlenmeyers de 50 mL pour les deux solutions à faire ;
- 1 moyen bécher de 250 mL où l'on va faire le mélange ;
- 2 éprouvettes pour mesurer les solvants ;
- Soude solide (0.28 g) ;
- Hexan-1-6-diamine (0.8 g) ;
- Chlorure de Sébacoyle (1.7 mL) ;
- Cyclohexane ou dichlorométhane (20 mL) pour solvater le dichlorure.

En préparation, on prépare la **solution 1** avec 1.7 mL du dichlorure dans 20 mL de dichlorométhane/cyclo dans un erlenmeyer (nocif et volatile ! À faire sous hotte. Attention ça traverse le latex.) Une fois préparée on peut la mettre dans le bécher où se fera la solution.

Ensuite on dissout les 0.8 g de diamine avec les 0.28 g de soude dans 20 mL d'eau distillée dans un erlenmeyer (pas besoin d'agitation magnétique, secouer à la main suffit) : c'est la **solution 2**.

Pendant la présentation, on verse **lentement** la solution 2 dans le bécher contenant la solution 1, en la faisant couler sur la paroi : la réaction se passe à l'interface. Avec une baguette de verre, on récupère la première couche de l'interface (elle est normalement un peu moche) et en la tirant on régénère l'interface entre les deux composés donc on peut continuer à tirer. On peut prendre une deuxième baguette en verre pour enrouler le film avec le même mouvement de quand on se tourne les pouces.

remarque : On peut aussi faire une synthèse au préalable en sortant tout le produit, rinçant à l'eau (le dichlorométhane part bien à l'eau) et faire sécher en l'entourant autour d'un gros bécher pour le montrer comme il faut si ça foire : on peut alors le manipuler avec les mains.

On sait maintenant synthétiser des polymères. Il nous reste cependant à répondre à la question de leurs propriétés et leurs applications.

↓

3 Les polymères dans la vie courante

3.1 Propriétés thermiques et mécaniques

Il existe différents types de liaisons entre des molécules :

- les liaisons covalentes, qui sont très fortes (100 kJ/mol) ;
- les liaisons hydrogène (10 kJ/mol) ;
- les liaisons dues aux interactions de Van der Waals (1 kJ/mol), qui sont plutôt faibles.

Le type de chaîne qui constitue le polymère va déterminer le type de liaison en jeu entre les molécules. Ainsi, une chaîne linéaire fera intervenir peu de liaisons covalentes et donc seront reliées entre elles par des liaisons plus faibles. Au contraire, une structure plus complexe en 3 dimensions fera intervenir plus de liaisons covalentes.

De plus, si le monomère dont est issu le polymère possède un troisième site réactif supplémentaire en plus de ceux à ses extrémités, on peut obtenir une condensation entre les sites au milieu de ces monomères et donc relier les chaînes. On dit que le polymère est RÉTICULÉ.

Enfin, les chaînes d'un polymère peuvent être liées entre elles par des interactions faibles comme les interactions de Van der Waals (caoutchouc non vulcanisé) ou hydrogène (kevlar).

Les propriétés thermiques d'un polymère sont issues du type de liaisons qui le forment. Ainsi, les liaisons faibles en énergie sont plus faciles à rompre que des liaisons fortes comme les liaisons covalentes. Un polymère dont la structure est assurée par des liaisons faibles sera donc sensible à un apport de chaleur puisque les chaînes se rompront plus facilement et la structure peut être réorganisée. Au contraire, la rupture de liaisons fortes est difficile est le polymère ne pourra pas changer de structure sans être détruit.

De même, la structure des polymères peuvent déterminer leurs propriétés mécaniques. On distingue alors deux types de polymère :

- les polymères amorphes : leur structure est désorganisée, chaotique, les chaînes sont enchevêtrées (spaghettis trop cuits). Ces polymères sont malléables.
- les polymères semi-cristallins : leur structure est localement organisée (spaghettis pas cuits). Ils sont rigides et cassants.

Ainsi, il est possible de jouer sur la réticulation d'un polymère ainsi que son taux de semi-cristallinité pour obtenir des propriétés thermiques et mécaniques variées.

Nom	Chaîne	Structure	Liaisons	Ppté méca	Ppté thermique
Polyéthylène	Linéaire	Semi-cristallin	Faibles	Rigide	Thermoplastique
Polytéréphtalate	Linéaire	Amorphe	Faibles	Malléable	Thermoplastique
Epoxyde	Tridimensionnelle	Semi-cristallin	Fortes	Rigide	Thermodurcissable
Caoutchouc	Tridimensionnelle	Amorphe	Fortes	Malléable	Thermodurcissable

TABLE 2.1 – Différents exemples de polymères avec leur structure et leurs propriétés

Polyéthylène et PET : plastiques dont l'utilité dépend de s'ils sont malléables (sac plastique) ou rigides (bouteille).

Epoxyde : revêtement interagissant peu avec les aliments très utilisé dans industrie agro-alimentaire.

Caoutchouc : vulcanisé (invention en 1839 par Charles Goodyear ou 1844 par Thomas Hancock qui a déposé un brevet) car on a besoin du côté thermodurcissable.

3.2 Enjeux environnementaux

L'aspect environnemental est au coeur de toute synthèse d'un matériau, et les polymères n'y font pas exception. Leur synthèse est en effet très coûteuse en matière fossile, notamment en pétrole (2 kg de pétrole pour 1 kg de PET). Le recyclage de ces polymères paraît donc vital si l'on veut minimiser leur impact environnemental. Il semble difficile de recycler les polymères thermodurcissables mais heureusement ils ne représentent que 20 % des polymères utilisés. Ainsi, une bouteille en PET va subir toute une série d'étpae afin d'être recyclée :

- Tri sélectif : le recyclage d'une bouteille commence chez le consommateur qui doit jeter la bouteille dans la poubelle jaune
- Centre de tri : après leur collecte, la bouteille est emmenée dans un centre de tri où elle sera triée des différents matériaux en fonction de la nature

- Centre de regénération : la bouteille est lavée, broyée en copeaux puis chauffée avant de finalement devenir des granules.
- Industrie : ces granules sont récupérés et remodeler pour donner une nouvelle vie au polymère qui renaît de ses cendres tel le phénix.

Ainsi, avec 27 bouteilles on peut faire un pull.

Une autre alternative est également de concevoir des polymères recyclables et biodégradables, même s'ils ne sont pas toujours revalorisés une fois utilisés... De plus, ils peuvent se dégrader assez vite pendant leur utilisation.

Polymère biodégradable

✍ Le livre de TP ⏲ n minutes

Matériel :

- Bain-marie (cristallisoir avec plaque chauffante)
- Bécher de 100mL
- Agitateur magnétique
- 2,5g d'amidon de maïs (Maïzena)
- Glycérol
- Acide chlorhydrique à 0.1 M
- Hydroxyde de sodium à 0.1 M
- Boîte de Pétri
- Graisse

Préparer un bain-marie à une température de 90 °C. Dans un bécher de 100 mL, peser 2,5 g d'amidon de maïs. Ajouter 2 mL de glycérol. Ajouter trois gouttes de colorant alimentaire liquide, 20 mL d'eau distillée et 3 mL d'acide chlorhydrique 0.1 M tout en agitant. Chauffer la préparation au bain-marie à une température de 90 °C jusqu'à épaississement (15 min environ). Ajouter hors du bain-marie 3 mL d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium 0.1 M sous agitation, puis verser le contenu du bécher dans une boîte de Pétri en verre *préalablement graissée* qui sera placée 1 h à l'étuve.

Conclusion

Cette leçon nous a donc permit d'introduire la notion de polymère, comment les fabriquer et comment jouer sur leur structure pour obtenir des propriétés précises. Cette leçon a également sensibilisé l'audience à l'impact environnemental de ces polymères, notamment vis à vis de leur coût en pétrole, en dépit de leur utilisation extrêmement répandue dans des domaines divers et variés. Cela permet de comprendre tout l'intérêt de la recherche sur ce sujet.

LC 3

Chimie durable

Niveau : Lycée

Bibliographie

- ✍ *TS Hachette* p438
- ✍ *Manipulation commentée de chimie orga* Synthèse de la chalcone p330
- ✍ *Florilège de chimie pratique, Daumarie* Ester de poire

Prérequis

- ➢ Catalyse
- ➢ Notion de solvant
- ➢ Nomenclature, formules topologiques et de Lewis

Expériences

- Synthèse de la chalcone sans solvant
- Synthèse au micro-onde d'un ester
- Mesures de rendement de l'ester

Placement :

Terminale S, début de la section AGIR, début du dernier trimestre.

Extraits du programme de TS

- Économiser les ressources et respecter l'environnement Apport de la chimie au respect de l'environnement Chimie durable : – économie d'atomes ; – limitation des déchets ; – agro ressources ; – chimie douce ; – choix des solvants ; – recyclage. Valorisation du dioxyde de carbone. Extraire et exploiter des informations en lien avec : – la chimie durable, – la valorisation du dioxyde de carbone pour comparer les avantages et les inconvénients de procédés de synthèse du point de vue du respect de l'environnement

1 La théorie . . . 760
1.1 Principes de la chimie verte . . . 760
1.2 Économie d'atomes . . . 761
1.3 Rendement . . . 761
2 Procédés de chimie durable . . . 762
2.1 Utilisation de ressources renouvelables . . . 762
2.2 Choix du solvant . . . 762
2.3 Chimie et énergie . . . 765
3 Les déchets . . . 766
3.1 Biodégradabilité . . . 766
3.2 Valorisation des déchets : l'exemple du CO_2 supercritique . . . 767
4 Exemple concret et complet . . . 768

Introduction

La chimie a pour mission de répondre aux besoins grandissants des populations en matériau (métallurgie, polymères), médicaments ou en produits cosmétiques par exemple. Cependant, les dernières décennies ont été marquées par la prise de conscience de l'impact de l'Homme sur l'environnement (pesticides, émissions de gaz à effet de serre...).

En résumé : consommer moins, recycler plus, être plus sûr. Il ne faut pas que nos actions présentes soient néfastes pour les générations futures.

1 La théorie

Cette section serait, en pratique face à une vraie classe, abordée en analyse documentaire, sous la forme d'un tableau collaboratif des 12 principes.

1.1 Principes de la chimie verte

C'est dans l'optique de limiter cet impact qu'en 1998, les 12 principes de la chimie verts ont été énoncés :

- P1 : Il est préférable d'éviter la formation de déchets plutôt que de les traiter ou de dépolluer une fois qu'ils sont formés.
- P2 : Les méthodes de synthèse doivent être conçues de façon à maximiser l'incorporation de toutes les substances utilisées au cours du procédé dans le produit final.
- P3 : Concevoir des synthèses chimiques faisant appel à des réactifs et conduisant à des produits les moins dangereux possibles pour l'humanité et pour l'environnement.
- P4 : Concevoir des produits chimiques moins toxiques à propriétés égales (ou meilleures).
- P5 : Limiter l'utilisation et la dangerosité des substances chimiques auxiliaires.
- P6 : Minimiser la dépense énergétique.
- P7 : Quand c'est techniquement et économiquement réalisable, il faut utiliser des matières premières renouvelables plutôt qu'épuisables.
- P8 : Eviter d'utiliser des groupements temporaires tels que des groupements protecteurs, activateurs, auxiliaires chiraux ou autres.
- P9 : Utiliser des catalyseurs sélectifs plutôt que des réactifs stoechiométriques.
- P10 : Concevoir des produits chimiques qui se dégradent après utilisation.
- P11 : Analyser en continu pour éviter la pollution inutile.
- P12 : Limiter les risques d'accident.

Source : *Paul T. Anastas et John C. Warner, Green Chemistry : Theory and Practice, Oxford University Press, New York, 1998.*

Projeter et résumer. Ces principes sont définis par l'UNESCO. Il peut être intéressant de les classer en fonction de catégories : "avant, pendant, après", ou "pour qui c'est dangereux".

1.2 Économie d'atomes

Principes appliqués : 2

Pour la réaction $aA + bB = pP + dD$ ou pP sont les produits et dD les déchets, on nomme économie d'atome

$$E_a = \frac{pM_P}{aM_A + bM_B}$$

On veut que cette économie d'atome soit de 1. Cela quantifie les pertes d'atomes, *i.e.* la production de déchets.

Exemple :

Synthèse de l'Aspirine, ou acide acétilsalicilique.

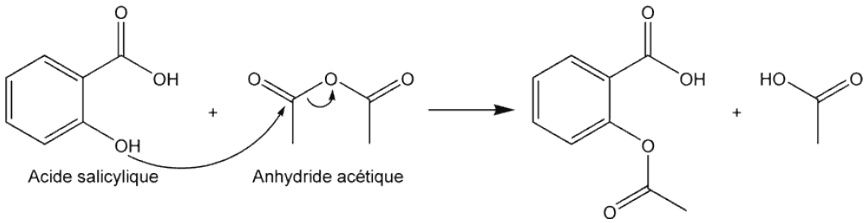


FIGURE 3.1 – Synthèse de l'aspirine.

$$C_7O_3H_6 + C_4O_3H_6 = C_9O_4H_8 + C_2O_2H_4$$

$E_A = 75\%$, ce qui veut dire que 25 pourcent des atomes sont gâchés. Cependant ici le déchet est de l'acide éthanoïque, peu dangereux et très utile dans de nombreuses situation. Il peut d'ailleurs être recyclé en anhydride éthanoïque et resservir à la même synthèse.

1.3 Rendement

Principes appliqués : 2, 6, 9

Rappel : On définit le rendement comme le rapport de l'avancement final sur l'avancement maximal (par rapport au réactif limitant donc). Le but traditionnel de la chimie est de maximiser le rendement, afin de minimiser les pertes de réactif et de maximiser la quantité de produit. En chimie verte il faut aussi le maximiser, mais en tenant compte des enjeux environnementaux.

Ainsi une compétition peut exister entre le rendement et l'énergie à fournir, ou le rendement et la quantité de réactif non-limitant à introduire, et donc avec l'économie d'atome. La chimie de la vraie vie est toujours une compétition entre les enjeux environnementaux et les enjeux économiques.

Un autre rendement peut être défini, il s'agit du rendement énergétique, conformément au principe 6. La dépense énergétique nécessaire aux réactions chimiques doit être examinée sous l'angle de son incidence sur l'environnement et l'économie, et être réduite au minimum. Dans la mesure du possible, les opérations de synthèse doivent s'effectuer dans les conditions de température et de pression ambiantes/atmosphériques.

2 Procédés de chimie durable

2.1 Utilisation de ressources renouvelables

Principes appliqués : 7

En chimie, on utilise entre autres 3 types de matières premières : la houille, le pétrole et la biomasse. La houille et le pétrole sont des ressources fossiles qu'il est important de préserver, c'est pourquoi la biomasse présente un intérêt crucial. Ainsi, le but du jeu serait de remplacer progressivement le pétrole et la houille par la biomasse dans la synthèse des produits sur lesquelles toute l'industrie se base. Par exemple, la synthèse d'un carburant à partir de la biomasse et non pas du pétrole serait un pas en avant colossal dans la crise énergétique que nous traversons.

Les biocarburants constituent une solution intéressante à cet enjeu économique et environnemental. Cependant, il s'agirait de ne pas entrer en compétition avec l'industrie agro-alimentaire. Les biocarburants de première génération, issus de produits alimentaires comme le biodiesel (huiles de colza, tournesol, soja) ne sont donc pas une solution parfaite.

Petit calcul

On consomme en france 50 milliards de litres de carburant par an. Un hectare de colza permet de produire 1000 litres de biocarburant. La France fait 50 millions d'hectares. Il faudriat donc à peu près la surface de la France en colza pour subvenir à ses besoins en biocarburants uniquement.

Une autre solution serait donc de développer des biocarburants de seconde génération, fabriqués à partir de résidus agricoles et forestiers. Cependant, ils nécessitent une mobilisation importante des sols et donc ne sont pas viables. Une troisième génération de biocarburants, issus d'algues, pourrait être la solution mais elle est encore en développement.

2.2 Choix du solvant

Principes appliqués : 5, 1, 4, 7, 12

Mis à part l'eau, aucun solvant n'est sans danger, que ce soit pour la santé humaine ou pour l'environnement. On veut donc choisir un solvant qui soit adapté à la réaction que l'on veut réaliser, mais aussi aux enjeux environnementaux et médicaux.

Par exemple, le cyclohexane et le benzène sont tous les deux des solvant organiques apolaires aprotiques, de propriétés physico-chimiques très proches, comme projeté sur la présentation. Cependant quand on compare les risques pour la santé de ces deux solvants, on voit que le Benzène est BEAUCOUP plus dangereux, puisqu'il est ce que l'on appelle CMR (cancérigène, reprotoxique, mutagène). Ainsi quand on peut on a tout intérêt à remplacer le benzène par du cyclohéxane.

Préférables	Utilisables	Indésirable
Eau	Cyclohexane	Pentane
Acétone	Heptane	Hexane(s)
Ethanol	Toluène	Ether diéthylique
Acétate d'éthyle	Méthylcyclohexane	Dichlorométhane
Acétate d'isopropyle	Acide acétique	1,2-Dichloroéthane
Méthanol	Tétrahydrofurane	Pyridine
Butanol	Toluène	Benzène

FIGURE 3.2 – De manière générale, voici un tableau des solvants classiques, en fonction de leur taux d'utilisabilité en chimie verte. Remarque : l'acétique est plus safe que le méthanol. L'éther diéthylique est remplacé par le THF dans la vraie vie. La raison de sa dangerosité est son haut taux d'inflamabilité.

	benzene	**cyclohexane**
masse molaire	78.11 g/mol	84.16 g/mol
densité	876 kg/m³	779 kg/m³
polarité	non	non
proticité	non	non
miscibilité à l'eau	non	non
T_eb	80.1°C	80.7°C
T_liq	5.5°C	6°C

Etiquette

BENZÈNE

Danger

- H225 - Liquide et vapeurs très inflammables
- H350 - Peut provoquer le cancer
- H340 - Peut induire des anomalies génétiques
- H372 - Risque avéré d'effets graves pour les organes à la suite d'expositions répétées ou d'une exposition prolongée
- H304 - Peut être mortel en cas d'ingestion et de pénétration dans les voies respiratoires
- H319 - Provoque une sévère irritation des yeux
- H315 - Provoque une irritation cutanée

Les conseils de prudence P sont sélectionnés selon les critères de l'annexe 1 du réglement CE n° 1272/2008.
200-753-7

Etiquette

CYCLOHEXANE

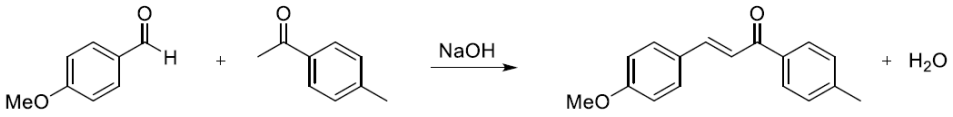
Danger

- H225 - Liquide et vapeurs très inflammables
- H304 - Peut être mortel en cas d'ingestion et de pénétration dans les voies respiratoires
- H315 - Provoque une irritation cutanée
- H336 - Peut provoquer somnolence ou vertiges
- H410 - Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme

Les conseils de prudence P sont sélectionnés selon les critères de l'annexe 1 du réglement CE n° 1272/2008.
203-806-2

FIGURE 3.3 – Benzene ou cyclohexane ? Remarque : polarité $\simeq 0$.

On peut également choisir de ne pas utiliser de solvant, comme par exemple dans la synthèse de la chalcone.



Réactifs	*M.M.*	*T_f(°C)*	*d*	*Sécurité*
p-Anisaldéhyde	136,15	-1	1,119	H302 P301 + P330 + P331
4'-Méthylacétophénone	134,18	22-24	1 ,005	H302
Éthanol 95%	46,07	-	0,789	H225 P210
Éther diéthylique	74,12	-116	0,713	H319 P305 + P351 + P338
Hydroxyde de sodium	40,00	318	-	H314 P280-P305 + P351 + P338-P310

FIGURE 3.4 – Synthèse de la chalcone

Synthèse sans solvant d'une chalcone et purification

✍ Drouin, manip 90 ⏲ 1 heure

Matériel :

- mortier + pilon (et/ou spatule)
- 680 mg (5,0 mmol) de p-anisaldéhyde
- 670 mg (5.0 mmol) de 4'-méthylacétophénone
- 200 mg (5,0 mmol) de NaOH solide
- filtre à verre fritté
- tampon pour tasser le solide sur le filtre
- Büchner
- montage à reflux + évaporateur rotatif
- éthanol à 95%

Allumer un banc Kofler pour la caractérisation. **Synthèse :** Dans un mortier, déposer la p-anisaldéhyde, la 4'-méthylacétophénone et la soude. Broyer le mélange pendant une dizaine de minute. Ajouter 10 mL d'eau distillée et mélanger le tout soigneusement en délogeant le solide se trouvant sur les parois du mortier à l'aide du pilon ou d'une spatule. Filtrer la suspension à l'aide d'un verre fritté. Rincer le mortier et le pilon avec 5 mL d'eau distillée qui sont aussi filtrés. Laver le solide avec une nouvelle portion de 5 mL d'eau distillée, tasser à l'aide d'un tampon et laisser sécher sous pression réduite pendant 10 min.

Purification : Recristalliser le solide dans l'éthanol à 95%. Peser la masse de réactif obtenue. Calculer le rendement.

Caractérisation de la chalcone

✍ Drouin ⏲ 1 min

Déterminer la température de fusion du produit. On attend un température d'environ 94°C.

Cette synthèse sans solvant est donc possible, cependant il m'a fallut 10 minutes de pilonnage avec un mortier pour la réaliser. La question de l'énergie à dépenser pour faire la réaction se pose.

2.3 Chimie et énergie

Principes appliqués : 6 et 9, 3, 5, 8.

La chimie douce consiste à se placer dans des condition réactionnelles proches des conditions ambiantes/atmosphériques, en respectant les règles suivantes :

- Chauffer le moins possible, et le moins longtemps possible
- Travailler avec de basses pressions (typiquement à pression atmosphérique)
- Catalyser les réactions

Un exemple de pratique innovante de la chimie douce est l'utilisation d'un four à micro-ondes pour chauffer un milieu réactionnel.

Synthèse de l'ester de poire avec un micro-ondes

✍ JFLM 2 ⏲ 6 min

Matériel :

- micro-ondes (500 W)
- erlenmeyer de 10 mL
- 2 pipettes graduées de 5 mL
- pipette Pasteur
- thermomètre
- 1.5 mL d'acide éthanoïque glacial
- 3.0 mL de 3-méthylbutan-1-ol
- acide sulfurique concentré

Prélever 1,5 mL d'acide éthanoïque glacial et 3,0 mL d'alcool, les mettre dans l'erlenmeyer. Ajouter 2 ou 3 gouttes d'acide sulfurique concentré et placer dans le four à micro-ondes pendant 30 s à 100 W plusieurs fois (4 fois ?). Ouvrir le four et vérifier à l'odeur caractéristique de l'ester formé que la réaction est bien terminée (sinon, une odeur désagréable d'acide éthanoïque persiste). On a formé de l'acétate de 3-méthylbutyle.

Calcul de rendement énergétique

Un protocole classique de synthèse d'ester de poire donne un temps de chauffe de 30 minutes à reflux au chauffe ballon pour une quantité dix fois plus grande. Un chauffe ballon a une puissance typique de 100W. Nous avons effectué 4 chauffages de 30 secondes à 100W. Ainsi notre montage a consommé $30\times100/2\times100\times2 \simeq 7.5$ fois moins d'énergie pour la même synthèse.

Montage à reflux
On utilise le montage à reflux suivant (on chauffe 30 minutes). On ajoute d'abord dans le ballon 5 mL d'acide sulfurique concentré, 3 pierres ponces, 12,8 g d'éthanol pur et 16,8 g d'acide éthanoïque pur.

On a vu jusqu'ici des synthèses avec peu de déchets, mais il arrive que l'on soit obligé de produire des déchets, ou que les produits deviennent des déchets après utilisation, comme pour le cas des plastiques d'emballage. Que faire des déchets ?

3 Les déchets

Objectif : 100% biodégradables ou recyclables, 100% recyclés.

3.1 Biodégradabilité

Principes appliqués : 3, 4, 10

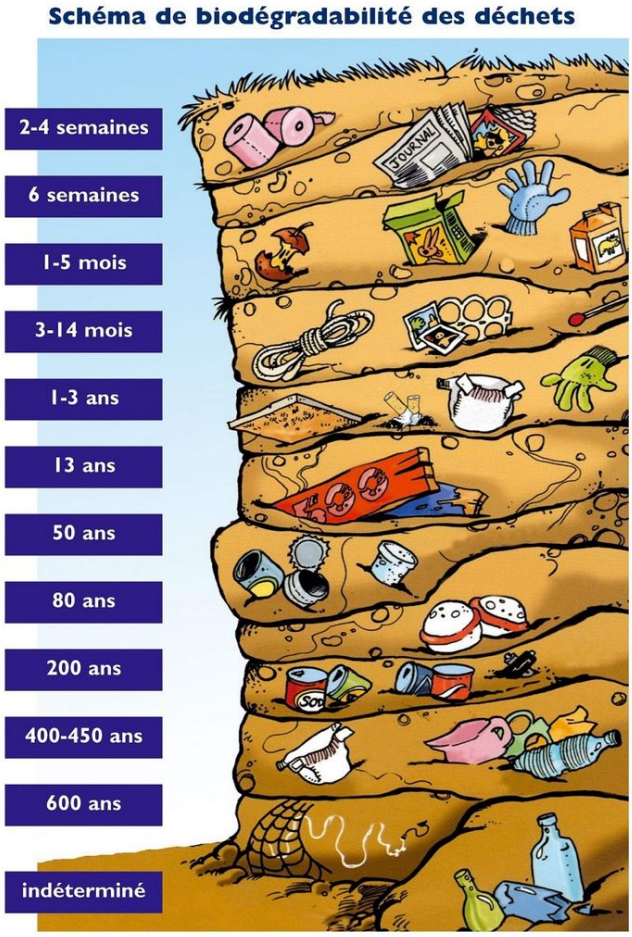


FIGURE 3.5 – Temps de dégradation des déchets humains.

Les plastiques biodégradables sont un enjeu majeur de la chimie moderne, puisque les plastiques usuels mettent des centaines d'années à se dégrader dans les sols, et que leur usage est monnaie courante. La chimie du plastique s'est donc tournée rapidement vers les plastiques biodégradables, basés par exemple sur l'amidon de maïs.

Polymère biodégradable

✍ Le livre de TP ⏲ n minutes

Matériel :

- Bain-marie (cristallisoir avec plaque chauffante)
- Bécher de 100mL
- Agitateur magnétique
- 2,5g d'amidon de maïs (Maïzena)
- Glycérol
- Acide chlorhydrique à 0.1 M
- Hydroxyde de sodium à 0.1 M
- Boîte de Pétri
- Graisse

Préparer un bain-marie à une température de 90 °C. Dans un bécher de 100 mL, peser 2,5 g d'amidon de maïs. Ajouter 2 mL de glycérol. Ajouter trois gouttes de colorant alimentaire liquide, 20 mL d'eau distillée et 3 mL d'acide chlorhydrique 0.1 M tout en agitant. Chauffer la préparation au bain-marie à une température de 90 °C jusqu'à épaississement (15 min environ). Ajouter hors du bain-marie 3 mL d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium 0.1 M sous agitation, puis verser le contenu du bécher dans une boîte de Pétri en verre *préalablement graissée* qui sera placée 1 h à l'étuve.

Ce plastique ici a les propriétés d'un plastique usuel et pourrait être thermoformé pour faire des sacs ou autres objets. Son gros avantage est qu'une fois au contact de l'eau, il se désagrège. Étant formé principalement d'amidon de maïs et de glycérol, il n'est pas dangereux pour l'environnement.

3.2 Valorisation des déchets : l'exemple du CO_2 supercritique

Principes appliqués : 1, 5, 7

Il est tout à fait possible que les déchets d'une réaction puissent être réutilisés pour d'autres réactions. Par exemple, le CO_2 est un gaz à effet de serre nocif et très souvent indésirable. Cependant, il est possible de l'utiliser sous sa forme supercritique dans l'extraction de la caféine.

Un fluide supercritique est un fluide se comportant à la fois comme un liquide et un gaz. Un tel fluide est obtenu à des températures et pressions supérieures à celle d'un point particulier appelé point critique. Pour le CO_2, ce point critique est situé à $P_C = 73.8$ bar et $T_C = 31°C$, ce qui a l'avantage d'être à température quasiment ambiante et donc de diminuer les chances de dégrader le produit voulu, même si la pression nécessaire est relativement élevée.

L'idée est de solubiliser la caféine dans le CO_2 supercritique et, une fois l'extraction réalisée, de diminuer la pression pour transformer le CO_2 en gaz et libérer la caféine. Ainsi, l'extraction est bien plus facile, rapide et sûre qu'avec l'utilisation du dichlorométhane en tant que solvant, qui est toxique.

4 Exemple concret et complet

✍ `ibuprofene.pdf`

http://culturesciences.chimie.ens.fr/content/un-exemple-de-chimie-verte-la-synthese-industrielle-de-libuprofene-787

Conclusion

Comme beaucoup de disciplines, la chimie se doit de réduire son impact sur l'environnement. La chimie durable, présentée dans cette leçon, a pour but de satisfaire à cet objectif. Pour cela, chaque réactif, chaque produit, chaque condition expérimentale d'une réaction est soigneusement étudié afin que celle-ci puisse s'inscrire dans cette notion de chimie durable.

Commentaires issues de l'oral blanc du 4 mai 2020

- Il peut être une bonne idée de catégoriser les 12 principes en plusieurs groupes afin de les présenter succinctement et de montrer leurs intérêts (exemples : avant la réaction/pendant la réaction/après la réaction ou bien économie/limiter l'impact sur la réaction/limiter le risque)
- Comment récupérer l'acide éthanoïque dans la synthèse de l'aspirine ? Via une distillation fractionnée ou bien en isolant l'aspirine avec de l'acétate d'éthyle pour solvant
- Maximiser le rendement c'est bien pour économiser des réactifs, des solvants (pour la réaction ET la purification), de l'énergie, de l'argent et pour limiter l'utilisation d'espèces toxiques
- Un solvant est indésirable pour diverses raisons : sa toxicité sur l'Homme, sa dangerosité pour l'environnement (exemple : trou dans la couche d'ozone à cause du monoxyde de carbone), ou parce qu'il est explosif (exemple : l'éther diéthylique a un point flash assez bas)
- Autres exemples de solvants préférables : isopropanol, DMSO
- Comment caractériser une chalcone ? Kofler, spectro UV-visible (la chalcone est jaune), spectro IR (liaison C=O plus faible à cause de la conjugaison avec d'autres liaisons doubles, en vrai c'est un effet faible), spectro RMN, CCM ou chromatographie liquide haute performance (HPLC)
- Comment mélanger des solides en industrie ? Avec un broyeur un bille dans un récipient en rotation. Dans tous les cas, l'économie de solvants se paie par une dépense d'énergie mécanique.
- La notion de "chimie douce" est très spécifique et concerne les conditions de polycondensation dans la synthèses des verres, il faut donc parler de "source alternative d'énergie en chimie" quand on aborde la partie avec la synthèse de l'ester au micro-ondes
- Un micro-ondes excite les modes rotationnels de la molécule d'eau (et pas les modes vibratoires qui sont dans le bas infrarouge et non pas dans le domaine des ondes micrométriques)
- Deux notions à différencier : biosourcé (qui vient de réactifs bios) et biodégradable. Le polymère à base d'amidon est les deux à la fois, mais c'est pas toujours le cas comme par exemple l'acide polylactique
- D'ailleurs la réaction entre l'amidon et le glycérol n'en est pas vraiment une : l'amidon est déjà un polymère et le glycérol a le rôle du plastifiant, *i.e.* il empêche l'agrégation des chaînes de polymère et il empêche la formation de liaisons H
- On peut discuter de la place dans la leçon de la partie sur le CO_2 supercritique. En effet, ça peut rentrer dans une partie 'solvants alternatifs' à laquelle on peut rajouter les exemples des solvants perfluorés mais surtout de **liquides ioniques** (anions+cations organiques encombrés, quasiment aussi importants que l'eau en tant que solvant en chimie durable). Nous justifions dans cette leçon la place du CO_2 surpercritique en tant que déchet revalorisé en disant que pour un lycéen, le CO_2 est perçu comme un déchet.
- Il est intéressant d'aborder la place de l'eau en tant que denrée rare dans certaines régions pour nuancer son utilisation en chimie durable. Le mieux, c'est quand il n'y a pas de solvant.

LC 4

Synthèses inorganiques

Niveau : Lycée (terminale STL)

extrait de programme

Synthèses inorganiques industrielles : aspects cinétiques, thermodynamiques, environnementaux.	Analyser un ou plusieurs procédés industriels de synthèse d'une même espèce chimique en s'appuyant sur les principes de la chimie verte : matières premières, sous-produits, énergie, catalyseur, sécurité.
Un exemple de synthèse inorganique au laboratoire : la synthèse des complexes. Complexe, ion ou atome central, ligand, liaison.	Reconnaître dans un complexe : l'ion ou l'atome central, le ou les ligands, le caractère monodenté ou polydenté du ligand. Décrire l'établissement de la liaison entre l'ion ou l'atome central et le ou les ligands selon le modèle accepteur-donneur de doublet électronique. Écrire l'équation de la réaction associée à la synthèse d'un complexe.
Réaction de formation d'un complexe : – constante de formation globale d'un complexe, – synthèse et analyse d'un complexe.	Suivre un protocole de synthèse d'un complexe. Déterminer, à l'aide d'un tableau d'avancement, le réactif limitant dans la synthèse d'un complexe et en déduire le rendement de la synthèse. Proposer ou suivre un protocole mettant en oeuvre l'analyse qualitative et quantitative d'un complexe.
Complexes inorganiques, bio-inorganiques.	Extraire des informations pour illustrer des applications des complexes inorganiques et bio-inorganiques.

Bibliographie

- ✍ *Chimie industrielle* **Perrin, scharff**
- ✍ *Métallurgie* **Philibert, Vignes, Bréchet, Combrade**
- ✍ JFLM 1 et 2 expériences

Prérequis

- ➢ Oxydo-réduction, électrolyse
- ➢ Spectro UV-visible
- ➢ Modèle de Lewis
- ➢ Chimie verte

Expériences

- ☕ electrolyse du cuivre
- ☕ purification du cuivre
- ☕ complexation (tétraamminecuivre II)

1 Hydrométallurgie : synthèse d'un métal 771
1.1 Introduction sur les métaux 771
1.2 Les étapes de la synthèse 772
1.3 Electrolyse 773
1.4 Purification 774
1.5 Réduction de CuO par le dihydrogène (tampon) 774
2 Synthèse d'un complexe 775
2.1 Présentation des complexes 775
2.2 Synthèse d'un complexe de cuivre 775
2.3 L'utilisation des complexes 777

Introduction

La plupart des matériaux dont nous faisons usage (regardez autour de vous !) ne sont pas disponibles tels quels dans notre environnement. Ceux-ci sont parfois extraits mais le plus souvent synthétisés à partir d'autres espèces. Ce fait, si évident qu'il ne suscite guère de réaction, est pourtant une nouveauté au regard de l'Histoire. La maîtrise progressive de techniques de transformations chimiques fut un facteur décisif d'évolution des conditions de vie de l'être humain (cuisson, poterie, métallurgie, synthèse minérale et organique...).

On va aujourd'hui voir par l'exemple du cuivre, élément fondamental dans le monde d'aujourd'hui (fil électrique, plomberie, informatique, bijoux...), les étapes menant du minerais à un matériaux utilisable, puis à un édifice chimique que l'on va définir pour l'occasion, un complexe de cuivre.

Synthèse chimique : ensemble de réactions chimiques contrôlées permettant à un opérateur d'obtenir un ou plusieurs produits d'intérêt. Une synthèse est inorganique si on considère uniquement des espèces dénuées de liaisons C-H.

Problématique : Comment sont réalisées les synthèses inorganiques en industrie et en laboratoire ?

1 Hydrométallurgie : synthèse d'un métal

Définition : L'hydrométallurgie est une technique d'extraction des métaux qui comporte une étape où le métal est solubilisé pour permettre sa purification.

On peut également penser à la pyrométallurgie pour la synthèse d'un métal. Cependant, cette voie est moins privilégiée dans le cadre de la chimie verte en raison de son coût énergétique et économique plus important et de l'impossibilité de traiter les minerais *in situ* et de mettre en continu les procédés d'extraction. (haut fourneaux, température jusqu'à 1600°C)

1.1 Introduction sur les métaux

La plupart des métaux sont naturellement présents sont forme de minerai (le zinc par exemple, est présent sous forme de blende ZnS). Ces minerais sont ainsi des formes oxydées des métaux avec de l'oxygène ou du soufre. Il existe néanmoins quelques exceptions : l'or et quelques minerais d'argent.

Le cuivre est le 29eme élément de la classification périodique. Il est juste au dessus de l'argent et l'or, et a des propriétés physiques et chimiques d'interêt dans beaucoup de domaines. Il est le troisème métal le plus utilisé dans le monde après le fer et l'aluminium. Sa consommation annuelle est de **23.8 Millions de Tonnes** (bordel).

Définition : un *élément natif* est présent pur dans le sol. Les autres sont sous forme de *minerais*.

Définition : *Minerai*, roche contenant suffisamment de substances d'intérêt pour justifier son exploitation.

Le cuivre est présent naturellement dans le sol sous forme oxydé à l'état d'oxydes ou de sulfures. On peut citer à titre d'exemple la chalcopyrite $CuFeS_2$, la chalcocite Cu_2S ou la covellite CuS. Cependant, les minerais de cuivre sont également associés à d'autres métaux sous forme d'impuretés (Au, Ag, Pb, Ni).

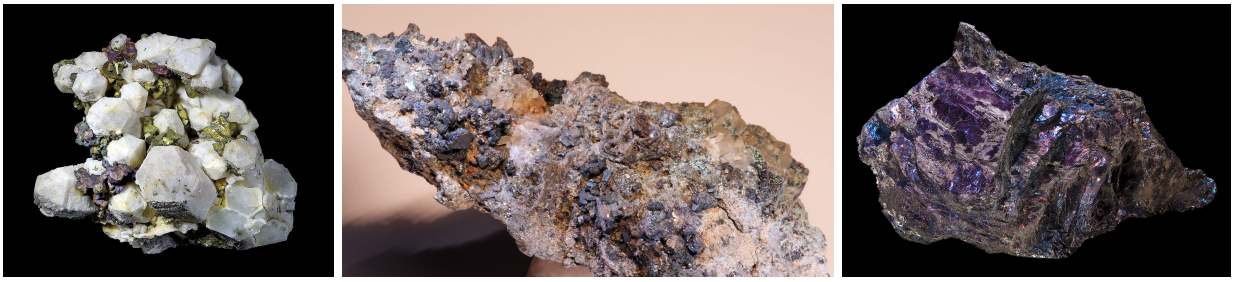
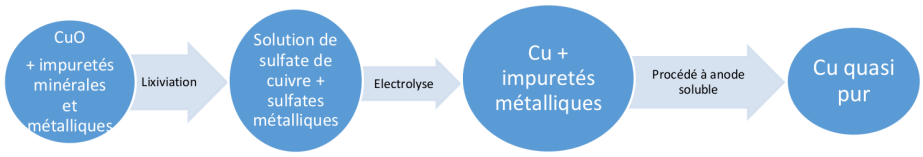


FIGURE 4.1 – Quelques exemples de minerai de cuivre. A gauche : la chalcopyrite, au centre : la chalcocite et à droite : la covellite.

Tous les procédés d'extraction du cuivre sont bien sûr à mettre en lien avec la chimie verte.

1.2 Les étapes de la synthèse



- **Lixiviation**

définition : La lixiviation (du latin lixivium : lessive) désigne les techniques d'extraction de produits solubles par un solvant, et notamment par l'eau circulant dans le sol.

Le principe de la lixivation est donc de mettre le cuivre présent dans un sol en solution aqueuse, et de récupérer la solution ensuite. Ce principe s'oppose à la technique de minage direct, qui était viable dans les premier gisements découverts, riches en cuivre (jusqu'à 9%), mais pas au 21eme siecle [1].

Niveau écologie c'est pas top, on le fait sur des tas de gravats dans des cuves généralement. Boues siliceuses acides, sous-produit un peu difficile à valoriser.

- **Étapes de tri**

Cémentation

- **Electrolyse**

De cette solution, on extrait du cuivre métallique par réduction des ions cuivre. Cette réduction peut être réalisée par électrolyse du sulfate de cuivre (on oxyde l'eau) :

$$Cu^{2+}_{(aq)} + H_2O_{(l)} = Cu_{(s)} + 2H^+_{(aq)} + \frac{1}{2}O_{2\ (g)}$$

Là encore les sous-produits sont facilement valorisés.

- **Purification**

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Extraction_du_cuivre

1.3 Electrolyse

Cette étape a pour but d'obtenir le métal sous sa forme métallique à partir de sa forme ionique dissoute en solution.

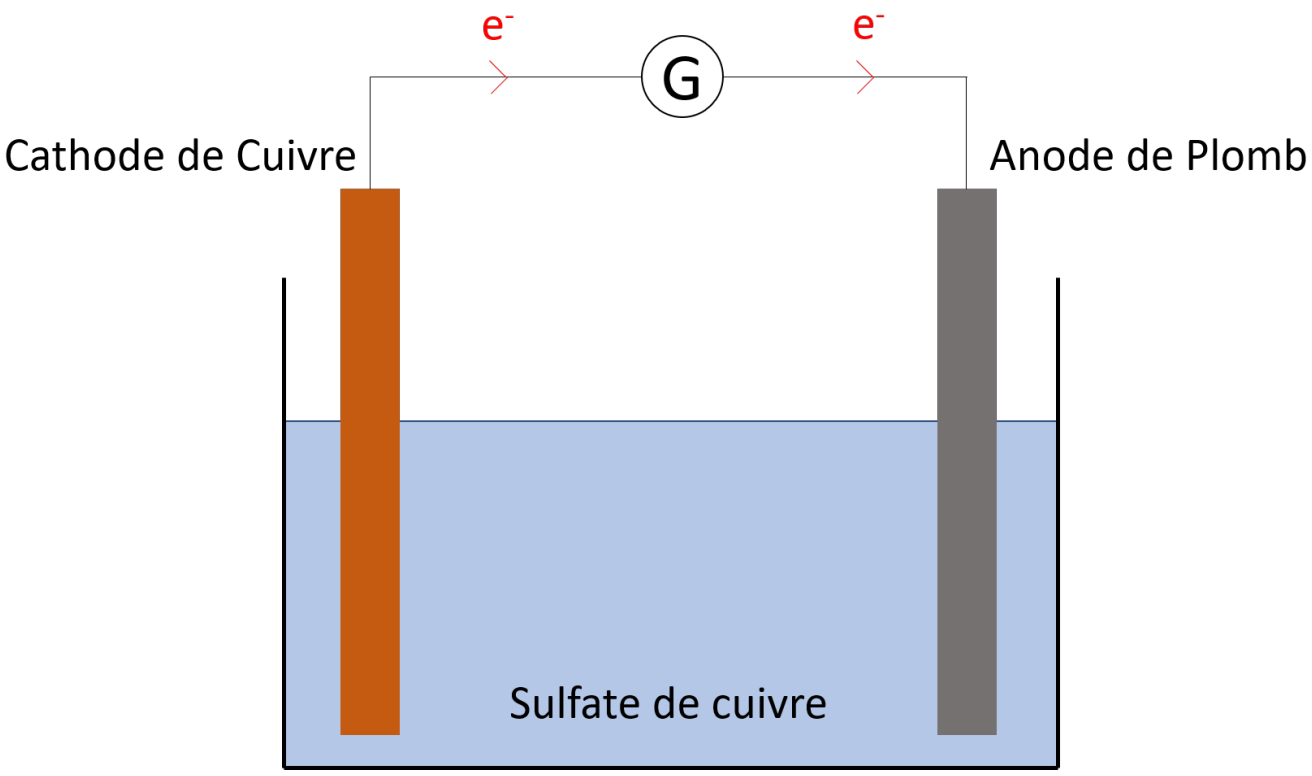


FIGURE 4.2 – Montage de l'électrolyse de cuivre.

Reprenons l'exemple du cuivre. L'électrolyse du cuivre fait intervenir une anode de plomb et une cathode faite du cuivre pur trempant toutes les deux dans une solution de sulfate de cuivre acidifiée. On peut donc écrire les demi-équations d'oxydoréduction suivantes :

- à l'anode de plomb : $H_2O_{\,(l)} = 2H^+_{\,(aq)} + \frac{1}{2}O_{2\,(g)} + 2e^-$
- à la cathode de cuivre : $Cu^{2+}_{\,(aq)} + 2e^- = Cu_{\,(s)}$

L'équation de la réaction est alors

$$Cu^{2+}_{\,(aq)} + H_2O_{\,(l)} = Cu_{\,(s)} + 2H^+_{\,(aq)} + \frac{1}{2}O_{2\,(g)}$$

Electrolyse du cuivre

✍ JFLM ⏲

À lancer au début de la leçon, sans oublier de peser l'électrode de cuivre.

Tremper une électrode de plomb et une électrode de cuivre pur dans une solution acidifiée de sulfate de cuivre à 10^{-1} mol·L^{-1}. Connecter les deux électrodes à un générateur (borne - sur l'anode et borne + sur la cathode) et imposer une tension de 1 V. Attendre une dizaine de minute puis peser l'électrode de cuivre pour connaître la masse de cuivre déposée pendant l'électrolyse.

On définit le rendement faradique comme le rapport de la masse de cuivre obtenue sur la masse de cuivre maximale théorique que l'électrolyse aurait pu produire. Il n'est pas de 1 car on effectue aussi la réduction du solvant et d'autres ions présents dans la solution.

$$R_F = \frac{m_{reel}}{m_{th}}$$

$$m_{th} = \frac{M(\mathrm{Cu})It}{n\mathcal{F}}$$

$$\mathcal{F} = 96485\mathrm{C\,mol^{-1}}$$

1.4 Purification

Le cuivre obtenu ainsi est pollué par toutes sortes de métaux (dont certains peuvent présenter un intérêt commercial tel l'or ou l'argent). Pour purifier le cuivre on réalise alors un procédé à anode soluble qui fournit un cuivre de très haute pureté (de l'ordre de 99.98% en masse). Le procédé consiste à oxyder une électrode de cuivre impur et à réduire les ions cuivre sur une électrode de cuivre pur. Les autres métaux, pour des raisons cinétiques, ou bien ne sont pas oxydés ou bien ne sont pas réduits, in fine seul le cuivre se dépose sur la cathode.

Purification du cuivre par électrolyse à anode soluble

✍ Porteu-de Buchère p190

Peser la plaque de cuivre avec précision.

Cuivre au + du générateur, graphite au -, plonger les électrodes dans une solution de sulfate de cuivre à 0.1 mol/L. Placer une résistance de 10 Ω en série pour suivre la tension au cours du temps aux bornes de la tension. Régler l'alimentation de manière à avoir une valeur stable du courant de l'ordre de 200 mA et enclencher l'acquisition.

Après environ 15 min, arrêter l'électrolyse en notant précisément la durée. Observer le dépôt rouge sur le graphite. Essuyer la plaque de cuivre et la peser avec précision.

Peser aussi le graphite.

1.5 Réduction de CuO par le dihydrogène (tampon)

On peut directement réduire CuO en introduisant directement du dihydrogène en flux continu dans un tube contenant l'oxyde chauffé à 900 K.

La méthode peut paraître alléchante (cf les sous-produits « sympathiques ») mais l'usage du dihydrogène (coûteux et dangereux) ne plaide pas en sa faveur. On notera, en outre, qu'on a travaillé avec du CuO pur, ce qui rend la comparaison avec la méthode industrielle fantaisiste. En réalité, cette méthode n'est pas utilisée industriellement pour la synthèse du cuivre métallique. Néanmoins, on retiendra que la réduction d'oxydes métalliques par le dihydrogène ou le monoxyde de carbone est couramment utilisée pour la synthèse du fer, du nickel ou de l'uranium par exemple.

Nous avons vu quelques procédés industriels de synthèse du cuivre métallique. Ce cuivre, une fois en solution, peut aussi être à l'origine de nouvelles synthèses inorganiques réalisées cette fois à l'aide de produits purs et non de substances naturelles. On s'intéressera ici à l'élaboration d'un nouveau type d'édifice chimique, le complexe.

2 Synthèse d'un complexe

2.1 Présentation des complexes

Complexe chimique : Edifice chimique résultant de l'interaction faible (ie plus faible qu'une liaison covalente) entre un atome ou cation métallique (dit central) et une ou plusieurs molécules (neutres ou anioniques) appelées ligands. Par exemple, on peut citer le tétraamminecuivre (II).

On peut décrire la liaison métal ligand comme le don d'un des doublets non liant du ligand au métal, comme par exemple le ligand hydroxo HO^- qui peut céder un doublet.

Denticité : Nombre maximal de liaisons faibles que peut établir un ligand avec un métal. Par exemple, le ligand hydroxo est monodentate tandis que l'ion oxalate est bidentate et la triéthylènetétramine est tétradentate.

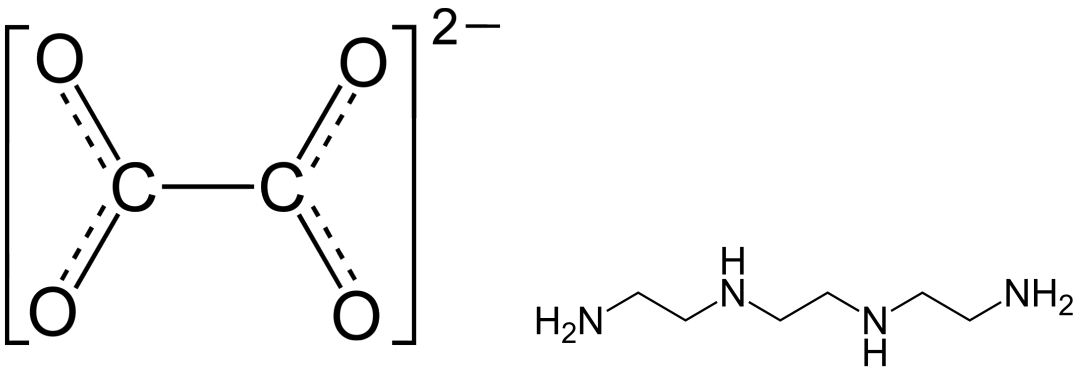


FIGURE 4.3 – Ion oxalate (à gauche) et triéthylènetétramine (à droite).

L'équation générale de formation d'un complexe est : $mL^{q-} + M^{p+} = ML^{p-mq}$ où M est l'atome central et L le ou les ligands. Par exemple, $Cu^{2+} + 4NH_3 = [Cu(NH_3)_4]^{2+}$.

Les complexes sont des espèces chimiques ayant des applications multiples : indicateurs colorés, solubilisant, médicaments, catalyseur...

On va voir comment synthétiser un complexe à partir de notre vieil ami le cuivre.

2.2 Synthèse d'un complexe de cuivre

On se propose de synthétiser un complexe du cuivre le tétraamminocuivre (II) d'une très jolie couleur bleue. Ce complexe a pour atome central l'ion cuivre et pour ligands quatre molécules d'ammoniaque chacune monodentate (un seul doublet non liant peut être engagée dans une liaison). On va pour cela mettre en avant l'existance d'une complexation successive : on va faire des complexes successivement de plus en plus chargés en NH_3. L'équation de la réaction est

$$Cu^{2+}{}_{(aq)} + 4NH_3{}_{(aq)} = [Cu(NH_3)_4]^{2+}{}_{(aq)}$$

On va pour cela suivre le protocole suivant : d'abord on va synthétiser, en préparation, du tétraamminecuivre (II) hydraté [Cu(NH3)4]SO4, H2O, puis on va montrer les complexes successifs.

Complexation

✍ le poly

En phase aqueuse, l'addition d'une solution d'ammoniac sur une solution de sulfate de cuivre conduit à la formation d'un complexe : l'ion tétraamminecuivre (II) [Cu(NH3)4]2+ . Il précipite en présence des ions sulfate SO42- et peut ensuite être isolé par filtration.

Protocole expérimental :

1. Dans un erlenmeyer, dissoudre 2,5 g de sulfate de cuivre pentahydraté CuSO4, 5 H2O dans 10 mL d'eau distillée.

2. Ajouter ensuite, sous la hotte et en agitant, 25 mL d'une solution d'ammoniac à 2 mol.L-1 jusqu'à disparition totale du précipité d'hydroxyde de cuivre (II) formé au début de l'addition d'ammoniac.

3. Refroidir la solution dans un bain eau-glace, puis ajouter 15 mL d'éthanol (pur) : un précipité se forme lentement.

4. Laisser refroidir le mélange dans un bain eau-glace.

5. Lorsque les cristaux sont formés, filtrer le mélange sur un filtre Buchner puis laver les cristaux avec 5 mL **d'éther diéthylique**.

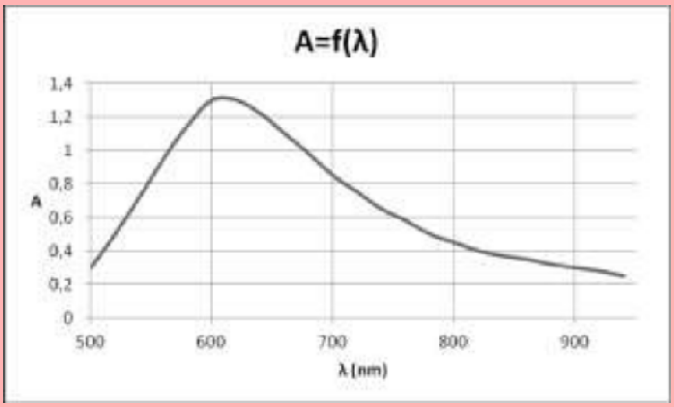
À partir du solide synthétisé, une solution aqueuse, couleur bleu nuit, de complexe tétraamminecuivre (II) à la concentration C = 20 mmol.L-1 est préparée.

M=227.7 (c'est un sel avec SO4)

m=MCV

Pour 1L, 4,55g.

Faire le spectre et le comparer au spectre théorique trouver dans les ressources type livre.



Les équations misent en jeu :

Cu2+ + (SO42-) + 4NH3 = (SO42-) + [Cu(NH3)4]2+

rendement

2.3 L'utilisation des complexes

Les complexes sont, au delà de colorants, des molécules d'intérêt public notoire. Parmi les usages courant des complexes, on peut citer leur omniprésence en biologie, notamment en catalyse biologique. Le fer des globules rouges par exemple forme des complexes fixateurs de l'oxygène.

Les complexes peuvent aussi servir d'indicateur coloré, comme dans le cas que l'on a étudié précédemment, ou de médicament contre le cancer !

Le carboplatine, complexe anticancéreux

https://fr.wikipedia.org/wiki/Carboplatine

Conclusion

On a donc vu comment synthétiser et manipuler des composés chimiques inorganiques, qui forment les briques de base de la chimie et sont massivement utilisés au niveau industriel. Il est essentiel de comprendre et de maîtriser ces synthèses afin d'en optimiser le rendement, tant chimique qu'énergétique. Au niveau industriel, l'objectif est bien entendu de réduire les coûts de production, mais il est important de garder en tête l'impact environnemental de la chimie à toutes les échelles, et de chercher à respecter quand cela est possible les principes de la chimie verte.

LC 5

Stratégie et sélectivité en synthèse organique

Niveau : Lycée

Bibliographie

- ✍ *PC TS* Nathan
- ✍ *PC TS* Bordas
- ✍ http://culturesciences.chimie.ens.fr/content/un-exemple-de-chimie-verte-la-synthese-industrielle-de-libuprofene-787

Prérequis

- ➢ Formules topologiques
- ➢ Isomérie et stéréo-isomérie
- ➢ Catalyse
- ➢ Bases de chimie organique, groupes caractéristiques
- ➢ Principe de la CCM

Expériences

- Synthèse du paracétamol
- Recristallisation du paracétamol
- Utilisation du banc kofler

1 Stratégie de synthèse . . . 780
1.1 Paramètres d'une synthèse . . . 780
1.2 Evaluer une synthèse . . . 781
2 Mise en place d'une stratégie sélective de synthèse . . . 783
2.1 Présentation de la réaction . . . 783
2.2 Les stratégies choisies . . . 783
2.3 Extraction, purification et identification . . . 784
2.4 Calcul du rendement et évaluation des performances . . . 786
3 Introduction de la notion de protection de fonction . . . 786

Introduction

On a vu dans de précédentes leçons diverses méthodes pour synthétiser une espèce chimique. Cependant, une espèce chimique peut souvent être obtenue via différentes voies de synthèse. Comment savoir quelle synthèse mettre en oeuvre ? L'objectif de cette leçon est de donner des éléments de réponse à cette question, éléments qui permettent de déterminer quelle voie de synthèse sera la plus intéressante pour obtenir une espèce chimique déterminée.

Dans cette leçon, nous traiter comme exemple la synthèse du paracétamol à partir

1 Stratégie de synthèse

1.1 Paramètres d'une synthèse

Commençons par définir un synthèse. Une synthèse est un protocole donnant une série d'étapes à réaliser pour obtenir un produit à partir des réactifs initiaux. Un synthèse possède donc plusieurs paramètres que l'expérimentateur va devoir choisir :

- **choix des réactifs**

Prenons comme exemple la réduction d'une molécule présentant à la fois une fonction cétone et une fonction ester :

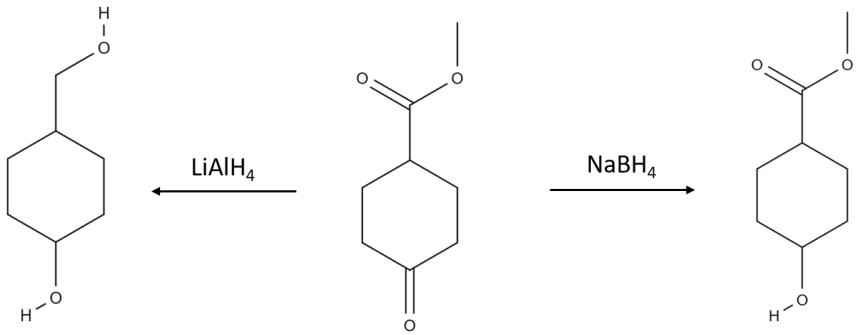


FIGURE 5.1 – Selon le réactif utilisé, on obtient un produit différent.

Cet exemple de réduction montre déjà à quel point le choix des réactifs a une importance capitale si on veut obtenir le bon produit. En effet, on voit que $LiALH_4$ réduit à la fois la cétone et l'ester en alcool. Cependant, $NaBH_4$ ne réduit que la cétone : on dit que $NaBH_4$ est CHIMIOSÉLECTIF car il réagit exclusivement avec la cétone et pas avec l'ester.

De manière générale, un réactif est dit CHIMIOSÉLECTIF si, lorsqu'une molécule de substrat possède plusieurs fonctions chimiques, il agit préférentiellement ou exclusivement sur l'une d'entre elles.

Une réaction est dite sélective si, produisant a priori plusieurs produits, elle conduit majoritairement ou exclusivement à former l'un d'entre eux.

- **choix du solvant**

Une réaction chimique peut se faire avec différents solvants. Ainsi, l'extraction de la caféine peut se fait avec du dichlorométhane ou du CO_2 surpercritique ; et la synthèse de la chalcone peut carrément se faire sans solvant ! Le choix doit se faire en fonction de la dangerosité et du prix du solvant.

D'ailleurs un exemple typique (imagé dans la présentation) est celui du remplacement progressif du benzene, très toxique, par le cyclohéxane, moins toxique (mais bon on va pas en manger non plus).

- **choix d'un catalyseur ou non**

Catalyser une réaction signifie accélérer son évolution par l'ajout d'une espèce qui n'intervient pas dans le bilan total de la réaction. On peut citer comme exemple la soude solide NaOH dans la synthèse de la chalcone, les ions oxonium H_3O^+ et hydroxyde HO^- dans une grande quantité de réaction organiques, ou bien des espèces plus sophistiquées comme les complexes. La catalyse intervient sur l'aspect cinétique d'une réaction.

- **choix des conditions expérimentales (température, pression...)**

Un autre moyen d'augmenter la vitesse d'une réaction consiste à augmenter la température du milieu réactionnel. D'autres paramètres expérimentaux comme la pression ou le pH peuvent également avoir une influence sur la réaction (par exemple, certaines espèces ne sont stables que pour un intervalle de pH donné). La présence de catalyseurs ou non, d'agitation ou non, sont autant de paramètres dont l'influence est réelle.

On sait sur quels paramètres il est possible d'agir pour modifier une synthèse. Il s'agit maintenant d'avoir des critères objectifs qui permettent de savoir quelle stratégie adopter pour avoir la meilleure synthèse possible.

1.2 Evaluer une synthèse

Une synthèse optimale nécessite :

- **un rendement maximal**

On définit le rendement de la manière suivante :

$$\eta = \frac{\text{quantité de matière obtenue expérimentalement}}{\text{quantité de matière maximale théorique}}$$

Une synthèse optimale a donc pour but d'obtenir une quantité de matière la plus proche possible que la quantité de matière maximale théorique, *i.e.* d'avoir un rendement η le plus proche possible de 1.

- **un produit le plus pur possible**

Une réaction chimique peut mener à des produits secondaires en plus du produit d'intérêt. Ces produits secondaires peuvent être de différents types : un gaz (par exemple H_2 ou O_2 pour une réaction d'oxydoréduction), le solvant (par exemple l'eau dans une réaction acido-basique), une petite molécule (par exemple pour une réaction de condensation) voire une grosse molécule.

Pour rendre compte de ces produits secondaires, l'ÉCONOMIE D'ATOME a été définie comme suit :

$$E_A = \frac{M_{utile}}{\Sigma M_{réactifs}}$$

où M_{utile} est la masse molaire de produit d'intérêt.

Une synthèse optimale tend alors à faire tendre cette économie d'atome vers 1.

Prenons l'exemple de l'ibuprofène. Cette molécule peut être synthétisée par 2 voies différentes. La première voie est le procédé Boots et possède une économie d'atome de 40%. La seconde est le procédé BHC et possède une économie d'atome de 77.4%. On peut donc conclure que le procédé BHC est bien plus intéressant en terme d'économie d'atomes, d'autant plus que le sous-produit du procédé BHC est l'acide éthanoïque et peut donc être valorisé par la suite, ce qui permet de considérer que l'économie d'atome est de 100%.

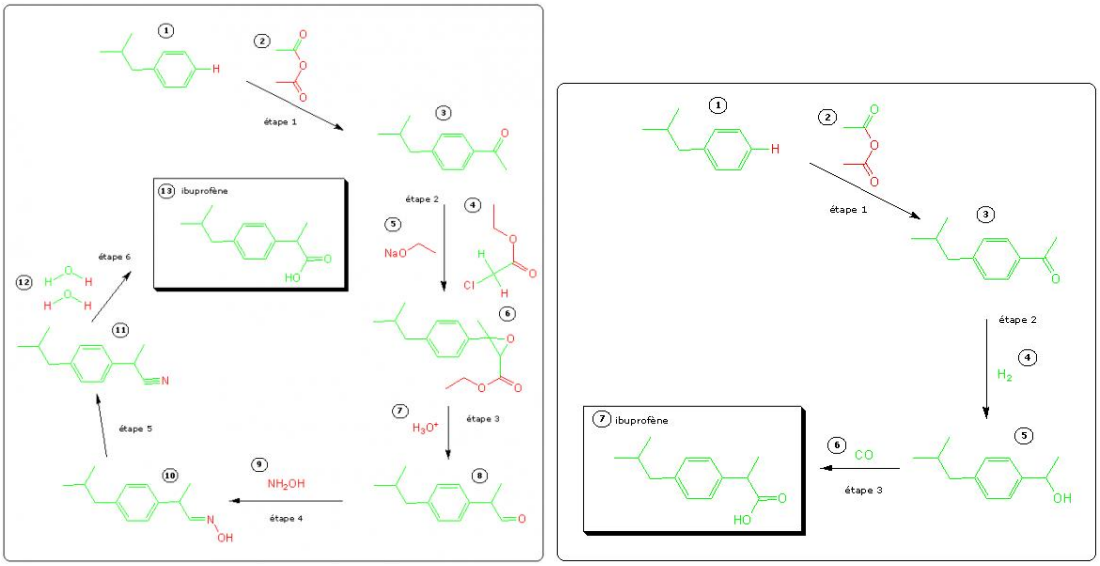


FIGURE 5.2 – Procédé Boots (à gauche) et BHC (à droite).

- **un coût énergétique et financier le plus bas possible**

Il est bien évident qu'une synthèse faisant intervenir des réactifs moins chers sera plus intéressante. De plus, les coûts énergétiques dûs au chauffage du milieu réactionnel viennent s'additionner au coût total d'une synthèse et donc constitue un critère très important, notamment pour les industries.

Les synthèses faisant intervenir un chauffage moins important et pendant moins longtemps sera donc privilégiée. De plus, l'utilisation de catalyseurs est vital pour accélérer la réaction et donc diminuer le temps de chauffage. Par exemple, le Nafion et l'APTS sont deux catalyseurs mais le Nafion est deux fois plus cher pour des performances en terme de catalyse équivalentes.

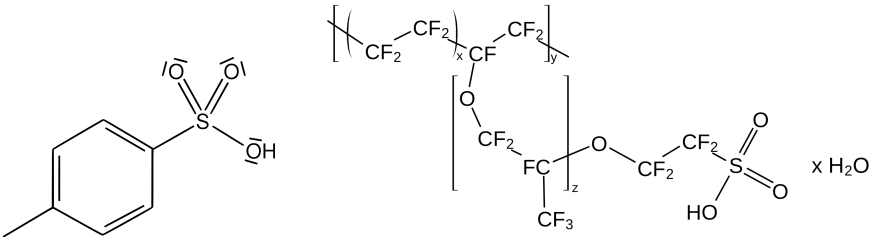


FIGURE 5.3 – Acide para-toluènesulfonique (APTS) (à gauche) et Nafion (à droite).

- **une sécurité la plus accrue possible à la fois pour l'Homme et pour l'environnement**

La toxicité des réactifs et des produits, ainsi que le danger qu'ils représentent pour l'environnement sont également des points très importants à aborder quand on analyse une synthèse. Bien entendu, plus une synthèse fera intervenir des espèces dangereuses, plus les normes de sécurité auxquelles la synthèse doit se conformer seront strictes, et donc moins la synthèse sera intéressante car elle nécessitera un investissement de temps et d'effort plus grand.

2 Mise en place d'une stratégie sélective de synthèse

Nous allons maintenant nous intéresser à une synthèse réelle et pratique, celle du paracétamol (para-acétyl-aminophénol) à partir du para-aminophénol. Le paracétamol se trouve dans toutes les pharmacies familiales. C'est une molécule entrant dans la composition des médicaments comme le Dafalgan ou le Doliprane, qui comptent aujourd'hui parmi les médicaments les plus utilisés en France avec l'Aspirine (acide acétyl salicilique). Le paracétamol a les mêmes propriétés analgésiques et antipyrétiques (il fait baisser la fièvre) que l'aspirine, mais à efficacité égale, il présente moins d'effets indésirables.

2.1 Présentation de la réaction

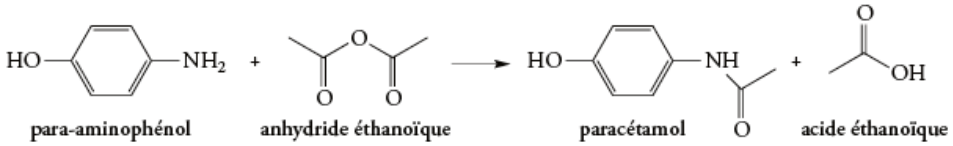


FIGURE 5.4 – Synthèse du paracétamol.

Ici il est à remarquer que le para-aminophénol [1] possède deux groupements fonctionnels, le groupement alcool (ou phénol) et amine. Ainsi on peut imaginer une réaction différente qui mènerait à la formation du composé suivant :

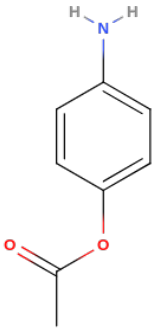


FIGURE 5.5 – Un autre produit possible.

En pratique, pour savoir si la réaction fait plutôt l'un ou l'autre des produits, on regarde le rendement. Si le rendement est supérieur à 50%, une fonction réagit effectivement plus que l'autre. L'anhydride acétique est *chimiosélectif* vis à vis de l'amine par rapport à l'alcool. On va tirer au clair cela en effectuant la synthèse afin d'évaluer son rendement et de discuter des choix qui ont été effectués.

2.2 Les stratégies choisies

Montrer le montage

1. http://molview.org/?cid=403

Synthèse du paracétamol

✍ ⏲

Dans un ballon bicol de 250 mL, introduire successivement 2,75g de para-aminophénol, 25 mL d'eau et 2 mL environ d'acide éthanoïque pur. Adapter une colonne de Vigreux puis porter dans un chauffe-ballon, sous agitation magnétique jusqu'à complète dissolution. Ajouter ensuite lentement environ 3,5 mL d'anhydride éthanoïque (très corrosif), en agitant. (10 minutes)

Mettre le tout dans un bain d'eau glacé pour finir la cristallisation.

Préparer deux fois pour avoir aussi un produit fini à la fin, passé à l'étuve et tout, pour calculer le rendement.

Pour cette synthèse, il est recommandé de chauffer afin d'accélérer la réaction. La stratégie de chauffage permet d'accélérer mais peut aussi entraîner une perte par les vapeurs, c'est pourquoi nous utilisons une colonne de Vigreux, qui permet de limiter les pertes.

Solvant = eau = bien, tant pour l'environnement que pour la santé des étudiants

Produit secondaire = acide acétique (valorisable car réactif courant en chimie orga)

Températures raisonnables

durée acceptable

Ici j'ai mis le milieu réactionnel dans le froid afin d'accélerer la cristalisation du paracétamol, peu soluble à froid. Afin de récupérer le produit nous allons appliquer des techniques de séparation sélectives.

2.3 Extraction, purification et identification

☕

Suite

✍ ⏲ 15mn

Filtrer sur buschner pour récupérer le paracétamol brut, avec ses impuretés. Commenter sur les impuretés, et sur la nécessité d'effectuer une recristallisation. Utiliser un minimum d'eau distillé glacée pour le lavage.

Commencer la recristallisation à température ambiante, car le facteur cinétique est important. Pour cela, on met le solide dans de l'eau avec une ampoule de coulée isobare. On met 15cl d'eau pour tout le solide environ, et on chauffe au chauffe ballon. On ajoute de l'eau jusqu'à dissolution complète, mais pas plus ! On met ensuite à refroidir, et on enlève l'olive bordel.

Le discours :

Je filtre pour effectuer une sélection de phase : je garde la phase solide dans laquelle je sais qu'il y a mon produit.

Je nettoie pour me débarrasser des espèces chimiques du milieu réactionnel, en essayant de na pas perdre trop de produit.

Je remet en recristallisation. Attention, pas trop de solvant. La recristallisation à l'ambiante pour faire des jolis cristaux qui n'emprisonnent pas d'impuretés.

- Le brut réactionnel doit être purifié

- la fiole à vide et le filtre Buchner permettent une filtration rapide et un essorage grossier du solide sous pression réduite (pour un liquide on fait une extraction liquide-liquide, par exemple avec une ampoule à décanter). C'est une stratégie de séparation, fondée sur les propriétés physique différentes (ici une phase).

- la recristallisation est une étape de purification d'un solide (pour un liquide c'est la distillation), fondée sur la différence de solubilité à chaud des impuretés et du produit d'intérêt dans un solvant bien choisi. Il s'agit d'une technique de purification sélective.

Ce que nous avions avant la purification est le brut réactionnel. Il faut sélectionner dans ce dernier le paracétamol. Cette sélection on peut la généraliser à toutes les réactions chimiques en milieu liquide, et qui fonctionne en trois étapes :

- **isolement**

  On veut isoler le produit. Si il est solide, on sépare les deux phases, et c'est finit. Si il est liquide, c'est plus compliqué. On peut essayer directement d'évaporer le solvant, mais si le produit est plus volatil que le solvant, on peut aussi l'extraire dans un autre solvant plus pratique. Par exemple on peut extraire un produit organique dans de l'eau avec un solvant organique, ce que vous avez déjà fait dans une ampoule à décanter.

- **Purification**

  Si le produit est solide, comme dans notre cas, on fait une recristallisation. Si le produit est liquide, on peut faire une distillation (fractionnée). On utilise l'azeotrope du mélange produit/solvant pour faire en sorte de n'évaporer que l'un des deux et récupérer le produit.

- **Analyse**

  On veut voir à quel point le produit est pur. Pour cela on dispose de la panoplie de spectroscopies et des propriétés physiques (températures de changement d'état, couleur, masse volumique), et la CCM.

  Ici nous avons effectué une recristalisation, il va falloir évaluer la pureté du produit solide à l'aide d'un banc Kofler et le rendement de la synthèse.

Aller chercher le produit préparé, qui a été mis à l'étuve bien comme il faut.

Le peser en disant "that's a secret tool that will help us later".

Ceci est le même produit que j'ai pris le temps de sécher convenablement à l'étuve. Il est beau, il est blanc, il est radicalement différent du brut de tout à l'heure ! On va donc le passer au banc kofler pour déterminer sa pureté.

Banc kofler

U Know What To Do. https://youtu.be/5UKnz8klOJ4

CCM

Notez que l'éluant proposé dans le Mesplède, mélange 50/50 d'acétone et de dichlorométhane est cancérigène, et classé CMR. Il faut absolument rester sous la hotte et prendre les précautions nécessaires (gants, lunettes). Nous avons aussi réalisé la CCM avec pour éluant un mélange 5/95 d'acétone/éthanol, et ça fonctionne très bien aussi. Ce solvant étant peu volatil et pas dangereux, pas besoin d'être sous la hotte.

2.4 Calcul du rendement et évaluation des performances

Le rendement est calculé par la formule proposée plus haut. On obtient un très bon rendement, donc très peu de pertes. De plus l'économie d'atomes peut être considérée comme de 1 car le seul déchet est en fait de l'acide éthanoïque, tout à fait utilisable en chimie si on le recycle.

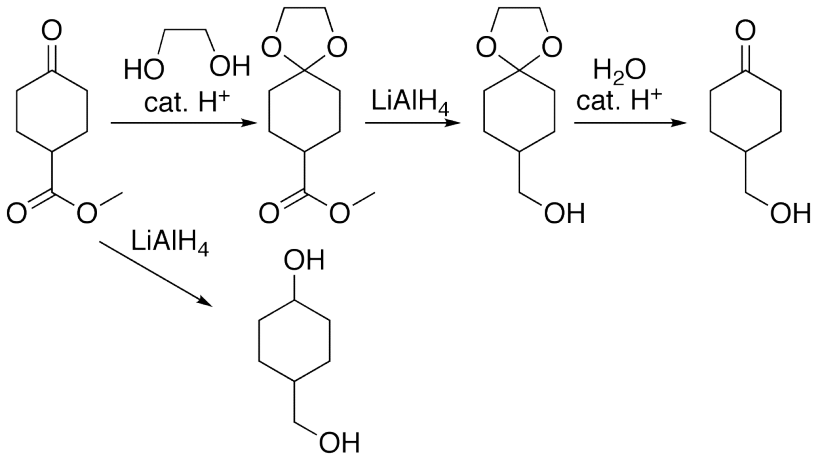
De plus en terme de temps passé à manipuler, la synthèse "manuelle" de quelques grammes de paracétamol (une dose humaine) se fait en une heure. Il est tout à fait raisonnable de considérer cette réaction à plus grande échelle.

3 Introduction de la notion de protection de fonction

Rappel : Une molécule est *polyfonctionnelle* si elle a plusieurs fonctions chimiques.

On a vu que certaines réactions sont *sélectives*, donc se font préférentiellement sur certaines fonctions plutôt que d'autres. Que se passe-t-il si on veut faire réagir l'autre fonction ?

La technique classique est de faire ce que l'on appelle une protection. On va protéger chimiquement de manière réversible la fonction qui aurait tendance à réagir en premier, puis on va faire réagir l'autre.



L'idée est de faire Protection -> Réaction -> Déprotection. Il faut alors faire en sorte que toutes les étapes aient un bon rendement, ce qui peut rendre la protection l'étape cruciale d'une synthèse.

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon quelles stratégies il fallait adopter lorsque l'on voulait synthétiser une molécule, celle a permis de mettre en évidence la notion de sélectivité qui est primordiale pour trouver des réactions menant à notre produit d'intérêt.

Ouverture possible sur la protection de fonction si on a pas eu le temps, sur l'importance de tout ça en médecine sinon.

LC 6

Dosages

Niveau : Lycée

Bibliographie

✍
✍

Prérequis

- Acide Base
- conductimetrie
- Spectrophotométrie, beer lambert
- indicateurs colorés

Expériences

- Dosage du sirop de menthe
- Titrage de l'acide du vinaigre

1 Dosage par étalonnage . . . 788
1.1 Principe . . . 788
1.2 Spectroscopie UV-visible . . . 788
1.3 Conductimétrie . . . 789
2 Titrage . . . 790
2.1 Réaction support et titrage direct . . . 790
2.2 Equivalence . . . 790
2.3 Méthodes de repérage de l'équivalence . . . 791
3 Titrage du vinaigre . . . 792
3.1 Par colorimétrie . . . 792
3.2 Par conductimétrie . . . 792
3.3 Par pH-métrie . . . 793
3.4 Exploitation . . . 793

Introduction

Un dosage a pour but de déterminer le concentration d'une espèce chimique en solution. Ainsi, chaque jour de nombreux dosages sont exécutés dans les domaines de la santé, de l'agroalimentaire ou de l'environnement afin de contrôler la présence d'espèces d'intérêt ou à risque. Par exemple, les prises de sang ne sont ni plus ni moins que des dosages du fer, du glucose et d'autres espèces dans notre corps dont la concentration influe sur notre état de santé.

Cette leçon a pour objectif de donner un catalogue de différentes techniques de dosage et comment choisir la bonne technique parmi ce catalogue pour doser une espèce en particulier.

1 Dosage par étalonnage

1.1 Principe

On appelle *espèce dosée* l'espèce dont on veut déterminer la concentration par dosage. Cependant, nous n'avons pas directement accès à cette concentration et il est donc impossible de la mesurer directement. Il faut donc pouvoir la relier à une grandeur physique mesurable.

Le principe du dosage par étalonnage est donc dans un premier temps de mesurer cette grandeur physique pour des solutions de concentration connue, appelées *solutions étalons*, et dans un second temps de mesurer la même grandeur physique pour la solution de concentration inconnue afin de comparer cette mesures aux valeurs étalons.

La grandeur physique en question peut par exemple être l'absorbance A ou la conductivité électrique σ de la solution. Ainsi, chaque solution étalon aura une valeur donnée d'absorbance ou de conductimétrie et on peut donc tracer A ou σ en fonction de la concentration des solutions étalons. Comme on le vera par la suite, on obtient une courbe, appelée *courbe d'étalonnage*. Dans les cas qui nous intéressent les courbes seront des droites, on parle de droite d'étalonnage.

Il suffit alors de placer le point correspondant à la solution dosée pour en déduire la concentration en espèce dosée.

1.2 Spectroscopie UV-visible

La spectroscopie UV-visible permet de mesurer l'absorbance d'une solution. Celle-ci est reliée à la concentration des espèces colorées en solution par la loi de BEER-LAMBERT :

$$A_\lambda = \sum_i \epsilon_{\lambda,i} l C_i$$

où A_λ est l'absorbance de la solution (sans unité), $\epsilon_{\lambda,i}$ est la coefficient d'absorption molaire de l'espèce i à la longueur d'onde λ (en $\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}{\cdot}dm}$), l est la longueur de la cuve (en dm) et C_i est la concentration molaire en espèce i (en $\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$.

On remarque que A dépend de la longueur d'onde λ. Cependant, on se place en général à une longueur d'onde λ_{max} telle que l'absorbance de l'espèce dosée est maximale afin de minimiser les erreurs de lecture de A si on a une petite variation de λ.

Dans le cas simple où la solution ne comporte qu'une seule espèce colorée, on donc $A_{\lambda_{max}} = \epsilon_{\lambda_{max}} l C = kC$. On comprend donc bien pourquoi on obtient une droite d'étalonnage.

Dans le cas où les espèces sont multiples, on peut faire quelques approximations : si les concentrations des espèces secondaires sont faibles face à une espèce principale, on peut négliger celles-ci ; de même si l'absorbance de ces espèces est faible par rapport à l'espèce principale.

Validité : il faut que $A \leq 1$ car sinon le spectrophotomètre ne donnera pas des valeurs de A fiables.

À titre d'exemple, on va s'intéresser à la concentration en bleu de patenté dans du sirop de menthe.

Dosage par spectroscopie UV-visible du sirop de menthe

✍ Guyon Hulin Petit ⏲ 5 min

Matériel :

- sirop de menthe
- spectromètre UV-visible + cuves
- bleu de patenté (masse molaire = 1160,45 g/mol)
- fioles jaugées
- propipettes

Peser quelques grains de bleu de patenté, les diluer avec de l'eau distillée dans une fiole jaugée. Il sera sûrement nécessaire de diluer la solution mère plusieurs fois. Une fois la solution mère assez diluée, préparer des solutions étalons. Tracer le spectre d'absorption et trouver λ_{max}. On trouve $\lambda_{max} = 638$ nm.

Mesurer A pour les solutions étalons. Tracer la droite d'étalonnage. Mesurer A pour le sirop de menthe. En déduire la concentration en bleu de patenté.

On a déjà prévu en préparation les cuves de solution étalon, le spectre A(λ). En direct on fait seulement un point de la droite d'étalonnage, et le point de mesure.

1.3 Conductimétrie

Pour un dosage par conductimétrie, on mesure la conductivité électrique σ de la solution. Il existe une loi similaire à la loi de Beer-Lambert pour la conductimétrie : c'est la loi de KOLHRAUSCH.

$$\sigma = \sum_i \lambda_i C_i$$

où σ est la conductivité électrique de la solution (en $\mathrm{S{\cdot}m^{-1}}$, souvent on utilise des $\mathrm{mS{\cdot}cm^{-1}}$), λ_i est la conductivité molaire ionique de l'espèce i ($\mathrm{S{\cdot}m^2{\cdot}mol^{-1}}$) et C_i est la concentration molaire en espèce i (en $\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$.

On peut donc également tracer une droite d'étalonnage et doser une espèce chimique de la même façon qu'avec un dosage par spectrophotométrie.

Les dosages par étalonnage ont le mérite d'être non-destructifs, i.e. que la solution dosée peut être récupérée après le dosage. Cependant, dans le cas où plusieurs espèces contribuent à l'absorbance ou à la conductivité de la solution, il faut utiliser une autre méthode.

2 Titrage

Le titrage est un type de dosage particulier, qui est destructif de la solution dosée. On dit d'ailleurs qu'elle est *titrée* plutôt que dosée.

2.1 Réaction support et titrage direct

Un titrage se base sur l'introduction progressive **suivie** d'une espèce dite *titrante*, qui réagit avec l'espèce titrée selon une réaction support connue et **suivable**. Cette réaction support, dont on doit pouvoir suivre l'avancement avec précision, se doit d'être :

- **Totale :**
  Un des réactifs est limitant
- **Rapide :**
  On veut qu'elle se passe instantanément à l'échelle de nos appareils de mesure, afin de pouvoir la réaliser confortablement et sans dérive.
- **Unique (autour de la zone d'intérêt) :**
  Seule l'espèce titrée réagit avec l'espèce titrante.

Par exemple, la réaction d'un acide fort sur une base faible (ou l'inverse) est une réaction totale (par définition d'acide fort), généralement rapide, et unique si l'on néglige l'autoprotolyse de l'eau.

Si on nomme l'acide faible titré AH et la base forte titrante B-, la réaction de titrage est :

$$\mathrm{AH} + \mathrm{B}^- = \mathrm{A}^- + \mathrm{BH}$$

Exemple

Si on titre une solution aqueuse d'acide éthanoïque, acide faible de pKa=4,7, de concentration c_1, par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium (HO^-,Cl^+) de concentration en ions hydroxyde c_2, la réaction support sera :

$$\mathrm{CH_3COOH}_{aq} + \mathrm{HO}^-_{aq} = \mathrm{CH_3COO}^-_{aq} + \mathrm{H_2O}_{liq}$$

Cette réaction répond bien à toutes les contraintes, car elle est rapide, totale, et unique.

2.2 Equivalence

On nomme équivalence du titrage le moment où les réactifs ont été introduits en proportions stoechiométriques. On peut alors écrire $n_{titre} = n_{titrant}$. Si les coefficients stoechimétriques sont différents, et que l'on a $\nu_1 A + \nu_2 B = C$, on doit le prendre en compte. Pour faire réagir ν_1 A il faut ν_2 B, donc

$$\frac{n_{titre}}{\nu_{titre}} = \frac{n_{titrant}}{\nu_{titrant}}$$

Dans notre exemple, on a $\nu = 1$, donc on peut écrire à l'équivalence

$$c_1 V_1 = c_2 V_2$$

Ainsi, si on peut repérer avec précision l'équivalence et y mesurer V_2, on peut remonter à la concentration c_1.

2.3 Méthodes de repérage de l'équivalence

2.3.1 pH-métrie

Considérons la réaction acide-base $AH + B^- = A^- + BH$. Avant l'équivalence, tous les ions B^- sont directement consommés pour réagir avec AH. On a alors

$$pH = pK_A(AH/A-) + \log\left(\frac{[A^-]}{[AH]}\right) = pK_A(AH/A^-) + \left(\frac{C_B V_B}{C_A V_A - C_B V_B}\right)$$

On remarque qu'à la demi-équivalence, $C_B V_B = \frac{1}{2} C_A V_A$ et donc que $pH = pK_A$.

Après l'équivalence, on ajoute les ions B^- en excès et donc le pH devient soudainement basique : on observe donc un saut de pH à l'équivalence.

Pour repérer l'équivalence, on peut utiliser deux méthodes différentes :

- la méthode des tangentes
- on dérive le pH par rapport au volume d'espèce titrante et ont regarde l'abscisse du pic.

2.3.2 Indicateur coloré

Lorsque le saut de pH à lieu, à l'équivalence, le pH passe brutalement de $\sim$ pKa-1 à $\sim$ pKa+1, donc si on a une espèce qui change de couleur dans ces eaux de pH là, elle change brutalement de couleur au moment de l'équivalence. On observe alors, au moment de l'équivalence, un changement de couleur de la solution, qui repère avec une précision relative l'équivalence.

La méthode de l'indicateur coloré est utilisée soit comme un premier jet rapide, pour bien déterminer les paramètres expérimentaux, soit pour une mesure approchée de la concentration.

Exemples d'indicateurs de pH

Indicateur	Couleur		pK_{In}	domaine de pH
	Acide	Base		
Bleu de Thymol - 1ère zone	rouge	jaune	1.5	1.2 - 2.8
Orange de Méthyle	rouge	jaune	3.7	3.2 - 4.4
Vert de Bromocrésol	jaune	bleu	4.7	3.8 - 5.4
Rouge de Méthyle	jaune	rouge	5.1	4.8 - 6.0
Bleu de Bromothymol	jaune	bleu	7.0	6.0 - 7.6
Rouge de Phénol	jaune	rouge	7.9	6.8 - 8.4
Bleu de Thymol - 2ème zone	jaune	bleu	8.9	8.0 - 9.6
Phénolphthaléine	incolore	fuschia	9.4	8.2 - 10.0

2.3.3 Suivi conductimétrique

Dans la pluspart des dosages, les espèce qui réagissent sont des ions, et la variation de leur concentration fait grandement varier la conductivité de la solution. Ainsi suivre l'évolution de la conductivité permet de suivre l'avancement de la réaction, sous la forme de portions de droites.

En effet si on utilise la formule de Kohlrausch, $\sigma = \sum_i \lambda_i c_i$, et qu'on l'applique dans l'exemple du titrage du vinaigre, on a avant l'équivalence :

$$\sigma = \lambda_{CH3COO^-} \times \frac{c_2 V_2}{V_{tot}} + \lambda_{Na^+} \times \frac{c_2 V_2}{V_{tot}}$$

Et après l'équivalence on a

$$\sigma = \lambda_{CH3COO^-} \times \frac{c_2 V_2^{eq}}{V_{tot}} + \lambda_{Na^+} \times \frac{c_2 V_2}{V_{tot}} + \lambda_{HO^-} \times \frac{c_2 (V_2 - V_2^{eq})}{V_{tot}}$$

Avec $V_{tot} = V_1 + V_2$. Dans l'approximation où $V_2 \ll V_1$, on a $V_{tot} \simeq V_1$, et on a bien des droites.

3 Titrage du vinaigre

Ici l'exemple que l'on va prendre va être le titrage de l'acide éthanoïque contenu dans le vinaigre. Ce dosage pourrait en pratique être employé pour déterminer si un vin a tourné au vinaigre, avec plus de précision que simplement l'usage d'une sonde à pH.

On s'intéresse à la réaction

$$CH_3COOH_{aq} + HO^-_{aq} = CH_3COO^-_{aq} + H_2O_{liq}$$

On considère que c'est la seule réaction qui a lieu dans le mélange.

3.1 Par colorimétrie

Titrage par colorimétrie

✍ ⏲

On utilise pour ce titrage le bleu de thymol dont les zones de virage sont à pH = 1.65 et pH = 9.2 (c'est la deuxième zone de virage qui nous intéresse). On trouve un volume équivalent V_{eq1}.

Il peut être intéressant de réaliser un titrage par colorimétrie une première fois en préparation afin de savoir à l'avance vers où se trouve le volume équivalent, ce qui sera utile lorsqu'on devra resserrer les points lors des titrages par conductimétrie et pH-métrie.

3.2 Par conductimétrie

Titrage par conductimétrie

✍ ⏲

On trace σ en fonction de $\frac{V}{V+V_0}$. Il faut penser à resserrer les points près de l'équivalence. On relève l'abscisse $\frac{V_{eq2}}{V_{eq2}+V_0}$

correspondant à la rupture de pente (pour cela, on modélise 2 droites avant et après l'équivalence). On en déduit V_{eq2}.

3.3 Par pH-métrie

Titrage par pH-métrie

✍ ⏲

On trace le pH en fonction de V. Il faut penser à resserrer les points près de l'équivalence. On trouve V_{eq3} soit par la méthode des tangentes, soit par la dérivée du pH.

3.4 Exploitation

A l'équivalence, $C_0V_0 = C_BV_{eq}$. On en déduit

$$C_B = C_0\frac{V_0}{V_{eq}}$$

Conclusion

On a vu différentes méthodes pour déterminer la concentration d'une espèce dosée dans une solution. Cependant, il existe d'autres méthodes pour obtenir ce genre d'information, comme par exemple d'autres types de titrages tel que les titrages indirects et les titrages en retour.

LC 7

Cinétique et catalyse

Niveau : Lycée

Bibliographie

- ✍ *Physique-Chimie TS spé*, **Hachette** p231
- ✍ *Celui dont on ne doit pas prononcer le nom*

Prérequis

- ➢ Acide Base
- ➢ avancement
- ➢ rendement
- ➢ dosage
- ➢ absorbance
- ➢ oxydoréduction

Expériences

- Suivi cinétique par absorption de l'oxydation des ions I^- par H202
- Oxydation des ions tartrates
- catalyse de la dissociation de H2O2

1 Evolution temporelle d'un système chimique . . . 796
1.1 Cinétique chimique . . . 796
1.2 Suivi cinétique d'un système chimique . . . 796
1.3 Temps de demi-réaction . . . 797
2 Facteurs cinétiques . . . 797
2.1 Description microscopique . . . 797
2.2 Concentration en réactifs . . . 797
2.3 Température . . . 798
2.4 Vidéo illustrative . . . 798
3 Catalyse . . . 799
3.1 Exemple de catalyse . . . 799
3.2 Exemple vidéo : l'eau oxygénée . . . 799
3.3 Autre exemple : la décomposition de l'Ozone . . . 800
3.4 Types de catalyse . . . 800

Introduction

Commençons par une expérience introductive faisant intervenir de l'eau oxygénée. Lorsqu'on regarde une bouteille d'eau oxygénée, on remarque qu'il y a une date limite d'utilisation et qu'avec le temps, la bouteille gonfle. Ce phénomène est dû à la réaction de décomposition (c'est une dismutation) de l'eau oxygénée :

$$2H_2O_{2\ (aq)} = 2H_2O_{\ (l)} + O_{2\ (g)}$$

Décomposition de $H_2O_{2\ (aq)}$ catalysée par la catalase

Préparer une boîte de Pétri contenant secrètement un jus de navet, puis y verser de l'eau oxygénée concentrée (100 volumes). Observer le dégagement de $O_{2\ (g)}$.

On voit ici qu'une réaction qui normalement prend plusieurs années à se faire dans une bouteille se fait dans la boîte de Pétri en quelques secondes. Pourtant, l'équation n'a pas changé de bilan donc *a priori* il n'y a aucune raison qu'elle se fasse plus vite dans la boîte de Pétri que dans la bouteille, un peu à la manière d'un voyage Bordeaux-Metz en TGV qui se fait plus vite qu'en voiture.

Cette leçon a pour objectif d'étudier la vitesse d'une réaction, *i.e.* sa cinétique.

1 Evolution temporelle d'un système chimique

1.1 Cinétique chimique

Commençons par une définition de la *durée de réaction* : c'est la durée nécessaire au bout de laquelle un système chimique est passé d'un état initial à un état final, *i.e.* un état où il n'y a plus aucune évolution *perceptible* et où l'avancement est maximal. On peut distinguer deux types de réactions :

- une réaction *rapide*, pour une observation à l'oeil nu, paraît terminée dès qu'on met en contact les réactifs (donc une durée inférieure au dixième de seconde typiquement) ;
- une réaction est *lente* dans le cas contraire. C'est notamment le cas de la décomposition de l'eau oxygénée dans la bouteille vue en introduction.

1.2 Suivi cinétique d'un système chimique

Pour décrire l'évolution temporelle d'un système chimique siège d'une réaction lente, il faut décrire l'évolution de l'avancement au cours du temps grâce à diverses techniques tel que le titrage, la conductimétrie, ou la spectrophotométrie entre autres.

Afin d'illustrer cette partie, nous allons utiliser l'oxydation des ions iodure par l'eau oxygénée qui produit du diiode. Puisque la seule espèce colorée dans cette expérience est le diiode, le suivi cinétique par absorbance semble particulièrement pertinent. La réaction en jeu est la suivante :

$$2I^-_{\ (aq)} + H_2O_{2\ (aq)} + 2H^+_{\ (aq)} = 2H_2O_{\ (l)} + I_{2\ (aq)}$$

Suivi cinétique par absorption de l'oxydation des ions I^- par H_20_2

✍ JFLM 1 p274 ⏲ 10 min

Doubler la concentration de KI par rapport à celle indiquée par le JFLM pour avoir une réaction plus rapide et un beau palier de fin de réaction. Il faut environ 30 min pour l'avoir.

On utilise donc 5 ml de KI à **0.2 M**, 1 mL d'eau oxygénée à à 0.1 M, 1 mL d'acide sulfurique à 1 M et 3 mL d'eau. A intervalles de temps réguliers, prélever quelques gouttes du milieu réactionnel et en mesurer l'absorbance.

La loi de Beer-Lambert permet d'écrire $A = kC$ où C est la concentration en I_2. On peut donc suivre l'avancement de la réaction à différents instants.

1.3 Temps de demi-réaction

Il est souvent difficile de savoir quand la réaction se finit (palier d'absorbance dans notre cas, avancement maximal dans le cas général).

C'est pourquoi on introduit le *temps de demi-réaction* $t_{\frac{1}{2}}$, définit comme étant le temps nécessaire pour l'avancement atteigne la moitié de l'avancement maximal, *i.e.* $x(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{x_{max}}{2}$. **Ce n'est pas la moitié de la durée de réaction.**

On a maintenant un outil pour juger la durée de réaction et donc la vitesse de réaction. Il s'agit maintenant de voir comment faire pour modifier cette durée, en commençant par s'intéresser à l'aspect microscopique d'une réaction chimique.

2 Facteurs cinétiques

2.1 Description microscopique

Une réaction chimique à l'échelle macroscopique est le résultat d'une multitude de collisions à l'échelle microscopique entre les molécules de réactifs pour finir par former les molécules de produit. Chaque collision n'est pas forcément réactive et donc il faut souvent plusieurs collisions pour que la transformation se fasse.

On comprend donc intuitivement que la cinétique chimique est liée à ces collisions, et plus précisément au nombre de collisions par seconde. Influencer ce nombre revient donc à influencer la cinétique de la réaction. On peut penser en particuler à 2 paramètres expérimentaux pouvant modifier la cinétique d'une réaction :

- la concentration en réactifs : plus il y a de réactifs dans un volume donné, plus il y a de collisions entre eux pour que la réaction ait lieu.
- la température : plus elle augmente, plus les molécules s'agitent et donc plus il y a de collisions.

2.2 Concentration en réactifs

On refait le suivi cinétique précédent mais avec une concentration en KI **2 fois plus faible**.

Suivi cinétique par absorption de l'oxydation des ions I^- par H_2O_2 avec 2 fois moins de KI.

✍ JFLM 1 p274 ⏲ 5 min

On utilise donc 5 ml de KI à **0.1 M**, 1 mL d'eau oxygénée à à 0.1 M, 1 mL d'acide sulfurique à 1 M et 3 mL d'eau. A intervalles de temps réguliers, prélever quelques gouttes du milieu réactionnel et en mesurer l'absorbance.

On constate alors que le temps de demi-réaction est plus grand et que l'avancement final est identique, conformément aux prévisions.

2.3 Température

On refait le suivi cinétique précédent mais **après avoir chauffé le milieu réactionnel**.

☕

Suivi cinétique par absorption de l'oxydation des ions I^- par H_20_2 après avoir chauffé le milieu réactionnel.

✍ JFLM 1 p274 ⏲ 5 min

On utilise donc 5 ml de KI à **0.2 M**, 1 mL d'eau oxygénée à à 0.1 M, 1 mL d'acide sulfurique à 1 M et 3 mL d'eau. On chauffe le milieu réactionnel (au bain-marie par exemple). A intervalles de temps réguliers, prélever quelques gouttes du milieu réactionnel et en mesurer l'absorbance.

On constate alors que le temps de demi-réaction est plus court et que l'avancement final est encore une fois identique, conformément aux prévisions.

En effet, la température est un facteur cinétique. Ainsi, on peut stopper une réaction en refroidissant le milieu réactionnel assez rapidement. Cette technique s'appelle la *trempe* et est très utile quand on veut suivre l'avancement d'une réaction par titrage. C'est également très utile pour conserver les aliments en ralentissement leur dégradation. Pour reprendre l'analogie du trajet Bordeaux-Metz, ça revient à se déplacer plus au moins vite.

2.4 Vidéo illustrative

Dans cette vidéo, où l'expérimentateur (gare à ses fesses) ne respecte pas les conditions de sécurité de base, on voit que l'augmentation de température et l'augmentation de concentration rendent la réaction plus rapide :

https://youtu.be/9GEmhPIL76U

Cependant on voit aussi que le résultat final n'est pas différent, les trois réactions aboutissent au même résultat, l'avancment n'est pas modifié.

> *Ainsi, il est possible d'influencer très simplement la cinétique d'une réaction chimique en augmentant la concentration des réactifs ou la température. Mais ce n'est clairement pas ce qui s'est passé avec la décomposition de l'eau oxygénée. En fait, accélérer une réaction chimique sans trop chauffer ou utiliser des concentrations importantes est précisément l'objectif d'une chimie durable. C'est pourquoi de nombreux procédés chimiques industriels utilisent des catalyseurs.*

3 Catalyse

Un **catalyseur** est une espèce chimique qui, lorsqu'elle est présente dans le milieu réactionnel, accélère la réaction considérée. Un catalyseur est et doit être absent du bilan de la réaction pour être considéré comme tel : si il est consommé, il doit être intégralement restitué.

Mode d'action d'un catalyseur : un catalyseur modifie la nature des étapes permettant de passer des réactifs aux produits. La réaction globale, lente, est remplacée par plusieurs réactions plus rapides. Un catalyseur **ne modifie pas le rendement** de la réaction, juste le temps qu'elle met à se faire.

3.1 Exemple de catalyse

Pour illustrer cette partie, on utilise la réaction suivante :

$$C_4H_4O_6^{2-}{}_{(aq)} + 5H_2O_2{}_{(aq)} + 2H^+_{(aq)} = 4CO_2{}_{(g)} + 8H_2O{}_{(l)}$$

Oxydation des ions tartrates par l'eau oxygénée catalysée par le cobalt

✍ JFLM 1, p278 ⏲ 10 min

Insister avant toute chose sur la lenteur de la réaction sans catalyse. Insister également sur sa régénération (couleur rose au début et à la fin de l'expérience) et sur le fait qu'il n'apparaisse pas dans le bilan réactionnel malgré le fait qu'il interagisse avec les réactifs.

- dissoudre 1 g de sel de Seignette dans 20 mL d'eau, le tout porté à ébullition
- ajouter 10 mL d'eau oxygénée à environ 2 M ⇒ rien ne se passe
- verser cette solution dans une éprouvette de 100 mL placée au centre d'un cristallisoir d'1 L
- ajouter une pointe de spatule de CoCl ⇒ la solution rosit, puis verdit et mousse beaucoup puis rosit à nouveau

On peut également montrer l'influence de la température en utilisant 2 éprouvettes dans un cristallisoir vide et un cristallisoir avec de la glace.

En présence de cobalt, la réaction se décompose en 2 étapes :

$$H_2O_2{}_{(aq)} + 2Co^{2+}{}_{(aq)} + 2H^+{}_{(aq)} \rightarrow 2Co^{3+}{}_{(aq)} + 2H_2O{}_{(l)}$$
$$C_4H_4O_6^{2-}{}_{(aq)} + 2H_2O{}_{(l)} + 10Co^{3+}{}_{(aq)} \rightarrow 4CO_2{}_{(g)} + 10Co^{2+}{}_{(aq)} + 8H^+{}_{(aq)}$$

3.2 Exemple vidéo : l'eau oxygénée

https://youtu.be/axffOTFZIH4

L'eau oxygénée, ou péroxyde d'hydrogène, H_2O_2 se décompose en H_20 et en O_2, mais la réaction est très lente. Cependant, lorsque l'on ajoute des ions fer 3 ou de la viande dans l'eau oxygénée, on observe un dégagement gazeux à l'oeil nu, indicateur d'une réaction plus rapide.

On a accéléré la réaction, sans pour autant altérer son avancement total ou son bilan, puisqu'à la fin les produits et réactifs sont les mêmes.

Attention : les types de catalyse, présentés à la fin de la vidéo, sont à garder pour la dernière sous-section.

3.3 Autre exemple : la décomposition de l'Ozone

Un exemple de catalyse importante sur le plan environnemental est la catalyse de la décomposition de l'Ozone en Dioxygène. L'Ozone est un gaz peu stable qui sert de bouclier thermique de l'atmosphère. Il se décompose en dioxygène selon l'équation de réaction suivante : $2O_3{=}3O_2$. Cette réaction est relativement lente, et est compensée par la formation permanente d'ozone grâce aux radiations UV du soleil. ($O_2{+}h\nu{=}2O^\bullet$, $O^\bullet{+}O_2{=}O_3$.)

Cependant certains gaz comme le dichlore sont des catalyseurs de la réaction, par un mécanisme radicalaire. Lorsqu'une liaison chimique est coupée en deux de manière homolytique, chaque côté de la liaison embarque un électron (*faire un dessin au tableau*), et devient ce que l'on appelle un radical. Les réactions qui ont lieu avec le dichlore sont les suivantes :

$Cl_2{+}O_3 \rightarrow ClO^\bullet{+}ClO_2^\bullet$

$2ClO^\bullet \rightarrow O_2{+}Cl_2$

$ClO_2^\bullet{+}O_3 \rightarrow ClO_3^\bullet + O_2$

$ClO_3^\bullet{+}O_3 \rightarrow ClO_2^\bullet{+}2O_2$

$2ClO_3^\bullet{+}O_3 \rightarrow Cl_2{+}3O_2$

https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0047267079800040

http://pcsi3.lycee-berthelot.fr/IMG/pdf/TD_chapitre_7_-_me_canismes_-_partie_2.pdf

Version courte :

$2{\times}(Cl_2{+}O_3 \rightarrow ClO^\bullet{+}ClO_2^\bullet)$

$2ClO^\bullet \rightarrow O_2{+}Cl_2$

$2ClO_2^\bullet{+}2O_3 \rightarrow 5O_2{+}Cl_2$

Cette réaction est bien plus rapide que sans le catalyseur Cl_2, qui est régénéré et prêt à faire réagir de l'ozone à nouveau.

3.4 Types de catalyse

Les exemples que l'on a vu plus haut sont divers, et on remarque que pour certains le catalyseur est dans la même phase que les produits, pour d'autres non. On peut donc distinguer différents types de catalyse. On va illustrer ces types de catalyse sur l'exemple de la décomposition de l'eau oxygénée.

Trois types de catalyse différents

✍ Physique-Chimie TS spé, Hachette, p231 ⏲ 5 min

- Catalyse *homogène*

  Les réactifs et le catalyseur sont dans la même phase. C'est le cas par exemple de la catalyse avec les ions Cobalt. Ils sont dissouts dans la solution.

eau oxygénée (à 10 mol/L) et quelques gouttes de solution de sel de Mohr (Fe2+ et Fe3+) à 0.5 mol/L

- Catalyse *Hétérogène*

  Les réactifs ne sont pas dans la même phase que le catalyseur. C'est le cas de la catalyse courante au fil de platine.

  eau oxygénée (à 10 mol/L) et platine solide (un grande surface et un fil pour montrer la différence d'efficacité)

  Plus la surface de contact est grande, plus la catalyse est efficace. Cela permet de facilement récupérer le catalyseur, cependant c'est généralement moins efficace que la catalyse homogène.

- Catalyse *enzymatique*

  C'est une enzyme qui catalyse la réaction.

  Eau oxygénée (à 10 mol/L), rondelle de navet (enzyme : catalase)

les réactions biochimiques sont souvent catalysées par les enzymes, qui sont des protéines sélectives (à cause de leur structure spatiale) et très spécifiques. La salive, par exemple, contient des enzymes (hydrolyse du glucose). Avantages : très rapide, très sélectif. Inconvénients : coûteux, pas toujours possible.

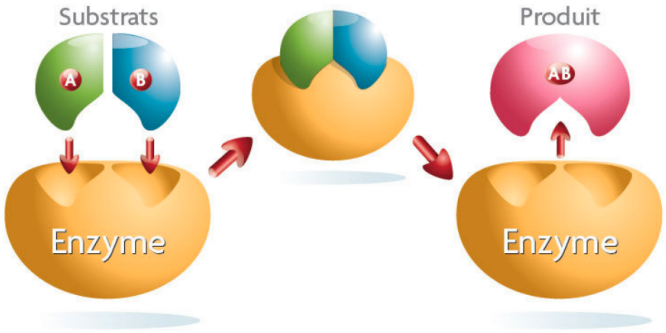


FIGURE 7.1 – La catalyse enzymatique.

Chaque enzyme possède des conditions d'activité en termes de température et de pH. Les enzymes utilisées par les organismes vivants sont donc adaptées à ces organismes. Les enzymes sont des catalyseurs très efficaces, ainsi la catalase est, à concentration égale et dans des conditions optimales, 10^6 fois plus efficace que les ions fers (III) pour la décomposition de l'eau oxygénée.

En fait, quelques gouttes de catalase étaient présentes dans le bécher de la toute première expérience !

Conclusion

On a donc appris qu'on pouvait considérer une réaction non seulement du point de vue de son bilan, mais aussi de celui de son évolution temporelle. On a vu que certaines réactions sont plus rapides que d'autres et qu'il était possible d'influencer la cinétique d'une réaction soit en jouant sur les paramètres expérimentaux comme la concentration des réactifs et la température, soit par l'action de catalyseurs.

Cette nouvelle dimension est particulièrement importante pour l'industrie, qui cherche à réduire les temps de production, mais aussi pour vous puisque pour faire un titrage, il est crucial de choisir une réaction rapide comme réaction titrante. (et puisqu'une séance de TP se fait en temps limité).

LC 8

Caractérisations par spectroscopie en synthèse organique

Niveau : Lycée, TS

À faire en début d'année de TS.

Bibliographie

Priorité

- ✍ *Chimie TS* **Belin**
- ✍ *chimie TS* **Nathan**
- ✍ *chimie TS* **Hachette**
- ✍ *Chimie 2ème année PC-PC** **Hprépa**
- ✍ https://www.superprof.fr/ressources/scolaire/physique-chimie/terminale-s/la-spectroscopie/spectre-vrmn.html

Prérequis

- ➢ Nomenclature
- ➢ Fonctions chimiques
- ➢ Lewis, Cram
- ➢ Mésomérie
- ➢ couleur et longueur d'onde

Expériences

☕

1 Spectroscopie UV-visible . . . 804
1.1 Couleur d'un composé . . . 804
1.2 Absorbance . . . 805
1.3 Exemple de la menthe . . . 805
1.4 Utilisation quantitative de l'absorbance . . . 806
2 Spectroscopie IR . . . 807
2.1 Principe . . . 807
2.2 Analyse de spectre . . . 809
2.3 Mise en évidence de la liaison Hydrogène . . . 810
3 Spectroscopie RMN . . . 810
3.1 Principe . . . 810
3.2 Caractéristiques d'un signal en RMN . . . 811
3.3 Lecture d'un spectre RMN . . . 812

Introduction

Lorsqu'on réalise une synthèse chimique, il est crucial de s'assurer que le produit obtenu et bien l'espèce que l'on voulait obtenir en premier lieu. Nous avons déjà vu des techniques de caractérisations telles que la mesure de la température de fusion, de l'indice de réfraction ou la réactivité avec d'autres espèces chimiques. Cependant, ces méthodes sont lentes, parfois destructrices, elles ne nous donnent pas d'informations sur de potentiels intermédiaires réactionnels et elles ne permettent pas de caractériser un produit pour la première fois ou bien dans l'absence du produit de référence.

C'est pour répondre à ce besoin que la spectroscopie a été développée. Cette leçon a pour objectif de donner 3 exemples de spectroscopie couramment utilisée en synthèse organique.

1 Spectroscopie UV-visible

On a toustes déjà déterminé à sa couleur le contenu d'un verre (et on s'est toustes déjà trompé, mélangeant le jet27 au sirop de menthe, d'ailleurs). On le met à la lumière, ça nous donne sa couleur, généralement caractéristique (en tout cas pour le jet), et on en déduit le contenu ! Le principe de la spectroscopie UV-Visible est exactement celui-là : faire passer de la lumière UV et visible dans un milieu, et étudier ce qui passe au travers et ce qui ne passe pas, pour remonter au contenu.

1.1 Couleur d'un composé

La couleur d'un composé, c'est la lumière qu'il n'aborbe pas. En effet lorsqu'on regarde un sirop de menthe, on voit du vert, ce qui signifie que la couleur complémentaire du vert à été absorbée. Pour déterminer les couleurs complémentaires on utilise une étoile des couleurs. Ainsi un composé de couleur rouge a absorbé principalement le cyan, et un composé cyan a absorbé le rouge. De même un composé vert a absorbé le violet-rose, la menthe absorbe le rose.

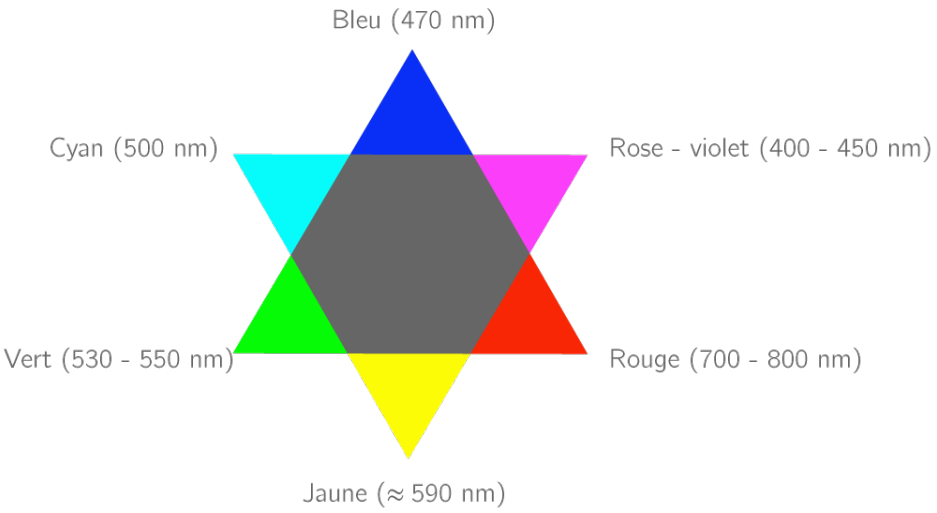


FIGURE 8.1 – Étoile des couleurs

1.2 Absorbance

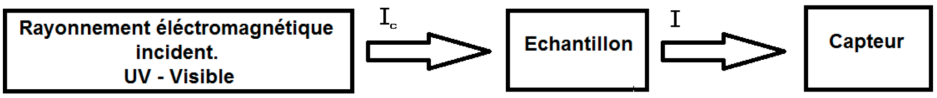


FIGURE 8.2 – Schéma du montage de mesure de l'absorbance.

L'absorbance est une mesure de la proportion de lumière qui traverse un milieu. On la note A, elle dépend de la longueur d'onde, de l'épaisseur du milieu, et de la concentration en espèce chimique absorbante.

$$A(\lambda, \ell, c) = -\log \frac{I}{I_0}$$

Dans la limite des milieu suffisamment dilués, elle est donnée par la **loi de Beer Lambert**. Avec ℓ l'épaisseur (en cm), λ la longueur d'onde, et c la concentration en espèce colorée (en mol/L), on a :

$$A = \epsilon(\lambda) \times \ell \times c$$

ϵ est nommé *coefficient d'extinction molaire*. Il est intrinsèque à l'espèce considérée, ne dépend pas de l'épaisseur, ne dépend pas de la concentration. Il est traditionnellement en $\mathrm{L\,cm^{-1}\,mol^{-1}}$. Cette unité permet de faire des mesures sur des échantillons de longueur connue en cm, comme *Sortir la cuve* cette petite cuve. On dit que le milieu est suffisamment dilué si son absorbance est inférieure à 2.

On peut évidement relier l'absorbance à la couleur, et c'est ce que l'on va faire avec l'exemple suivant !

1.3 Exemple de la menthe

Prenons la Tartrazine (E102). Ce colorant étant jaune, on s'attend à ce qu'il absorbe beaucoup dans le violet, *i.e.* autour de 400 nm. Voici son spectre d'absorbance. On voit bien ce que l'on s'attendait à voir.

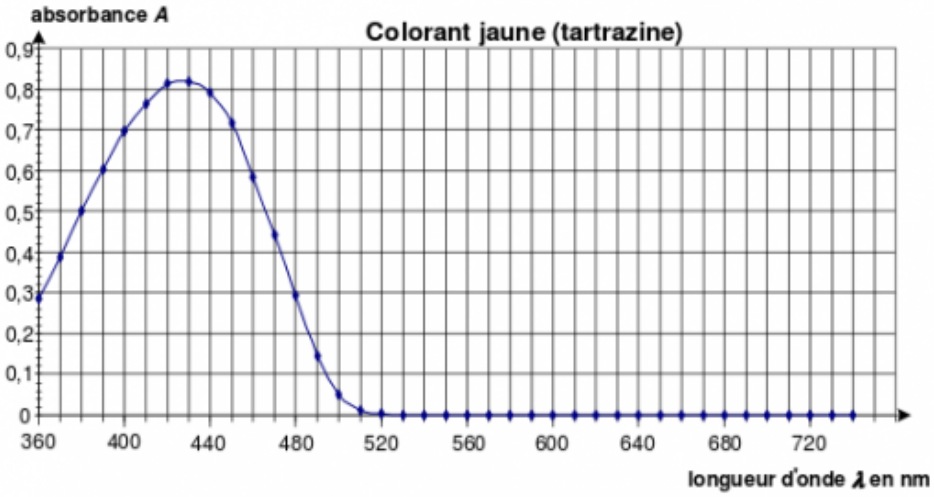


FIGURE 8.3 – Spectre d'absorbance de la Tartrazine.

Prenons maintenant le bleu patenté E131. Il est comme, son nom l'indique, bleu, ce qui indique un maximum d'absorbance dans les 600nm. Sans surprise...

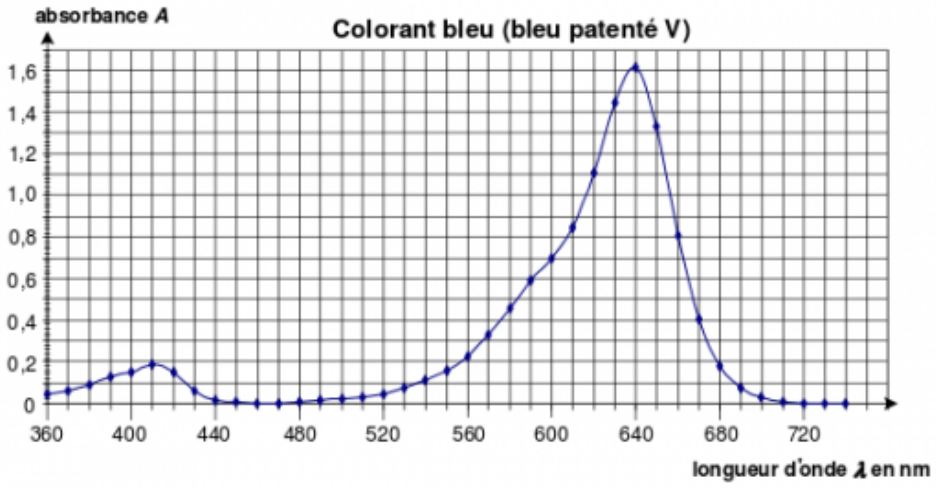


FIGURE 8.4 – Spectre d'absorbance du bleu patenté.

Prenons enfin ce spectre là, spectre du mélange d'un bleu patenté et d'une tartrazine. On absorbe à la fois le bleu et le rouge, ce qui veut dire qu'il nous reste le... Le Veeeert oui Timéo, bravo !

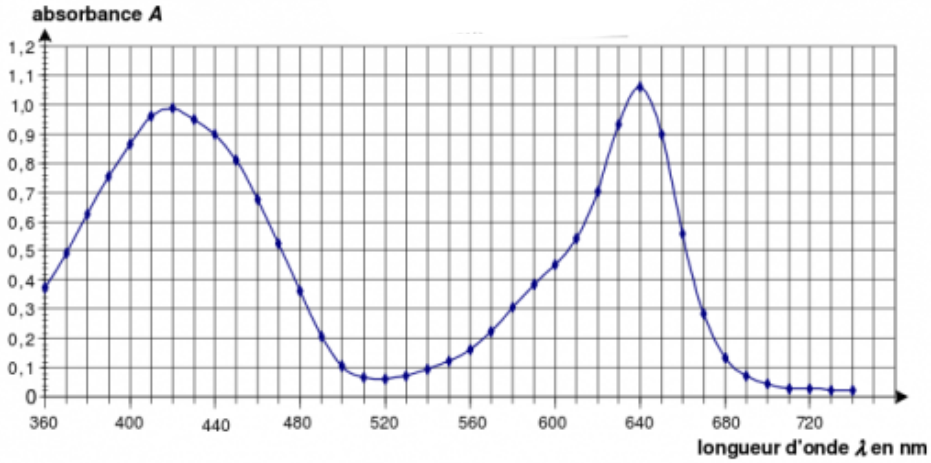


FIGURE 8.5 – Spectre d'absorbance du mélange.

☕

Mélange des colorants

✍ ⏲ 10s

Et en effet si on mélange ces deux colorants en quantité égales on obtient ceci : mélanger de la tartrazine et du bleu patenté, comparer à de la menthe.

1.4 Utilisation quantitative de l'absorbance

La technique expérimentale d'utilisation d'un spectromètre UV-Visible : Il peut mesurer l'absorbance dans les longueurs d'onde entre 100 et 1000nm, donc il va chatouiller l'UV, et le proche infrarouge.

Notice d'une mesure d'absorbance au spectromètre UV-visible :

- Allumer le spectromètre
- *Faire le blanc*
- Choisir une longueur d'onde (ou un mode spectre)
- insérer la cuve contenant l'échantillon remplie aux 3/4 (sans en toucher les bords)
- Fermer le capot du spectromètre et lancer la mesure

Spectre de la menthe

✍ 🕒 5mn

Faire le spectre UV visible de sirop de menthe dilué (X fois, X comme dans l'expérience suivante). À préparer.

C'est effectivement ce qu'il y a dans le sirop de menthe. À noter que là, en terme de goût, y'a rien. Ces spectres ne sont pas des signatures, mais ils peuvent tout de même nous renseigner sur le contenu d'un échantillon, notamment lorsque l'on voit deux pics d'absorbance, on se doute que c'est la signature d'un mélange. Il existe une autre application plus quantitative de la mesure d'absorbance.

On a vu que l'absorbance est reliée à la concentration par la loi de Beer-Lambert dans la limite ou la solution est suffisamment diluée. On peut donc se servir de sa mesure pour déterminer une concentration. Si on se place à une longueur d'onde, et que l'on prend un milieu contenant un composé chimique coloré absorbant à cette longueur d'onde, et un seul, et que l'on veut connaître la concentration de ce composant, on peut faire une droite d'étalonnage et remonter à sa concentration. Le sirop de menthe comme on l'a vu contient deux colorants, mais si on se place à 640 nm, seul le bleu patenté absorbe, selon la loi :

$$A = \epsilon(\lambda) \times \ell \times c$$

Dosage du bleu patenté dans la menthe

✍ 🕒

On a dilué la menthe X fois pour se placer à A<1. On fait une courbe d'étalonnage au bleu patenté, et on remonte à la concentration. On compare avec les doses toxiques :

Dose Journaliere admissible : 15mg/kg, pour un humain de 67kg ca fait 1g.

2 Spectroscopie IR

2.1 Principe

En présence d'un rayonnement infrarouge (800nm-1mm, *i.e.* 4-40kJ/mol), les liaisons chimiques se mettent à vibrer en absorbant le rayonnement. Les vibrations d'une liaison se font à des fréquences caractéristiques de leur nature chimique (multiplicité, longueur, polarité). Ces vibrations peuvent être de plusieurs forme, la plus simple étant la vibration d'élongation, que l'on peut montrer facilement sur une molécule diatomique :

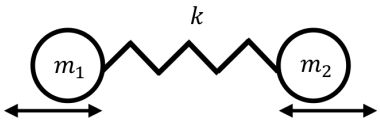


FIGURE 8.6 – Élongation d'une liaison.

Vers le supérieur

on peut modéliser la liaison par un ressort de raideur k, reliant deux masses m_1 et m_2. La fréquence de vibration est alors $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$, avec $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

Une molécule diatomique ne peut que faire de l'élongation, mais une molécule plus complexe peut faire plein de choses plus funky, comme par exemple :

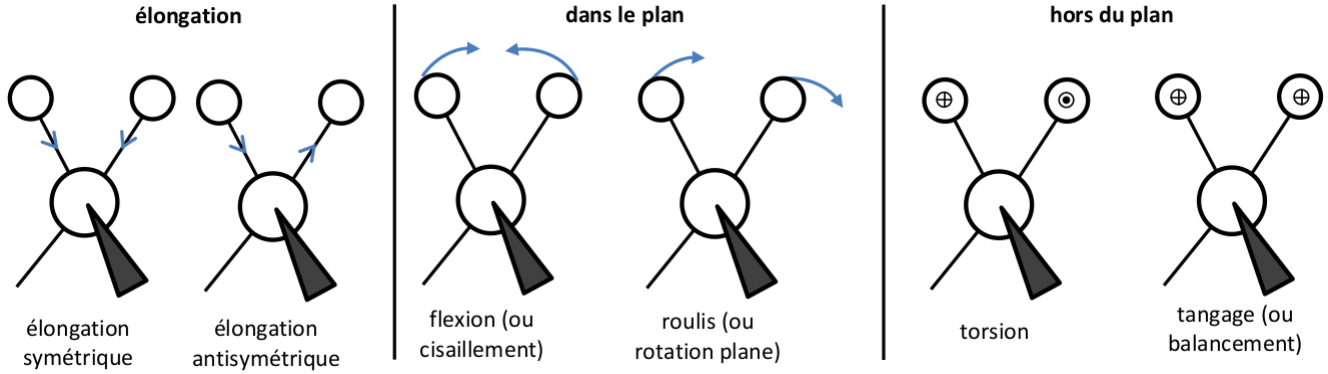


FIGURE 8.7 – Les autres modes de vibration possible.

On peut ainsi simplement procéder comme en spectroscopie UV-Visible, et tracer l'absorbance. En IR elle est plutôt tracée sous la forme de transmitence, *i.e.* le pourcentage de lumière qui traverse. $T = 10^{-A}$. On la trace en fonction non pas de la longueur d'onde mais du *nombre d'onde*, $\sigma = 1/\lambda = \nu/C$. En général on gradue de 4000cm^{-1} à 500cm^{-1}.

Voici un exemple de spectre.

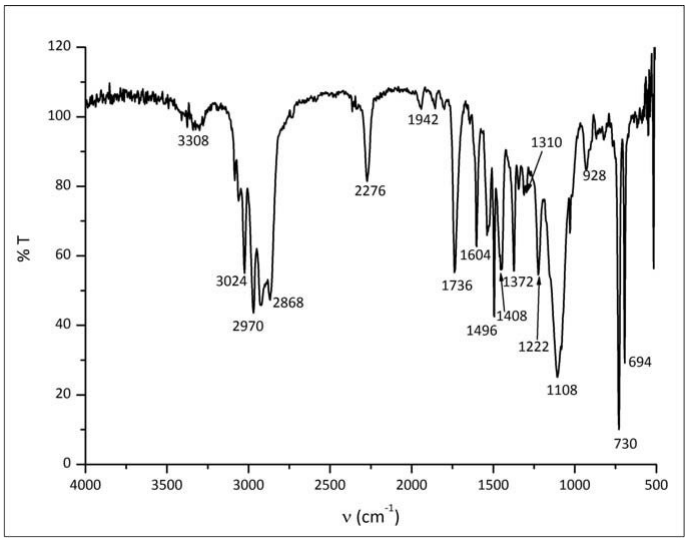


FIGURE 8.8 – Un spectre IR random.

2.2 Analyse de spectre

On distingue deux zones distinctes sur le spectre :

- $4000 > \sigma > 1400$ cm^{-1} : bandes caractéristiques des liaisons OH, NH, CH, CO et CC.

- $1400 > \sigma > 500$ cm^{-1} : "empreinte digitale", propre à un composé donné (plus complexe).

Type de liaison	σ **(en cm^{-1})**	**Largeur de bande**	**Intensité d'absorption**
O−H (phase gazeuse	3500-3700	fine	moyenne
O−H (phase condensée)	3200-3400	large	forte
N−H (phase gazeuse)	3300-3500	fine	faible
N−H (phase condensée)	3100-3300	large	forte
C−H	2900-3100	large	moyenne à forte
C=O	1700-1800	fine	forte
C=C	1500-1700	variable	moyenne à forte

FIGURE 8.9 – Table des nombres d'ondes IR.

Analysons rapidement un spectre ou deux ! Le spectre IR de la saligénine présente un pic fort assez étroit vers 2900 cm^{-1} qui témoigne de la présence de plus de liaisons CH que dans l'acide salicylique. Au contraire, un pic étroit et très fort vers 1700^{-1} est visible dans le spectre de l'acide salicylique, caractéristique des liaisons CO.

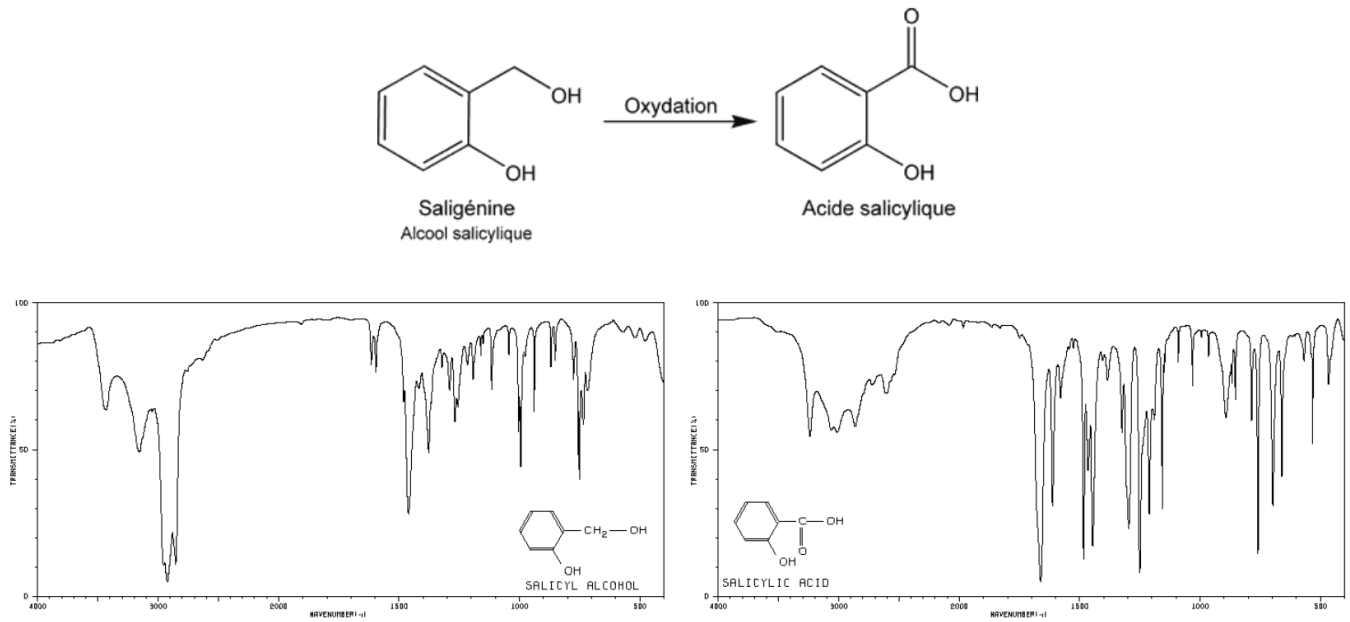


FIGURE 8.10 – Les spectres des deux composés, dans l'ordre.

2.3 Mise en évidence de la liaison Hydrogène

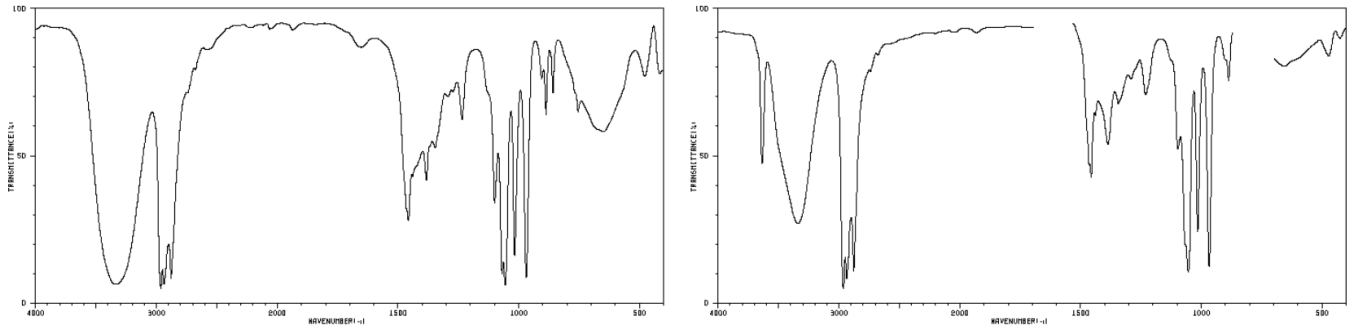


FIGURE 8.11 – Spectres IR du propanol en phase liquide (à gauche) et gazeuse (à droite).

En phase gazeuse, vers 3600 cm^{-1}, un pic très fin se découpe, caractéristique de la liaison OH : la liaison hydrogène n'est pratiquement pas présente du fait de l'agitation et de l'éloignement des molécules. En phase liquide, ce pic est absent, la liaison OH pouvant plus difficilement vibrer..

La spectroscopie IR est une technique puissante permettant de mettre en évidence la présence de liaisons caractéristiques. Cependant elle permet difficilement de voir la structure globale du composé.

3 Spectroscopie RMN

3.1 Principe

Lorsqu'un atome est soumis à un champ magnétique extérieure, certains de ses niveaux qui avaient la même énergie se séparent pour avoir une énergie différente, c'est ce qu'on appelle une *levée de dégénérescence*. Il est alors possible pour l'atome d'absorber ou d'émettre un photon dont l'énergie correspond à la différence d'énergie entre ces deux niveaux : on a alors des transitions entre les deux niveaux dont la différence d'énergie ΔE vaut ainsi l'énergie du photon, *i.e.* $\Delta E = h\nu$. Ainsi, le spectre d'absorption de l'atome comportera un pic d'absorption à la fréquence ν correspondant à la transition énergétique entre ces 2 niveaux. c'est ce qu'on appelle la *résonance magnétique nucléaire*.

En chimie, on considère rarement des atomes isolés. En effet, on travaille avec des molécules, ce qui va modifier la valeur du champ magnétique perçu par un atome donné de la molécule. Ainsi, les électrons voisins d'un atome donné ont leur propre champ magnétique et donc vont plus ou moins écranter le champ magnétique imposé par l'expérimentateur. Cela a pour effet de modifier la différence d'énergie entre les niveaux de l'atome et donc la fréquence de résonance correspondant pour absorber/émettre un photon.

En fonction de son environnement chimique, un atome aura donc un pic d'absorption a des fréquences différentes. En particulier, plus un atome est proche d'un atome plus électronégatif, moins il aura d'électrons dans son voisinage pour l'écranter et donc plus fort sera le champ magnétique qu'il ressent. La différence d'énergie entre les 2 niveaux dégénérés sera donc plus fort et donc la fréquence de résonance sera plus forte. On dit que l'atome est **déblindé**.
En revanche, si l'atome a beaucoup d'électrons dans son voisinage, il sera écranté et ressentira un champ magnétique plus faible. On dit que l'atome est **blindé**.

Un cas courant de spectroscopie RMN est la RMN dite "du proton". Dans ce cadre, on s'intéresse ici uniquement aux atomes d'hydrogène, composés d'un seul proton. On se placera dans ce cadre dans le reste de la leçon.

On remarque cependant que la fréquence de résonance dépend du champ magnétique extérieur imposé par l'expérimentateur, et donc du spectromètre utilisé. Pour pouvoir comparer les spectres obtenus avec des machines différentes, il faut donc introduire une grandeur indépendante de la machine utilisée.

On définit le **déplacement chimique** δ, exprimé en partie par millions (ou ppm), par la formule suivante :

$$\delta = \frac{\nu - \nu_{ref}}{\nu_0} \times 10^6$$

où ν_{ref} est la fréquence de résonance de protons pour une molécule de référence (par exemple le tétraméthylsilane (TMS) $Si(CH_3)_4$ dont les protons sont très faiblement déblindés et donc le signal est à droite des signaux étudiés) et ν_0 est la fréquence du rayonnement envoyé par le spectromètre.

3.2 Caractéristiques d'un signal en RMN

Intuitivement, on peut comprendre que deux protons liés au même atome ont le même environement chimique et donc le même déplacement chimique. Ce n'est pas tout le temps vrai (exemple sur un CH_2 donc une liaison double C-C), et il est possible que deux protons aient le même environnement chimique sans être sur le même atome. De manière générale, tous les protons ayant le même environnement chimique sont dits **équivalents**. Ils ont alors le même déplacement chimique et sont représentés par le même signal.

En outre, deux protons sont dits **voisins** si ils sont liés à des carbones voisins.

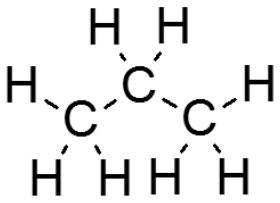


FIGURE 8.12 – Molécule de propane (utile pour illustrer la notion de protons équivalents et voisins).

En fonction de l'environnement chimique des atomes d'hydrogène équivalents, ceux-ci vont donner des signaux différents sur le spectre RMN de la molécule. Cependant, on peut déduire l'environnement chimique de chaque groupe de protons équivalent en analysant certaines caractéristiques de leur signal :

- la valeur de δ.

  Certaines structures ont une valeur tabulée de δ, comme par exemple le groupement phényl qui donne un signal autour de 7 ppm. Bien sûr, ces valeurs ne sont pas 100% exactes puisqu'il faut prendre en compte un éventuel blindage ou déblindage des protons.

- la multiplicité, i.e. le nombre n de pics dans un signal.

  En fonction du nombre de pics, on appelle le signal singulet (1 pic), doublet (2 pics), triplet (3pics), ..., n-uplet (n pics). Un groupe de protons équivalents qui a $n-1$ voisins formera un n-uplet.

- l'intégration, *i.e.* l'aire sous la courbe du signal.

  Cette aire est proportionnelle au nombre de protons dans le groupe de protons équivalents. Souvent, on trace une courbe d'intégration qui prend la forme d'une succession de paliers de plus en plus haut. On passe d'un palier à un autre à chaque signal, et la hauteur du saut est proportionnelle au nombre de protons dans le groupe de protons équivalents correspondant au signal.

Méthyle $-CH_3$	
Proton	δ (ppm)
CH_3-C	0,9
CH_3-C-O	1,4
$CH_3-C=C$	1,6
CH_3-Ar(1)	2,3
CH_3-CO-R(2)(3)	2,2
$CH_3-CO-Ar$	2,6
$CH_3-CO-O-R$	2,0
$CH_3-CO-O-Ar$	2,4
$CH_3-CO-N-R$	2 ,0
CH_3-O-R	3,3
CH_3-OH	3,4
CH_3-O-Ar	3,8
$CH_3-O-CO-R$	3,7
CH_3-N	2,3
$CH_3-C=C-CO$	2,0
CH_3-Cl	3,0
CH_3-C-Cl	1,5
CH_3-Br	2,7
CH_3-C-Br	1,7
CH_3-I	2,2
CH_3-C-I	1,9
$CH_3-C\equiv N$	2,0

Méthylène $-CH_2-$	
Proton	δ (ppm)
$C-CH_2-C$	1,3
$C-CH_2-C$ (cycle)	1,5
$C-CH_2-C-O$	1,9
$C-CH_2-C=C$	2,3
$C-CH_2-Ar$	2,7
$C-CH_2-CO-R$	2,4
$C-CH_2-CO-O-R$	2,2
$C-CH_2-O-R$	3,4
$C-CH_2-O-H$	3,6
$C-CH_2-O-Ar$	4,3
$C-CH_2-O-CO-R$	4,1
$C-CH_2-N$	2,5
$C-CH_2-C=C-CO$	2,4
$C-CH_2-Cl$	3,4
$C-CH_2-C-Cl$	1,7
$C-CH_2-Br$	3,3
$C-CH_2-C-Br$	1,7
$C-CH_2-I$	3,1
$C-CH_2-C-I$	1,8
$-CH_2-C\equiv N$	2,3
$C-CH_2-C-C=C$	1,5
$-CO-CH_2-Ar$	3,8

Méthyne $-CH-$	
Proton	δ (ppm)
$C-CH-C$	1,5
$C-CH-C-O$	2,0
$C-CH-Ar$	3,0
$C-CH-CO-R$	2,7
$C-CH-O-R$	3,7
$C-CH-O-H$	3,9
$C-CH-O-CO-R$	4,8
$C-CH-N$	2,8
$C-CH-Cl$	4,0
$C-CH-C-Cl$	1,6
$C-CH-Br$	3,6
$C-CH-C-Br$	1,7
$C-CH-I$	4,2
$C-CH-C-I$	1,9
$C-CH-C\equiv N$	2,7

Proton	δ (ppm)
$-C=CH_2$	5,3
$-C=CH-$	5,1
C_6H_6	7,2
$Ar-H$	7,0-9,0
$R-C\equiv C-H$	3,1

Proton	δ (ppm)
$R-CO-H$	9,9
$Ar-CO-H$	9,9
$H-CO-O$	8,0
$H-CO-N$	8,0
$-CO-OH$	8,5-13

Proton	δ (ppm)
$-C=C-OH$	11-17
$R-OH$	0,5-5,5
$Ar-OH$	4,2-7,1
$R-NH-$	0,6-5
$R-CO-NH-$	5-8,5

(1) **Ar :** désigne un composé avec un cycle aromatique comme le benzène ⬡ ou ses dérivés.
(2) **R :** désigne un radical alkyle comme les radicaux méthyle $-CH_3$, éthyle $-C_2H_5$, etc.
(3) **$-CO-$:** désigne le groupe $C=O$, présent dans les aldéhydes, les cétones, les acides carboxyliques, les esters, les amides, les anhydrides d'acides, etc.

FIGURE 8.13 – Déplacements chimiques typiques pour certaines structures.

3.3 Lecture d'un spectre RMN

Analysons quelques exemples et voyons si les spectres RMN correspondent à nos prédictions.

3.3.1 Exemple 1 : l'éthanol

On commence avec une molécule simple, l'éthanol.

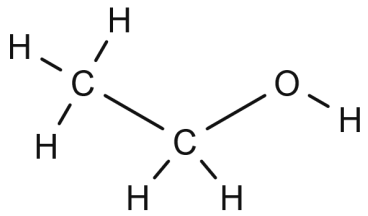


FIGURE 8.14 – Un premier exemple : l'éthanol.

En regardant la molécule d'éthanol, on compte 3 groupes de protons équivalents :

- le CH_3, qui devrait intégrer pour 3 H et devrait apparaître sous forme de triplet puisqu'il a 2 H voisins.
- le CH_2, qui devrait intégrer pour 2 H et devrait apparaître sous forme de quadruplet puisqu'il a 3 H voisins.
- le OH, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de singulet puisqu'il n'a pas de voisins.

Cela correspond bien au spectre RMN obtenu avec Specamp.

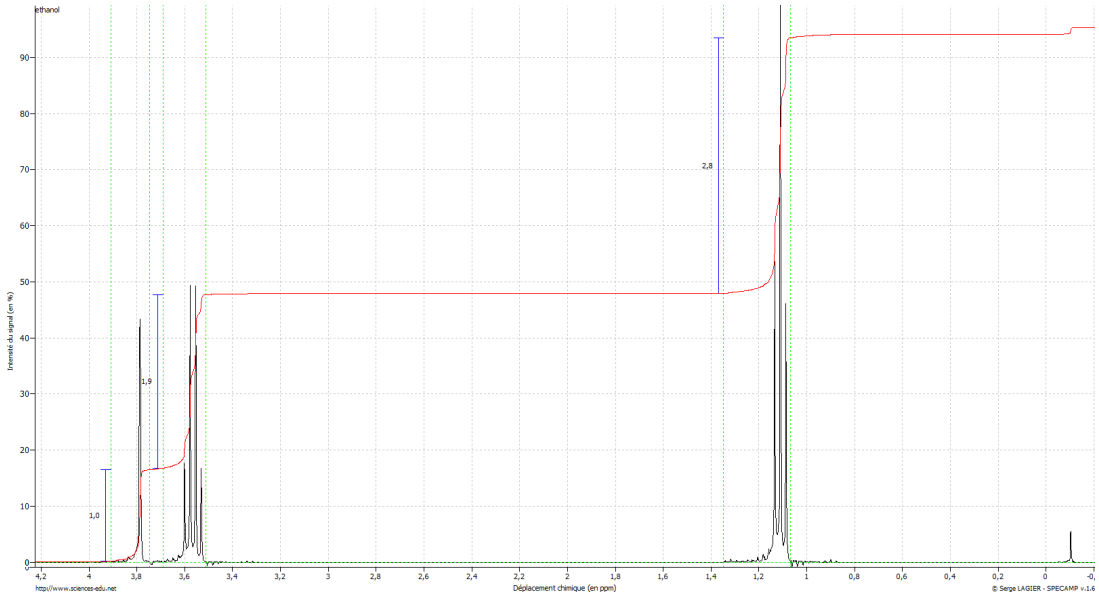


FIGURE 8.15 – Spectre RMN de l'éthanol.

3.3.2 Exemple 2 : le bromobutane

Passons maintenant à un autre exemple, le bromobutanone. Cet exemple est très bien pour illustrer la notion de multiplicité.

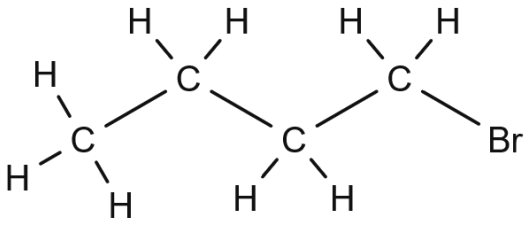


FIGURE 8.16 – Le bromobutane.

En regardant la molécule de bromobutane, on compte 4 groupes de protons équivalents :

- le CH_3, qui devrait intégrer pour 3 H et devrait apparaître sous forme de triplet puisqu'il a 2 H voisins.
- le CH_2 juste à droite du CH_3, qui devrait intégrer pour 2 H et devrait apparaître sous forme de sextuplet puisqu'il a un groupe de 3 H voisins et un groupe de 2 H voisins, donc 5 H voisins en tout.
- le CH_2 juste à droite du CH_2 précédent, qui devrait intégrer pour 2 H et devrait apparaître sous de quintuplet puisqu'il a 2 groupes de 2 H voisins donc 4 H voisins en tout.
- le CH_2 juste à gauche du brome, qui devrait intégrer pour 2 H et devrait apparaître sous forme de triplet puisqu'il a 2 H voisins.

Cela correspond bien au spectre RMN obtenu avec Specamp.

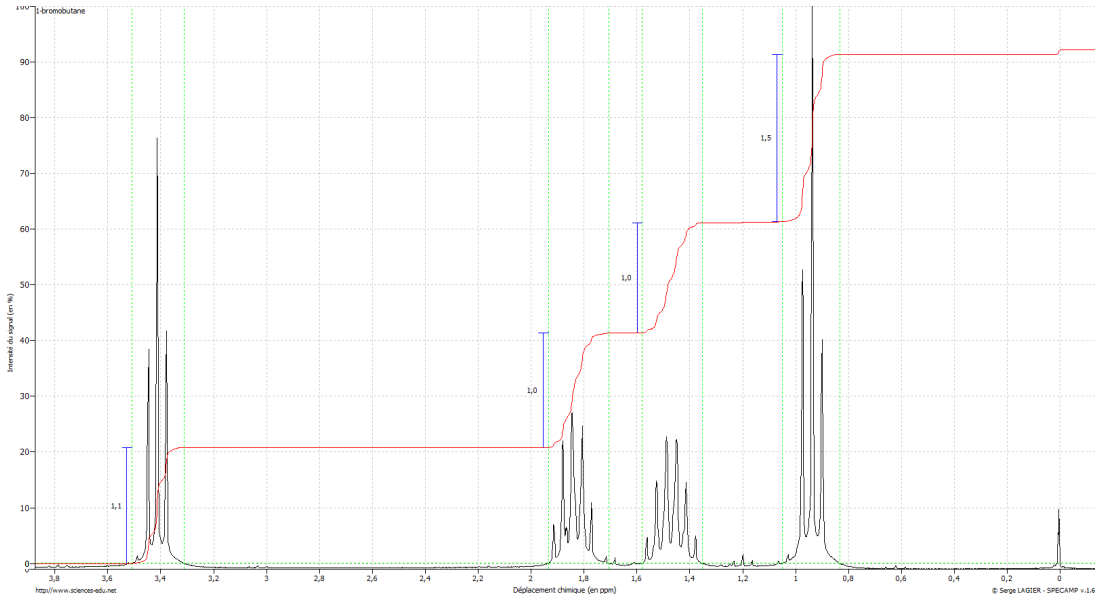


FIGURE 8.17 – Spectre RMN du bromobutane.

3.3.3 Exemple 3 : la cyclohexanone

Attaquons un troisième exemple avec la cyclohexanone, molécule qui présente un cycle.

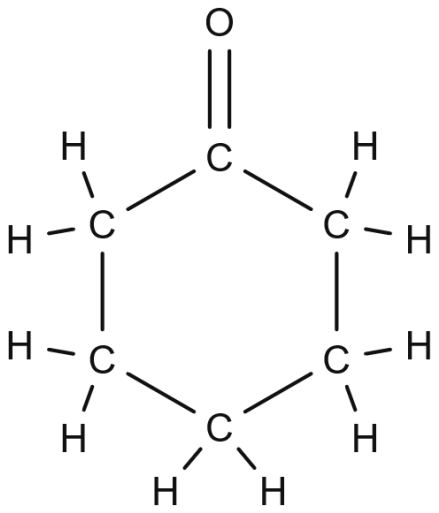


FIGURE 8.18 – La cyclohexanone.

En regardant la molécule de cyclohexanone, on compte 3 groupes de protons équivalents :

- les 2 CH_2 de part et d'autre de la cétone, qui devraient intégrer pour 4 H et apparaître sous forme de quintuplet puisqu'il a 4 H voisins.
- le CH_2 opposé à la cétone dans le cycle, qui devrait intégrer pour 2 H et devrait apparaître sous forme de quintuplet puisqu'il a 4 H voisins.
- les 2 CH_2 de part et d'autre du CH_2 précédent, qui devraient intégrer pour 4 H et apparaître sous forme de septuplet puisqu'il a un groupe de 4 H voisins et un groupe de 2 H voisins, donc 6 H voisins en tout.

Cela correspond bien au spectre RMN obtenu avec Specamp, sachant que quand il y a trop de pics, ils sont assez durs à discerner, et c'est plutôt l'intégration qui nous renseigne.

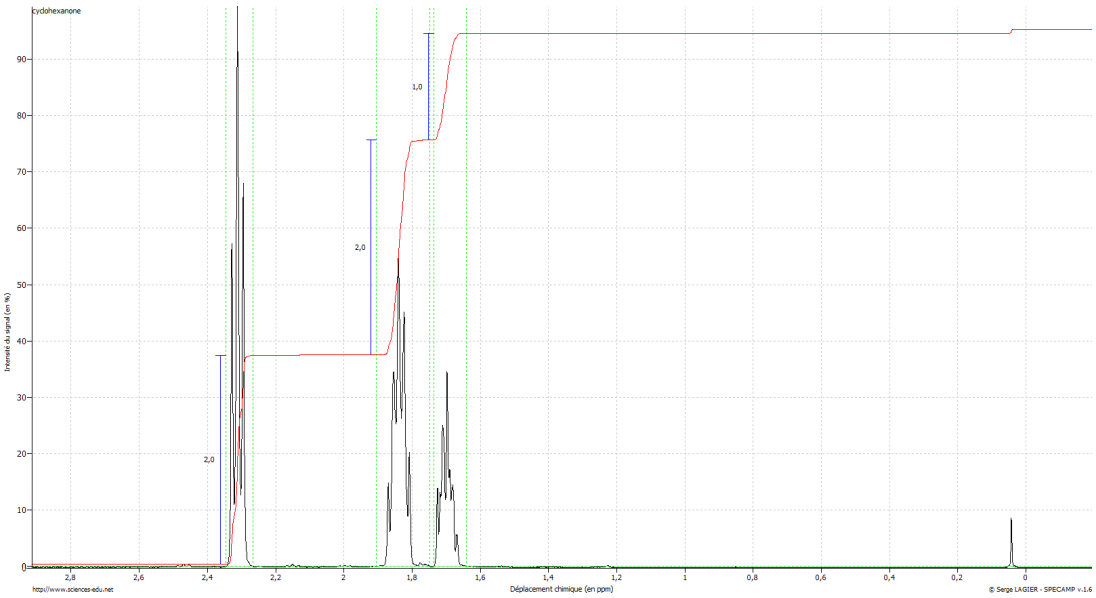


FIGURE 8.19 – Spectre RMN du cyclohexanone.

3.3.4 Exemple 4 : l'aspirine

Finissons nos exemples avec une molécule connue, l'aspirine.

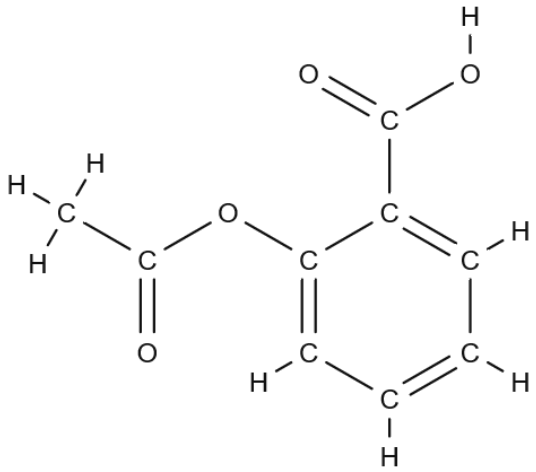


FIGURE 8.20 – L'aspirine.

En regardant la molécule d'aspirine, on compte 6 groupes de protons équivalents :

- le CH_3, qui devrait intégrer pour 3 H et devrait apparaître sous forme de singulet puisqu'il n'a aucun voisin.
- le OH du COOH, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de singulet puisqu'il n'a aucun voisin. Cependant une lecture de table nous dit que c'est à $\delta > 8$, donc on risque de ne pas le voir (et en effet on ne le voit pas).
- le CH du cycle, en haut à droite, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de doublet puisqu'il 1 H voisin. (il doit être le plus déblindé du lot car proche du COOH, donc celui avec le plus grand δ.)
- le CH du cycle, en bas à droite, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de triplet puisqu'il a 2 groupes de 1 H voisins.
- le CH du cycle, en bas au milieu, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de triplet puisqu'il a 2 groupes de 1 H voisins.
- le CH du cycle, en bas à gauche, qui devrait intégrer pour 1 H et devrait apparaître sous forme de doublet puisqu'il a 1 groupe de 1 H voisin.

Cela correspond bien au spectre RMN obtenu avec Specamp, à ceci près qu'on n'observe pas sur ce spectre le signal correspondant au H de l'acide carboxylique qui est très déblindé (donc $\delta \sim 8.5$-13). Notons également l'apparition du singulet à 5 ppm qui intègre pour 2 H et qui trahit la présence d'eau.

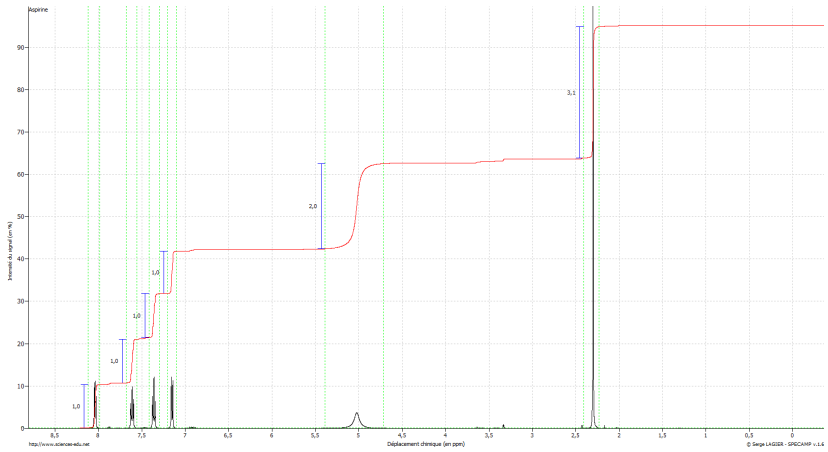


FIGURE 8.21 – Spectre RMN de l'aspirine.

Constante de couplage

Il existe en réalité une autre caractéristique pour un signal : sa constante de couplage. Il s'agit de l'écart entre les pics d'un signal et correspond au couplage spin-spin entre les hydrogènes d'un groupe équivalent ou entre hydrogènes voisins. Cette constante ne change pas grand chose au signal quand tous les hydrogènes voisins d'un groupe donné font partie du même groupe équivalent, mais ce n'est plus le cas quand les hydrogènes voisins appartiennent à différents groupes de protons équivalents.

Par exemple, si un hydrogène a pour voisin un groupe de 2 H et un groupe de 3 H, le signal ne sera pas un quintuplet mais un quadruplet de triplet (en supposant que la constante de couplage du groupe à 3 H soit la plus grande). On observe donc un grande variété de signaux complexes.

Conclusion

Les spectroscopies IR et RMN donnent des informations complémentaires sur la présence d'un composé tandis que le loi de Beer-Lambert nous donne accès une concentration. Ces techniques ont le grand avantage d'être non destructives et rapides. à noter que la spectroscopie UV-visible peut également être utilisée pour suivre l'évolution de la concentration en fonction du temps et donc à la cinétique de la réaction.

Nous venons de voir la technique de la RMN. C'est cette technique qui est utilisée en IRM (imagerie par résonance magnétique), sur les protons de l'eau, mais cette fois on ne s'intéresse plus au spectre, mais à la répartition spatiale. On aurait également pu parler de la spectro de masse, qui permet de connaître la masse d'une molécule.

Extraits du programme

Spectres UV-visible : Lien entre couleur perçue et longueur d'onde au maximum d'absorption de substances organiques ou inorganiques. Mettre en oeuvre un protocole expérimental pour caractériser une espèce colorée. Exploiter des spectres UV-visible.

Spectres IR : Identification de liaisons à l'aide du nombre d'onde correspondant ; détermination de groupes caractéristiques. Mise en évidence de la liaison hydrogène. Exploiter un spectre IR pour déterminer des groupes caractéristiques à l'aide de tables de données ou de logiciels. Associer un groupe caractéristique à une fonction dans le cas des alcool, aldéhyde, cétone, acide carboxylique, ester, amine, amide. Connaître les règles de nomenclature de ces composés ainsi que celles des alcanes et des alcènes.

Spectres RMN du proton : Identification de molécules organiques à l'aide : – du déplacement chimique ; – de l'intégration ; – de la multiplicité du signal : règle des (n+1)-uplets. Relier un spectre RMN simple à une molécule organique donnée, à l'aide de tables de données ou de logiciels. Identifier les protons équivalents. Relier la multiplicité du signal au nombre de voisins. Extraire et exploiter des informations sur différents types de spectres et sur leurs utilisations.

LC 9

Du macroscopique au microscopique dans les synthèses organiques

Niveau : Lycée

Bibliographie

✍ *Physique-Chimie 2nde, Belin, 2010* **Bataille**	Equation bilan
✍ *Physique-Chimie TS, Nathan, Collection Sirius* **Prévost, Richoux**	Génrélatiés, exemples
✍ *Chimie TS Belin* **Bataille**	Mécanismes
✍ *La chimie expérimentale tome 2 : chimie organique et minérale* **Barbe et JFLM**	Estérification
✍ `https://goldbook.iupac.org/index.html`	IUPAC

Prérequis

- ➢ nomenclature
- ➢ fonctions chimiques
- ➢ équations de réaction
- ➢ acide base
- ➢ milieu-fin de terminale
- ➢ lewis-cram
- ➢ liaisons
- ➢ tableau périodique

Expériences

☕

1 Observation macroscopique . . . 821
1.1 Observation et quantification : équation bilan . . . 821
1.2 Quatre catégories de réaction . . . 821
2 Phénomènes microscopiques : des outils d'interprétation . . . 822
2.1 Électronégativité et nucléophilie . . . 822
2.2 Notion de mécanisme réactionnel . . . 823
2.3 Les liaisons inter et intra moléculaires . . . 824
3 Applications du modèle microscopique. . . . 825
3.1 Mécanisme et équation-bilan . . . 826
3.2 Effet d'un catalyseur – Profil réactionnel . . . 826
3.3 Test de Lucas . . . 827

Introduction

Montrer un bécher rempli de modèles moléculaire d'H2O pour montrer l'absurdité de la notion de liquide à l'échelle micro.

Au niveau macroscopique, le chimiste utilise les équations de réaction pour modéliser les transformations chimiques. Cependant, ces équations de réaction sont globales. Elles décrivent les réactifs présents initialement et les produits obtenus à la fin de la réaction, mais elles ne permettent pas de rendre compte de l'interaction entre les réactifs à l'échelle microscopique. Or, pour contrôler les réactions et mettre en œuvre de nouvelles synthèses, il est primordial que le chimiste puisse décrire le déroulement d'une transformation chimique.

Pour mettre en contexte, regardons cette petite expérience :

Expérience de Lucas

✍ Nadia, en PDF ⏲ 5 minutes

Ce test permet de distinguer entre un alcool primaire, secondaire ou tertiaire. Le réactif de Lucas transforme les alcools en dérivés chlorés insolubles qui se séparent en couche d'apparence huileuse (phase insoluble ou émulsion). Le précipité formé est le chlorure d'alkyle correspondant :

$ROH + HCl \rightarrow_{ZnCl_2} RCl + H_2O$

La réaction est du type SN1 pour les alcools tertiaires (stabilité d'un carbocation tertiaire) ; les alcools secondaires entraînent une compétition SN1 / SN2 (moins de 2 mn avec les tertiaires, de 5 à 10 mn avec les secondaires, les primaires ne réagissent pas et la solution reste limpide).

Préparation du réactif de Lucas :

- Verser 10 mL d'acide chlorhydrique concentré (à 37 %) dans un erlenmeyer placé dans un bain de glace.

- Y dissoudre 16 g de chlorure de zinc anhydre (ZnCl2).

Test avec le réactif de Lucas :

- Prendre 3 tubes à essais secs et propres, verser 2 mL de réactif de Lucas dans chaque tube.

- Ajouter 5 gouttes d'alcool : butan-1-ol, butan-2-ol, 2-methylpropan-2-ol

- Boucher les 3 tubes et agiter énergiquement pendant une minute.

- Laisser reposer et mesurer le temps nécessaire à l'apparition d'un trouble : pour les alcools tertiaires, la réaction est très rapide et se traduit par l'apparition presque immédiate d'un trouble (le trouble est dû aux dérivés chlorés, insolubles dans l'eau). Pour les alcools secondaires, la même réaction ne se produit qu'après 10 min. Les alcools primaires ne réagissent pas.

Vidéos de remplacement : https://youtu.be/43PPPniHqfo

On a mis trois composés de même formule brute, C4OH10, et pourtant diverse choses se sont passées. On a besoin de passer du macro au micro ici pour comprendre.

Une autre questions que l'on peut se poser c'est celle de la couleur des composés. Le lycophène des tomates est rouge, le carotène est orange. On a envie de déterminer la couleur d'un composé selon sa structure.

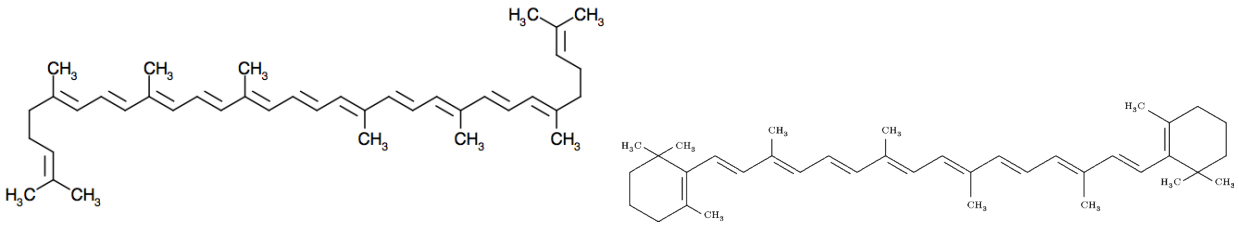


FIGURE 9.1 – Licophène et carotène.

Définitions

Macroscopique : à l'échelle du bécher.

Microscopique : à l'échelle de la molécule. Insister sur le fait que c'est un terme trompeur puisque micro fait référence à l'échelle du micron, donc au moins 3 ordres de grandeur au-dessus de ce qu'on entend vraiment par échelle microscopique.

1 Observation macroscopique

1.1 Observation et quantification : équation bilan

Lorsque l'on observe une réaction se faire dans un bécher, on ne peut que mesurer les quantités de matière au début et à la fin de la réaction, parfois pendant la réaction mais c'est déjà dur. On écrit alors un bilan macroscopique de ce qu'il se passe : une équation bilan.

Prenons l'exemple du test de Lucas. L'équation-bilan de cette réaction est :

$$\mathrm{ROH}_{\ (aq)} + \mathrm{HCl}_{\ (aq)} \xrightarrow{\mathrm{ZnCl_2}} \mathrm{RCl}_{\ (aq)} + \mathrm{H_2O}_{\ (l)}$$

Dans cette équation, les nombres stoechiométriques (qui valent tous 1 ici) ne représentent **pas** des molécules mais des moles (qui correspondent à nombre de molécules égal au nombre d'Avogadro). De plus, on précise dans une équation-bilan les états des espèces chimiques en jeu (liquide, solide, gaz, aqueux). Ces propriétés sont fondamentalement macroscopiques et ne reflètenet pas une réalité miroscopique (exemple de la molécule d'eau seule dans le vide, elle est liquide ?).

Il est donc clair qu'une équation-bilan ne propose qu'un point de vue macroscopique d'une réaction.

Il existe différents types de réactions

1.2 Quatre catégories de réaction

Attention

Ce n'est pas une liste exhaustive, mais ces 4 réactions sont les réactions censées être vues au lycée.

On peut citer 4 catégories de réactions qui nous seront utiles, définies par l'IUPAC :

- l'addition : réaction où 2 réactifs ou plus ne forment qu'un seul produit, contenant la totalité des atomes de tous les réactifs. cela suppose la destruction de liaisons multiples dans au moins un des réactifs. Une addition peut avoir lieu sur un seul site (addition 1/1 ou α-addition, sur 2 sites adjacents (addition 1/2) ou sur 2 sites non adjacents (addition 1/3, 1/4, ...)

  Exemples :

  - Hydrolyse de l'éthène : $H_2C{=}CH_2 + H_2O \rightarrow H_3C\text{-}CH_2\text{-}OH$
  - Formation d'un réactif de Grignard à partir du bromométhane : $H_3C\text{-}Br + Mg \rightarrow H_3C\text{-}Mg\text{-}Br$ (prix Nobel de chimie 1912)

- l'élimination : réaction inverse de l'addition. Le plus souvent, les 2 groupes perdus viennent souvent de 2 sites différents (élimination 1/2, 1/3, ...) et la réaction donne lieu à la formation d'une insaturation (liaison double ou triple) ou d'un cycle. Si les deux groupes perdus viennent d'un même site (α-élimination ou élimination 1/1), le produit de la réaction sera un carbène (ou analogue à un carbène).

  Exemples :

  - Déshydrogénation de l'éthane : $H_3C\text{-}CH_3 \rightarrow H_2C{=}CH_2 + H_2$ (catalysée par du cuivre ou de l'argent)
  - Élimination du H en alpha : $H_3C\text{-}CH_2\text{-}Br \rightarrow H_2C{=}CH_2 + Br^- + H^+$ (en présence d'une base comme KOH)

- la substitution : réaction pendant laquelle un atome ou un groupe d'atomes est remplacé par un autre atome ou goupe d'atomes.

  Exemples :

  - Test de Lucas
  - Formation d'un éther : $(CH_3)_3C\text{-}Br + H_3C\text{-}OH \rightarrow (CH_3)_3C\text{-}O\text{-}CH_3 + HBr$
  - Nitrosation : $ROH + HONO \rightarrow RONO + H_2O$

- la réaction acide-base, utile en synthèse organique pour la catalyse (cf site SPCL)

2 Phénomènes microscopiques : des outils d'interprétation

L'étude des propriétés microscopiques des atomes et molécules a pour but de nous donner des outils de prévision et d'analyse des phénomène macro. On veut savoir quand et comment se passent les réactions que l'on a décrit précédemment.

2.1 Électronégativité et nucléophilie

l'électronégativité d'un atome est une grandeur physique qui caractérise sa capacité à attirer les électrons lors de la formation d'une liaison chimique avec un autre élément. La différence d'électronégativité entre ces deux éléments détermine la nature de la liaison covalente : liaison apolaire lorsque la différence est nulle ou faible, liaison polaire quand la différence est moyenne, et ionique quand la différence est tellement forte qu'un des atomes a attiré complètement, ou presque, les électrons de la liaison : les atomes sont devenus des ions et portent des charges électriques entières.

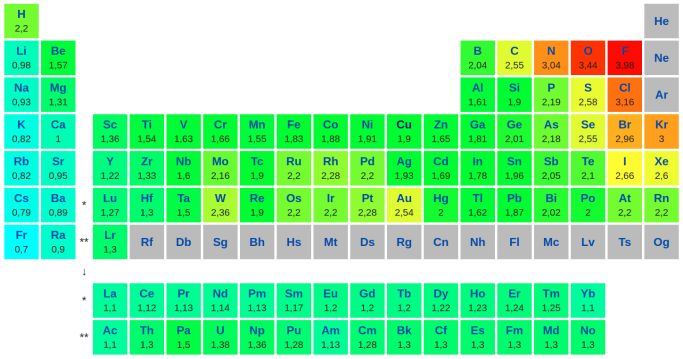


FIGURE 9.2 – Tableau des électronégativités.

L'électronégativité des éléments chimiques d'un même groupe du tableau périodique (c'est-à-dire d'une même colonne du tableau périodique) a tendance à décroître lorsque le numéro atomique croît, car le noyau atomique tend alors à « s'éloigner » des électrons de valence, qui sont davantage écrantés par les électrons de cœur. En revanche, l'électronégativité des éléments d'une même période du tableau périodique a tendance à croître avec le numéro atomique, car la charge électrique du noyau atomique (nombre de protons) augmente et interagit davantage avec les électrons de valence. Le minimum est donc à rechercher en bas à gauche du tableau (au niveau du francium) tandis que le maximum se trouve en haut à droite (au niveau du fluor).

Ainsi la liaison C-O ou O-H est très polaire, le O portant la charge -, la liaison C-H est peu polarisée, et la liaison NaCl est tellement polarisée qu'elle est ionique. Pour les liaisons formtement polarisée on introduit la notation en δ^+ ($0.4 < \Delta\chi < 1.70$).

Ainsi comme on sait que les charges différentes s'attire, on a une première explication de pourquoi la réaction de Lucas a lieu. On a une explication de pourquoi ça se passe, mais pas d'explication de pourquoi c'est mieux avec un tertiaire. Les différences d'electronégativité donnent naissance à des liaisons polarisées, et à des molécules polarisées. Par exemple la molécule d'eau a deux liaisons polarisées symétrique, elle est donc polarisée. Et si on la représente avec ses doublets non liants, c'est encore plus clair.

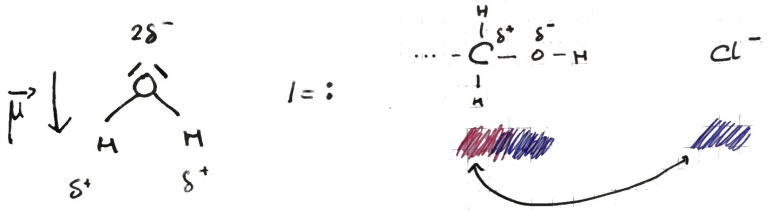


FIGURE 9.3 – bleu=-, rouge=+

On peut grâce à cela définir d'autres concepts : on dit d'un bout de la molécule, d'un *site* de la molécule qu'il est :

- *Nucléophile* si il a tendance à bien aimer les noyaux, donc à s'approcher des charges +, des zones pauvres en électrons (exemple : alcoolate, anion halogénure, amine)
- *Électrophile* si il a tendance à bien aimer les électrons, donc à s'approcher des charges - (exemple : cétone, acide carboxylique, dérivé halogéné).

Ces caractéristiques vont permettre de comprendre ce qui ce passe au niveau microscopique lors d'une réaction. On va définir un mécanisme réactionnel !

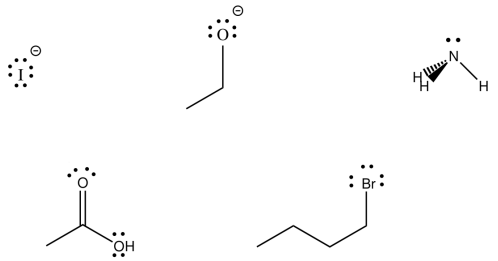


FIGURE 9.4 – Des exemples de nucléo/electrophiles. Le seul électrophile de la liste c'est le carbone du COOH ici, mais on aurait aussi pu donner les ions métalliques, ou les H^+

2.2 Notion de mécanisme réactionnel

En chimie, un mécanisme réactionnel est l'enchaînement d'étapes, de réactions élémentaires, par lequel un changement chimique a lieu. On va donc s'intéresser aux mouvements successifs des électrons dans une réaction chimique.

Super simple :

On prend un HO^- et un H^+, on fait un petit dessin et on explique la convention de "les électrons bougent".

Mécanisme d'une SN1

On détaille grandement le mécanisme, on écrit que les doublets c'est 2 électrons, on montre l'électron qui va chercher le site électrophile. La flèche va toujours du doublet vers l'électrophile. On peut aussi regarder ça : https://www.annabac.com/annales-bac/chimie-organique-et-mecanismes-reactionnels

Exemple plus complexe : l'aspirine

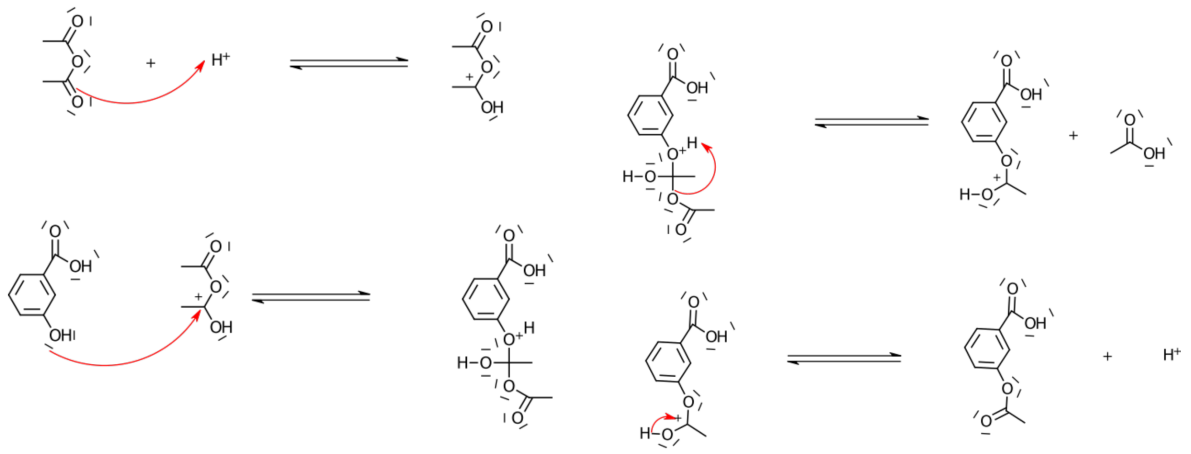
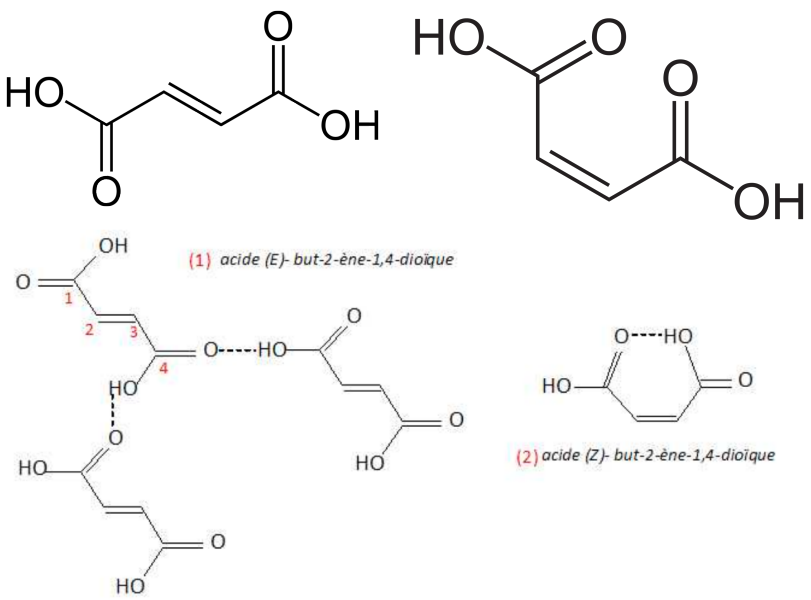


FIGURE 9.5 – Synthèse de l'aspirine.

2.3 Les liaisons inter et intra moléculaires

Une autre prédiction forte du modèle des électronégativités et des polarisations de liaisons et l'existance de liaisons faible, plus faibles que les liaisons covalentes, mais tout de même non négligeables : les liaisons hydrogène et les liaisons Van Der Walls.

Effectivement lorsqu'un hydrogène est relié à un atome très électronégatif, il est très positif, et va donc avoir tendance à se lier avec des électrons de doublets non liants d'autres atomes. Ces atomes peuvent être soit dans d'autres molécules (cas de l'eau) soit dans la même molécule, ce qui donne des propriétés intéressantes :



Liaison hydrogène (en pointillé) : (1) intermoléculaire ; (2) intramoléculaire.

FIGURE 9.6 – Acide Fumarique et maleique (E/Z-butènedioïque).

L'acide fumarique et l'acide maléique sont deux diastéréoisomères, mais l'un des deux forme des liaisons hydrogène intramoléculaire. Cela a pour propriété d'augementer grandement la température de fusion de l'acide fumarique ! Il faut beaucoup plus d'énergie pour liquéfier le fumarique.

	Acide maléique	**Acide fumarique**
Nom officiel	Acide (Z)-but-2ène-1,4-dioïque	Acide (E)-but-2ène-1,4-dioïque
Utilisations	Synthèse de polyesters Présent dans certains détergents	Traitement du psoriasis Additif alimentaire (acidifiant).
masse molaire	116 g/mol	116 g/mol
Solubilité dans l'eau à 25°C	très grande 780 g/L	Très faible 6,3 g/L
T_{fusion} °C	131	287
Masse volumique g cm^{-3}	1,59	1,63
Pictogramme sécurité	Irritant	Irritant
pK_a	$pK_{a1}(AH_2/AH^-)=1,83$ $pK_{a2}(AH^-/A^{2-})=6,59$	$pK_{a1}(AH_2/AH^-)=3$ $pK_{a2}(AH^-/A^{2-})=4,4$

FIGURE 9.7 – On explique tout le bazar, allez allez !.

Banc Kofler

✍ 🕒 5mn

Montrer la diff entre maléique et fumarique. 131 287

3 Applications du modèle microscopique.

3.1 Mécanisme et équation-bilan

Si on somme toutes les étapes d'un mécanisme, on retombe sur l'équation-bilan. Prendre comme exemple les mécanismes introduits précédemment.

> Répéter le fait que l'équation-bilan est à l'échelle de la mole et ne rend pas compte de la réalité microscopique.

3.2 Effet d'un catalyseur – Profil réactionnel

Un catalyseur n'apparaît pas dans l'équation-bilan d'une réaction. Cependant, lorsqu'on s'intéresse au mécanisme de la réaction, on voit comment le catalyseur interagit avec les réactifs (activation électrophile ou nucléophile par exemple) et on peut comprendre pourquoi le catalyseur modifie la cinétique de la réaction.

Ainsi, on distingue 4 types de molécules dans un mécanisme réactionnel :

- les réactifs et les produits, qui apparaissent dans l'équation-bilan lorsqu'on somme les étapes du mécanisme
- le catalyseur, qui est consommé dans les premières étapes puis régénéré dans les dernières étapes et donc n'apparaît pas dans l'équation-bilan
- les intermédiaires réactionnels, qui sont formés puis consommés au cours du mécanisme et qui n'appraissent pas non plus dans l'équation-bilan.

Pour mieux visualiser tout ça, on utilise un *profil réactionnel*. il s'agit d'une représentation schématique de la variation d'énergie potentielle au cours d'une réaction de son état initial à son état final. En abscisse, on utilise les *coordonnées de réaction*. C'est une abscisse curviligne le long du chemin de plus basse énergie dans l'espace multidimensionnel des coordonnées des paramètres géométriques de la réaction (longueurs de liaison, angles de liaison, distances entre atomes). L'effet d'un catalyseur peut être aisément observé sur un tel schéma.

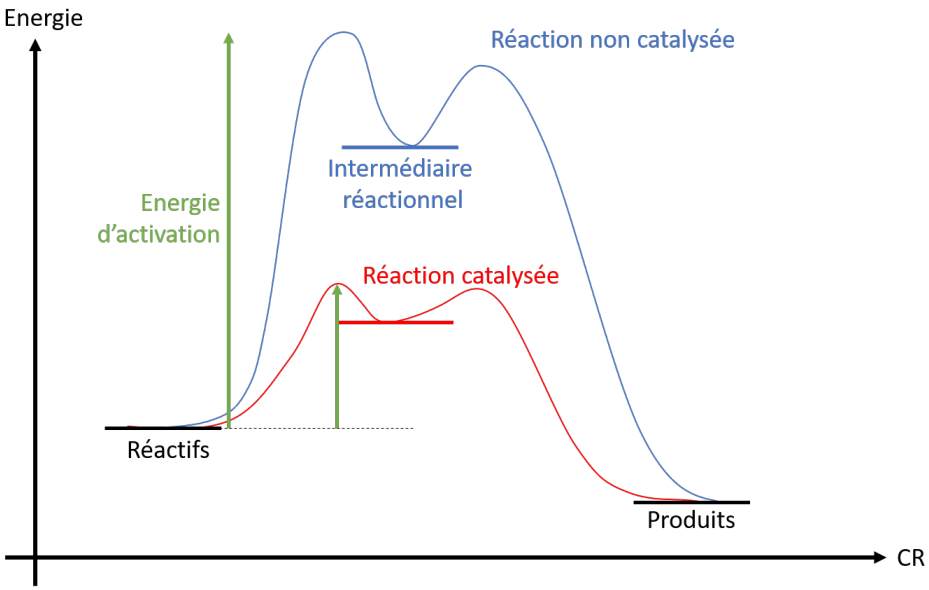


FIGURE 9.8 – Profil réactionnel d'un réaction non catalysée et catalysée

Par exemple, on peut comparer les profils réactionnels d'une SN_1 et d'une SN_2.

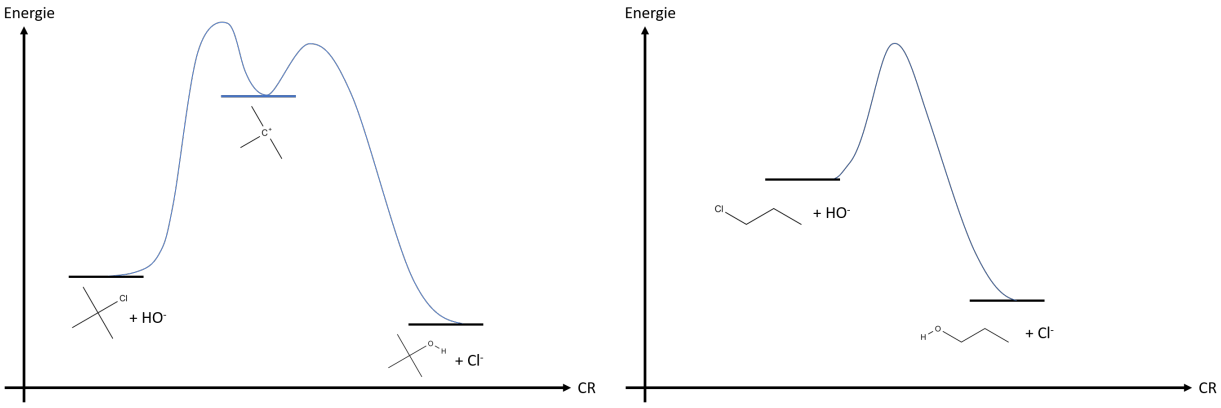


FIGURE 9.9 – Profils réactionnels d'une SN1 (à gauche) et d'une SN2 (à droite).

3.3 Test de Lucas

On revient à l'expérience de lucas au regard de tout ce que l'on sait maintenant. Les mécanismes proposés sont les suivants. Les deux mécanismes possibles sont les suivants :

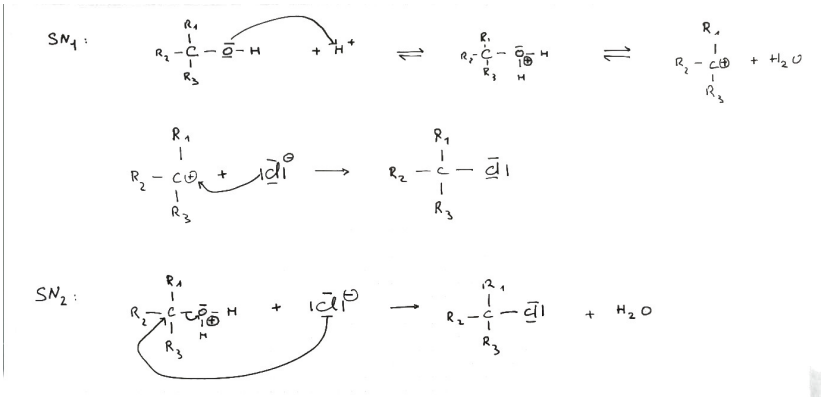


FIGURE 9.10 – Réactions de Lucas.

En pratique celui qui se passe c'est le SN1 car le SN2 demande de faire un carbone à 5 pattes, pentavalent, ce qui est hautement défavorisé. Ce qu'il faut remarquer ici c'est la présence d'un carbone à trois pattes, un carbone trivalent. Il est pas très stable, mais plus il a de carbones autour de lui, plus il est stables, parce que les carbones autour lui prêtent leurs électrons. En fait la charge + est cachée derrière les autres noyaux. Du coup, la réaction se passe plus facilement avec un alcool tertiaire, et ne se passe pas du tout avec les alcools promaires !

Interpréter vis à vis des profils réactionnels.

Conclusion

On a réussi à expliquer des observations macro avec un modèle micro simple. Pour pouvoir interpréter et prévoir correctement les réactions de synthèse en chimie organique, il faut avoir recours à une modélisation du monde microscopique. Le mécanisme et le profil réactionnel sont alors des connaissances très utiles pour pouvoir mener à bien une synthèse. Cette connaissance est d'autant plus importante lorsqu'il y a compétition entre plusieurs réaction possibles pour pouvoir choisir les meilleures conditions opératoires. Finalement, cette connaissance permet de concevoir une chimie catalytique ou des voies de synthèse plus verte.

Limite de ce modèle micro, on a besoin de la chimie des orbitales.

LC 10

Capteurs électrochimiques

Niveau : Lycée (T-STL)

Programme officiel(Terminale SPCL)

Électrode. Potentiel d'électrode : électrode standard à hydrogène, électrode de référence, relation de Nernst, potentiel standard. Le potentiel d'électrode, un outil de prévision : - polarité et tension à vide (fem) des piles, - sens spontané d'évolution d'un système, siège d'une réaction d'oxydo-réduction

Classement des oxydants et des réducteurs : échelles de potentiels, échelles de potentiels standards, relation entre différence des potentiels standards et caractère plus ou moins favorisé d'une transformation. Électrode spécifique, dosages par capteurs électrochimiques. Analyse en temps réel pour prévenir toutes pollutions et limiter les risques.

- Identifier, dans une pile, une électrode comme un système constitué par les deux membres d'un couple oxydant/réducteur et éventuellement d'un conducteur. - Relier le potentiel d'électrode à la tension à vide de la pile constituée par l'électrode et l'électrode standard à hydrogène (ESH). - Concevoir et mettre en œuvre un protocole pour déterminer un potentiel d'électrode à l'aide d'électrodes de référence. - Déterminer expérimentalement les paramètres d'influence sur un potentiel d'électrode. - Concevoir et mettre en œuvre un protocole pour déterminer ou vérifier la relation entre le potentiel d'électrode et les concentrations des constituants du couple.
- Écrire la relation de Nernst pour un couple donné. - Utiliser la relation de Nernst pour déterminer un potentiel d'électrode. - Prévoir, à l'aide des potentiels d'électrode, la polarité d'une pile, sa tension à vide (fem) et son évolution lors de son fonctionnement et valider expérimentalement ces prévisions. - Prévoir le sens spontané d'évolution lors d'une transformation rédox à l'aide des potentiels d'électrode des couples mis en jeu et confronter expérimentalement le modèle. - Interpréter l'absence de l'évolution prévue pour un système en termes de blocage cinétique. - Comparer les pouvoirs oxydants (les pouvoirs réducteurs) d'espèces chimiques à l'aide d'une échelle de potentiels d'électrode. - Prévoir le caractère favorisé d'une transformation à l'aide d'une échelle de potentiels standards. - Identifier une électrode à un « capteur électrochimique » spécifique d'une espèce chimique. - Relier le potentiel d'une électrode spécifique d'une espèce chimique à sa concentration. - Concevoir et mettre en œuvre un protocole de dosage par étalonnage d'une espèce chimique à l'aide d'un capteur électrochimique. - Extraire des informations pour illustrer des applications historiques, actuelles et en développement des capteurs électrochimiques, notamment dans le cadre de mesures environnementales : mesures de traces d'éléments, dosage de gaz (polluants, sonde lambda), analyse en temps réel et transmission des données pour contrôle et régulation.

Bibliographie

✍
✍

Prérequis

- ➢ Acide Base
- ➢ Titrage et dosage
- ➢ Électrochimie, pile
- ➢ RedOx

Expériences

- Pile Daniell
- Electrode AgCl
- Dosage du sérum phi

1 Principe d'un capteur électrochimique . . . 832
1.1 Potentiel de Nernst . . . 832
1.2 Exemple de la pile Daniell, le retour . . . 833
1.3 Électrodes de références . . . 833
1.4 Types d'électrodes (Hors Programme) . . . 834
2 Spécificité d'une électrode . . . 834
2.1 Création d'une électrode spécifique . . . 834
2.2 Étalonnage . . . 835
2.3 Utilisation . . . 836
3 Cas de la pH-métrie . . . 836
3.1 L'électrode de verre . . . 836
3.2 Sortie de la zone de spécificité . . . 837
4 Le cas de la conductimétrie . . . 837

Introduction

Un capteur ça transforme une quantité auparavant non mesurable en quantité que l'on peut mesurer, avec un lien connu (de préférence simple). Par exemple le papier pH transforme une concentration en couleur, ce qui permet une lecture.

Le principe d'un capteur électrochimique est de transformer une grandeur *chimique* en grandeur *électrique*. Ça tombe bien les grandeurs électriques y'a un bail qu'on sait les mesurer, et à l'heure du tout numérique, c'est un enjeu important de la chimie.

Dans cette leçon, et dans le cadre du programme, on va se restreindre au cas des capteurs de potentiel (*potentiométrique)*, excluant d'office les mesures cinétiques par mesure de courant, ou les mesures de conductimétrie (mais on va en parler un peu ?).

Schéma : grandeur chimique –> capteur (équation) –> grandeur électrique –> instrument de mesure (Affichage)

Problématique : Comment construire des capteurs électrochimiques ? Quelle théorie utiliser ? Que mesurent-ils ?

Une manip que je vous montre maintenant pour vous montrer ce que l'on veut mesurer.

Pile Daniell

✍ 2mn

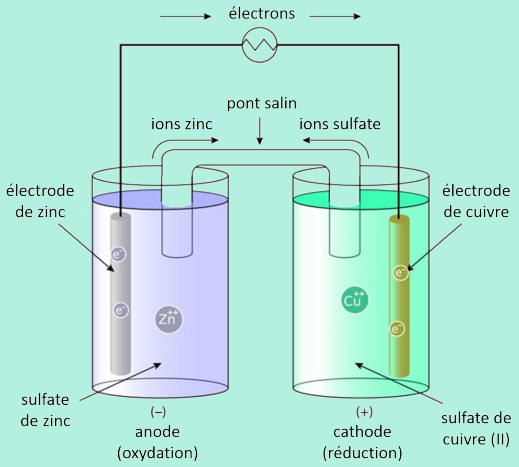


FIGURE 10.1 – Schéma expérimental de la pile Daniell.

On veut étudier l'influence de la concentration en ions zinc II sur la f.é.m. d'une pile Daniell. On réalise 4 piles Daniell en utilisant 4 solutions de sulfate de zinc de concentrations C_1 = 1,0 mol / L, puis, C_2 = 0,10 mol / L, C_3 = 0,010 mol / L et C_4 = 0,0010 mol / L.

On mesure chaque fois la f.é.m. de la pile ainsi réalisée. La concentration de la solution de sulfate de cuivre II ne change pas et C = 1,0 mol / L. Les mesures effectuées sont données dans le tableau suivant.

Zn (mol/L)	1,0	$1{,}0\times10^{-1}$	$1{,}0\times10^{-2}$	$1{,}0\times10^{-3}$
Cu mol/L	1,0	1,0	1,0	1,0
E_i V	?	?	?	?

On observe la variation de f.e.m lorsque la concentration varie. Si on a une loi pour cette variation, on a une possible mesure de concentration !

1 Principe d'un capteur électrochimique

La relation qui relie les concentration au potentiel s'appelle la *relation de Nernst*.

1.1 Potentiel de Nernst

L'équation de Nernst donne le potentiel E d'une électrode par rapport au potentiel standard (E°) du couple redox mis en jeu. Supposons que le couple réagissent selon l'équation

$$\alpha Ox + \beta B + ne^- = \gamma Red + \delta D \tag{10.1}$$

Alors on a

Relation de Nernst

$$E = E^\circ - \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln Q \tag{10.2}$$

Dans cette équation on a toutes les concentrations en mol/L et on a :

- E° le potentiel standard du couple RedOx mis en jeu (VS ESH)
- R la constante des gaz parfaits, $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
- $\mathcal{F}$ la constante de Faraday, $\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A = 96485\,\mathrm{C\,mol^{-1}}$
- Pour un solide, on met 1 dans l'équation. Cela se justifie mais au delà de notre niveau actuel.
- Q est nommé le quotient réactionnel, il est hors programme, mais sa définition simplifie bien l'équation.

$$Q = \frac{\text{Produit}}{\text{Réactif}} = \frac{[Red]^\gamma [D]^\delta}{[Ox]^\alpha [B]^\beta}$$

En général, comme on se place à température ambiante (300K) et comme on préfère le logarithme décimal et les signes +, on écrit l'équation suivante :

$$E = E^\circ + \frac{0.06}{n} \log \frac{[Ox]^\alpha [B]^\beta}{[Red]^\gamma [D]^\delta} \tag{10.3}$$

Faire attention à : le sens de l'équation (Ox sur Red), le log décimal, et le n.

Remarque : Si on double toutes les stoechiométrie, l'équation reste la même. Donc osef de la stoechiométrie.

Remarque : Souvent, B et D ont des activités de 1 (phases condensées seules dans leur phase ou solvants), dans ces cas simples on peut écrire la forme la plus simple de l'équation :

$$E = E^\circ + \frac{0.06}{n} \frac{[Ox]^\alpha}{[Red]^\gamma} \tag{10.4}$$

En pratique on ne sait mesurer que des différences de potentiel, mais vous allez voir, on peut s'en sortir.

1.2 Exemple de la pile Daniell, le retour

Écrivons les potentiels des deux électrodes pour la pile Daniell. Les équations sont :

$$Zn^{2+} + 2e^- = Zn_{(s)} \qquad Cu^{2+} + 2e^- = Cu_{(s)} \tag{10.5}$$

Ainsi si on écrit les potentiels, on a :

$$E_{Cu} = E^\circ{}_{Cu^{2+}/Cu} + \frac{0.06}{2} \log \frac{[Cu^{2+}]}{1} \tag{10.6}$$

$$E_{Zn} = E^\circ{}_{Zn^{2+}/Zn} + \frac{0.06}{2} \log \frac{[Zn^{2+}]}{1} \tag{10.7}$$

Et alors si on mesure la différence de potentiel aux bornes des électrodes, on obtient :

$$E_{Cu} - E_{Zn} = E^\circ{}_{Cu^{2+}/Cu} - E^\circ{}_{Zn^{2+}/Zn} + \log \frac{[Cu^{2+}]}{[Zn^{2+}]} \tag{10.8}$$

Ainsi, comme les E° sont tabulés, on peut remonter au rapport des concentrations ! Et mieux, si on connaît la concentration d'une des cellules, on peut trouver celle de l'autre. Un exemple d'utilisation serait en métallurgie, déterminer la concentration en Cu^{2+} d'une eau.

Vérification des résultats

✍ ⏲ 2mn

Si on fait le calcul, avec nos 4 concentrations précédentes, on devrait avoir :

$$\Delta E = \Delta E^\circ + \log \frac{[Cu^{2+}]}{[Zn^{2+}]}$$

Or les valeurs tabulées de E° sont 0.34 (Cu) et -0.76 (Zn), donc $\Delta E^\circ = 1.1$V. Faisons un tableau :

Zn (mol/L)	1,0	$1{,}0\times10^{-1}$	$1{,}0\times10^{-2}$	$1{,}0\times10^{-3}$
Cu (mol/L)	1,0	1,0	1,0	1,0
E_i (V)	1,10	1,13	1,16	1,19

Normalement la manip marche super bien, et on montre la validité du modèle que l'on vient de développer. Il serait peut-être intéressant de regarder les variations en température.

On veut maintenant s'affranchir du côté "différence de potentiel". Pour cela on a besoin d'une référence.

1.3 Électrodes de références

Comme on l'a déjà vu, une pile est constituée de deux électrodes, c'est-à-dire l'association d'un conducteur et d'un couple oxydant/réducteur. Ici, le couple fait directement intervenir le métal lui-même (ici Cu^{2+}/Cu et Zn^{2+}/Zn). À chaque électrode est associée un potentiel d'électrode, noté E, qui est fixé. Cependant, il est impossible de mesurer le

potentiel d'électrode seul, car il est nécessaire de fermer le circuit électrique pour faire une mesure, et donc de former une pile.
Une des électrodes va faire la mesure qui nous intéresse, et est donc appelée électrode de mesure.

Remarque : Les différentes espèces des électrodes ne sont pas au programme. Mais il faut les connaître pour les questions.

L'autre va uniquement nous servir à comparer cette mesure avec d'autres, et va nous servir de référence. On parle alors d'électrode de référence. La principale caractéristique d'une électrode de référence est que son potentiel doit rester le plus stable possible.
Quelques exemples d'électrodes de référence :

- L'**Électrode Standard à Hydrogène** (ESH), de potentiel fixé par convention à 0V. La solution est idéale à 1mol/litre en H^+ (pH=0) et la pression de H_2 est d'un bar.
- L'**Électrode Normale à Hydrogène** (ENH), de potentiel 6 $\times 10^{-3}$ V/ESH, est la réalisation expérimentale de l'ESH. Elle n'a pas le comportement idéal.
- L'**Électrode au Calomel Saturé** (ECS), que l'on a déjà rencontré en TP, a un potentiel de 0.24 V/ESH à 25 °C. Elle est bien celle là, mais elle utilise des produits potentiellement toxique. Son intérêt c'est que saturée, elle a un potentiel constant de 0,24 V VS ESH.
- L'**électrode d'argent** met en jeu le couple Ag/AgCl(s) avec une concentration en ion chlorure fixée. 0.222 V vs ESH

On voit que ces électrodes ont des formes très différentes, et on peut les classifier. C'est hors programme, mais la question tombera à coup sûr.

1.4 Types d'électrodes (Hors Programme)

Les électrodes sont classées en type (ou espèce) d'électrode :

- 1er type : le métal en présence d'un de ses sels en solution (ex. Cu et Cu^{2+})
- 2e type : le métal en présence d'un de ses sels peu soluble (ex. Ag et AgCl)
- 3e type : le métal est inerte (ex. Pt) et plonge dans une solution dont les solutés constituent un couple redox ? Exemple : ESH

J'ai parlé de AgCl, on va en parler plus en détail l'ami, parce que c'est le prototype d'une électrode spécifique.

2 Spécificité d'une électrode

Dans cette partie, on s'intéresse à des électrodes conçues pour n'être sensible qu'à une seule espèce en solution. Cela permet ainsi de remonter directement à la concentration de cette espèce précise.

2.1 Création d'une électrode spécifique

Fabrication d'une électrode Ag/AgCl pour doser le sérum physiologique

✍ Porteu de Buchère p172

Fabriquer l'électrode en préparation, **bien agiter pendant l'électrolyse** et montrer le dépôt sur l'électrode pendant la leçon.

Plonger un fil d'argent et un fil de platine dans un bécher avec du HCl à 0.1 M. L'argent est l'anode donc branché à la borne + du générateur et le plathide est la cathode donc branchée à la borne - du générateur.

Réaliser l'électrolyse pendant 5 min en essayant de ne pas avoir de dégagement gazeux à l'anode d'argent. Plonger ensuite l'électrode d'argent dans de l'eau distillée pendant 10 min.

Cette électrode est sensible au ions Cl^-, et c'est tout. Tâchons de savoir pourquoi. Lors de l'électrolyse, les demi-équations redox en jeu sont les suivantes :

- à l'anode d'argent : $Ag = Ag^+ + e^-$
- à la cathode de platine : $2H^+ + 2e^- = H_2$

On comprend donc pourquoi un observe un dégagement gazeux à la cathode.

La demi équation rédox associée à l'électrode est alors

$$AgCl + e^- = Ag + Cl^-$$

Son potentiel est alors

$$E - E_{\text{ref}} = E^0 - E_{\text{ref}} + 0.059 \ln\left(\frac{C^0}{[Cl^-]}\right) \tag{10.9}$$

On voit donc bien que cette électrode est sensible aux ions Cl^-.

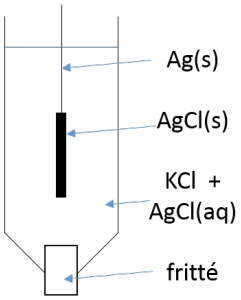


FIGURE 10.2 – Schéma de l'électrode d'argent

On n'a pas forcément envie de déterminer E^0 et E_{ref}, on va donc étalonner l'électrode.

2.2 Étalonnage

Pour étalonner de manière générale une électrode, il suffit de mesurer sa réponse pour des solutions de concentrations connues.

Etalonnage de l'électrode Ag/AgCl

✍ Porteu de buchère, p 172 ⏲

Etalonner l'électrode Ag/AgCl réalisée et rincée avec une électrode au calomel saturé **en n'oubliant pas l'allonge de KNO3 sur l'ECS**. Mesurer la ddp pour des solutions aqueuses de NaCl ou de KCl de concentrations connues (exemple : 0.1 M, 0.05 M, 0.01 M, 0.005 M, 0.001 M.

Tracer E en fonction de $\log[Cl^-]$. On attend $E^0(AgCl/Ag) = 0.222$ V. A faire en préparation, la prise de point est trop longue.

L'étallonage vise à construire la courbe $E(\log[Cl])$, afin de pouvoir ensuite y reporter lire les concentrations de solutions inconnues.

2.3 Utilisation

Dosage des ions Cl^- dans le sérum physiologique avec l'électrode d'argent fabriquée

Diluer par 10 le sérum. faire la mesure de ddp et remonter à la concentration en Cl^- (sans oublier qu'on dilué par 10).

La concentration massique théorique est de 9 g/L. Évaluer les incertitudes. Conclure sur l'efficacité de l'électrode.

Le sérum physiologique étant essentiellement de l'eau salée, il contient des ions chlorure, que l'on peut doser avec cette électrode.

3 Cas de la pH-métrie

3.1 L'électrode de verre

L'électrode de verre mesure aussi une ddp (Fosset p754) entre une électrode (par exemple une paroi en verre) et une électrode de référence interne.

Par exemple l'électrode de référence interne peut être une électrode Ag/AgCl baignant dans une solution de KCl saturée (électrode de deuxième espèce) pour garder un potentiel de référence constant. Elle est encapsulée dans un verre spécial poreux aux ions Na^+ et Li^+, et est recouvert en surface d'une de silice hydratée. La présence d'ions H^+ dans la solution qu'on veut étudier modifie cette couche, et par le biais des ions Li^+ et Na^+, cette modification du potentiel de la surface externe est transmise à la face interne et donc à la solution. On a alors

$$E_{\text{verre}} - E_{\text{ref}} = E^\circ - E_{\text{ref}} + 0.059\text{pH} \tag{10.10}$$

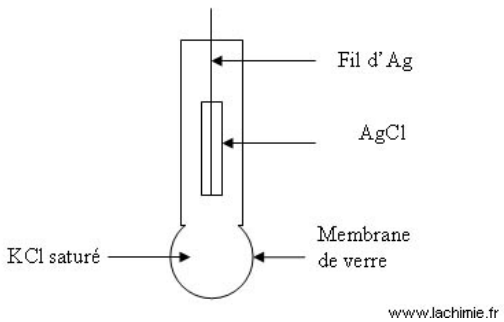


FIGURE 10.3 – Schéma de l'électrode de verre.

On peut donc mesurer indirectement la concentration des ions H^+ dans la solution étudiée, l'électrode de verre est donc une **électrode spécifique aux ions H^+.**

Il est important de calibrer le pH-mètre (ou l'électrode de verre) afin d'être sûr qu'il mesure une différence de potentiel nul quand le pH est égal à 7 (c'est le but de l'étalonnage).

Clément Cabart : "Du point de vue de la manière réelle dont ça marche, on a une membrane poreuse, entourée de solutions avec des concentrations en ions H^+ différentes (à l'intérieur, concentration fixée, à l'extérieur concentration inconnue). Cette différence de concentration va entraîner l'existence d'un potentiel de membrane. C'est ce potentiel de membrane que l'on va mesurer en réalité.

3.2 Sortie de la zone de spécificité

Une possibilité pouvant faire en sorte qu'un capteur ne soit pas fiable est le cas où l'on sort de la gamme de fonctionnement nominal d'un capteur spécifique. C'est particulièrement vrai pour le cas de l'électrode de verre, qui est non seulement sensible aux ions H^+ mais également très faiblement aux ions Na^+. Ainsi, même un pH-mètre parfaitement calibré va avoir des soucis à déterminer la concentration d'une solution de soude assez concentrée, car l'effet des ions sodium va se voir sur la mesure. On a donc deux erreurs courantes sur l'électrode de verre :

- Erreur alcaline

  À pH élevé, la très faible activité des ions H^+ autorise les autres cations de la solution, considérés jusqu'ici comme spectateurs, à participer aux échanges à la surface de la membrane, faussant ainsi la valeur du potentiel entre l'intérieur et l'extérieur de l'électrode, et donc la lecture du pH. C'est vrai pour Na^+, souvent présent lorsqu'on travaille avec la soude, et dont l'activité ne peut plus être négligée à partir de pH $\simeq$ 12. Attention également à la présence de Li^+ dont les dimensions sont plus proches de celles de H^+ et qui en fait un ion particulièrement perturbateur.

- Erreur acide

  En dessous de pH = 0,5 on constate que la valeur de la mesure est trop élevée. L'origine de cette erreur, qui n'est pas facilement reproductible, est encore mal cernée.

On plonge un pH-mètre correctement étalonné dans une solution de soude à 0.1 mol/L , et on trouve pH = 12 au lieu de 13 !

4 Le cas de la conductimétrie

Pour la conductimétrie, on utilise une électrode sensible à toutes les espèces ioniques en solution dans l'électrolyte.

La valeur de la conductance G d'une solution ionique dépend de la nature de la solution, ainsi que de la géométrie de la cellule de mesure mais aussi du type d'anions et de cations contenus dans la solution. Elle peut être déterminée par la relation

$$G = \frac{\sigma \cdot S}{l}$$

avec G en Siemens (S), S en mètres carrés, l en mètres et σ en siemens par mètre.

Cette conductance est :

• proportionnelle à la surface S des électrodes de la cellule de mesure (également appelée cellule de conductimétrie) ;

• inversement proportionnelle à la distance l entre les deux électrodes.

Par ailleurs, la conductance est l'inverse de la résistance : $G = \frac{1}{R}$ avec G en siemens et R en Ohm.

On peut donc à l'aide d'une simple cellule, d'un générateur de tension U et d'un ampèremètre branché en série, déduire la conductance à l'aide de la loi d'Ohm : $U = R \cdot I = \dfrac{I}{G}$ avec U en volts, R en ohms, I en ampères et G en siemens. On peut aussi écrire : $G = \dfrac{I}{U}$.

On appelle σ la conductivité de la solution. Cette grandeur est caractéristique de la solution. Elle dépend :

- de la concentration des ions ;
- de la nature de la solution ionique ;
- de la température de la solution.

Un conductimètre, préalablement étalonné, permet d'afficher directement la valeur de la conductivité σ de la solution.

En effet on a les égalités suivantes :

$G = \sigma \cdot k$ avec $k = S/l$ soit $G = \sigma \cdot \dfrac{S}{l}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{G}{k} = \frac{G \cdot l}{S}$$

Avec :

- G la conductance (en S) ;
- σ la conductivité de l'électrolyte (en S/m) ;
- k la constante de cellule (en m^{-1}) ;
- S l'aire des plaques du conductimètre immergées dans la solution (en m^2).
- l la distance entre ces deux plaques (en m) ;

Attention :

Selon les constructeurs, la constante de cellule peut être exprimée de la manière suivante $k = l/S$, la relation devient alors : $\sigma = Gk$.

Il est donc très important de se renseigner auprès du constructeur afin de connaître l'unité de k (m ou m^{-1}) pour appliquer la bonne formule.

Conclusion

Les capteurs électrochimiques, c'est cool mais il faut les étalonner.

Ouverture : sondes lambda (*oxygen sensor* ou *lambda sensor* en anglais) https://en.wikipedia.org/wiki/Oxygen_sensor

LC 11

Molécules de la Santé

Niveau : Lycée (terminale S)

Bibliographie

- ✍ *Physique Chimie 2nd*, **Bordas** ⟶ Médicament
- ✍ *Sciences Physiques et chimiques 1ereST2S*, **Foucher** ⟶ Antisceptiques
- ✍ *Sciences physiques et chimiques TST2S*, **Durandeau, Hachette** ⟶ le reste
- ✍ *100 manipulations en chimie organique et inorganique*, **Mesplède** ⟶ Synthèse du paracétamol

Prérequis

- ➢ Techniques de base en synthèse organique (CCM, recristallisation, point de fusion...)
- ➢ Dosage par comparaison par spectrophotmétrie UV-visible

Expériences

- Fabrication d'un savon
- Synthèse du Paracétamol
- Dosage de la vitamine C du jus d'orange

1 La prévention . . . 840
1.1 Les savons pour la peau . . . 840
1.2 Les antiseptiques pour les surfaces . . . 841
2 Traitement de la douleur : le paracétamol . . . 841
2.1 Synthèse . . . 842
2.2 Extraction, purification et identification . . . 842
2.3 Calcul du rendement et évaluation des performances . . . 844
3 L'action des anti-oxydants . . . 844
3.1 Principe . . . 844
3.2 Exemple : la vitamine C . . . 844

Introduction

En ce temps de Covid-19, il est intéressant de se pencher plus en détail sur les molécules de la Santé et leur fonctionnement. De la prévention par le lavage des mains aux soins par les médicaments, nous allons étudier les molécules de la santé.

1 La prévention

1.1 Les savons pour la peau

Un des gestes barrières que le gouvernement nous demande de respecter est de se laver les mains régulièrement afin de ne pas garder le virus sur la peau. Comment cela fonctionne-t-il ?

Les savons sont des molécules composées de deux parties :

- une tête hydrophile, polaire voire même protique et qui a donc beaucoup d'affinité avec l'eau ;
- une queue lipophile (ou hydrophobe), apolaire et souvent composée d'une longue chaîne carbonnée et qui a peu d'affinité avec l'eau.

Notre peau est une surface constamment recouverte de sébum, un film lipidique sur lequel des bactéries et virus peuvent venir se déposer. Si on se lave les mains sans savon, il est possible que ces bactéries restent sur la peau. cependant, si on utilise du savon, alors les molécules de savons vont entourer les bactéries via leur queue hydrophobe et vont pouvoir les solubiliser dans l'eau via leurs têtes hydrophiles.

(Faire un petit dessin de bactérie entourée de savon.)

Saponification de l'huile d'olive pour fabriquer un savon

Porteu de buchère p290

Dans un tube à essai, mélanger 3 mL d'huile d'olive, 2 mL de soude concentrée et 1 mL d'éthanol à 95%. Mélanger rapidement et filtrer.

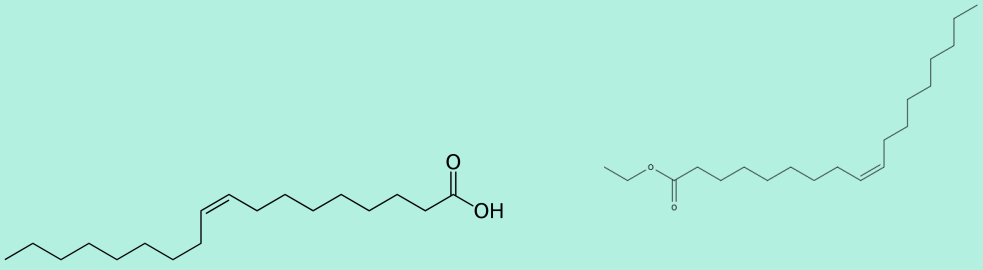


FIGURE 11.1 – À gauche, l'acide oléique contenu dans l'huile d'olive. À droite, le savon obtenu.

Comparer alors un mélange eau/huile à un mélange eau savonnée/huile

Une expérience de tout les jours de l'efficacité solubilisante du savon est la vaisselle. Si on prend une poêle graisseuse et que l'on la rempli d'eau, des gouttes d'huile surnagent, mais si on ajoute du savon, elles disparaissent !

Le savon n'est pas l'unique barrière contre les bactéries.

1.2 Les antiseptiques pour les surfaces

✍ Sciences physiques et chimiques 1ère ST2S, collection Foucher, p227

Une solution antiseptique a pour rôle de désinfecter, *i.e.* détruire les bactéries, à la surface de la peau ou à l'intérieur du corps.

- Les cations, comme par exemple la chlorohexidine

  Les cations s'attaquent à la membrane de la bactérie, constituée de phospholipides. Les lipides résultent de l'estérification par le glycérol (propan-1,2,3-triol) d'acides gras acides à longues chaînes carbonées). Ainsi, ces phospholipides comportent deux longues chaînes hydrophobes provenant des acides gras et un groupe de tête polaire hydrophile (le substituant phosphate). L'action de l'antiseptique consiste à remplacer les groupes protecteurs hydrophiles des phospholipides. Il y a alors fuite du cytoplasme et mort de la bactérie. (c'est pareil pour les virus, sauf que c'est leur enveloppe que l'on détruit.)

- Les oxydants, comme par exemple la Bétadine, l'eau de Javel, l'eau de Dakin (solution d'acide hypochloreux $HCLO^-$)

  Les oxydants pénètrent dans le cytoplasme et s'attaquent directement à l'ADN de la molécule. Celui-ci est une protéine, c'est-à-dire une longue chaîne d'acides aminés reliés par des liaisons peptidiques. Un acide aminé particulier, la cystéine, comporte une fonction thiol S-H, susceptible d'être oxydée. Cela aboutit à la création de ponts disulfure très forts entre les différentes cystéines de la protéine, ce qui provoque son repliement, puis sa coagulation et agrégation. La protéine n'est alors plus fonctionnelle et la bactérie meurt.

2 Traitement de la douleur : le paracétamol

✍ **LC05**

Le paracétamol est une molécule utilisée dans le traitement de la douleur, par exemple pour les maux de têtes ou les douleurs de dents. Elle a le bon goût d'être sans accoutumance, et sans dépendance. Contrairement à l'aspirine, ce n'est pas un anti-inflammatoire, ainsi aucun risque d'empêcher le système immunitaire inné de faire son travail. C'est pour cela que le paracétamol est utilisé préférentiellement à l'aspirine en période de pandémie. (Elle reste antipyrétique, elle fait diminuer la température, mais n'empêche pas la réaction de l'immunité innée. À efficacité égale, il présente moins d'effets indésirables.)

La dose usuelle d'efficacité est d'un gramme. Dans le cas d'un surdosage rapide (25-30 g en un jour) il cause une hépatite fulminante, qui nécessite une transplantation immédiate pour éviter le décès du patient.

Nous allons maintenant réaliser la synthèse du paracétamol (para-acétyl-amino-phénol) à partir du para-aminophénol ! Cette synthèse est importante dans le cadre de la chimie de la santé, tant du fait que c'est une molécule massivement produite (plusieurs dizaines de milliers de tonnes par ans) que du fait qu'elle permet de voir de nombreuses techniques expérimentales.

2.1 Synthèse

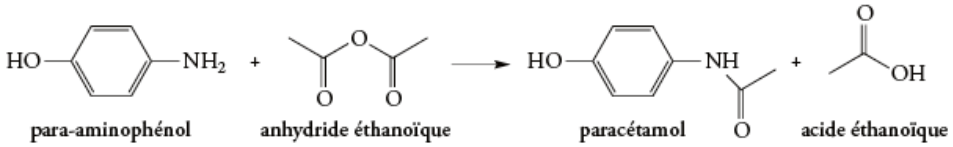


FIGURE 11.2 – Synthèse du paracétamol.

Montrer le montage

Synthèse du paracétamol

Dans un ballon bicol de 250 mL, introduire successivement 2,75g de para-aminophénol, 25 mL d'eau et 2 mL environ d'acide éthanoïque pur. Adapter une colonne de vigreux puis porter dans un chauffe-ballon, sous agitation magnétique jusqu'à complète dissolution. Ajouter ensuite lentement environ 3,5 mL d'anhydride éthanoïque (très corrosif), en agitant. (10 minutes)

Mettre le tout dans un bain d'eau glacé pour finir la cristallisation.

Préparer deux fois pour avoir aussi un produit fini à la fin, passé à l'étuve et tout, pour calculer le rendement.

Pour cette synthèse, il est recommandé de chauffer afin d'accélérer la réaction. La stratégie de chauffage permet d'accélerer mais peut aussi entrainer une perte par les vapeurs, c'est pourquoi nous utilisons une colonne de Vigreux, qui permet de limiter les pertes.

Solvant = eau = bien

Produit secondaire = acide acétique (valorisable car réactif courant en chimie orga)

Températures raisonnables

durée acceptable

Ici j'ai mis le milieu réactionnel dans le froid afin d'accélerer la cristalisation du paracétamol, peu soluble à froid. Afin de récupérer le produit nous allons appliquer des techniques de séparation sélectives.

2.2 Extraction, purification et identification

suite

15mn

Filtrer sur buschner pour récupérer le paracétamol brut, avec ses impuretés. Commenter sur les impuretés, et sur la nécessité d'effectuer une recristallisation. Utiliser un minimum d'eau distillé glacée pour le lavage.

Commencer la recristallisation à température ambiante, car le facteur cinétique est important. Pour cela, on met le solide dans de l'eau avec une ampoule de coulée isobare. On met 15cl d'eau pour tout le solide environ, et on chauffe au chauffe ballon. On ajoute de l'eau jusqu'à dissolution complète, mais pas plus ! On met ensuite à refroidir, et on enlève l'olive bordel.

Le discours :

Je filtre pour effectuer une sélection de phase : je garde la phase solide dans laquelle je sais qu'il y a mon produit.

Je nettoie pour me débarrasser des espèces chimiques du milieu réactionnel, en essayant de na pas perdre trop de produit.

Je fais une recristallisation. Attention, pas trop de solvant. Je laisse refroidir à température ambiante pour faire des jolis cristaux qui n'emprisonnent pas d'impuretés.

- le brut réactionnel doit être purifié
- la fiole à vide et le filtre Buchner permettent une filtration rapide et un essorage grossier du solide sous pression réduite (pour un liquide on fait une extraction liquide-liquide, par exemple avec une ampoule à décanter). C'est une stratégie de séparation, fondée sur les propriétés physique différentes (ici une phase).
- la recristallisation est une étape de purification d'un solide (pour un liquide c'est la distillation), fondée sur la différence de solubilité à chaud des impuretés et du produit d'intérêt dans un solvant bien choisi. Il s'agit d'une technique de purification sélective.

Ce que nous avions avant la purification est le brut réactionnel. Il faut sélectionner dans ce dernier le paracétamol. Cette sélection on peut la généraliser à toutes les réactions chimiques en milieu liquide, et qui fonctionne en trois étapes :

- **Isolement**
- **Purification**

  Si le produit est solide, comme dans notre cas, on fait une recristallisation.
- **Analyse**

  Il va falloir évaluer la pureté du produit solide à l'aide d'un banc Kofler et le rendement de la synthèse.

Aller chercher le produit préparé, qui a été mis à l'étuve bien comme il faut.

Le peser en disant "that's asecret tool that will help us later".

Ceci est le même produit que j'ai pris le temps de sécher convenablement à l'étuve. Il est beau, il est blanc, il est radicalement différent du brut de tout à l'heure ! On va donc le passer au banc kofler pour déterminer sa pureté.

Banc kofler

U Know What To Do. On attend 169°C

CCM

Notez que l'éluant proposé dans le Mesplède, mélange 50/50 d'acétone et de dichlorométhane est cancérigène, et classé CMR. Il faut absolument rester sous la hotte et prendre les précautions nécessaires (gants, lunettes). Nous avons aussi réalisé la CCM avec pour éluant un mélange 5/95 d'acétone/éthanol, et ça fonctionne très bien aussi. Ce solvant étant peu volatil et pas dangereux, pas besoin d'être sous la hotte.

2.3 Calcul du rendement et évaluation des performances

Le rendement est calculé par la formule proposée plus haut. On obtient un très bon rendement, donc très peu de pertes. De plus l'économie d'atomes peut être considérée comme de 1 car le seul déchet est en fait de l'acide éthanoïque, tout à fait utilisable en chimie si on le recycle.

3 L'action des anti-oxydants

L'émergence du Coronavirus a poussé de nombreux sites à vanter les mérites de produits de santé d'une validité pour le moins douteuse. De nombreux sites de bien être et de naturopathie ont par exemple vanté les mérites de la vitamine C comme d'un boost naturel pour le système immunitaire. Dans cette section nous allons nous intéresser aux molécules de la famille des antioxydants, dont fait partie la vitamine C, et essayer de comprendre l'action de ces molécules.

3.1 Principe

Un antioxydant est une molécule qui ralentit ou empêche l'oxydation d'autres substances chimiques à leur contact. On a vu précédemment que les propriétés de certaines molécules peuvent être grandement dénaturées lorsque celles-ci sont oxydées.

En effet lorsque la cellule consomme de l'oxygène, elle peut entrainer la formation d'espèce radicalaire très réactives, comme le $O_2^{\bullet}$, qui lui même peut donner de l'eau oxygénée, ou péroxyde d'hydrogène. Ces deux espèce sont nocives. La présence d'antioxydant empêche la formation d'H2O2 car il capte les radacaux d'oxygène, très oxydant. Il s'agit en fait d'une espèce qui se fera oxyder à la place du corps.

Ainsi en cas de carence, un médecin peut prescrire des antioxydants en compléments alimentaires, comme par exemple la vitamine C.

3.2 Exemple : la vitamine C

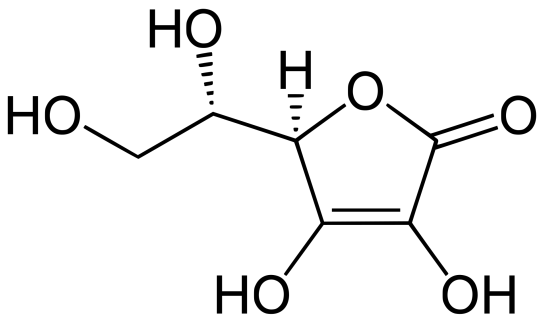


FIGURE 11.3 – La molécule de Vitamine C, 5-(1,2-dihydroxyéthyl)-3,4-dihydroxyfuran-2-one. La version D (l'autre) n'a pas d'activité vitaminique.

AJR : 100g. Une orange c'est 50.

Elle est requise dans la synthèse du collagène et des globules rouges et contribue au système immunitaire. Elle joue également un rôle dans le métabolisme du fer en tant que promoteur de son absorption ; son utilisation est donc déconseillée chez les patients porteurs d'une surcharge en fer et particulièrement d'une hémochromatose. La dose journalière recommandée est de 100g, et il n'y a pas de dose toxique connue. En tant que traitement médical, la vitamine C a quelques indications reconnues : la prévention ou le traitement du scorbut et l'avitaminose C.

Durant cette pandémie, on a pu voir de véritables pénuries de jus d'orange dans les magasin, ainsi j'ai du boire du jus de pamplemousse pendant 2 mois, car des personnes non-médecin on indiqué qu'il fallait sur-consommer de la vitamine C pour se sauver. Ma mère sur les conseil d'une amie à elle, s'est mise à boire une bouteille entière de jus d'orange PAR JOUR ! Quelle quantité de Jus d'orange vaut-il boire pour avoir une dose acceptable de Vitamine C ?

Dosage en retour de la vitamine C dans le jus d'orange

✍ Le poly

Voir polycopié associé à cette leçon.

La vitamine est souvent recommandée dans le traitement des fatigues passagère, et comme boosteur de défenses immunitaires. Cependant, aucune étude scientifique ni méta étude sérieuse n'a jamais réussi à prouver un effet supérieur au placébo. D'ailleurs n'oublions pas que "booster le système immunitaire", ça s'appelle une maladie auto-immune, et c'est pas cool !

Bilan, écoutez votre médecin, pas des charlots en ligne, d'autant que parfois leurs idées sont mercantiles :

LC 12

Stéréochimie et molécules du vivant

Niveau : Lycée (terminale S)

Extraits du programme

Structure et propriétés de la matière	
Représentation spatiale des molécules Chiralité : définition, approche historique.	Reconnaître des espèces chirales à partir de leur représentation.
Représentation de Cram.	Utiliser la représentation de Cram.
Carbone asymétrique. Chiralité des acides α-aminés.	Identifier les atomes de carbone asymétrique d'une molécule donnée.
Énantiomérie, mélange racémique, diastéréoisomérie (Z/E, deux atomes de carbone asymétriques).	À partir d'un modèle moléculaire ou d'une représentation, reconnaître si des molécules sont identiques, énantiomères ou diastéréoisomères. Pratiquer une démarche expérimentale pour mettre en évidence des propriétés différentes de diastéréoisomères.
Conformation : rotation autour d'une liaison simple ; conformation la plus stable.	Visualiser, à partir d'un modèle moléculaire ou d'un logiciel de simulation, les différentes conformations d'une molécule.
Formule topologique des molécules organiques.	Utiliser la représentation topologique des molécules organiques.
Propriétés biologiques et stéréoisomérie.	Extraire et exploiter des informations sur : – les propriétés biologiques de stéréoisomères, – les conformations de molécules biologiques, pour mettre en évidence l'importance de la stéréoisomérie dans la nature.

Bibliographie

- ✍ *Chimie TS*, **Belin** — Tout le cours
- ✍ *Physique-Chimie TS*, **Hachette** — pour des exemples en plus
- ✍ *Physique-Chimie TS*, **Sirius, Nathan**
- ✍ *La chimie expérimentale. 2.Chimie organique et générale*, *JFLM* — Expériences.

Prérequis

- ➢ Formule brute, semi-développée, topologique
- ➢ CCM
- ➢ Liaisons chimiques
- ➢ Isomérie Z/E et isomérie de consitution
- ➢ Fonctions chimiques

Expériences

- ☕ CCM du limonène
- ☕ Température du fusion des énantionères du limonène
- ☕ Pouvoir rotatoire du limonène (peut être hors-programme)
- ☕ Mesures des pKa des acides fumarique et maléique

1 Stéréoisomère de conformation . . . 849
1.1 Définition et exemple de l'éthane . . . 849
1.2 Conformérie des protéïnes . . . 850
2 Stéréoisomérie de configuration . . . 851
2.1 Définition . . . 851
2.2 Représentation de Cram . . . 851
2.3 Chiralité . . . 851
2.4 Énantiomérie . . . 852
2.5 Diastéréoisomères de configuration . . . 854

Introduction

Jusqu'à maintenant, vous avez vu comment les atomes se liaient entre eux pour former des molécules. Dès lors, vous avez pu constater que les mêmes atomes pouvaient former des molécules différentes, et qu'on pouvaient décrire ces molécules avec les formules brutes ou les formules semi-développées. La notion d'isomérie a également pu être définie, et plus précisément la notion d'isomérie de constitution où deux molécules ont la même formule brute et une formule semi-développée différente, ce qui va d'ailleurs leur conférer des propriétés physico-chimiques différentes.

Cependant, est-ce suffisant pour différentier deux molécules ? Est-ce que deux molécules qui ont la même formule semi-développée sont forcément identiques ? Ont-elles les mêmes propriétés ?

On va voir dans cette leçon qu'il manque une information cruciale pour décrire une molécule : sa configuration dans l'espace en 3D. On va alors dire que deux molécules sont **stéréoisomères** si elles ont la même formule brute, la même formule développée mais un agencement spatial différent.

Prendre des exemples de molécules avec des modèles moléculaires.

1 Stéréoisomère de conformation

1.1 Définition et exemple de l'éthane

Définition : On parle de *stéréoisomérie de conformation* si les stéréoisomères ne se distinguent que par des rotations autour de liaisons simples. Chaque géométrie est appelée une *conformation*. Toutes les conformations n'ont pas la même énergie, celle d'énergie minimale est la plus stable.

Dans les molécules du vivant, on trouve une majorité de molécules avec des squelettes carbonés. Ainsi, on va prendre comme exemple une liaison C-C, et quoi de plus simple que l'éthane pour étudier les rotations de cette liaison.

Faire le modèle moléculaire de l'éthane, de préférence en marquant les hydrogènes de couleurs différentes pour pouvoir les différencier. Montrer les différents conformations possibles par rotation autour de la liaison C-C.

On note deux conformations limites :

- **conformation éclipsée :** les liaisons C-H de chaque carbone sont les unes en face des autres ⇒ maximum d'énergie
- **conformation décalée :** les liaisons C-H de chaque carbone sont décalées les unes par rapport aux autres ⇒ minimum d'énergie

C'est l'occasion de montrer des projections de Newman.

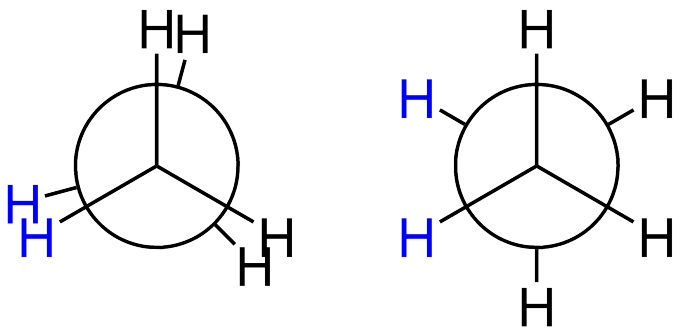


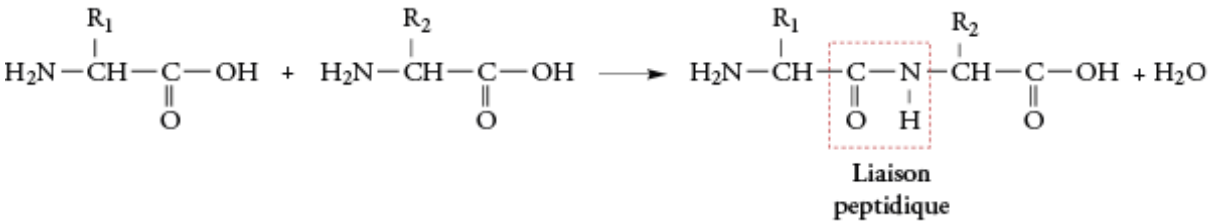
FIGURE 12.1 – Les deux conformations limites de l'éthane : éclipsée à gauche et décalée à droite.

Remarque

En première approximation, cette stabilité de la conformation décalée est due à la répulsion électronique. L'ordre de grandeur de la barrière est de 12 kJ/mol, 10 fois plus que k_BT (cf Belin pour les OdG). A température ambiante, on a environ 10^{10} rotations par seconde donc on ne peut pas isoler une conformation.

1.2 Conformérie des protéïnes

Prenons un autre exemple de molécules du vivant : les protéines. Les protéines sont des assemblages d'acide aminés et sont omniprésentes en biologie, au sein des tissus (collagène, kératine), des catalyseurs (enzymes), sous la forme de récepteurs membranaires ou encore comme molécules de transport (hémoglobine). Ces propriétés variées sont directement liées à la stéréoisomérie des protéines. Une protéine se forme à partir de réactions du type :



On a formé ce qu'on appelle une *liaison peptidique*. C'est une liaison plane qui impose une géométrie particulière à la protéine. On peut alors obtenir deux conformations qui ont des propriétés différentes :

- une conformation en hélice, où des liaisons H se forment entre les groupements de 2 liaisons peptidiques et donnent une forme globulaire à la protéine. La protéine est alors soluble dans l'eau et est plus adaptée à la catalyse et aux phénomènes de transport
- une conformation plane, où peu de liaisons H se forment. La protéine n'est pas soluble dans l'eau et forme les tissus vivants.

Exemples de changement de propriété due à un changement de conformation

- la maladie de la vache folle : la sialoglycoprotéine est normalement en conformation hélice et participe à l'adhésion cellulaire. Cependant, lorsqu'elle passe en conformation plane, elle s'accumule dans les tissus cérébraux et provoque la mort des neurones
- le blanc d'oeuf : l'ovalbumine est normalement en conformation hélice. Cependant, la cuisson rompt les liaisons H et fait la fait passer en conformation plane : l'ovalbumine devient hydrophobe et engendre alors le processus de coagulation, et le blanc d'oeuf devient ferme.

https://youtu.be/meNEUTn9Atg (optionnel)

Pour le moment, on a pas brisé une seule liaison chimique, et les conformères ne sont finalement que des représentations différentes de la même molécule. Il se passe quoi si on se donne le droit de casser des liaisons ?

2 Stéréoisomérie de configuration

2.1 Définition

Exemple introductif : On prend une molécule quelconque, et on la dessine en formule semi-développée. On échange deux pattes d'un de ses carbones asymétriques, et on la redessine, c'est la même chose, pourtant c'est plus la même molécule !

Définition : On nomme *stéréoisomères de configuration* deux molécules qui ont la même formule développée, mais qui diffèrent en cela qu'il faut casser une liaison chimique pour passer de l'une à l'autre.

Contrairement au cas de la *conformation*, la *configuration* ajoute cette information de rupture, et on crée des atomes asymétriques. Ces atomes seront, à notre niveau, toujours des carbones à 4 pattes (tétravalents), mais ce qui va être dit avec les carbones peut tout à fait s'appliquer à d'autres atomes comme le Silicium. On appelle ça un *centre stéréogène*.

Mais comment repérer la différence entre deux stéréoisomères sur le papier ? Il nous faut une notation...

2.2 Représentation de Cram

Lorsque l'on a un carbone asymétrique, que l'on note C*, donc lié à quatres groupes différents (que l'on nomme *substituants*), on en a deux dans le plan, et deux en relief.

Sortir le modèle moléculaire d'un carbone asymétrique.

Pour le représenter sur le papier, on va essayer de représenter ce relief. Mais comme on est pas des De Vinci (plutôt des Picasso), on va représenter ça de manière symbolique (Peintre symboliste : Gustave Moreau).

Faire un dessin de la molécule

Cette représentation c'est ce que l'on appelle la représentation de Cram. Elle est fort utile pour représenter en 2D une structure 3D.

Faire un autre exemple, avec une molécule plus complexe ?

2.3 Chiralité

Associée à cette notion, il y a la notion de *Chiralité*.

Coup du miroir

✍ ⏲ 1mn

Prendre un miroir et regarder le c* de tout à l'heure dedans. On voit que l'on a une autre molécule, qui est un stéréoisomère de configuration.

Faire l'autre molécule en modèle et montrer qu'on ne peut pas les superposer.

Définition : On dit qu'une molécule est chirale si on ne peut pas la superposer avec son image dans un miroir. Exemple d'objet chiral : une main. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *achirale*.

Les molécules avec des carbones asymétriques sont presque toutes chirales, mais pas toutes !

Contreexemple : L'acide tartrique ! On appelle ces composés, qui ont des carbones asymétriques mais ne sont pas chiraux, des *composés méso*.

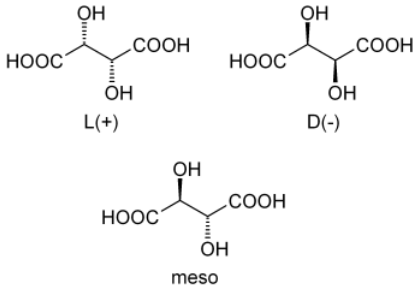


FIGURE 12.2 – L'acide Tartrique.

Mais Jamy, comment on nomme deux molécules qui sont images l'une de l'autre ?

2.4 Énantiomérie

2.4.1 Définition

Définition : Deux molécules sont dites *Énantiomères* si elles sont différentes et images l'une de l'autre dans un miroir.

Les propriétés physico-chimiques de deux molécules énantiomères sont exactement les mêmes, si on les fait réagir avec des molécules achirales. Cependant sur des molécules chirales, deux énantiomères peuvent réagir différement.

Le limonène

✍ Ma blonde tête 🕓 15mn

En préparation.

Matériel : CCM, limonène, KMnO4.

On se sert de la CCM pour illustrer le fait que deux énantiomères ont les mêmes propriétés physico-chimiques. Ici, cela se traduit par un même rapport frontal.

- On fait la cuve à chromato, attention il faut saturer la cuve en vapeur d'éluant. D'ailleurs on prend du... cyclohéxane !
- Dépot de + et - limonène sur la silice, et laisser éluer.
- Une fois fini, tremper dans une solution de KMnO4 et sécher. On a des tâches brunes.

Même propriété physicochimiques face à la silice, mais odeur différente, car les récepteurs d'odeur sont des molécules chirales aussi ! Ainsi on voit que dans le vivant, seule une relation de stéréochimie fait la différence entre l'odeur d'un pin et l'odeur du citron.

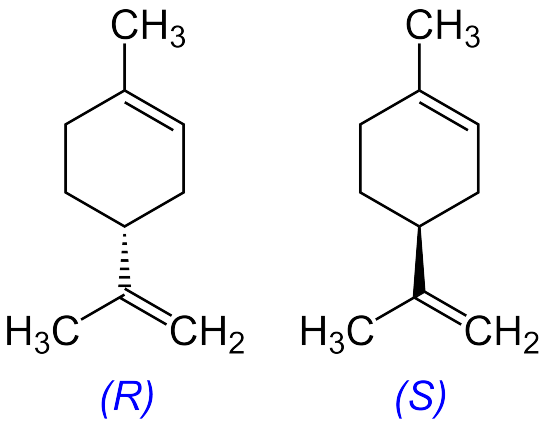


FIGURE 12.3 – La structure du Limonène

Une autre façon de distinguer les énantiomères, c'est le pouvoir rotatoire ! Alors on a une dénomination. Un énantiomère fait tourner vers la gauche, il est lévogyre, on le note (-) ou L, et l'autre est dextrogyre, (+) ou D.

Pouvoir rotatoire de deux énantiomères

✍ Encore cette foutue tête ⏲ 2mn

Tu connais le montage. Mais c'est pas trop au programme, donc à voir...

Pour montrer les propriétés physicochimiques semblables :

Mesure de la température de fusion de l'acide tartrique

✍ JFLM 2, p.21 ⏲ 2mn

On place successivement les deux énantiomères sur un banc Kofler préalablement étalonné. Le point de fusion attendu est autour de 171 à 173°C pour L et D (206°C pour un mélange racémique des deux énantiomères, et 172°C pour le méso).

Pour le diagramme binaire complet du mélange. Il y a 2 eutectiques.

2.4.2 Rôle dans le vivant

Bien que les propriétés physico-chimiques de deux énantiomères soient les mêmes dans un milieu achiral, les systèmes biologiques sont rarement achiraux. Dans ce cas, deux énantiomères peuvent jouer des rôles très différents.

exemples :

- À l'exception de la glycine, tous les acides aminés naturels possèdent un atome de C*. Les acides aminés L représentent la quasi-totalité des acides aminés présents dans les protéines, puisque les enzymes ont tendances à dégrader préférentiellement les acides aminés D
- La thalidomide, dont l'énantiomère (-) a des effets sédatifs et antivomitifs tandis que l'autre est tératogène (il déforme les bébés). Par contre, on peut passer d'une forme à l'autre in-vivo donc même avec une synthèse énantio-sélective le médicament reste pourri. Mais par contre bis, on s'y ré-intéresse pour traiter des trucs comme la lèpre ou la maladie de Crohn.
- La L-Dopa (ci-dessous) permet de traiter la maladie de Parkinson, alors que son énantiomère est toxique. D'où l'importance de savoir parfaitement isoler un énantiomère.

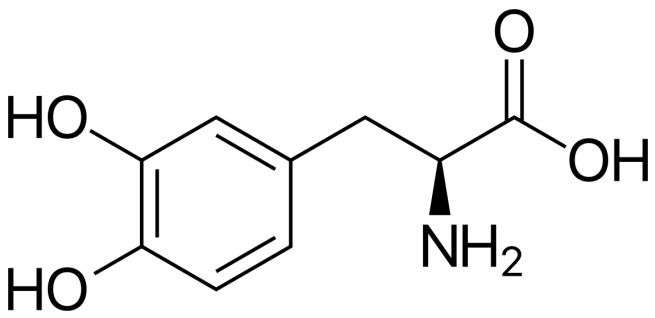


FIGURE 12.4 – (S)-2-Amino-3-(3,4-dihydroxyphenyl)propanoic acid, ou L-Dopa, précurseur de la Dopamine.

Explication de la sélectivité

On peut expliquer cela par un mécanisme clef-serrure ou pied-chaussure.

2.5 Diastéréoisomères de configuration

Deux stéréoisomères de configuration ne sont pas forcément des énantiomères. lorsque ce n'est pas le cas, on dit que ce sont des *diastéréoismères*. Contrairement aux énantiomères, 2 diastéréoisomères ont des propriétés physico-chimiques différentes et donc sont plus faciles à séparer.

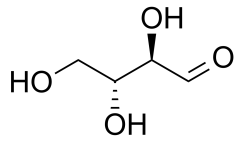
2.5.1 La diastérisomérie générée par des carbones asymétriques

Quand une molécule a au moins 2 carbones asymétriques, elle peut avoir des configurations différentes mais qui ne sont pas images l'une de l'autre dans un miroir plan.

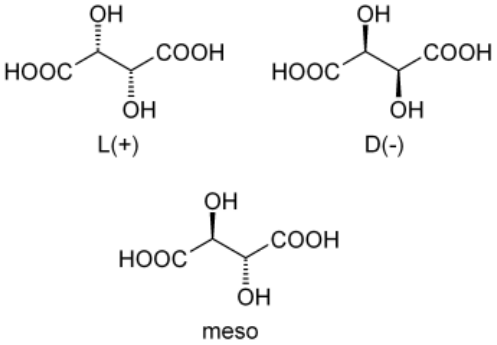
De manière générale, quand une molécule possède n carbones asymétriques, elle a au maximum 2^n configurations possibles. Le "au maximum" fait référence à l'existence des composés méso ou bien le fait que certaines configurations soient bloquées (par exemple par un cycle), ce qui explique pourquoi on n'a pas toujours 2^n configurations.

Exemples

- 2,3,4-tri-hydroxybutanal : il a 2 carbones asymétriques, donc 4 stéréoisomères de configuration. **Dessiner les 4 configurations au tableau et donner leur relation de stéréoisomérie**



- acide tartrique : on a tout, diastréréoisomères composé meso, énantiomères...



Cependant, les carbones asymétriques ne sont pas les seuls sites créateurs de stéréoisoméries.

2.5.2 La diastéréosimérie Z/E

C'est une notion qui a déjà été vue en première. On peut la remontrer avec un modèle moléculaire. On va prendre l'exemple de l'acide fumarique (diastéréoisomère E) et de l'acide maléique diastéréoisomère Z).

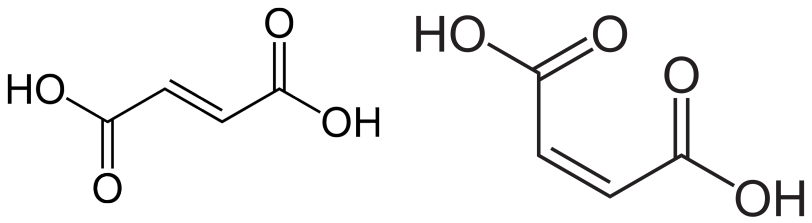


FIGURE 12.5 – À gauche : acide fumarique (diastéréoisomère E). À droite : acide maléique (diastéréoisomère Z)

Mesure des pK_A des acides fumarique et maléique

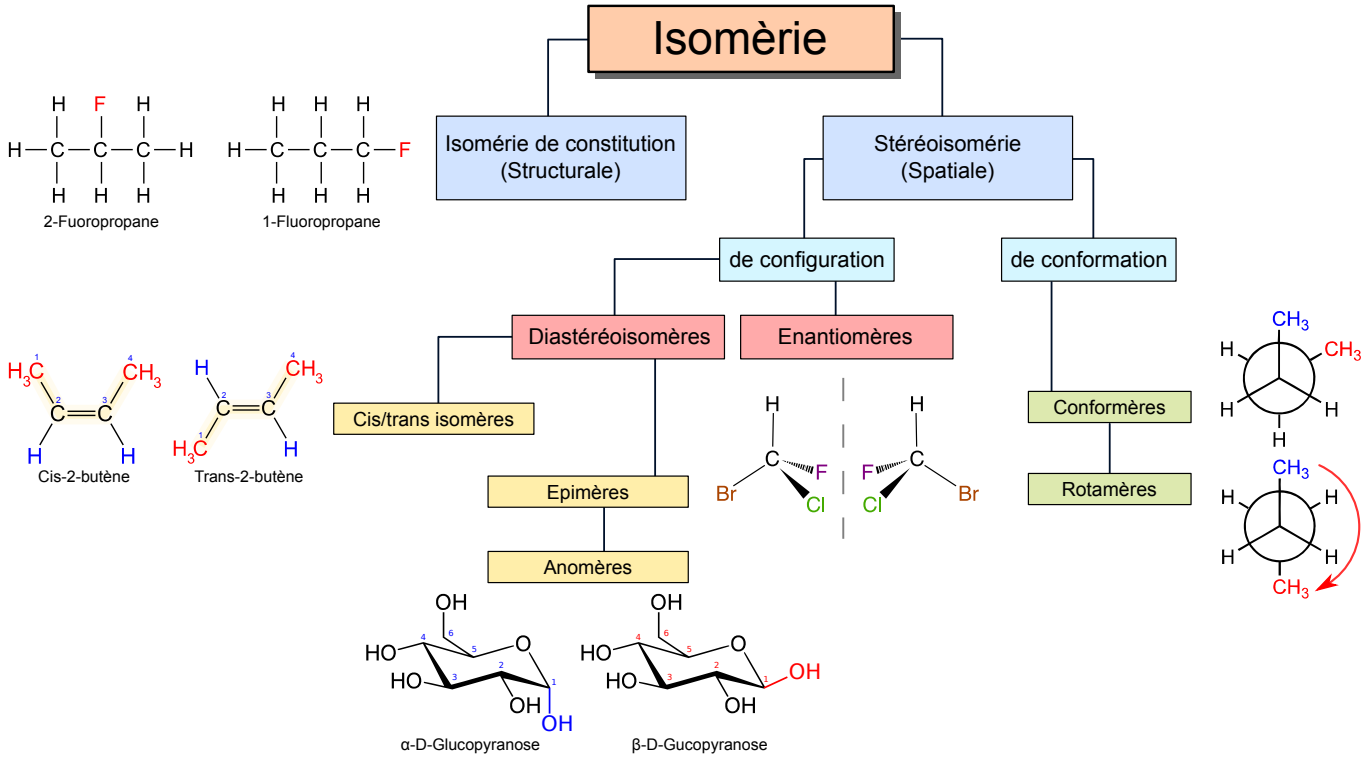
✍ *La chimie expérimentale 2*, JFLM 🕒 10 min

Tracer les courbes de pH pour els 2 acides en titrant avec de la soude.

Pour l'acide fumarique, les deux groupes carboxyliques sont éloignés et ont des dispositions similaires, les deux pK_A sont donc proches. Un seul saut de pH est obtenu car $\Delta pK_A < 4$.

En revanche, l'acide maléïque est stabilisé par liaison hydrogène lors de la protonisation du premier groupe carboxylique. La protonisation du deuxième groupe carboxylique déstabilise la molécule : les deux pK_A sont alors différentiables et on obtient deux sauts de pH.

Conclusion



On a réussi à mettre en évidence l'importance de la stéréoisomérie dans les propriétés des molécules. Ces propriétés ne sont pas seulement dues aux atomes qui les constituent, mais aussi à leur agencement dans l'espace. Ces propriétés ont une importance toute particulière dans le vivant, où de nombreux mécanismes dépendent de la stéréochimie. La stéréochimie ne se limite néanmoins pas à l'étude du vivant, mais est un outil puissant pour étudier et concevoir des synthèses organiques, ou encore isoler des composés.

LC 13

Acides et bases

Niveau : Terminale

Commentaires du jury

L'usage de solutions du quotidiens dans l'introduction est une bonne mise en contexte, qui nécessite cependant de la rigueur dans l'usage de papier pH : on ne trempe pas le papier pH, on dépose quelques gouttes dessus.

Les notions de pK_B et de concentration standard c^o sont hors programme, et même s'il est douloureux d'écrire une constante d'acidité dimensionnée, on le fait au niveau lycée. Globalement il ne faut pas s'écarter du programme qui est assez limité. Par exemple la connaissance d'aucune constante n'est exigible à l'exception de la vitesse de la lumière.

Une expérience quantitative bien exploitée est nécessaire dans toutes les leçons de Chimie. Ici la dernière fait office d'expérience quantitative, il faut donc bien l'exploiter et bien faire apparaître les calculs. Ne pas oublier de faire apparaître des calculs d'incertitude et de les exploiter.

Bibliographie

✍ *Physique Chimie (TS, 2012)*, **Collection E.S.P.A.C.E** ⟶ p329, détermination du pKa
✍ *Physique Chimie (TS, 2012)*, **Collection Nathan** ⟶ cours sur les Acides et les Bases

Prérequis

- Fonction Logarithme
- Équations bilans
- Formule de Lewis et formule semi-développée
- Avancement et constante de réaction
- Notations relatives aux concentrations

Expériences

- pH de différentes solutions du quotidien
- Mesure de pKa de CH_3COOH/CH_3COO^-
- Comparaison acide fort – acide faible

1 Quelques définitions . . . 858
1.1 Potentiel Hydrogène, pH . . . 858
1.2 Acides et Bases . . . 858
1.3 Le cas de l'eau . . . 859
1.4 Lien entre le pH et la notion d'Acide . . . 860
2 Réactions acido-basiques . . . 860
2.1 Constante d'équilibre K_A . . . 860
2.2 Lien avec le pH . . . 860
2.3 Diagrammes de prédominance . . . 861
2.4 Force relative des acides et des bases . . . 861

Introduction : acidité et société

Quand on boit du coca, mange un citron ou touche de l'eau de javel, ça pique, et on sent bien qu'il se passe quelque-chose qu'il ne se passe pas avec d'autres substances. Ce qu'il se passe, c'est que nos nerfs réagissent à l'acidité ou la basicité de ces produits. Un moyen de mettre cela en évidence est d'utiliser du papier pH, qui donne une indication sur le pH d'une solution, et donc sur son acidité.

pH de différentes solutions
Matériel : du papier pH, un citron, du coca, de l'eau, de la javel, et de l'eau chaude (c'est pas dit que ce soit probant, à tester). Il peut être bien de penser à projeter le résultats des expériences.

On dépose quelques goûtes de chaque solution sur du papier pH et on montre qu'il réagit différemment selon les produits. On en déduit l'acidité des dits produits. Le test avec l'eau chaude vise à montrer que le pH dépend de la température, mais il est globalement foireux.

1 Quelques définitions

1.1 Potentiel Hydrogène, pH

Dans une solution quelconque, le pH est donné par la formule suivante :

$$\mathrm{pH} = -\log\left(\frac{[\mathrm{H_3O^+}]^{(\mathrm{eq})}}{c^o}\right) \tag{13.1}$$

Que l'on peut réexprimer

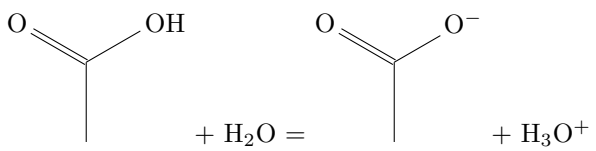
$$[\mathrm{H_3O^+}]^{(\mathrm{eq})} = 10^{-\mathrm{pH}} c^o$$

$[\mathrm{H_3O^+}]$ correspond à la concentration en ions oxoniums du milieu. Par exemple, l'eau pure à 25^o C a un pH de 7, c'est à dire qu'elle contient 10^{-7} moles d'ions oxoniums par litre d'eau.

D'où peuvent venir les ions $\mathrm{H_3O^+}$?

1.2 Acides et Bases

Commençons par un exemple. Cette molécule (*dessiner la bête*) est la molécule d'acide acétique (ou acide éthanoïque), que l'on trouve dans le vinaigre par exemple. Cette molécule réagit avec l'eau selon la réaction suivante. On observe une libération d'un proton, qui vient se fixer sur l'eau et forme un $\mathrm{H_3O^+}$.



Entourer la fonction acide carboxylique.

$$\mathrm{CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = CH_3COO^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)}} \tag{13.2}$$

Def : Un **acide** est une espèce susceptible de libérer un proton.

CH_3COOH est donc un acide.

Mais cette équation peut se mettre dans l'autre sens, auquel cas on observe plutôt une espèce qui capte un proton depuis l'ion oxonium.

$$CH_3COO^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)} = CH_3COOH_{(aq)} + H_2O_{(l)} \tag{13.3}$$

Def : Une **base** est une espèce susceptible de capter un proton.

De manière générale, on peut écrire une réaction Acide-Base sous une forme générique comme suit. l'acide AH réagit avec l'eau pour donner la base A^- et un ion oxonium. On nommera alors AH/A^- un **couple acide-base**. On dit que A^- est la base conjuguée de AH, et réciproquement.

$$AH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = A^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)} \tag{13.4}$$

1.3 Le cas de l'eau

Il est important de bien connaître l'eau, car c'est le solvant des réactions que nous allons étudier. Elle est partout, et il faut en savoir le plus possible sur elle.

Regardons ce qu'il se passe lorsque un H_3O^+réagit avec de l'eau :

$$\begin{aligned} H_3O^+{}_{(aq)} + H_2O_{(l)} &= H_2O_{(l)} + H_3O^+{}_{(aq)} \\ AH_{(aq)} + H_2O_{(l)} &= A^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)} \end{aligned} \tag{13.5}$$

$$\begin{aligned} H_2O_{(l)} + H_2O_{(l)} &= HO^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)} \\ AH_{(aq)} + H_2O_{(l)} &= A^-{}_{(aq)} + H_3O^+{}_{(aq)} \end{aligned} \tag{13.6}$$

On observe alors que H_3O^+est un acide, de base conjuguée H_2O, et que H_2O est un acide de base conjuguée HO^-. L'eau apparaît dans les deux couples acide-base H_3O^+/H_2O et H_2O/HO^-, elle est ampholyte.

Def : une espèce est dite **ampholyte** (ou amphotère) si elle est à a fois un acide et une base.

En utilisant l'équation précédente, on obtient la relation dite **d'autoprotolyse de l'eau** :

$$2\,H_2O_{(l)} = H_3O^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} \tag{13.7}$$

Cette équation a pour constante de réaction

$$K_e = \frac{[H_3O^+]^{(eq)}[HO^-]^{(eq)}}{c^{o\,2}} \tag{13.8}$$

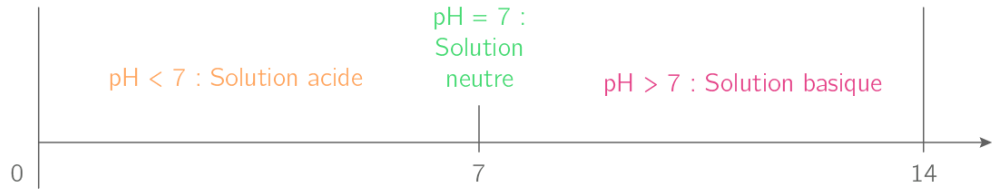
Avec le cas particulier de l'eau pure, on peut remonter à la valeur de K_e. L'eau pure est électriquement neutre, donc $[H_3O^+]^{(eq)}$=$[HO^-]^{(eq)}$. Ainsi $K_e = [H_3O^+]^{(eq)\,2}/c^{o\,2}$. Ainsi $K_e = (10^{-pH})^2$. Or on a vu que pH(eau)=7, donc $K_e = 10^{-14}$

Def : la constante de réaction d'autoprotolyse de l'eau s'appelle le **produit ionique de l'eau**, et a pour valeur $K_e = 10^{-14}$ à 25^oC.

1.4 Lien entre le pH et la notion d'Acide

Qualitativement, si on ajoute un acide dans l'eau, on ajoute par sa dissociation des ions H_3O^+, ce qui augmente leur concentration, et diminue donc le pH. Inversement, en ajoutant une base on consome des H_3O^+, et on augmente le pH.

Def : On parle de **solution acide** si pH<7, de **solution basique** si pH>7, et de solution neutre si pH=7 (à 25^oC.



Limites du pH

En solution aqueuse, nous admettrons que le pH est entre 0 et 14. Les raisons pour cela dépassent notre programme, cependant cette limite est fondamentale en solutions aqueuse et doit toujours être prise en compte. Une solution dont on calcule le pH hors de cette limite va, en pratique, saturer à cette limite.

2 Réactions acido-basiques

2.1 Constante d'équilibre K_A

Reprenons la forme générale de la réaction d'acide AH dans l'eau :

$$AH_{(aq)} + H_2O_{(l)} = A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)} \tag{13.9}$$

Il est possible d'attribuer à cet équilibre une constante de réaction, notée K_A et appelée constante d'acidité

Def : On définit la **constante d'acidité** K_A du couple AH/A^- par l'expression :

$$K_A = \frac{[A^-]^{(eq)}[H_3O^+]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}c^o} \tag{13.10}$$

En pratique, on peut également utiliser le pK_A définit par $pK_A = -\log(K_A)$.

Pour de nombreux couples acido-basiques, ces valeurs de K_A sont tabulées.

Par exemple, on trouve $pK_A(CH_3COOH/CH_3COO^-) = 4.8$.

2.2 Lien avec le pH

Pour un couple acido-basique, on a vu que la constante d'acidité K_A s'écrivait

$$K_A = \frac{[A^-]^{(eq)}[H_3O^+]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}c^o}$$

On peut alors en déduire l'expression du pK_A :

$$pK_A = -\log(K_A) = -\log\left(\frac{[A^-]^{(eq)}[H_3O^+]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}c^o}\right)$$

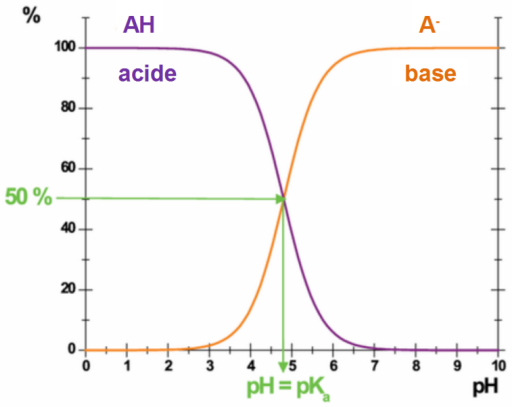
En utilisant la définition du pH ainsi que les propriétés du logarithme, on déduit l'expression suivante :

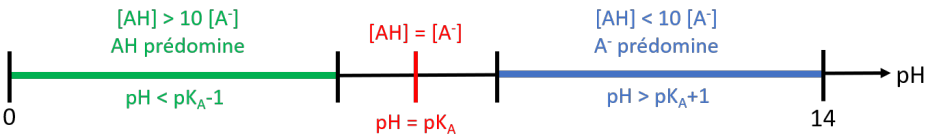
$$pK_A = pH - \log\left(\frac{[A^-]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}}\right) \iff pH = pK_A + \log\left(\frac{[A^-]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}}\right) \quad (13.11)$$

2.3 Diagrammes de prédominance

Une fois le lien entre pH et pK_A établi, on peut dresser un diagramme de prédominance du couple AH/A^- :

- Si $[A^-]^{(eq)} = [AH]^{(eq)}$, on obtient directement $pH = pK_A$.
- Si $[A^-]^{(eq)} > [AH]^{(eq)}$, on dit que A^- est majoritaire. On a alors $\log\left(\frac{[A^-]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}}\right) > 0$ donc $pH > pK_A$.
- Si $[AH]^{(eq)} > [A^-]^{(eq)}$, on dit que AH est majoritaire. On a alors $\log\left(\frac{[A^-]^{(eq)}}{[AH]^{(eq)}}\right) < 0$ donc $pH < pK_A$.





[Si y'a le temps] Mesure du pK_A du couple CH_3COOH/CH_3COO^-

✍ Juste une idée ⏲ 2 minutes

Dans un bécher de 200mL, verser 50mL d'une solution d'acide éthanoïque CH_3COOH à 0.1mol/L ainsi que 50mL d'une solution d'ion acétate CH_3COO^-. Avec un pH-mètre, mesurer le pH de la solution. Le pH obtenu correspond au pK_A du couple.

2.4 Force relative des acides et des bases

Comparaison entre un acide fort et un acide faible

✍ Juste une idée ⏲ 5 minutes

Verser 100 mL d'eau distillée dans 2 béchers de 200 mL. Dans un premier temps, suivre le pH dans le premier bécher après y avoir dissout 0.02 mol (environ 3.8 g) d'acide paratoluènesulfonique (APTS) (172 $g.mol^{-1}$, environ 190 hydraté). Répétez l'opération pour le second bécher après y avoir dissout 0.02 mol (1.8 g) d'acide lactique (90 $g.mol^{-1}$).

Les deux acides sont dissous, mais pas parfaitement dissociés. L'acide fort (APTS) est beaucoup plus dissocié que l'acide lactique, acide faible.

Quantitativement : soit pH^1 le pH de la solution d'APTS. $H_3O_1^+ = 10^{-pH_1}$. Alors on a la quantité d'APTS dissocié, et en évaluant l'incertitude de la mesure de la balance et du pH, on peut voir si ça peut correspondre à un acide entièrement dissocié.

De même, soit pH_2 le pH de la solution d'acide lactique, on en déduit directement la quantité dissociée.

Def : Un **acide fort** est un acide que l'on considère se dissocier totalement dans l'eau. Une **base forte** est une base que l'on considère réagir complètement avec l'eau.

Pour les acides et les bases fortes, on ne peut pas définir de pK_A à notre niveau, cependant on peut trouver des valeurs tabulées de pK_A négatifs ou supérieurs à 14.

Quelques acides forts : acide chlorhydrique HCl, acide sulfurique H_2SO_4, acide nitrique HNO_3.

Quelques bases fortes : hydroxyde de sodium NaOH, hydroxyde de potassium KOH.

Def : Un **acide faible** est un acide qui ne se dissocie pas totalement dans l'eau. Une **base faible** est une base qui ne se protonise pas totalement dans l'eau.

Def (alternative) : Un acide faible est un acide pour lequel un pK_A (entre 0 et 14) existe.

Quelques acides faibles : acide éthanoïque CH_3COOH ($pK_A = 4.8$), acide citrique ($pK_{A1} = 3.13$, $pK_{A2} = 4.76$, $pK_{A3} = 6.40$), acide lactique HNO_3 ($pK_A = 3.86$).

Quelques bases faibles : éthanoate CH_3COO^- ($pK_B = 4.3$), ammoniaque NH_3 ($pK_B = 4.3$).

Couples avec des acides forts ou des bases fortes

La base conjuguée d'un acide fort sera une base faible. Inversement, l'acide conjugué d'une base forte sera un acide faible.

Exemple : L'acide sulfurique H_2SO_4 est un acide fort et sa base conjuguée HSO_4^- est une base faible.

CEPENDANT Ce n'est pas parce qu'un acide est faible que sa base conjuguée sera forte. Inversement, l'acide conjugué d'une base faible n'est pas forcément un acide fort.

Exemple : L'acide éthanoïque CH_3COOH est un acide faible mais sa base conjuguée CH_3COO^- est également une base faible.

Conclusion

Les acides et les bases sont incroyablement utiles pour la fabrications d'espèce chimiques variées, mais leur utilisation n'est pas sans risque. L'usage de gants, de lunettes, d'une blouse, de chaussures fermées et d'un pantalon sont de rigueur lors de leur manipulation en salle de TP.

Ouverture : L'étude des réactions acido-basiques est un premier pas dans la chimie générale. Les réactions de complexation ou de précipitation peuvent être étudiées de façon très similaire.

LC 14

Liaisons chimiques

Niveau : 1ere S

Bibliographie

- ✍ *Physique-chimie 1ère S*, **Dulaurans Durupthy** p.100-101 et 189
- ✍ https://www.maxicours.com/se/cours/determination-experimentale-de-l-energie-mise-en-jeu-lors-d-une-reaction-de-combustion/
- ✍ https://eduscol.education.fr/rnchimie/phys/electros_m/vanderwaals/vdwaals.htm OdG des interactions de VdW
- ✍ *Physique-Chimie seconde*, **Bordas** Notion de couche électronique

Prérequis

- ➢ Classification périodique
- ➢ Loi de Coulomb, électrostatique
- ➢ Groupements fonctionnels
- ➢ Équation de combustion
- ➢ Configuration électronique et électrons de valence

Expériences

- Température de Fusion
- Calorimétrie

1 Des atomes aux molécules . . . 864
1.1 Liaison covalente . . . 864
1.2 Structure de Lewis (1916) . . . 865
1.3 Géométrie des molécules . . . 866
2 Des molécules aux solides . . . 867
2.1 Électronégativité . . . 867
2.2 Polarité . . . 868
2.3 Interactions de Van der Waals . . . 869
2.4 Les liaisons hydrogène . . . 871
2.5 Les solides ioniques . . . 871
3 Mise en évidence expérimentale des liaisons chimiques . . . 871
3.1 Énergie de liaison . . . 872
3.2 Température de fusion . . . 872
3.3 Dissolution . . . 873

Introduction

Jusqu'ici, nous avons vu que la matière était uniquement constituée d'atomes et de molécules elles-mêmes composées d'atomes. Si on prend comme exemple la molécule d'eau H_2O, constituée de deux atomes d'hydrogène et un atome d'oxygène, on se doute qu'il faut qu'il y ait des interactions entre les atomes pour que la molécule existe et soit stable. On a donc besoin de définir une première liaison entre les différents atomes pour caractériser notre molécule.

Si l'on continue avec notre exemple de l'eau et qu'on la regarde sous forme solide à l'échelle macroscopique, on sait qu'elle est constituée d'une multitude de molécules d'eau qui interagissent entre elles à l'échelle microscopique pour que la glace soit stable. On a donc besoin d'une nouvelle liaison entre les molécules pour expliquer l'existence de la glace.

Avec ces deux exemples simples, on voit la nécessité de définir la notion de liaison chimique.

Définition : Une **liaison chimique** est l'attraction **durable** à **courte distance** entre atomes, molécules ou ions pour former un composé chimique.

Voyons comment ces liaisons chimiques influent sur les propriétés de la matière.

On place la partie "construction du tableau périodique et couche électronique" en prérequis.

1 Des atomes aux molécules

Intéressons nous à cet exemple d'introduction sur l'eau, et regardons comment, à partir d'atomes, on peut créer des molécules.

1.1 Liaison covalente

Commençons par définir la liaison qui va nous intéresser ici, la **liaison covalente**.

La liaison covalente est la liaison dans laquelle deux atomes se partagent deux électrons afin de former un **doublet** d'électrons dit **liant**.

Avec cette définition seule, on a l'impression qu'on peut former une liaison covalente entre n'importe quel atome existant. Cependant, la liaison covalente doit obéir à certaines règles, et nous avons besoin pour cela de remonter à la structure électronique des atomes et au tableau périodique des éléments.

Le tableau de Mendeleïev classe les atomes selon leur numéro atomique qui correspond à la répartition des électrons autour du noyau. Voyons quelques exemples de structure électroniques d'atomes simples.

Elément	Configuration électronique	Nombre d'électrons de valence manquants pour être stable
H	$1s^1$	1
C	$1s^2 2s^2 2p^2$	4
O	$1s^2 2s^2 2p^4$	2

Avec ces différents exemples, on peut donner la règle la plus importante pour former une liaison covalente. Le **nombre d'électrons manquants** correspond au n**ombre de liaisons covalentes** formées par l'atome pour **être stable**. La règle générale de remplissage que nous venons de voir, on peut la ramener à ce qui a été vu en Seconde : la règle de l'octet et du duet !

Règle du duet et de l'octet : Au sein d'une molécule, les atomes tendent à compléter leur couche électronique externe pour acquérir la structure électronique d'un gaz noble qui possède un duet (Hélium) ou un octet (Néon) d'électrons sur sa couche externe.

Reprenons notre exemple de l'eau :

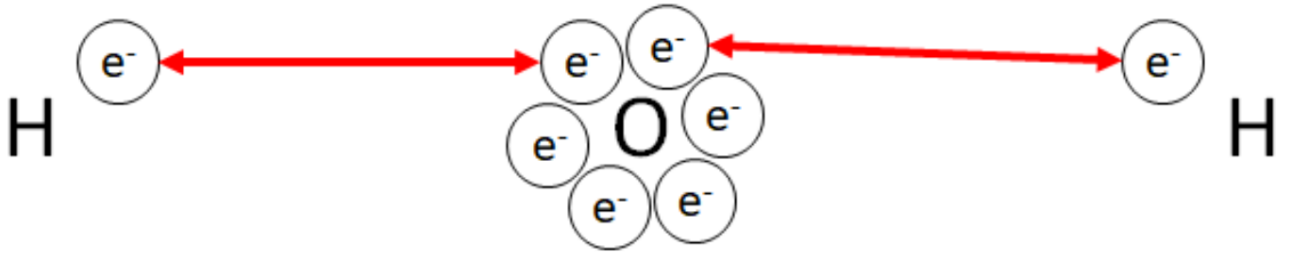


FIGURE 14.1 – Première idée de la molécule d'eau et de la notion de liaison. Les liaisons sont en fait le partage d'électron.

Nous avons ici une première représentation de la formation de la molécule d'eau. Les liaisons covalentes, représentées par les flèches rouges, se forment entre un des électrons de valence de l'atome d'oxygène et l'électron de valence de l'atome d'hydrogène. L'atome d'oxygène forme donc deux liaisons covalentes et chaque atome d'hydrogène en forme une : on retrouve bien notre condition précédente sur la stabilité des atomes.

Ordres de grandeur

- Une liaison covalente entre deux hydrogènes fait 110 pm. Une entre deux carbones fait 154 pm. La distance qui sépare deux atomes dans une liaison covalente est de l'ordre de leur diamètre, d'où le *à courte distance* dans la définition.
- L'énergie développée est de l'ordre de 100 à 1100 kJ/mol, que l'on va comparer après aux autres types de liaisons. Ça peut paraître abstrait comme ça, mais c'est très fort, et ça assure la cohésion des molécules, d'où le terme *durable* dans la définition.

Maintenant on comprend à peu près ce qu'il se passe, mais le dessin que l'on a effectué n'est pas très satisfaisant. On va regarder comment formaliser ça, à l'aide de la structure de Lewis.

1.2 Structure de Lewis (1916)

La structure de Lewis, c'est la représentation en 2D de la structure électronique des molécules. On va représenter sur une feuille la molécule. Pour se faire on va représenter les atomes par leurs symboles, et les agencer selon la forme de la molécule. Elle doit suivre deux règles :

- Le symbole de l'élément donne le noyau et les électrons de coeur
- Les électrons de valence sont représentés par des points (si ils sont seuls) ou des traits (et alors il y en a deux)

Exemple détaillé de l'eau

Faire la molécule d'eau en modèle moléculaire.

La molécule d'eau c'est ce truc. Regardons les différentes étapes.

- **Étape 1 :** chercher la configuration électronique pour déterminer le nombre d'électrons de valence de chaque atome et la règle qu'il doit respecter.
  O : $1s^2 2s^2 2p^4$, $6e^-$ de valence, octet. H : $1s^1$, 1 e^- de valence, duet.
- **Étape 2 :** Trouver le nombre de liaisons à former.
  O : octet, donc 2. H : duet, donc 1.

- **Étape 3 :** Placer les doublets liants

- **Étapes 4 :** Placer les électrons qui restent, ici sous forme de doublet. Ils sont dit **Non Liants**.
  Ici l'oxygène à deux doublets non liants car il lui reste 4 électrons tout seuls.

Liaisons multiples

Des liaisons multiples sont possibles, comme dans la molécule de O_2 dioxygène. Comme O doit former deux liaisons pour être stable, quand on met deux oxygènes ensemble, ils forment la liaison ensemble.

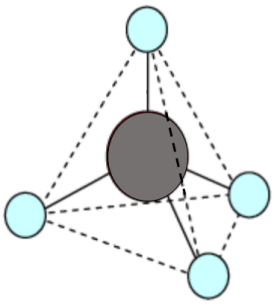
On parle alors de **Liaison Double**, voir parfois de liaisons triples.

Et la géométrie en 3D ?

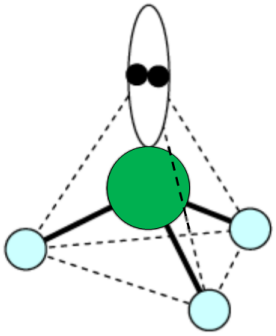
1.3 Géométrie des molécules

La géométrie prend en compte la **répulsion électrostatique** entre les doublets due à la force de Coulomb. Cette nouvelle information implique que les doublets d'électrons, **liants et non liants**, **s'écartent au maximum les uns des autres**. Voyons ici les géométries caractéristiques à connaître et reconnaître dans des molécules simples inconnues (pensez à utiliser des modèles moléculaires)

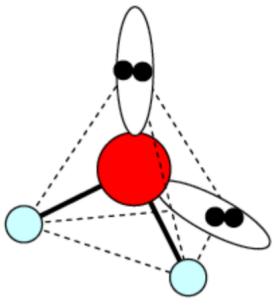
- La géométrie de base : **tétrahédrique**. C'est la géométrie du méthne CH4. L'atome central de Carbone est lié à 4 hydrogènes, et toutes les liaisons se repoussent le plus possible. Elles se mettent donc comme ça : (109.47°)



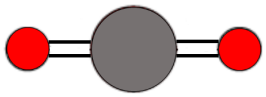
- On enlève une liaison pour mettre un doublet non liant : la géométrie **Pyramidale à base triangulaire**. C'est la géométrie de la molécule d'ammoniac, NH3. Le doublet non liant repousse les liaisons autant que s'il en était une, donc en fait on remplace juste une liaison par un doublet non liant.



- On enlève ENCORE une liaison pour mettre un doublet non liant : la géométrie **coudée**. C'est la géométrie de la molécule d'eau (à 120°) :



- Et ma préférée, on fait deux doubles liaisons, c'est la géométrie **linéaire**. Il s'agit de la géométrie de la molécule de CO2. Pas de doublet non liant, on se repousse au maximum, et paf :



On sait maintenant comment les atomes se lient entre eux pour former des molécules. Cependant, on est encore loin de l'échelle du solide macroscopique, et il faut maintenant s'intéresser aux liaisons inter-moléculaires.

2 Des molécules aux solides

2.1 Électronégativité

On a vu que les liaisons covalentes entre atomes étaient un partage d'électron. Cependant, ce partage n'est pas tout le temps équitable et certains atomes attirent plus les électrons que d'autres.

On appelle **électronégativité** la capacité d'un atome à attirer les électrons vers lui. On la note χ.

Pour comparer les électronégativités de différents atomes, on utilise en général **l'échelle de Pauling** (Prix nobel 1964). Avec cette échelle, on remarque que l'électronégativité augmente quand :

- on se déplace de gauche à droite dans la classification périodique
- on se déplace de bas en haut dans la classification périodique
- les gaz nobles ont une électronégativité nulle puisqu'ils ne forment pas de liaisons covalentes (en réalité on peut quand même définir une électronégativité pour le krypton et le xénon par exemple, donc les électrons de valence sont assez loins et peu attachés au noyau que des liaisons, très instables, sont possibles)

Ainsi, le francium a l'électronégativité la plus basse, $\chi_{\mathrm{Fr}} = 0.7$ tandis que le fluor a l'électronégativité la plus élevée, $\chi_{\mathrm{F}} = 3.98$

H 2,2																He
Li 0,98	Be 1,57											B 2,04	C 2,55	N 3,04	O 3,44	F 3,98	Ne
Na 0,93	Mg 1,31											Al 1,61	Si 1,9	P 2,19	S 2,58	Cl 3,16	Ar
K 0,82	Ca 1	Sc 1,36	Ti 1,54	V 1,63	Cr 1,66	Mn 1,55	Fe 1,83	Co 1,88	Ni 1,91	Cu 1,9	Zn 1,65	Ga 1,81	Ge 2,01	As 2,18	Se 2,55	Br 2,96	Kr
Rb 0,82	Sr 0,95	Y 1,22	Zr 1,33	Nb 1,6	Mo 2,16	Tc 2,1	Ru 2,2	Rh 2,28	Pd 2,2	Ag 1,93	Cd 1,69	In 1,78	Sn 1,96	Sb 2,05	Te 2,1	I 2,66	Xe 2,6
Cs 0,79	Ba 0,89	*	Hf 1,3	Ta 1,5	W 1,7	Re 1,9	Os 2,2	Ir 2,2	Pt 2,2	Au 2,4	Hg 1,9	Tl 1,8	Pb 1,8	Bi 1,9	Po 2	At 2,2	Rn
Fr 0,7	Ra 0,9	**	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Uut	Fl	Uup	Lv	Uus	Uuo

FIGURE 14.2 – Échelle de Pauling

Que se passe-t-il au niveau d'une liaison covalente entre deux atomes d'électronégativité différente ?

2.2 Polarité

Lorsque deux atomes d'électronégativité différente partagent des électrons pour former une liaison covalente, le partage n'est pas équitable : les électrons seront plus proches de l'atome de plus électronégatif. La liaison covalente n'est alors plus symétrique, elle devient **polarisée**.

Reprenons comme exemple la molécule d'eau. L'oxygène ($\chi_O = 3.44$) est plus électronégatif que l'hydrogène ($\chi_H = 2.2$) donc les électrons de la liaison O-H seront plus proches de l'oxygène que de l'hydrogène. L'oxygène va alors posséder un excès d'électrons et donc avoir une **charge partielle** $\delta-$ tandis que les hydrogènes auront un défaut d'électrons et donc avoir une charge partielle $\delta+$.

La liaison O-H est donc polarisée.

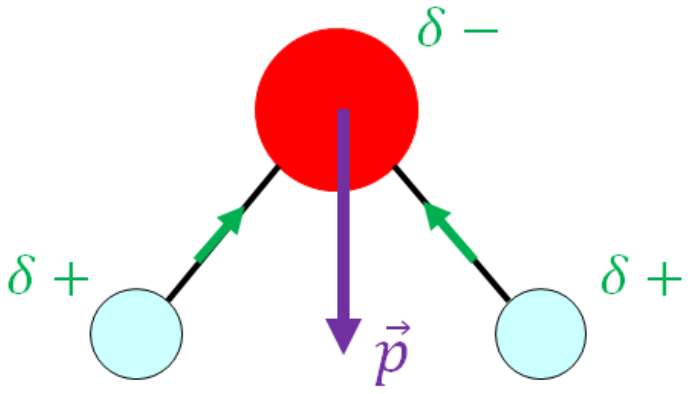


FIGURE 14.3 – Polarisation de la molécule d'eau.

Pour une molécule donnée, on a donc un barycentre de charges partielles $\delta-$ et de charges partielles $\delta+$. Si les deux barycentres ne sont pas confondus, la molécule est dite **polaire**. Elle peut être considérée comme un dipôle permanent avec un moment dipolaire $\vec{p}$ exprimé en C·m qui traduit à quel point la polarité de la molécule est forte. On peut également voir ça en sommant les moments dipolaires de chaque liaison et en obtenant une somme non nulle.

À l'échelle de la molécule, on utilise cependant une autre unité pour $\overrightarrow{p}$: le Debye D qui vaut $3.3 \cdot 10^{-30}$ C·m. Par exemple, la molécule d'eau est polaire et possède un moment dipolaire $\|\overrightarrow{p}\| = 1.85$ D.

Attention : Il est tout à fait possible qu'une molécule présente des liaisons polarisées **sans pour autant être polaire** !!! En effet, si les barycentres des charges partielles négatives et positives sont confondus, la molécule ne sera **PAS** polaire. On peut aussi comprendre ça en sommant les moments dipolaires de chaque liaison et en obtenant une somme nulle.

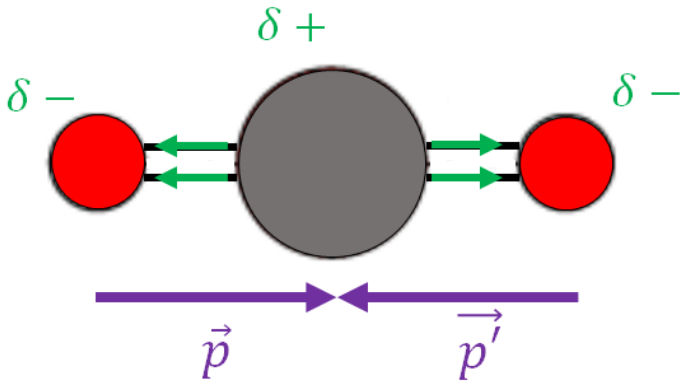


Figure 14.4 – La molécule de dioxyde de carbone n'est pas polaire.

Par exemple , la molécule de CO_2 présente des liaisons polarisées car l'oxygène est plus électronégatif que le carbone. Cependant, la somme des moments dipolaires de chaque liaison est nulle donc cette molécule n'est pas polaire.

Les molécules peuvent donc présenter des charges partielles dues aux différences d'électronégativité des atomes la constituant. On va voir que ces charges sont fondamentales dans la formations de nouvelles liaisons chimiques entre molécules.

2.3 Interactions de Van der Waals

On a vu que les molécules polaires étaient des dipôles électrostatiques permanents. Elles peuvent donc interagir entre elles via des interactions électrostatiques.

Par exemple, l'oxygène d'une molécule d'eau présente une charge partielle négative et est donc attirée par un des hydrogènes d'une autre molécules d'eau qui présente une charge partielle positive.

Cette interaction attractive entre dipôles permanents, *i.e.* entre molécules polaires définit le premier type d'interaction de Van der Waals : **l'interaction de Keesom**. Son énergie est de quelques kJ/mol, ce qui est bien plus faible qu'un liaison covalente qui est entre 100 et 1100 kJ/mol.

Cependant, les interactions de Van der Waals ne se limitent pas aux molécules polaires. En effet, une liaison covalente à la base non polarisée peut se polariser pendant un cours instant et il alors est possible de définir un moment dipolaire **instanté** pour une molécule apolaire, que l'on considère comme un **dipôle instantané**.

Par exemple, la molécule de diiode n'est pas polarisée puisque la seule liaison qui la forme est entre deux atomes d'iode. Cependant, les nuages électroniques des iodes peuvent se déformer à un instant donné et ainsi polariser la liaison.

Il existe donc temporairement une interaction électrostatique entre deux dipôles instantanés. Cette interaction définit le second type d'interaction de Van der Waals : **l'intercation de London**. Son énergie est entre 4 et quelques dizaines de kJ/mol, ce qui en fait la plus forte des interactions de Van der Waals même si ça reste faible comparé aux liaisons covalentes.

Remarque

Il peut paraître étonnant que l'interaction de London soit la plus forte des interactions de Van der Waals. Cela s'explique par le fait que cette interaction a lieu partout sur une molécule contrairement aux autres interactions de Van der Waals.

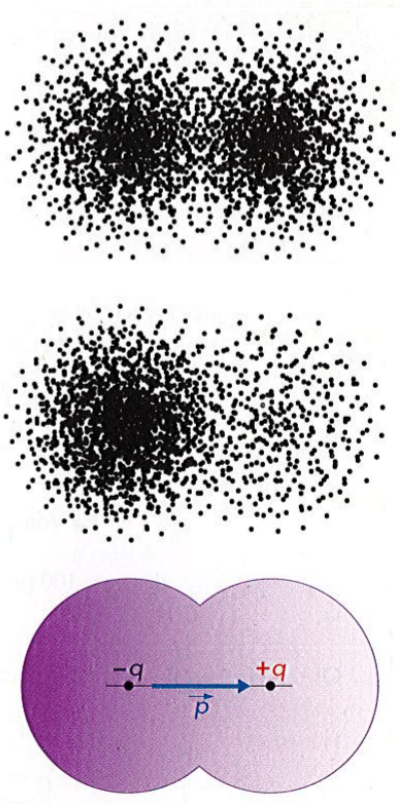


FIGURE 14.5 – Polarisation instantanée du diiode.

Enfin il existe un troisième type d'interaction de Van der Waals entre un dipôle permanent et un dipôle instantané : **l'interaction de Debye**. Son énergie est inférieure au kJ/mol, donc c'est la plus faible des interactions de Van der Waals.

Ces 3 types d'interactions de Van der Waals permettent à la matière de se structurer au delà de l'échelle de la molécule et de former des **solides moléculaires**, comme par exemple la glace d'eau composée de molécules d'eau.

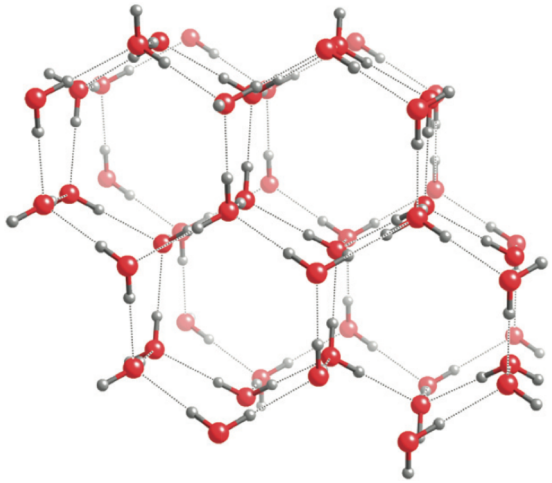


FIGURE 14.6 – Polarisation de la molécule d'eau.

Il existe cependant un autre type de liaison intermoléculaire.

2.4 Les liaisons hydrogène

Il existe certaines molécules pour lesquelles on ne peut comprendre la force des interactions qu'avec les interactions de Van der Waals, *i.e.* qu'avec la donnée du moment dipolaire.

On observe ce phénomène lorsque la molécule présente une atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif, comme par exemple l'azote ou l'oxygène. En effet, une interaction attractive se développe entre le doublet non liant d'un atome électronégatif et l'atome d'hydrogène lié à un atome électronégatif.

On appelle cette interaction une **liaison hydrogène**. Elle n'implique que les atomes d'hydrogène dont la petite taille et la tendance à se polariser positivement permet une interaction assez forte avec un atome électronégatif voisin. Son énergie est en effet de l'ordre de 50 kJ/mol donc en général supérieure à celle d'une interaction de Van der Waals (mais du même ordre de grandeur).

Les liaisons covalentes puis les interactions de Van der Waals et éventuellement les liaisons hydrogène expliquent comment créer à l'échelle macroscopique certains solides. Cependant, certaines solides sont créés autrement...

2.5 Les solides ioniques

Dans ce type de solide, la liaison chimique d'intérêt est radicalement différente de celles vues précédemment.

En effet, deux ions de charges opposées s'attirent et interagissent via des interactions électrostatiques que l'on appelle des **liaisons ioniques**.

Il est donc possible d'avoir une organisation structurée de cations et d'anions dans l'espace et donc de former un **solide ionique**. L'énergie d'une liaison ionique est de l'ordre de 100 kJ/mol donc un solide ionique est plus stable qu'un solide moléculaire.

Un exemple célèbre de solide ionique est celui du chlorure de sodium, plus connu en tant que sel de table. Les charges des anions Cl^- s'annulent deux à deux avec celles des cations Na^+, ce qui fait que le solide ionique est électriquement neutre.

Dans ces deux premières parties, nous avons vu l'établissement de nombreuses liaisons chimiques. Liaison covalente, interaction de Van der Waals et liaison ionique permettent d'expliquer la création des molécules et des solides du quotidien. Pour finir cette leçon, nous allons tenter de caractériser expérimentalement ces liasons.

3 Mise en évidence expérimentale des liaisons chimiques

Pour caractériser ces liaisons, la méthode la plus simple est de les détruire ! En effet en les détruisant, on va pouvoir mesurer l'énergie qu'elles libèrent. Commençons par les liaisons covalente.

3.1 Énergie de liaison

Estimation d'une énergie de liaison par calorimétrie

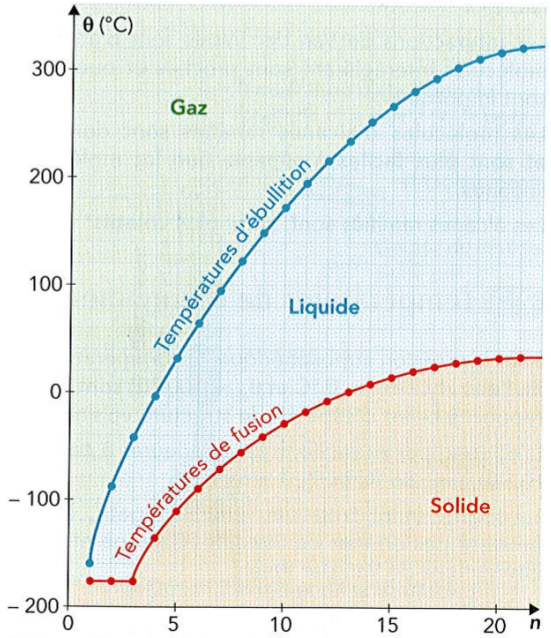
✍ Le site web en biblio ⏲

Matériel : Calorimètre, thermomètre, eau, thermoplongeur, générateur, amperemetre, voltmetre, balance.

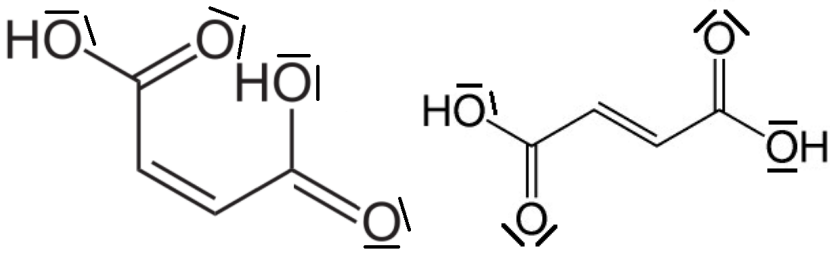
3.2 Température de fusion

Étudions l'influence de la présence de liaisons intramoléculaire sur la température de fusion d'un composé. Plus le composé fait des liaisons avec ses voisins, plus il reste avec eux.

Commençons par regarder la température de fusion des Alcanes. Lorsque le nombre d'atomes de carbone représenté en abscisse augmente dans le squelette carboné, la température de fusion de l'alcane augmente. Ceci peut s'expliquer grâce aux interactions de Van der Waals : celles-ci augmentent lorsque le nombre d'atomes dans un molécule augmente. Il faut alors fournir plus d'énergie pour casser les interactions intermoléculaires, d'où une augmentation de la température de fusion. Voici un premier exemple de l'influence des liaisons chimiques (ici les interactions de Van der Waals) sur les propriétés macroscopiques des solides.



Regardons maintenant le cas des acides maléiques et fumariques. Le premier fond à 131°C, le deuxième à 287°C. On va regarder cela au Kofler. C'est les mêmes, à une rotation près (diastéréoisomères)



T fusion des acides fumariques et maléiques

✍ ma tête ⏲ 3mn

Tu sais quoi faire.

Si T>T tabulé, c'est parce que l'échantillon est humide.

Comment peut-on expliquer cette différence de température de fusion entre des molécules aussi proches ? Si on regarde plus précisément la géométrie des molécules, on remarque que l'acide maléique possède un atome d'hydrogène avec une charge partielle $\delta+$ (car lié à un atome d'oxygène plus électronégatif que lui) à proximité d'un atome d'oxygène possédant une charge partielle δ- (car lié à un atome de carbone moins électronégatif que lui) et deux doublets non liants. Il peut réaliser des liaisons hydrogènes.

On peut alors expliquer les différences de température de fusion dans les deux acides. En effet, les deux acides peuvent interagir par interaction de Van der Waals et par liaison hydrogène intermoléculaire. Cependant, une liaison hydrogène intramoléculaire est également présente dans l'acide maléique : l'atome d'hydrogène impliqué dans cette liaison hydrogène intramoléculaire est donc moins disponible pour former des liaisons hydrogène intermoléculaires. La température de fusion est donc plus faible pour l'acide maléique puisqu'il y a moins de liaisons intermoléculaires formées.

3.3 Dissolution

Dissolution des acides

✍ ⏲

Les liaisons H, c'est vraiment incroyable. Plus précisément, on met les deux acides en même quantité dans un même volume d'eau, yen a un qui se dissous, pas l'autre

Conclusion

Dans cette leçon, nous avons pu voir à travers de nombreux exemples l'omniprésence des liaisons chimiques. Leurs caractéristiques propres donnent leurs propriétés aux molécules, solides ou tout autre composé chimique. Pour aller plus loin, on peut alors se demander comment peut-on utiliser les différentes propriétés des liaisons chimiques à notre escient pour synthétiser des composés chimiques. C'est tout le principe de la chimie organique et de la stratégie de synthèse dont cette leçon sert d'introduction.

Liaison	Energie de liaison	Longueur de liaison
Liaison covalente	$\sim 150-500 kJ.mol^{-1}$	Courte (2 atomes voisins)
Liaison ionique	$\sim 100 kJ.mol^{-1}$	Courte (2 atomes voisins)
Liaison hydrogène	$\sim 10 kJ.mol^{-1}$	Moyenne (2 atomes de mêmes molécules ou non)
Interactions de Van der Waals	$\sim 1 kJ.mol^{-1}$	Longue (2 atomes de molécules différentes)

LC 15

Solvants

Niveau : CPGE (PCSI/MPSI)

Bibliographie

- ✍ *Chimie organique expérimentale* **Blanchard, Fosset *et al.***
- ✍ *Florilège de chimie pratique* **Daumarie**
- ✍ *Chimie tout-en-un PCSI* **Fosset**

Cannizzaro

Coefficient de partage du diiode

Prérequis

- ➢ Forces inter-moléculaires (H, VdW)
- ➢ Acides/Bases
- ➢ Arrhénius
- ➢ Mécanisme réactionnel
- ➢ Stéréoisomérie

Expériences

- ☕ Coefficient de partage du I2 eau-cyclo
- ☕ Hydrolyse du chlorure/bromure de tertiobutyle
- ☕ Catalyse par transfert de phase

1 Propriétés des solvants . . . 876
1.1 Mode d'action typique d'un solvant . . . 876
1.2 Moment dipolaire et pouvoir ionisant . . . 877
1.3 Perméabilité relative et pouvoir dissociant . . . 877
1.4 Proticité . . . 878
1.5 Caractère acide ou base . . . 878
1.6 Le cas de l'eau . . . 878
1.7 Classification, règle de miscibilité . . . 879
2 Utilisations des solvants . . . 879
2.1 Coefficient de partage . . . 879
2.2 Stratégie de synthèse organique . . . 880
2.3 Cinétique . . . 882
2.4 Solvants et chimie verte . . . 883

Introduction

Dans la vie de tous les jours, les solvants sont courants (dissolvant de vernis à ongles, dégraissage pour le ménage etc).

En chimie de laboratoire, il a un rôle majeur : il permet la rencontre des molécules qui y sont dissoutes menant à la réaction chimique + purification, isolement ou caractérisation d'un produit. Dans cette leçon, élaborée au niveau de la classe de PCSI, nous allons aborder la question de l'utilisation et du choix des solvants lors de réactions chimiques.

Afin d'éviter que la confusion s'installe laisser moi directement préciser que le terme générique de dissolvant, que vous avez probablement eu à l'esprit en entendant le terme de solvant ne représente qu'une fraction de l'utilisation des solvants qui est celle de dissoudre pour éliminer des composés. Les solvants qui vont nous intéresser, dont le plus évident est probablement l'eau, peuvent être définis de la manière suivante :

Définition : Un solvant est une substance, liquide ou supercritique à sa température d'utilisation, qui a la propriété de dissoudre, de diluer ou d'extraire d'autres substances sans les modifier chimiquement et sans lui-même se modifier.

On peut se rendre compte de l'importance de la question avec une manipulation assez simple :

Migration du Diiode en phase Orga

✍ https://youtu.be/2x7PurMQ_RY?t=24 30s

Matériel : Deux tubes à essai, du diiode

Dans le premier tube : du diiode en phase aqueuse, couleur orangée.

Dans le second, du diode en phase aqueuse et du cyclo qui surnage.

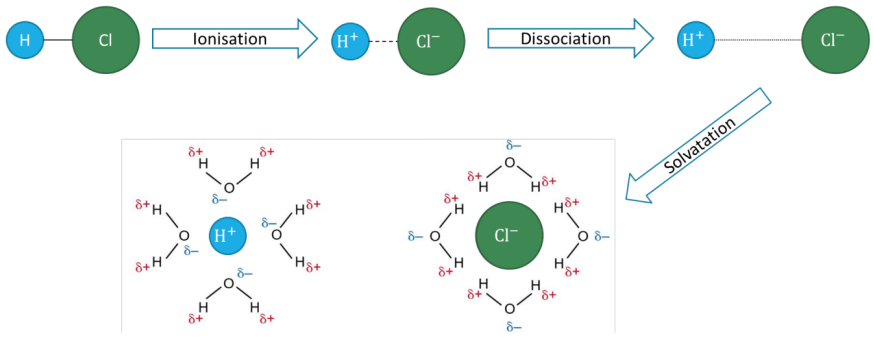
On secoue le tube numéro 2, et magie, le cyclo passe en phase acqueuse, c'est une extraction liquide liquide.

Les questions soulevées sont "pourquoi ?, quels sont les processus mis en jeu ?". En règle générale on voit que la règle "les semblables dissolvent les semblables" est vraie, mais nous allons ici l'expliquer.

1 Propriétés des solvants

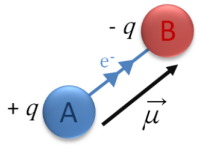
1.1 Mode d'action typique d'un solvant

Le mode d'action d'un solvant peut se généraliser simplement à quelques étapes. Si par exemple on veut solubiliser du HCl, on doit d'abord l'ioniser, c'est à dire rompre la liaison covalente entre les deux atomes. Une fois ionisée, il faut séparer la molécule et dissocier ses composants, afin d'écranter l'attraction électrostatique entre eux. Et enfin, il faut les solvater, c'est à dire les entourer de molécules de solvant.



1.2 Moment dipolaire et pouvoir ionisant

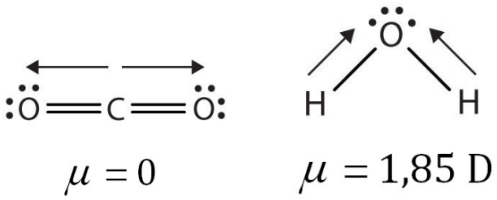
Définition : la polarité d'un solvant est la traduction macroscopique de la propriété microscopique de ses molécules d'avoir un moment dipolaire permanent.



$$\vec{\mu} = q\,\vec{AB}$$

De par les interactions de **Keesom** (perma-perma) les solvants polaires solubilisent bien les espèces qui ont un dipôle permanent (l'énergie des interactions étant entre 100 et 1100 kJ/mol). On peut même avoir carrément une ionisation des molécules très polarisables (par exemple HCl).

À l'inverse un solvant apolaire comme le cyclohexane solubilise plutôt les molécules apolaires. Dans ce cas certaines interactions de London (induit-induit) entre molécules de I2 sont remplacées par des interactions I2-cyclohexane.



1.3 Perméabilité relative et pouvoir dissociant

La force électrostatique exercée par une particule chargée sur une autre particule chargée s'écrit

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$$

Ainsi, deux ions de charge opposée s'attirent, mais si on a un ϵ_r est très grand, cette attraction est faible et on peut donc disperser les ions plus facilement. On dit qu'on les *dissocie*.

> Le **pouvoir dispersant/dissociant** d'un solvant est sa faculté à séparer les ions d'une solution. Il est relié à sa constante diélectrique.

Si $\epsilon_r > 40$, on dit que le solvant est dispersant. À l'inverse, si $\epsilon_r < 20$, on le dit non dispersant, et les paires d'ions comme HCl restent ensembles.

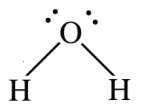
Par exemple, l'eau a une constante diélectrique de 80, ainsi une molécule comme HCl se retrouve fortement dissociée. On trouve dans la solution majoritairement des ions libres H^+ et Cl^- (en réalité on a des ions H_3O^+).

Ce coefficient traduit de manière méso/macroscopique le fait que microscopiquement, les molécules d'eau s'agglutinent autour des ions et écrantent l'attraction électrostatique.

Remarque

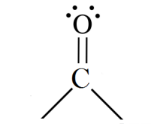
La polarité et le pouvoir dissociant ne sont pas proportionnels.

Par exemple, l'acétone est plus polaire que l'eau, mais possède une permittivité diélectrique plus faible. Elle est donc plus ionisante que l'eau, mais moins dissociante.



$\mu = 1,85$ D

$\varepsilon_r = 78$



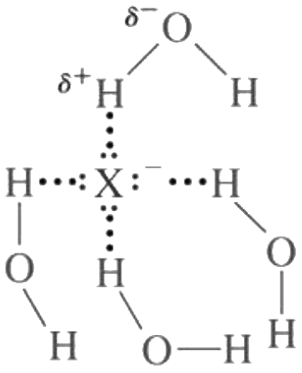
$\mu = 2{,}88$ D

$\varepsilon_r = 21$

1.4 Proticité

Un solvant est dit **protique** si il peut réagir avec ses solutés en formant des **liaisons hydrogène**. La quantité qui quantifie la proticité d'un solvant et son pKa. Plus il est acide, plus il est protique.

Un solvant protique est par voie de conséquence polaire. L'éthanol par exemple est très soluble dans l'eau de par sa fonction alcool qui peut réaliser des liaisons hydrogènes avec l'eau.



1.5 Caractère acide ou base

Un solvant protique est caractérisé par son équilibre d'autoprotolyse.

Par exemple, on peut citer l'eau ($2H_2O{=}H_3O^+ + HO^-$) ou encore l'ammoniac ($2NH_3 = NH_4+ + NH_2^-$).

Dans ces solvants, les échanges de protons se font toujours entre les formes acide ou basique du soluté et les espèces issues de l'autoprotolyse du solvant. Ainsi, l'existence de certains composés en solution est conditionnée par le type de solvant utilisé.

Ainsi HCl n'existe pas dans l'eau, mais existe dans l'acide éthanoïque.

1.6 Le cas de l'eau

L'eau, comme on l'a vu tout au long de ce bref exposé, est un solvant polaire, du fait que les liaisons OH sont polarisées, et est un solvant protique, du fait qu'il a deux H portant des $\delta+$. Il est de plus très dispersant, ce qui lui permet de très bien solubiliser les produits comme HCl.

1.7 Classification, règle de miscibilité

	Formule	Protique polaire	Aprotique polaire	Aprotique apolaire
Eau		✓	×	×
Cyclohexane		×	×	✓
Éthanol		✓	×	×
Dichlorométhane		×	✓	×

Solvant	μ(D)	ϵ_r	Type
Cyclohexane	0	1.0	Apolaire
Toluène	0.4	2.4	Apolaire
Éther diéthylique	1.1	5.7	Polaire aprotique
Dichlorométhane	1.5	8.9	Polaire aprotique
Propanone	2.7	20.7	Polaire aprotique
Acide éthanoïque	1.5	6.2	Polaire protique
Éthanol	1.7	24.3	Polaire protique
Eau	1.8	78.5	Polaire protique

Table 15.1 – Classification de divers solvants usuels.

Un solvant polaire est plus miscible avec un solvant polaire, et inversement. Sinon ils ont tendance à rester entre eux parce que c'est énergétiquement plus favorable.

Les propriétés que l'on vient de définir permettent de prévoir les effets d'un solvant sur un soluté. Nous allons voir maintenant qu'il est possible de mettre à profit ces propriétés lors d'une synthèse.

2 Utilisations des solvants

2.1 Coefficient de partage

L'expérience montrée en introduction a permis de démontrer qu'un soluté en présence de deux solvants pouvait se retrouver dans des proportions différentes dans ces solvants. Dans cette partie, on va déterminer quantitativement ces proportions.

Prenons comme exemple l'équilibre de partage du diiode entre l'eau et le cyclohexane :

$$I_{2\ \text{eau}} \rightleftharpoons I_{2\ \text{cyclo}}$$

On définit la **coefficient de partage** comme étant la constante d'équilibre de cette réaction :

$$P = \frac{[I_2]_{\text{cyclo}}}{[I_2]_{\text{eau}}}$$

Cette constante traduit l'affinité d'un soluté par rapport à un solvant organique relativement à l'eau.

Mesure du coefficient de partage du diiode

✍ Florilège de chimie pratique, Daumarie ⏲ 5 min

Dissoudre 1 g de diiode dans 200 mL d'eau. Une grande partie du diiode ne devrait normalement pas s'être dissoute. Ajouter 20 mL de cylcohexane. La phase aqueuse jaune pâle devient incolore et la phase organique devient fushia.

Extraire la phase aqueuse et la doser avec du thiosulfate de sodium à 0.1 M. On a la réaction :

$$2S_2O_3^{2-} + I_2 \rightleftharpoons 2I^- + S_4O_6^{2-}$$

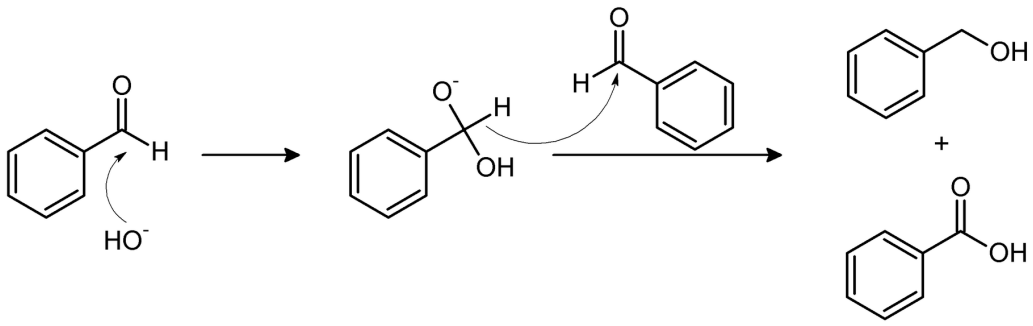
En déduire la quantité de diiode dans la phase aqueuse.

On connaît la quantité de diiode totale, on connaît la quantité de diiode en phase aqueuse donc on connaît la quantité de diiode en phase organique. En déduire le coefficient de partage après avoir converti ces quantités en concentrations.

On dose le I_2 au thiosulfate pour quantifier le coefficient de partage. On trouve (normalement) que le diiode est 8 fois plus présent dans le cyclohexane que dans l'eau, ce qui est prévisible puisque le diiode est apolaire comme le cyclohexane.

2.2 Stratégie de synthèse organique

On vient de voir à quel point un soluté pouvait interagir différemment avec deux solvants différents. On se propose maintenant d'illustrer cela dans un synthèse organique. Pour cela, on utilise comme exemple la réaction de Cannizzaro :



Réaction de Cannizzaro

✍ Blanchard ⏲

Faire réagir du benzaldhéhyde en présence de diéthyléther (solvant apolaire aprotique) et de soude.

2.2.1 Séparation : Extraction liquide-liquide

L'extraction liquide-liquide se base sur la différence de solubilité d'un soluté avec une phase aqueuse et une phse organique. Le **solvant d'extraction** doit solubiliser le soluté sans être miscible dans le solvant d'origine.

On parle de *lavage* si on fait passer les impuretés dans l'autre phase, et d'*extraction* si on fait passer le produit d'intérêt dans l'autre phase.

Extraction liquide-liquide

✍ Blanchard p301 ⏲ 2 min

Réaliser l'extraction dans une ampoule à décanter de ce qu'on a obtenu en préparation. La phase aqueuse est la plus dense. Récupérer les deux phases dans un erlenmeyer.

En pratique, il faut laver la phase organique avec de l'eau jusqu'à avoir un pH neutre puis éliminer Et_2O par évaporateur rotatif mais on ne le fait pas ici.

La solution aqueuse est fortement basique et l'acide benzoïque est déprotonné. On peut le reprotonner et le faire précipiter par ajout d'un acide fort jusqu'à atteindre un pH proche de 1 tout en refroidissant le milieu avec un bain glacé.

2.2.2 Purification : recristallisation

On est en présence d'un solide avec des impuretés dans une phase liquide. La recristallisation a pour but de purifier le solide. Pour cela, il faut choisir un solvant tel que

- le solide et ses impuretés soient solubles à chaud dans le solvant
- seules les impuretés y soient solubles à froid
- la température d'ébullition des impuretés dans le solvant est inférieure à celle du fusion du solide recristallisé
- le solvant est inerte chimiquement

Ainsi, lorsqu'on ajoute le solvant et qu'on chauffe le milieu réactionnel, le solide et ses impuretés se dissolvent dans le solvant. Ensuite, on laisse le milieu se refroidir et le solide prrécipite de noouveau tandis que les impuretés restent dissoutes dans le solvant.

Recristallisation

✍ Blanchard p302 ⏲ 5 min

Précédemment, on a fait précipiter l'acide benzoïque en ajouter de l'acide fort dans la phase aqueuse jusqu'à avoir un pH proche de 1 tout en refroidissant le milieu.

On se retrouve alors avec des cristaux d'acide benzoïque impurs. On les filtres sur Büchner en les lavant à l'eau froide puis on fait une recristallisation dans une solution aqueuse d'éthanol (1 :5).

2.2.3 Caractérisation : CCM (optionnel)

Une CCM consiste à séparer les constituants d'une solution par différence d'affinité entre une phase fixe (phase stationnaire en aluminium, verre...) recouverte d'une couche mince d'adsorbant (silice, alumine...) et une phase mobile (l'éluant).

La séparation se fait par capillarité de sorte à ce que chaque composé aient un vitesse de migration différente. Ces vitesses dépendent essentiellement des interactions entre le composé et la phase stationnaire et de la solubilité des composés dans la phase mobile.

Le choix de l'éluant est crucial pour avoir un rapport frontal pouvant être exploité quantitativement et est souvent un mélange de deux solvants.

CCM

✍ Blanchard ⏲ 2 min

On effectue deux dépôts de jaune de tartrazine sur 2 plaques de silices distinctes. L'une d'elle est mise à éluer dans une cuve contenant de l'éther de pétrole, l'autre dans de l'acétone. La diérence de rapport frontal met en évidence l'influence du solvant : le colorant migre avec l'acétone qui est un composé polaire, et reste fixe avec l'éther de pétrole, solvant fortement apolaire.

2.3 Cinétique

Nous allons ici montrer le rôle du solvant dans la cinétique d'une réaction.

$$^{t}\mathrm{BuCl} + \mathrm{H_2O} =^{t} \mathrm{BuOH} + \{\mathrm{H^+}, \mathrm{Cl^-}\}$$

La manipulation étant longue, on écrit la réaction bilan, on mentionne que l'on effectue un suivi conductimétrique et on va lancer la manip.

La réaction suit un mécanisme en deux étapes appelé substitution nucléophile monomoléculaire (SN1), suivie d'une déprotonation.

Compétition entre SN1 et SN2 pour les halogénures secondaires, c'est le solvant qui, par stabilisation du carbocation de transition, favorise l'une ou l'autre réaction. Par exemple, le DMSO est un solvant de choix pour les SN2 (et wittig, mais chuuuut). Le programme fait mention des propriétés cinétiques et stéréochimiques des substitutions. On utilise la loi empirique d'Arrhénius pour interpréter les résultats expérimentaux :

$$k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)$$

Ainsi plus l'énergie d'activation est basse, plus la réaction est rapide. Cependant le solvant peut changer l'énergie d'activation comme nous allons le voir !

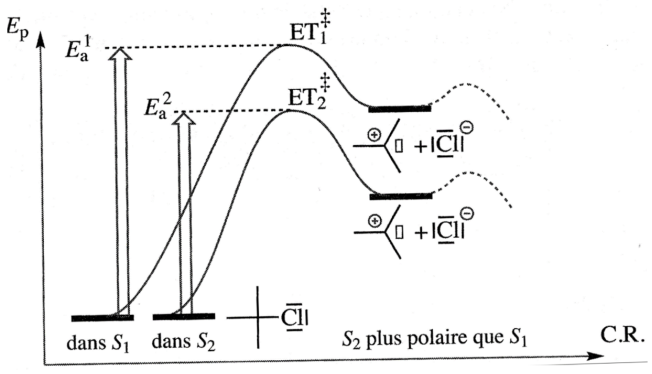


FIGURE 15.1 – Illustration de l'abaissement de l'énergie d'activation d'une SN1 par stabilisation du carbocation intermédiaire

Hydrolyse du bromure/chlorure de tertiobutyle

✍ Florilège de chimie pratique ⏲ 1h+5mn en leçon

Matériel : Conductimètre + acquisition numérique + Bain thermostaté + KCl + acétone + 2-bromo,2-méthylpropane

Le réactif est hydrolysé en 1,1-diméthyléthan-1-ol

Dans un bain thermostaté à 40, faire les courbes de cinétiques dans 3 solutions (45, 40 et 35% en pourcentage massique d'eau), et faire 10 mn d'acquisition par courbe.

En leçon, suivi d'une réaction à 50%

Objectif : relier la cinétique au solvant.

Remarques :

La première étape, cinétiquement déterminante, est une réaction d'ordre 1 par rapport au réactif tBuCl. L'avancement de la réaction obéit donc à l'équation suivante :

$$\xi(t) = \xi_f(1 - e^{-k_1 t})$$

En effectuant un suivi cinétique par conductimétrie, on peut déterminer k_1 pour différentes conditions expérimentales et ainsi étudier l'influence du solvant sur sa valeur.

$$\sigma(t) = \lambda_{H+}[H+] + \lambda_{Cl-}[Cl-] = (\lambda_{H+} + \lambda_{Cl-})\xi(t)$$

2.4 Solvants et chimie verte

Slides sur la chimie verte.

Toujours les mêmes exemples, CO2 supercritique pour la caféine (si P augmente, il est plus solubilisant), utilisation de solvants peu volatils, éviter les solvants trop toxiques pour l'homme/pour l'environnement,...

On peut donner quelques exemples classiques :

• le 2-méthyltétrahydrofurane est un solvant organique apolaire aprotique qui peut replacer le toluène et le THF. Il est issu de sources renouvelables (sucre de cannes).

• Le 1,3-propanediol (synthétisé à partir de glycérol ou de sucre de maïs) est polaire et protique. De plus il est biodégradable et faiblement toxique.

Remarque : Le dichlorométhane est le moins toxique des chlorométhanes.

Conclusion

Technique	Propriété physique
Chromatographie sur couche mince	compétition éluant/substrat
Distillation	utilisation azéotrope éthanol-eau
Électrolyse	mur du solvant
Extraction liquide-liquide	miscibilité et partage
Mécanisme réactionnel	stabilisation IR
Réaction acide/bases	effet nivellement
Recristallisation	différence de solubilité chaud/froid
Spectroscopie	décalage des raies
Titrages	solvatochromie

Ouverture : Les inuences du solvant sur la réaction à laquelle il participe sont nombreux, aussi aurait-on pu évoquer, au même titre que l'impact cinétique, l'eet d'un ajout de solvant inerte sur le déplacement d'un équilibre de réaction, le rôle du solvant comme tampon thermique ou encore l'inuence du solvant sur la sélectivité de la réaction.

LC 16

Classification périodique

Niveau : MPSI/PCSI

Extraits de programmes (MPSI)

- **Architecture et lecture du tableau périodique**
  Relier la position d'un élément dans le tableau périodique à la configuration électronique et au nombre d'électrons de valence de l'atome correspondant.
  Positionner dans le tableau périodique et reconnaître les métaux et non métaux.
  Situer dans le tableau les familles suivantes : métaux alcalins et alcalino-terreux, halogènes et gaz nobles.
  Citer les éléments des périodes 1 à 3 de la classification et de la colonne des halogènes (nom, symbole, numéro atomique).

- **Électronégativité** : Mettre en oeuvre des expériences illustrant le caractère oxydant ou réducteur de certains corps simples.
  Élaborer ou mettre en oeuvre un protocole permettant de montrer qualitativement l'évolution du caractère oxydant dans une colonne.
  Relier le caractère oxydant ou réducteur d'un corps simple à l'électronégativité de l'élément. Comparer l'électronégativité de deux éléments selon leur position dans le tableau périodique.

- **Rayon atomique - Rayon ionique (PCSI)** Interpréter l'évolution du rayon atomique dans la classification périodique en utilisant la notion qualitative de nombre de charge effectif. Interpréter la différence de valeur entre le rayon d'un atome et le rayon de ses ions.

Retour sur la leçon

"Le jury a aimé le principe du plan mais ils ont trouvé qu'il y avait une trop grande place laissée à l'aspect historique et à l'expérience, qui pour cette leçon ne nécessite pas d'être quantitative d'après eux."

"De manière générale, il faut faire pas mal d'histoire des sciences, éventuellement présenter les différentes classifications qui ont été proposées, les avantages et inconvénients (Ce que je ne fais pas ici). Le jury est au courant que c'est une épreuve pauvre en manipulation, mais il faut au moins faire quelques comparaisons des propriétés d'éléments bien choisis. Voilà voilà."

Bibliographie

- ✍ *Chimie Tout-en-un PCSI*, **J'intègre. Fosset, Baudin, Lahitète (FBL)** ⟶ Complet, utilisé pour la lecon
- ✍ *Chimie Tout-en-un MPSI*, **J'intègre. Fosset, Baudin, Lahitète** ⟶ A avoir pour coller au programme
- ✍ *Chimie PCSI*, **Durupthy, Hprépa** ⟶ En complément
- ✍ *www.culturesciences.chimie.ens.fr* ⟶ Pour plus de détails historiques.

Prérequis

- ➢ Isotopes
- ➢ Quantification de l'énergie
- ➢ Nombres quantiques
- ➢ Principe de Pauli
- ➢ Structure électronique
- ➢ Description quantique de l'atome

Expériences

- Solubilité des halogénures d'argent (pas convaincu)
- Sodium dans l'eau : https://youtu.be/uixxJtJPVXk

1 Approche historique . . . 887
1.1 Évolution des classifications . . . 887
1.2 Description du tableau actuel . . . 889
2 Construction quantique du tableau . . . 890
2.1 Niveaux d'énergie et règle de Kleshkovsky . . . 890
2.2 Règle de Hund . . . 891
2.3 Placement des électrons . . . 892
2.4 Exceptions . . . 893
2.5 Retour à la classification . . . 893
3 Propriétés physico-chimiques remarquables . . . 894
3.1 Structure électronique . . . 894
3.2 Électronégativité . . . 895
3.3 Caractère réducteur des alcalins . . . 895
3.4 Rayon atomique et polarisabilité . . . 895
3.5 Gaz rares . . . 896
3.6 Caractère oxydant des halogènes . . . 896
3.7 Acido-basicité des oxydes . . . 896

Introduction

Le tableau périodique des éléments est une des plus belles constructions de la chimie. Construit par une succession d'améliorations des connaissances du 18eme au 20eme siècle, il a survécu à de nombreux changement de paradigmes scientifiques. Nous allons aujourd'hui nous intéresser à sa construction et son fonctionnement, afin de bâtir pierre après pierre une reproduction de cet édifice.

Problématique : quels sont les liens qui unissent théorie, expérimentation et classification.

1 Approche historique

Au cours du 18eme siecle, le nombre d'éléments connus (et la définition d'un élément) est passé de 12 à plus d'une quarantaine. La description presque alchimique des éléments, individuelle et ciblée, n'expliquait aucunement les propriétés chimiques des éléments, et la communauté scientifique a ressenti un besoin de classification et d'ordre.

1.1 Évolution des classifications

192 DES SUBSTANCES SIMPLES.

TABLEAU DES SUBSTANCES SIMPLES.

	Noms nouveaux.	Noms anciens correſpondans.
Subſtances ſimples qui appartiennent aux trois règnes & qu'on peut regarder comme les élémens des corps.	Lumière	Lumière.
	Calorique	Chaleur. Principe de la chaleur. Fluide igné.
	Oxygène	Feu. Matière du feu & de la chaleur. Air déphlogiſtiqué. Air empiréal. Air vital. Baſe de l'air vital.
	Azote	Gaz phlogiſtiqué. Mofete. Baſe de la mofete.
	Hydrogène	Gaz inflammable. Baſe du gaz inflammable.
Subſtances ſimples non métalliques oxidables & acidifiables.	Soufre	Soufre.
	Phoſphore	Phoſphore.
	Carbone	Charbon pur.
	Radical muriatique	Inconnu.
	Radical fluorique	Inconnu.
	Radical boracique	Inconnu.
Subſtances ſimples métalliques oxidables & acidifiables.	Antimoine	Antimoine.
	Argent	Argent.
	Arſenic	Arſenic.
	Biſmuth	Biſmuth.
	Cobolt	Cobolt.
	Cuivre	Cuivre.
	Etain	Etain.
	Fer	Fer.
	Manganèſe	Manganèſe.
	Mercure	Mercure.
	Molybdène	Molybdène.
	Nickel	Nickel.
	Or	Or.
	Platine	Platine.
	Plomb	Plomb.
	Tungſtène	Tungſtène.
	Zinc	Zinc.
Subſtances ſimples ſalifiables terreuſes.	Chaux	Terre calcaire, chaux.
	Magnéſie	Magnéſie, baſe du ſel d'Epſom.
	Baryte	Barote, terre peſante.
	Alumine	Argile, terre de l'alun, baſe de l'alun.
	Silice	Terre ſiliceuſe, terre vitrifiable.

FIGURE 16.1 – La classification de Lavoisier

1.1.1 Les précurseurs

La première classification, empiriquement basée sur les propriétés chimiques des éléments, est celle de Lavoisier (1743-1794). Il a classé dans son *traité élémentaire de chimie* (1789) selon des propriété observables en laboratoires, telles que le caractère acide, ou l'apparence métallique. On y distingue déjà les prémices du tableau moderne, puisque la notion de métal est déjà présente.

Celui qui a eu l'éclair de génie c'est John Dalton (1766-1844) qui quelques années plus tard propose d'utiliser la masse atomique pour trier les éléments. Il utilise la masse de l'hydrogène (qu'il pense être monoatomique) comme référence.

1.1.2 Dmitri Ivanovitch Mendeleïev

La vidéo de e-Penser, de vulgarisation, mais très bien sourcée : https://youtu.be/0lNuTSz6KVM

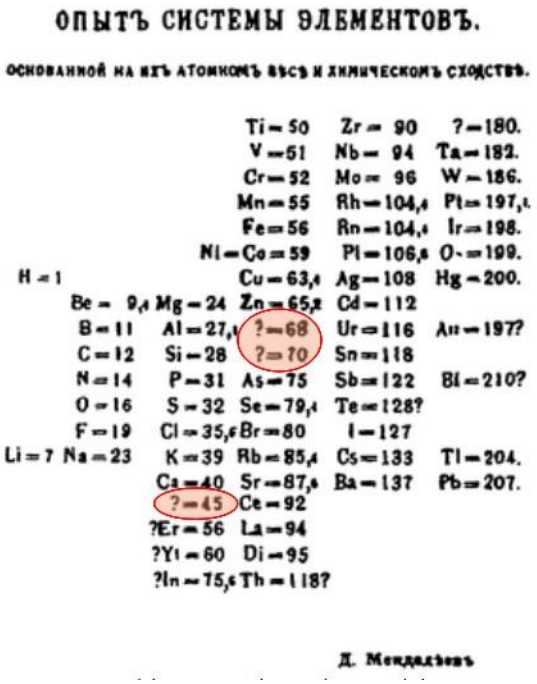
Ses dates : 1834-1907, le tableau : 1869

Dans les années 1860, les chimistes ont fait le rapprochement entre certains éléments et leur propriétés, notamment William Odling et John Newlands ainsi que du russe Dmitri Mendeleïev. Ce dernier se met à la recherche d'une loi générale et périodique, basée sur la masse des atomes. La citation :

Les propriétés des corps simples et composés dépendent d'une fonction périodique des poids atomiques des éléments, pour la seule raison que ces propriétés sont elles-mêmes les propriétés des éléments dont ces corps dérivent.

Ce sont les propriétés des halogènes (avant dernière ligne) et des alcalins (premières) qui lui donnent cette idée, puisque tous les Halogènes font des ions - et tous les alcalins des +, et qu'ils ont tendance à être interchangeables.

Il propose une première classification :



ОПЫТЪ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВЪ.

ОСНОВАННОЙ НА ИХЪ АТОМНОМЪ ВѢСѢ И ХИМИЧЕСКОМЪ СХОДСТВѢ.

			Ti = 50	Zr = 90	? = 180.	
			V = 51	Nb = 94	Ta = 182.	
			Cr = 52	Mo = 96	W = 186.	
			Mn = 55	Rh = 104,4	Pt = 197,1	
			Fe = 56	Ru = 104,4	Ir = 198.	
			Ni = Co = 59	Pl = 106,6	O = 199.	
H = 1			Cu = 63,4	Ag = 108	Hg = 200.	
	Be = 9,4	Mg = 24	Zn = 65,2	Cd = 112		
	B = 11	Al = 27,4	? = 68	Ur = 116	Au = 197?	
	C = 12	Si = 28	? = 70	Sn = 118		
	N = 14	P = 31	As = 75	Sb = 122	Bi = 210?	
	O = 16	S = 32	Se = 79,4	Te = 128?		
	F = 19	Cl = 35,6	Br = 80	I = 127		
Li = 7	Na = 23	K = 39	Rb = 85,4	Cs = 133	Tl = 204.	
		Ca = 40	Sr = 87,6	Ba = 137	Pb = 207.	
		? = 45	Ce = 92			
		?Er = 56	La = 94			
		?Yt = 60	Di = 95			
		?In = 75,6	Th = 118?			

Д. Менделѣевъ

FIGURE 16.2 – La classification du russe barbu (*non Timéo, pas Marx, mais j't'aime bien toi*).

Elle est loin d'avoir la forme qu'on lui connaît, mais tout est là (Sauf les gaz nobles, parce que durs à observer). Il est notable cependant que certains atomes ont un ?, car la classification qu'il a effectué faisait apparaître des trous. Il a également grâce à sa classification prédit que certains corps étaient des corps composés.

Ces prédictions sont ce qui ont fait passer ce tableau dans la postérité, puisque les découvertes successives en accord avec la prédiction de Mendeleïev ont appuyé sa justesse. (exemple : eka-aluminium, ou gallium, découvert du vivant de Dmitri, et très raccord avec ses prédictions !)

1.1.3 Les dernières améliorations

Le tableau a été pofiné au cours du 20eme, avec l'ajout des gaz nobles et la théorisation du numéro atomique (donc l'invention du neutron). C'est cette dernière qui a pavé la voie au classement actuel, et sa résistance voir même sa capacité prédictive qui ont permis que la classification moderne survive et s'enrichisse au passage à la quantique.

Nous allons aujourd'hui nous intéresser à la construction quantique du tableau périodique, et à son rapport aux propriétés chimiques des éléments qui le composent. Mais d'abord, faisons quelques rappels, et attardons nous dans la contemplation de cette merveille de chimie.

1.2 Description du tableau actuel

1.2.1 Rappels de Lycée

Les éléments sont classés par numéro atomique croissant. Le numéro atomique c'est le nombre de protons contenus dans le noyau d'un atome de l'élément. C'est ce qui est caractéristique d'un élément, ainsi on appelera *oxygène* tous les noyaux à 8 protons. Il est à noter qu'il s'agit aussi du nombre d'électrons à mettre autour du noyau pour que la matière soit neutre.

La masse d'un noyau est donnée par la somme de la masse de ses neutrons et de ses protons, *i.e.* la masse de ses *nucléons*. Les différents noyau d'un même élément sont nommés les *isotopes*. Ainsi on retrouve le Carbone 12 (6p, 6n) et le carbone 14 (6p, 8n).

1.2.2 Ce qu'il faut connaître par coeur

Techniquement, votre programme exige que vous connaissiez et sachiez retrouver rapidement les noms de certaines colonnes du tableau, ainsi que tous les éléments dans l'ordre des 3 premières périodes.

Pour ce qui est des trois premières périodes, je me permet de vous donner mes phrases mnémotechniques.

Les 3 premières périodes

1ere : H He, vous me ferez le plaisir de retenir que le premier c'est l'hydrogène et le deuxième l'hélium.

2eme : **Li**li **Bé**cha **B**ien **C**hez **N**otre **O**ncle **F**erdinand **Ne**stor

3eme : **Na**poléon **Mang**e **Al**lègrement **Si**x **P**oulets **S**ans **Cl**aquer d'**Ar**gent. (mais c'est l'**argon** ! !)

Analysons rapidement les colonnes que vous devez connaître :

- colonne 1 : elle constitue la famille des métaux « alcalins » (vient du latin médévial alkali emprunté à l'arabe al-qâli : donnant de la soude) fortement réactifs en présence d'eau (on a déjà tous vu des vidéos de sodium dans l'eau...) qui forment alors des hydroxydes très basiques.

- colonne 2 : elle correspond à la famille des alcalino-terreux présentant des similarités avec les alcalins au point du réactivité chimique avec l'eau. Leur nom vient de leur placement dans la classification : entre les alcalins et les terres rares (colonne 3 et lanthanides).

- colonne 17 : c'est la famille bien connue des halogènes (du grec halos : sel, et gena : engendrer).

- colonne 18 : elle est constituée des gaz nobles (anciennement appelé gaz rares).

Analysons rapidement les colonnes que vous devez connaître :

colonne 1 : métaux alcalins
colonne 2 : alcalino-terreux
colonne 17 : halogènes
colonne 18 : gaz nobles (anciennement gaz rares)

Ça c'est pas une nécessité absolue, mais c'est bien de l'avoir entendu au moins une fois :

- colonne 16 : il s'agit de la famille des chalcogènes (du grec chalcos : minerais, et gena : naissance)

- les éléments des colonnes 3 à 12 sont qualifiés d'éléments de transition puisqu'ils se trouvent au milieu de la classification.

Différents blocs peuvent être aussi mise en valeur : les non-métaux , les métaux pauvres , les métalloïdes , les lanthanides et les actinides .

Rq : Au delà de $Z = 100$, des effets quantiques non relativistes doivent être pris en compte et la position de l'élément ne révèle pas toutes ses propriétés.

Construisons proprement ce tableau maintenant, voulez-vous ?

2 Construction quantique du tableau

2.1 Niveaux d'énergie et règle de Kleshkovsky

Reprenons quelques notions vues dans notre cours sur la description quantique de l'atome.

Un électron dans un édifice atomique peut être décrit par 4 nombres quantiques n, l, m_l et m_s, et le principe de **Pauli** interdit à deux électrons d'avoir les mêmes nombres quantiques.

Une orbitale n'est défini que par le triplet (n, l, m_l) et m_s ne peut prendre que 2 valeurs ($m_s = \pm\frac{1}{2}$), on en déduit donc par le principe de Pauli qu'**une orbitale de peut accueillir que 2 électrons au maximum.**

Voyons maintenant comment répartir les électrons d'un atome sur les différentes orbitales atomiques possibles. On dit alors qu'on établit la *configuration électronique* de l'atome. Gardons à l'esprit qu'une configuration électronique n'est qu'un résultat expérimental que l'on doit à des analyses spectroscopiques.

Cependant, on peut formuler quelques règles pour établir la configuration électronique des atomes dans une grande majorité de cas avec la seule donnée du numéro atomique Z. Cette configuration correspond à l'état fondamental de l'atome, *i.e.* l'état de plus basse énergie.

Bien que l'énergie de chaque orbitale dépend de l'atome étudié, les atomes polyélectroniques partagent quelques similitudes, dont notamment l'ordre énergétique des orbitales. Cet ordre énergétique empirique est décrit par la **règle de Klechkowski** :

L'énergie des orbitales atomiques croît avec $n + l$ et, à $n + l$ fixé, croît avec n.

Orbitale	1s	2s	2p	3s	3p	4s	3d	4p	5s	4d	5p	$\cdots$
$n + l$	1	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	$\cdots$

Maintenant que nous avons l'ordre énergétique des orbitales, il faut les remplir. Pour cela, on utilise le **principe d'Aufbau** selon lequel les orbitales doivent être remplies par ordre croissant d'énergie afin que l'atome ait l'énergie globale la plus faible possible.

Exemples

- Lithium ($Z = 3$) : $1s^2\ 2s^1$
- Azote ($Z = 7$) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^3$
- Chlore ($Z = 17$) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^5$
- Fer ($Z = 26$) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^6$

Attention : c'est une règle **empirique** qui comporte des **exceptions**.

On peut également écrire la configuration électronique d'un atome en mettant entre crochets le gaz noble de la période juste avant celle de l'atome puis en rajoutant les couches manquantes.

Exemples

- Lithium ($Z = 3$) : [He] $2s^1$
- Azote ($Z = 7$) : [He] $2s^2\ 2p^3$
- Chlore ($Z = 17$) : [Ne] $3s^2\ 3p^5$
- Fer ($Z = 26$) : [Ar] $4s^2\ 3d^6$

2.2 Règle de Hund

On a vu qu'à $n > 1$ fixé, l ne pouvait prendre que les valeurs entières entre 0 et $n-1$ (ce qui définit les sous-couches s, p, d, f, ...) et que m_l ne pouvaient prendre que les valeurs entières entre $-l$ et $+l$. De plus, deux orbitales de même n et de même l ont des énergies identiques : on dit qu'elles sont *dégénérées*. Comment alors remplir ces $2l+1$ orbitales dégénérées ? La **règle de Hund** apporte la réponse à cette question :

> Quand un niveau d'énergie est dégénéré et que le nombre d'électrons et insuffisant pour saturer le niveau, l'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales, les spins des électrons non appariés étant parallèle.

Autrement dit, on maximise le spin d'une orbitale.

Exemple

Reprenons le cas de l'azote. Sa couche 3p est dégénérée. On associe à p le nombre $l = 1$ donc une couche p comporte 3 orbitales dégénérées. Pour satisfaire à la règle de Hund, on remplit alors que orbitale de la couche 3p avec un seul électron de spin vers le haut.

On peut faire le diagramme d'énergie au tableau.

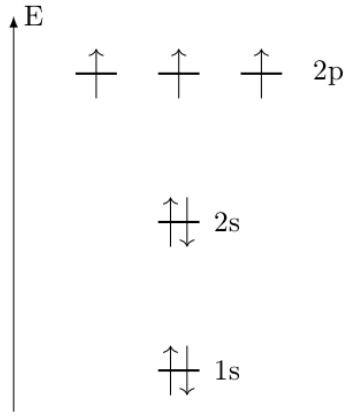


FIGURE 16.3 – La configuration de l'azote

2.3 Placement des électrons

Au sein d'une configuration électronique, on distingue 2 types d'électron :

- **les électrons de valence** sont ceux situés sur les orbitales incomplètes et/ou de plus grand nombre n ;
- **les électrons de coeur** sont les autres électrons.

Les électrons de valence sont à l'extérieur de l'édifice électronique et participent à la réactivité chimique, contrairement aux électrons de coeur.

Exemple

- Pour l'azote, les électrons de valence sont ceux situés sur les couches 2s et 2p
- Pour le fer, les électrons de valence sont ceux situés sur les couches 4s et 3d

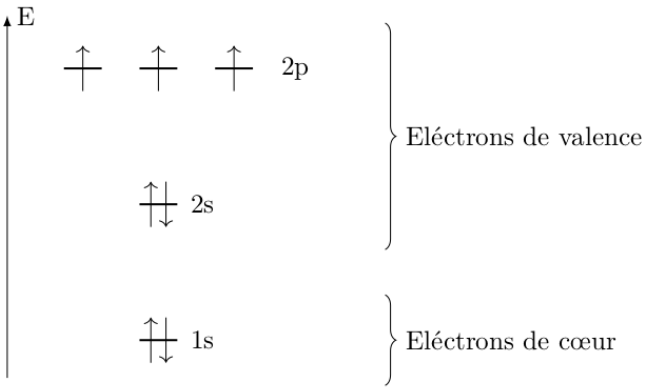


FIGURE 16.4 – La configuration de l'azote

À partir de la configuration électronique et des électrons de valence, on peut déduire la structure de Lewis d'un atome. Par exemple, l'azote dispose de 5 électrons de valence donc 2 appariés dans la sous-couche 2s donc l'azote a un doublet non-liant et va faire 3 doublets liants.

On peut également deviner les ions stables d'un atome en regardant combien d'électrons l'atome doit gagner ou perdre pour remplir ou vider sa couche électronique extérieure.

2.4 Exceptions

Comme on l'a dit précédemment, la règle de remplissage des orbitales atomiques (Klechkowski + Aufbau) possède des exceptions. En effet, une couche d ou f remplie ou remplie à moitié a un effet stabilisateur qui va légèrement modifier la configuration électronique la plus stable. Par exemple, on peut citer :

- le chrome ($Z = 24$) : [Ar] $4s^1$ $3d^5$ au lieu de [Ar] $4s^2$ $3d^4$
- le cuivre ($Z = 29$) : [Ar] $4s^1$ $3d^{10}$ au lieu de [Ar] $4s^2$ $3d^9$

Cette règle a également un impact sur les ions stables que l'on peut deviner à partir de la configuration électronique d'un atome. Par exemple, le fer a pour configuration électronique [Ar] $4s^2$ $3d^6$. On peut donc deviner l'existence des ions Fe^{2+} pour lesquels on a vidé la couche 4s. Cependant, on peut également deviner l'existence des ions Fe^{3+} pour lesquels on a vidé la couche 4s et également on a la couche 3d qui est demi-remplie.

2.5 Retour à la classification

À partir des règles précemment énoncées, on peut construire un tableau pour classer les éléments. Dans ce tableau, chaque ligne correspond au nombre quantique principal n, et chaque colonne regroupe les éléments avec le même nombre d'électrons de valence qui remplissent les même type d'orbitale. Une ligne est appelée une *période*

Par exemple, le lithium ([He] $2s^1$) et le potassium ([Ar] $4s^1$) sont sur la même colonne mais pas la même ligne. Même chose avec le fluor ([He] $2s^2$ $2p^5$) et le chlore ([Ne] $3s^2$ $3p^5$).

- **Première période :** $n = 1$

Les atomes de cette période ne peuvent avoir que 2 électrons de spins opposés au maximum car il n'ont qu'une seule orbitale ($n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$).

On a donc l'hydrogène ($1s^1$) et l'hélium ($1s^2$) qui est un gaz noble car son orbitale est totalement remplie.

- **Seconde période :** $n = 2$

Pour cette période, l vaut 0 (sous-couche s) ou 1 (sous-couche p). La sous-couche p possède 3 niveaux dégénérés car m_l vaut -1, 0 ou 1. Chaque orbitale peut accueillir 2 électrons donc la sous-couche p peut accueillir 6 électrons. En tout, les éléments de cette période peuvent accueillir $2 + 6 = 8$ électrons.

On commence donc par le lithium puis on continue avec le beryllium, le bore, le carbone, l'azote l'oxygène, le fluor et enfin on finit par le néon.

$2s^1$	$2s^2$	$2p^1$	$2p^2$	$2p^3$	$2p^4$	$2p^5$	$2p^6$
Li	Be	B	C	N	O	F	Ne

- **Troisième période :** $n = 3$

De la même façon, on commence avec le sodium puis on a le magnésium, l'aluminium, le silicium, le phosphore, le soufre, le chlore et enfin l'argon.

On remarque qu'on n'a pas la sous-couche 3d ($l = 2$) sur cette période. Cette sous-couche apparaît dans la quatrième

période car elle doit être remplie après la sous-couche 4s (Klechkowski). Pour cette sous-couche, $m - l$ peut prendre 5 valeurs différentes donc elle peut accueillir 10 électrons.

$3s^1$	$3s^2$	$3p^1$	$3p^2$	$3p^3$	$3p^4$	$3p^5$	$3p^6$
Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar

• **Quatrième période :** $n = 4$

Cette fois, l peut valoir 0, 1, 2 ou 3. Comme pour la troisième période, la sous-couche 4d ne sera que dans la 5ème période car la 5s doit être remplie avant et la 4f ne sera dans que dans la sixième période car elle doit être remplie après le 6s. La sous-couche 7 possède 7 niveaux dégénérés donc elle peut accueillir 14 électrons.

Cette période comporte donc la 4s, la 3d (qu'il ne faut pas oublier) puis la 4p.

$4s^1$	$4s^2$	$3d^1$	$3d^2$	$3d^3$	$3d^4$	$3d^5$	$3d^6$	$3d^7$	$3d^8$	$3d^9$	$3d^{10}$	$4p^1$	$4p^2$	$4p^3$	$4p^4$	$4p^5$	$4p^6$
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr

• **Et ainsi de suite...**

Conclusion : on retrouve la classification périodique ! ! ! !

$1s^1$																	$1s^2$
H																	He
$2s^1$	$2s^2$											$2p^1$	$2p^2$	$2p^3$	$2p^4$	$2p^5$	$2p^6$
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
$3s^1$	$3s^2$											$3p^1$	$3p^2$	$3p^3$	$3p^4$	$3p^5$	$3p^6$
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
$4s^1$	$4s^2$	$3d^1$	$3d^2$	$3d^3$	$3d^4$	$3d^5$	$3d^6$	$3d^7$	$3d^8$	$3d^9$	$3d^{10}$	$4p^1$	$4p^2$	$4p^3$	$4p^4$	$4p^5$	$4p^6$
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr

3 Propriétés physico-chimiques remarquables

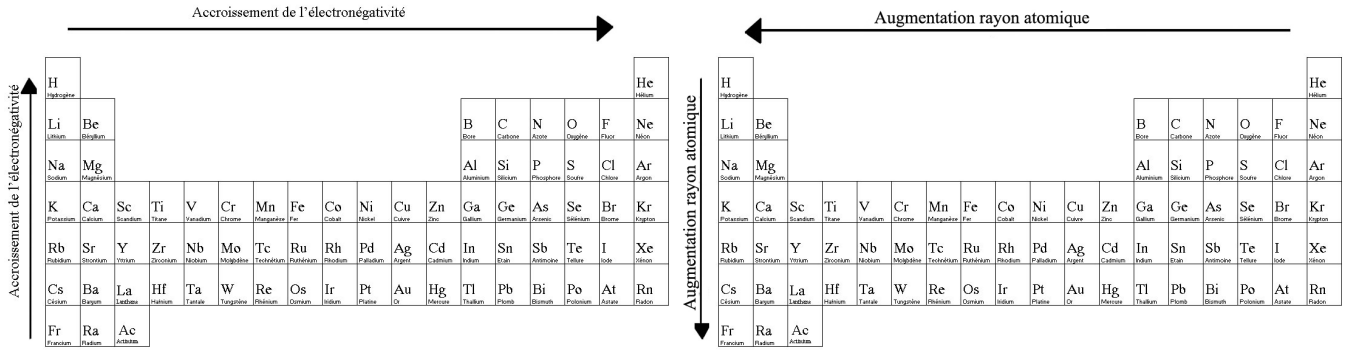
Comme nous l'avons dit en introduction, la merveille qui a fait que ce tableau est entré dans la postérité de la chimie et de la physique, c'est sa capacité prédictive. Regardons ce qu'il peut prédire et les informations que l'on peut en tirer

3.1 Structure électronique

Pour trouver la position d'un élément dans le tableau périodique, on écrit sa structure électronique. La plus grande couche avec un électron donne la période, et le nombre d'électrons dans celle-ci donne la colonne. Exemple ?

Inversement, si on connait la position, on connait la structure électronique.

3.2 Électronégativité



L'électronégativité χ d'un atome c'est sa capacité à attirer à lui une liaison covalente qu'il effectuerait avec un autre atome. C'est une caractéristique essentielle en chimie puisqu'elle permet de dire comment se répartissent les charges dans une molécules et d'en prédire la réactivité.

Plusieurs échelles d'électronégativité existent, mais nous allons nous interesser plus spécifiquement à celle de Pauling (1901-1994). Sans entrer dans les détails, qui sont au delà du cadre du programme, l'électronégativité de référence est celle du Fluor, l'élément le plus électronégatif de la classification, qui est de 4. Une observation simple est alors de remarquer que l'électronégativité augmente lorsque l'on avance dans une période, et diminue lorsque l'on descend dans une colonne.

Cette notion d'électronégativité est essentielle pour interpréter de nombreuses propriétés des éléments et édifices chimiques. Elle permet de justifier la réactivité de certaines molécules. Ainsi le type de liaison peut se prévoir à l'aide de l'électronégativité : deux éléments à l'électronégativité très différente sont liés par une liaison au caractère polaire voire ionique (Na Cl par exemple).

3.3 Caractère réducteur des alcalins

Moins un atome est électronégatif, moins les électrons seront liés à l'atome et donc plus l'atome aura tendance à donner des électrons et donc à être un réducteur. Ainsi, les alcalins sont d'excellents réducteurs et, au sein de cette colonne, plus on descend, plus l'atome est réducteur.

Projection de vidéo

✍ 🕒 3mn

https://youtu.be/uixxJtJPVXk

C'est exactement ce que l'on voit, plus on descend, plus les réactions sont rapides et violentes.

3.4 Rayon atomique et polarisabilité

L'électronégativité ne vient pas seule, puisque si l'on y réfléchi, elle est reliée au rayon atomique. Plus un atome est électronégatif, plus son cortège électronique est resséré autour de lui. Inversement, plus un noyau est gros, plus son cortège est grand, et don éloigné de lui. Ainsi le rayon atomique varie exactement à l'inverse de l'électronégativité des éléments !

À noter que la polarisabilité, à savoir la capacité d'un atome à se polariser en présence d'une charge, varie inversement du rayon atomique, car une flotte électronique très compacte est dure à faire bouger.

Faire le dessin des barycentres de charges.

3.5 Gaz rares

✍ Fosset p126

3.6 Caractère oxydant des halogènes

✍ Fosset p129

Mettre en oeuvre des expériences illustrant le caractère oxydant ou réducteur de certains corps simples. Élaborer ou mettre en oeuvre un protocole permettant de montrer qualitativement l'évolution du caractère oxydant dans une colonne. Plus χ est grand, plus l'atome est oxydant.

Comparaison du pouvoir oxydant des dihalogènes

✍ BUP 684 p891 ⏲

3.7 Acido-basicité des oxydes

✍ Fosset p124, comparaison entre les blocs p et s

Matériel nécessaire pour la manip :
- tubes à essai
- bocal contenant du $S0_2$ préalablement obtenu en brulant du soufre sous oxygène avec un fond d'eau au fond
- papier pH.
- magnésie, oxyde de phosphore, soufre, alumine (au cas où)

On va mettre ici en évidence l'évolution d'une autre propriété des éléments dans la classification périodique : le caractère acide ou basique des oxydes. On illustre cette propriété avec les éléments de la troisième période : magnésium, phosphore et soufre.

On prend plusieurs tubes à essais dans lesquels on a placé :
- T1 : magnésie (ou oxyde de magnésium MgO
- T2 : une pointe d'oxyde de phosphore P_2O_5 (à faire sous la hotte)
- T3 : de l'oxyde de soufre SO_2 gazeux issu de la combustion du soufre puis dissous dans de l'eau.

Conclusion

Nous connaissons tous ce tableau périodique depuis le temps que nous le côtoyons dans nos salles de physique chimie. Mais il est important de savoir comment il a été construit à l'époque de l'émergence de la chimie moderne autour de l'an 1800. Il a montré sa robustesse puisque 200 ans plus tard, nous l'utilisons encore. Il a résisté à toutes les découvertes du XX ème siècle et sa construction a été validée par la description quantique de la matière. Cette leçon nous a donc permis de remettre en lumière la somme d'information contenue dans ce tableau. En connaissant quelques propriétés simples comme l'électronégativité, il permet de prévoir le comportement de certains édifices chimiques à la fois dans leur similarité ou dans leur différence entre deux éléments d'une même ligne ou d'une même colonne. C'est donc un formidable outil pédagogique qui regroupe un grand nombre de propriétés des éléments.

LC 17

Solides cristallins

Niveau : MPSI/PCSI

Extraits du programme

Les éléments de description microscopique relatifs au « modèle du cristal parfait » sont introduits lors de l'étude des solides sur l'exemple de la maille cubique faces centrées (CFC), seule maille dont la connaissance est exigible. Cet ensemble d'outils descriptifs sera réinvesti pour étudier d'autres structures cristallines dont la constitution sera alors fournie à l'étudiant.

Aucune connaissance de mode de cristallisation pour une espèce donnée n'est exigible ; le professeur est libre de choisir les exemples de solides pertinents pour présenter les différents types de cristaux et montrer leur adéquation, plus ou moins bonne, avec le modèle utilisé. En effet, l'objectif principal de l'étude des cristaux métalliques, covalents et ioniques est d'aborder une nouvelle fois la notion de modèle : les allers-retours entre le niveau macroscopique (solides de différentes natures) et la modélisation microscopique (cristal parfait) permettent de montrer les limites du modèle du cristal parfait et de confronter les prédictions faites avec ce modèle aux valeurs expérimentales mesurées sur le solide réel (rayons ioniques, masse volumique).

Bibliographie

- ✍ *chimie MPSI* **Touste**
- ✍ *Précis de Chimie, thermodynamique, matériaux inorganiques*, **Mesplède** — Un cours clair et concis (attention au HP)
- ✍ *BUP n21760, Réseau, maille et structure cristalline*

Prérequis

- ➢ Liaisons chimiques
- ➢ États de la matière

Expériences

- Diffractions sur les modèles moléculaires
- Modèles moléculaires

1 Notions de cristallographie : le cristal parfait . . . 898
1.1 Indices expérimentaux . . . 898
1.2 Description de la structure cristalline - Notion de réseau . . . 898
1.3 Réseau CFC . . . 899
1.4 Sites interstitiels . . . 900
2 La cohésion des cristaux . . . 901
2.1 Métaux . . . 901
2.2 Solides ioniques . . . 902
2.3 Solides covalents . . . 903
2.4 Solides moléculaires . . . 903
3 Analyse par spectroscopie . . . 904

Introduction

En chimie, pour l'instant, on a surtout étudié deux formes de la matière, liquide et gazeuse. Il manquait (jusqu'à maintenant) l'étude de la matière sous forme solide. Sous forme solide, la matière peut-être *amorphe* ou *cristallisée*. On va ici s'intéresser à la matière cristallisée, étude qu'on appelle *cristallographie*. On remarque que certains solides présentent une périodicité dans l'arrangement spatial des atomes comme par exemple le sel de table, le diamant ou la silice (semi-conducteur).

Montrer quelques images de cristaux, éventuellement un morceau de pyrite (on y voit des cubes réguliers à sa surface).

L'étude de ces solides est vitale de par leurs multiples utilisations (alliages métalliques, semi-conducteurs, catalyse hétérogène en phase solide...).

Cette leçon a pour but de comprendre les propriétés microscopiques du solide cristallin et comment, à partir des propriétés microscopiques, on obtient les propriétés macroscopiques d'un cristal. Pour cela, on va proposer un modèle : le **cristal parfait**.

1 Notions de cristallographie : le cristal parfait

1.1 Indices expérimentaux

Les cristaux ont été l'objet d'expériences diverses et variées dont voici quelques résultats :

- La thermochimie montre une discontinuité de certaines grandeurs thermodynamiques extensives à la transition entre une phase liquide et une phase cristalline (transition du premier ordre). De plus, cette transition ne peut pas être contournée (il n'y a pas de point critique) ; il y a un ré-arrangement de la structure microscopique lors de la transition.
- Des expériences d'optique (Diffraction de Bragg, biréfringence des cristaux) attestent de la périodicité, de l'ordre et de l'anisotropie des phases cristallines.
- Les modèles de liaison chimiques déjà développés dans le cours de chimie induisaient une organisation des molécules : de même, on peut postuler une organisation des phases cristallines (cf VSEPR).

Tous ces résultats sont des indices qui vont motiver l'élaboration du modèle du cristal parfait comme étant un cristal caractérisé par son ordre et sa périodicité.

1.2 Description de la structure cristalline - Notion de réseau

Un **solide cristallin** est un solide constitué d'un empilement d'atomes régulier en 2 ou 3 dimensions.

Dans le modèle du **cristal parfait**, on suppose que :

- les atomes sont des sphères dures
- l'empilement d'atomes est infini, périodique, parfaitement ordonné

La périodicité se traduit par la répétition par symétrie de translation d'une unité structurale qu'on appelle un **motif**, et sa description nécessite l'utilisation d'un support géométrique qu'on appelle un **réseau** qui présente les mêmes

propriétés de symétrie que le cristal. Il existe en tout 14 réseaux, appelés les réseaux de Bravais, et chacun de ces réseaux représente une symétrie possible.

Pour chaque réseau, on peut définir un ensemble de points appelés les **noeuds** par des vecteurs de même origine et dont les extrémités transcrivent les propriétés de symétrie du réseau. Ces vecteurs s'écrivent sous la forme $\overrightarrow{R} = u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b} + w\overrightarrow{c}$ où u, v, w sont des entiers et $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ sont non coplanaires et sont appelés **vecteurs de base**.

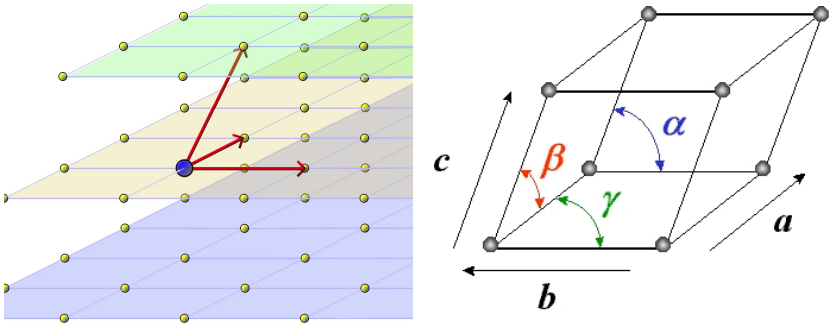


FIGURE 17.1 – Illustration d'un réseau avec ses noeuds et ses vecteurs de base.

On appelle alors la **maille** la portion de l'espace délimitée par les vecteurs de base. La plus petite maille possible est appelée la **maille conventionnelle** ou **maille élémentaire**. Elle représente le plus petit volume à partir duquel on peut entièrement paver l'espace par translation et qui respecte les symétries du réseau.

Finalement, on définit le **motif** comme étant le contenu d'une maille. Sa répétition périodique et spatial doit pouvoir reconstituer tout le cristal avec ses symétries. Le motif peut être constitué de points, d'atomes, de molécules, d'un groupe d'atomes, *etc...*

Dans les cas les plus simples que nous rencontrerons dans cette leçon, les motifs seront toujours disposés au noeud du réseau.

En résumé, un cristal est la répétition périodique par translation d'un motif sur un réseau.

Passons maintenant à l'exemple le plus courant le maille (et la seule au programme), la CFC.

1.3 Réseau CFC

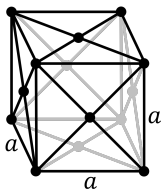


FIGURE 17.2 – Maille CFC.

On rencontre la maille cubique face centrée (CFC) dans de nombreux composés métalliques (par exemple le cuivre, le fer, l'argent, l'or), chez les alcalino-terreux (calcium, scandium) ou encore dans certains solides non métalliques à liaison moléculaire (gaz nobles, cf H Prépa).

Le motif est constitué de 4 atomes placés en (0,0,0), $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ et en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. On note a le côté de la maille, que l'on appelle **paramètre de maille**.

Montrer une CFC sur Chimgéné

✍ ⏲

Montrer la représentation 3D de la CFC, comment on la construit en empilant des plans de sphères dures.

On peut calculer sur cette maille les propriétés suivantes :

- **Population Z :** c'est le nombre de motif dans la maille, en prenant en compte le fait que certains motifs soient partagés entre plusieurs mailles.
  Pour la CFC, il y a un motif à chaque sommet partagé par 8 mailles et un motif au centre de chaque face partagé entre 2 mailles donc $Z = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$.
- **Coordinence :** c'est le nombre de plus proches voisins d'un motif.
  Pour la CFC, la coordinence est de 12.
- **Condition de tangence :** on suppose que les motifs les plus proches sont en contact et ne peuvent s'interpénétrer (hypothèse d'un empilement de sphères dures).
  Pour la CFC, les motifs sur la diagonale d'une face sont les plus prches et donc sont en contact. On notant R le rayon d'un motif, on obtient
  $$a = 2\sqrt{2}R$$
- **Masse volumique :** en notant M la masse molaire du motif, on a
  $$\rho = \frac{ZM}{\mathcal{N}_A V_{\text{maille}}}$$

Exemple

Pour le cuivre, $R_{\text{Cu}} = 128$ pm $\Rightarrow \rho_{\text{Cu}} = 8.89 \times 10^3\,\text{kg m}^{-3}$. La valeur tabulée est $\rho_{\text{Cu}}^{\text{tab}} = 8.96 \times 10^3\,\text{kg m}^{-3}$

☕

Pycnomètre : mesurer la masse volumique du cuivre en pesant des copeaux de cuivre puis en mesurant leur volume en les plongeant dans de l'eau.

- **Compacité :** c'est le rapport du volume occupé par les sphères dures sur le volume total de la maille.
  Pour la CFC, $C = \frac{Z\frac{4}{3}\pi R^3}{a^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0.74$.
  C'est la compacité maximale pour un empilement de sphères dures identiques. On dit que la maille CFC est compacte.

La compacité ne vaut que 74%. Quid des 26% restants ?

1.4 Sites interstitiels

Il reste de la place dans la CFC pour rajouter de la matière entre les motifs. On appelle **sites interstitiels** ces espaces vides qui sont également distribués de manière périodique.

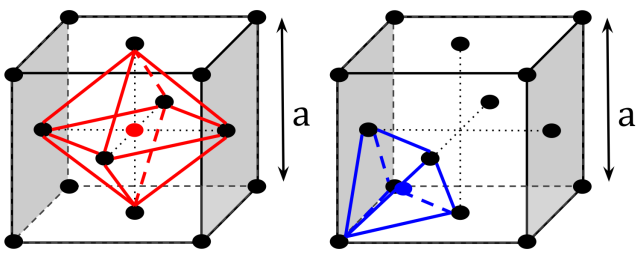


FIGURE 17.3 – Maille CFC.

Dans la CFC, on a 2 types de sites interstitiels :

- **les sites octaédriques :**
  - localisation : au centre de la CFC et au milieu de chaque arête de la CFC, partagé entre 4 mailles
  - population : $Z_{\text{octa}} = 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$
  - habitabilité : c'est le rayon du plus gros atome insérable dans le site, obtenu via une condition de tangence selon l'arête du cube :
$$r_{\text{octa}} \leq (\sqrt{2} - 1)R \simeq 0.41R$$
- **les sites tétraédriques :**
  - localisation : au centre de chaque cube de côté $\frac{a}{2}$
  - population : $Z_{\text{tétra}} = 8$
  - habitabilité : c'est le rayon du plus gros atome insérable dans le site, obtenu via une condition de tangence selon la grande diagonale du petit cube :
$$r_{\text{tétra}} \leq (\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)R \simeq 0.22R$$

On a présenté les structures et modèles géométriques nécessaires à l'étude des solides cristallins, résultats d'interactions entre les atomes, mais nous n'avons pas encore détaillé la physique et la nature de ces interactions. Nous allons les décrire maintenant et les mettre en lien avec leurs propriétés physicochimiques.

2 La cohésion des cristaux

2.1 Métaux

Les métaux, situés au milieu du tableau périodique, forment des cristaux à l'état naturel. Le cristal formé est le résultat de l'interaction entre un réseau de Cations métalliques M^+ et le nuage d'électrons libres, alors délocalisé. C'est le modèle de Drude-Lorentz.

Leurs principales caractéristiques sont :

- bons conducteurs thermiques et électrique, car leur nuage d'électrons est libre, et donc un excellent vecteur de chaleur et d'électricité.
- Les liaisons qui les lient sont fortes (100-800 kJ/mol) en raison de l'interraction coulombienne. L'énergie de cohésion est élevée, la température de fusion aussi. (cuivre : 1085°C.). À noter que cela dépend des métaux, certains ont une moins bonne cohésion, comme le mercure.
- Les liaisons n'ont pas de directivité préférencielle. C'est un peu comme si les atomes étaient sur un réseau 3D de ressorts uniforme, donc c'est ductile.

Certains métaux ont différentes façons de s'agencer. C'est le cas du fer par exemple, qui à haute température peut passer du fer α (cubique centré) au fer γ (cubique face centrées) à 912°C.

Variétés allotropiques du fer

✍ ma tête ⏲ 2 minutes

Faire chauffer un fil par effet joule, avec une masse dessus, et observer qu'à la remontée le fil fait un haut, bas, haut. En préparation : le filmer.

Exercice guidé : application aux alliages

✍ Fosset ⏲ 3mn

Atome	Rayon atomique (nm)	Masse molaire ($g \cdot mol^{-1}$)
Ti	0,147	47,90
Al	0,143	26,98
Ni	0,124	58,70

L'alliage de Titane le plus utilisé dans l'aéronautique est un alliage $Al_xNi_yTi_z$. Le titane y est présent sous la forme β, cubique face centrée. Les sites octaédriques sont occupés par l'aluminium, et les sites tétraédriques par le nickel. Le paramètre de maille vaut $a = 589$ pm.

Q1) déterminer x,y,z.

On l'a vu, ça fait du $AlNi_2Ti$.

Q2) Si l'empilement du titane était compact, quel serait le paramètre de maille ?

C'est un CFC, on utilise ses neurones et $a = 2\sqrt{2}R(\text{Ti})$=414pm. On voit que la maille est dilatée par l'alliage.

Q3) Calculer la taille des sites octaédriques et tétraédriques dans la maille dilatée.

$r_O = a/2 - R(\text{Ti})$=147.5pm, et $r_T = a\sqrt{3}/4 - (R(\text{Ti}) - R(\text{Al}))/2$=110pm

Q4) Quelle conclusion en tirer ?

Le nickel ne devrait pas pouvoir s'insérer : on rencontre ici une limite du modèle de sphères dures utilisé jusqu'à maintenant. On calcule malgré tout la compacité et la masse volumique : C = 81%, $\rho = 6250 kg/m^3$. Cet alliage est plus compact que l'acier et possède donc de meilleures propriétés mécaniques, tout en étant plus léger.

On peut généraliser cet exemple : en métallurgie, la fabrication d'alliages permet d'améliorer les propriétés mécaniques d'un métal (e.g. le fer et l'acier, qui est une insertion d'atomes de carbone dans un cristal de fer), ou sa résistance à la corrosion (e.g. l'acier inoxydable, alliage d'acier et de chrome.)

2.2 Solides ioniques

Un cristal est dit Ionique si les liaisons qui lient ses composants sont des liaisons ioniques. On rappelle qu'une liaison est dite Ionique si la différence d'électronégativité de Pauling entre les deux éléments est supérieure à 1.7.

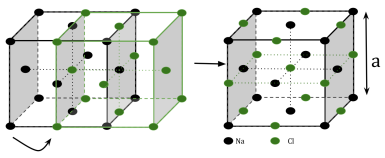


FIGURE 17.4 – Le cristal de sel est un exemple typique de solide ionique. Les Na+ forment une maille Cubique faces centrées, et les Cl- font de même, mais décalés d'un facteur $a/2$. On peut aussi dire que Na occupe les sites octahédriques du CFC de Cl.

La formation d'un solide ionique nécessite la dilatation du réseau, et donc sa non compacité, car la condition de tangence n'est pas respectée. Le solide ainsi formé est macroscopiquement électriquement neutre.

La coordinence d'un tel édifice est de 6.

Chimgéné

Montrer la maille de NaCl, les condition de non contact et contact, et la coordinence.

Les propriétés d'un tel cristal sont :

- Mauvaise conduction électrique et thermique : les électrons sont localisés autour des noyaux et ne peuvent pas s'en échapper.
- Liaisons chimiques fortes, avec une température de fusion élevée (801°C pour le NaCl).
- Liaisons directives, donc le solide est cassant, peu ductile. (comme une mine de critérium)
- Ionique donc très soluble dans l'eau !

On peut maintenant aller beaucoup plus vite selon ce que l'on veut faire

2.3 Solides covalents

Les solides covalents sont des cristaux dont les liaisons sont simplement des liaisons covalentes. L'exemple le plus fameux est le diamant, représenté ci-dessous.

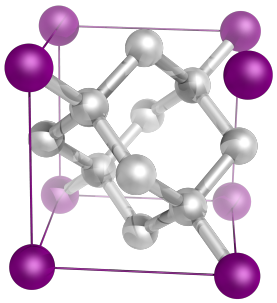


FIGURE 17.5 – Chaque liaison covalente fait 0.36nm. CFC avec un site tétra occupé sur deux.

À noter que le carbone peut aussi cristalliser en graphite, maille hexagonale donc hors programme pour nous.

Propriétés :

- Liaisons covalentes, donc très fortes, 300-600 kJ/mol, donc très dur à fondre (3546°C pour le diamant) et très dur à déformer.
- Électrons confinés dans les liaisons, conductivité faible ou nulle.

2.4 Solides moléculaires

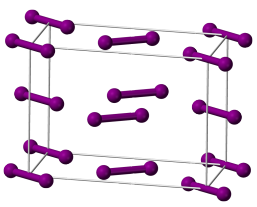


FIGURE 17.6 – Le réseau cristallin du Diode.

Résultat des interactions de Van der Waals (Keesom, Debye et London en fonction des composés étudiés). Concerne notamment les gaz rares ou les composés halogénés. On pense notamment à I2 qu'on utilise couramment en TP : pas de dipôle permanent, la cohésion du diiode solide est assurée par les force attractives de VdW. On peut ici montrer comme exemple la carboglace qui cristallise en cfc ou pour se lancer dans les joyeusetés, le diiode qui cristallise en système orthorombique à base centrée.

Propriétés :

- Mauvaise conduction électrique et thermique : électrons localisés autour des molécules.
- Liaison faibles (qqs kJ/mol) et dirigées : cristaux fragiles et température d'ébullition faible (-78.5°C pour la carboglace, 113°C pour le diiode).

Cas particulier : composés avec possibilité de former des liaisons hydrogène (typiquement, H2O HF et NH3) : liaisons plus fortes (qqs dizaines de kJ/mol).

3 Analyse par spectroscopie

Cette partie sort un peu du cadre de la leçon mais en parler nous semblait intéressant.

La caractérisation des réseaux cristallins se fait généralement par une méthode de spectroscopie : la spectroscopie aux rayons X. Les rayons X sont diffractés sur les liaisons chimiques du cristal, et permettent en fonction de la figure de diffraction de remonter à la structure de celui-ci.

Diffraction dans les cristaux

✍ ma tête 🕒 5mn

Matériel : Modèles moléculaires de cristaux avec des liaisons en métal, générateur d'ondes centimétriques (banc hyperfréquences).

Protocole : observer la figure de diffraction d'ondes centimétriques au travers un cristal. C'est une bonne modélisation parce que la physique est exactement la même, c'est la vibration des liaisons qui fait diffracter les ondes !

Conclusion

On a vu ici des premiers éléments de cristallographie qui nous permettent de décrire les solides cristallins : leurs propriétés physico-chimiques sont influencés d'une part par la périodicité du cristal à l'échelle moléculaire et d'autre part par le type de liaisons responsable de la cohésion du solide.

Point important, on a vu que ce modèle du cristal a ses limites, ce qui engagent à discuter d'améliorations possibles de ce modèle en prenant en compte les défauts (cf Hprépa ou précis de chimie).

Dans le BO, c'est suggérer d'aborder ce sujet avec une **approche documentaire** donc il me semble pas absurde d'en parler en conclusion.

LC 18

Corps purs et mélanges binaires

Niveau : PSI

Extraits du programme

4. Changement d'état du corps pur	
Potentiel chimique du corps pur.	Identifier le potentiel chimique d'un corps pur à son enthalpie libre molaire.
Conditions d'équilibre d'un corps pur sous plusieurs phases.	Établir l'égalité des potentiels chimiques pour un corps pur en équilibre sous plusieurs phases. En déduire l'existence d'une courbe d'équilibre sur un diagramme (P,T)
Variance.	Définir et déterminer la variance d'un système polyphasé en équilibre.
Évolution d'un système sous plusieurs phases.	Définir et déterminer la variance d'un système polyphasé en équilibre.
5. Mélanges	
Potentiel chimique d'un constituant dans un mélange ; enthalpie libre d'un système chimique.	Citer l'expression (admise) du potentiel chimique d'un constituant en fonction de son activité. Exprimer l'enthalpie libre d'un système en fonction des potentiels chimiques. Approche documentaire : à partir de documents sur la pression osmotique, discuter de l'influence de la pression sur le potentiel chimique et d'applications au laboratoire, dans l'industrie, ou dans la vie courante.
6. Changement d'état des alliages métalliques	
. Diagrammes isobares d'équilibre solide-liquide : - avec miscibilité totale des solides ; - avec miscibilité nulle des solides, avec ou sans composé défini à fusion congruente. Théorème des moments chimiques.	Exploiter les diagrammes isobares d'équilibre entre deux phases pour, à composition en fraction massique donnée : - décrire le comportement d'un mélange binaire lors d'une variation de température en traçant l'allure de la courbe d'analyse thermique. - déterminer les températures de début et de fin de changement d'état ; - donner la composition des phases en présence à une température fixée ainsi que les masses dans chaque phase ; - identifier les compositions relatives aux mélanges indifférents, eutectiques et aux composés définis et leur intérêt dans l'utilisation des alliages métalliques

Bibliographie

- ✍ *Chimie tout-en-un PSI*, **J'intègre, Fosset, Baudin,** TOUT **Lahitète**
- ✍ *Chimie des matériaux inorganiques* **Hprépa**

Prérequis

- ➢ Fractions molaires et massiques
- ➢ Miscibilité
- ➢ Potentiel chimique
- ➢ Transformation physique

Expériences

☕

1 Corps pur . . . 907
1.1 Définition et diagramme . . . 907
1.2 Variance . . . 908
1.3 Analyse thermique . . . 909
2 Diagrammes binaires : origine . . . 909
2.1 Solution binaire . . . 910
2.2 Courbes de refroidissement . . . 910
2.3 Diagramme . . . 911
2.4 Variance . . . 911
2.5 Solides miscibles . . . 912
3 Utilisation . . . 913
3.1 Théorèmes . . . 913
3.2 Applications . . . 915

Introduction

La matière est présente sous forme de corps pur ou de mélange. On a vu précédemment que la température était un paramètre de contrôle quand on étudiait la matière. On va voir dans cette leçon que la composition d'un système a également son importance. Pour cela, on utilisera un outil, le diagramme binaire, qui est vital dans l'étude des mélanges.

1 Corps pur

Pour l'instant, commençons pas étudier le corps pur.

1.1 Définition et diagramme

Un **corps pur** est un système composé d'un seul constituant (atome pour un corps pur simple, ou molécule pour un corps pur composé). Il peut se présenter sous plusieurs phases : solide, liquide ou vapeur.

Il est légitime de se demander comment contrôle les phases d'un corps pur, les états dans lesquels il se trouve. On peut penser intuitivement à la température. On en fait d'ailleurs l'expérience quotidienne avec l'eau, qui gèle à 0°C et qui bout à 100°C. Cependant, on sait également que ce n'est pas le cas si on est par exemple à la montagne, où l'eau bout à plus faible température. Il doit donc avoir un autre paramètre de contrôle.

Ébullition de l'eau

✍ 🕒 5 min

Faire bouillir de l'eau dans un ballon. Une fois l'ébullition atteinte, retirer le ballon du chauffe ballon, attendre la fin de l'ébullition et boucher le ballon (en ayant graissé le rodé).

Mettre alors le ballon sous un jet d'eau froide qui va refroidir le gaz dans le ballon et faire chuter la pression. L'eau va alors de nouveau bouillir

La pression est donc également un paramètre influant sur l'état d'un corps pur. On peut alors représenter l'influence de la pression et la température sur l'état d'un corps pur à l'aide d'un diagramme (p,T). Sur ce diagramme on représente pour chaque température la pression à laquelle le corps pur change d'état.

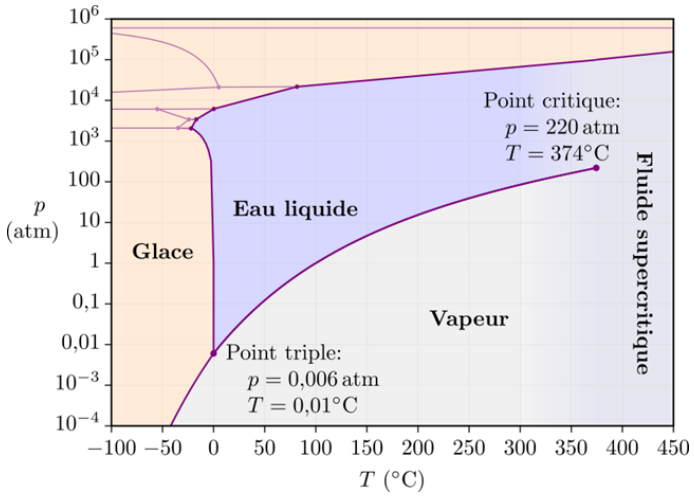


FIGURE 18.1 – Le diagramme (p,T) de l'eau.

Sur ce diagramme on voit apparaître les courbes de changement d'état et les trois états de l'eau. À faible pression et haute température, l'eau est à l'état de vapeur, etc.

Le diagramme comporte trois courbes qui sont les courbes de :

- **Fusion** : équilibre solide-liquide
- **Sublimation** : équilibre solide gaz
- **Vaporisation** : équilibre liquide-gaz

Sur ce diagramme intervient aussi le point t, nommé point triple. Il s'agit d'un point où les trois phases peuvent cohexister. Il est à une pression et une température fixées. Pour l'eau t=(0.006bar,273.16K). C'est un point qui est utilisé pour faire des références de températures exactes.

Jusqu'au 20 mai 2019, le kelvin était défini comme la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau (H2O), une variation de température d'1 K étant équivalente à une variation d'1°C. La nouvelle définition a pour objectif de respecter cette valeur, mais en l'ancrant sur une valeur fixée de la constante de Boltzmann.

Il est bon de remarquer que pour l'eau, et c'est un des rares corps à faire cela, la courbe de fusion a une pente négative. Cela vient du fait que l'eau gonfle en se gelant.

Sur le diagramme apparaît aussi le point critique.

Afin de comprendre pourquoi le changement d'état s'effectue toujours, pour une pression fixée, à une température fixée, et pourquoi on n'a jamais de glace à plus de 0 à pression ambiante, on va définir la Variance.

1.2 Variance

La **variance** d'un système correspond au nombre de paramètres intensifs indépendants qui permettent de fixer totalement l'état d'équilibre d'un système.

Ainsi pour le cas d'un changement de phase liquide-solide, on a la température et la pression, mais le diagramme de pression température indique que, comme on est à un changement de phase, la fonction p(T) est fixée. Par conséquent il n'y a qu'un seul paramètre libre.

Cela se traduit par le fait que pour un système à l'équilibre liquide-solide, on ne peut fixer que la température OU (exclusif) la pression, l'autre étant fixé par le premier.

De manière générale, on peut donner la formule standard de la variance comme suit :

$$v = N - C \tag{18.1}$$

où N est le nombre de paramètres intensifs décrivant à priori le système, et C le nombre de relations indépendantes reliant ces paramètres. Calculons la variance dans le cas du diagramme pT du corps pur.

La variance correspond également au nombre de paramètres que l'expérimentateur peut fixer si il veut voir le corps pur dans un état donné !

Dans tous les cas, N=2 car p et T décrivent le système.

- Corps pur monophasé : il n'y a aucune relation, $v = 2$, on peut fixer p et T à volonté
- Corps pur diphasé : il y a une relation : le point doit être sur une courbe de changement d'état, donc $v = 1$, on ne peut fixer que p ou T.
- Corps pur triphasé : vous l'aurez deviné, $v = 0$, on ne peut rien fixer du tout. Ce point est une constante physique absolue.

Une forme simplifiée de la variance dans le cas d'un corps pur est $v = 3 - \phi$ ou ϕ est le nombre de phases.

Nous allons maintenant nous convaincre du fait que la température est fixée quand un corps pur change d'état à pression fixée.

1.3 Analyse thermique

Pour tracer un diagramme p T on se place à plusieurs pressions, et on observe le refroidissement du corps pu considéré et ses changements de phases successifs. Cela permet de repérer tous les points de la courbe p(T).

Nous allons pour notre part déterminer la température de fusion de l'acide stéarique (68.8°C en théorie) pression atmosphérique.

Courbe de refroidissement de l'acide stéarique pur

✍ TP7 JFLM ⏲ 10 min

Mélanger les 2 acides en prenant soin de connaître précisément la composition (prendre $x_{\text{benzène}} = 0.7$).

Chauffer l'acide stéarique pour obtenir l'état liquide.

Retirer ensuite la source de chaleur et laisser refroidir, tout en traçant la température en fonction du temps.

Remarques : Utiliser les tubes de faible diamètre pour refroidir plus vite. L'agitateur est constitué d'un fil de fer façonné autour d'un agitateur en verre. Une courbe de refroidissement complète prend plus de 30 min à réaliser.

Principe de l'expérience : faire fondre la naphtalène, puis tracer la température en fonction du temps pendant sont refroidissement.

Ce que l'on s'attend à voir : D'abord une descente de température, le temps que tout le liquide arrive à la température de changement d'état ; température constante le temps que tout change d'état ; et re-descente de température. Faire l'analyse de variance en live.

Remarque : Pour une question de temps, il faut choisir les points que l'on ajoute à la courbe. Mon avis sur la question est de lancer le montage, parler en l'expliquant, et ne prendre des points que jusqu'au début du plateau.

Il faut faire l'XP en prépa ! !

Conclusion

Pour un corps pur, une transition de phase à pression fixée se fait à température donnée !

La variance est ton amie.

Mais que se passe-t-il dans le cas d'un mélange de composés ? On sait toustes que le sel diminue la température de fusion de l'eau par exemple. Pourquoi ?

↓

2 Diagrammes binaires : origine

Définition : On appelle un mélange binaire un mélange de deux composés non réactifs.

L'intérêt de se limiter aux composés non réactifs est que les seules transformations chimiques que l'on peut observer qui dépendent de la composition sont des changement de phase.

Lors de cette leçon, nous nous intéresserons uniquement aux mélanges binaires liquide/solide, conformément au programme.

2.1 Solution binaire

On va maintenant étudier un système comportant deux corps purs. On supposera que ces corps purs sont parfaitement miscibles à l'état liquide.

La cohésion des liquides est due aux interactions entre les molécules qui les composent, ainsi dans le cas d'un mélange les interactions se complexifient. En effet, si les composés A et B du mélange sont différents, il y a trois types d'interactions différents : AA, AB et BB.

Ces interactions font que les propriété d'un mélange ne sont pas simplement une moyenne de celle des deux corps pur. Le comportement du mélange va grandement dépendre de la composition en chaque composé.

L'exemple typique est celui des mélange eau-sel, qui sont, comme vous le savez probablement, nettement plus dur à congeler que de l'eau pure. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on sale les routes en hiver.

2.2 Courbes de refroidissement

On a vu pour le corps pur que la température était un paramètre de contrôle sur son état. On veut donc logiquement voir l'effet de la température sur un mélange binaire de composition fixée.

Pour cela, on trace ce que l'on appelle une *courbe de refroidissement*. Comme son nom l'indique, on refroidit un mélange tant en notant l'évolution de la température au cours du temps ainsi que l'état du système à un température donnée. On travaille à pression atmosphérique, donc à pression fixée.

☕

Courbe de refroidissement du mélange acide stéarique/acide benzoïque

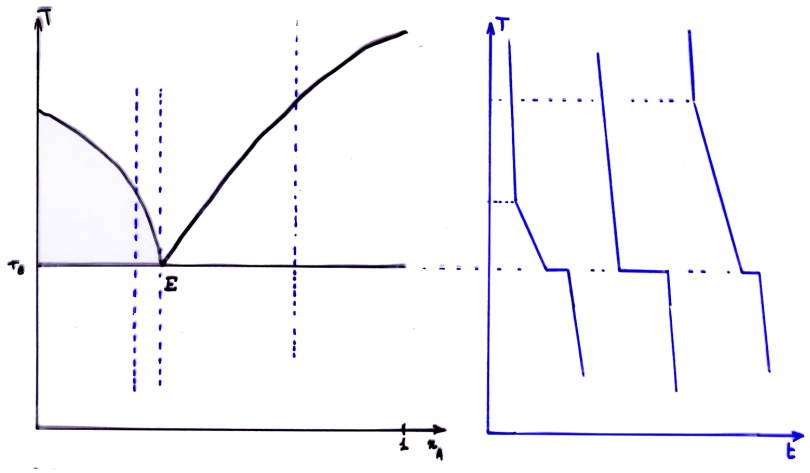
✍ TP7 JFLM 🕓 10 min

Mélanger les 2 acides en prenant soin de connaître précisément la composition (prendre $x_{\text{benzène}} = 0.7$).

Chauffer le mélange des deux acides pour obtenir l'état liquide.

Retirer ensuite la source de chaleur et laisser refroidir, tout en traçant la température en fonction du temps.

Remarques : Utiliser les tubes de faible diamètre pour refroidir plus vite. L'agitateur est constitué d'un fil de fer façonné autour d'un agitateur en verre. Une courbe de refroidissement complète prend plus de 30 min à réaliser.



On obtient la courbe de refroidissement la plus à droite. On observe 3 ruptures de pente, ce qui signifie qu'il y a eu apparition/disparition d'une ou plusieurs phases à ces deux endroits de la courbe.

Dans notre cas, la 1ère rupture correspond à l'apparition de l'acide benzoïque solide. la solidification est exothermique donc le refroidissement est ralenti, on passe alors sur une pente plus douce.

La seconde rupture correspond à l'apparition de l'acide stéarique solide. Cette fois, on arrive sur un palier. On verra par la suite pourquoi.

Enfin la troisième rupture correspond à la disparition du liquide : le refroidissement peut reprendre.

A partir de ça, on construit les diagrammes

2.3 Diagramme

Si on trace des courbes de refroidissement pour différentes compositions, on finit par connaître l'état du mélange pour ces deux paramètres (on est toujours à pression fixée). On obtient alors un diagramme binaire solide/liquide.

Dans le cas du mélange acide stéarique/acide benzoïque, on obtient un diagramme binaire avec un palier. Ce diagramme est typique des mélanges binaires de solides non-miscibles.

Le palier est appelé **palier eutectique**. On nomme **liquidus** la courbe en contact de la zone liquide (elle marque l'apparition/la disparition de la première poussière de solide) et on nomme **solidus** celle en contact avec la zone solide (elle marque l'apparition/la disparition de la première goutte de liquide).

On ne sait toujours pas pourquoi on a un palier de température. C'est une histoire de variance !

2.4 Variance

Reprenons le mélange acide stéarique/acide benzoïque de composition $x_{\text{benzène}} = 0.7$. On note S l'acide stéarique et B l'acide benzoïque. Calculons la variance à différents endroits de la courbe en utilisant la méthode vue dans la première partie :

- **Avant la première rupture de pente :** On a juste une phase liquide $\{\text{S+B}\}_{(l)}$.

  Variables intensives : P, T, x_S^{liq}, x_B^{liq}

  Relations : $x_S^{\text{liq}} + x_B^{\text{liq}} = 1$

  La variance vaut donc 4-1=3. Avec la pression fixée, on a encore 2 degrés de libertés.

- **Entre la première et la seconde rupture de pente :** On a toujours une phase liquide $\{\text{S+B}\}_{(l)}$ mais cette fois en présence de B_s.

  Variables intensives : P, T, x_S^{liq}, x_B^{liq}, x_B^{sol}

  Relations : $\begin{cases} x_S^{\text{liq}} + x_B^{\text{liq}} = 1 \\ x_B^{\text{sol}} = 1 \\ B_{(l)} = B_{(s)} \quad \text{égalité de potentiels chimiques} \end{cases}$

  La variance vaut donc 5-3=2. Avec la pression fixée, on a encore 1 degré de libertés. Toujours pas de palier.

- **Entre la seconde et la troisième rupture de pente :** On a toujours une phase liquide $\{\text{S+B}\}_{(l)}$ en présence de B_s mais en plus on a apparition de S_s.

  Variables intensives : P, T, x_S^{liq}, x_B^{liq}, x_B^{sol}, x_S^{sol}

  Relations : $\begin{cases} x_S^{\text{liq}} + x_B^{\text{liq}} = 1 \\ x_B^{\text{sol}} = 1 \quad \text{solides non-miscibles} \\ x_S^{\text{sol}} = 1 \quad \text{solides non-miscibles} \\ B_{(l)} = B_{(s)} \quad \text{égalité de potentiels chimiques} \\ S_{(l)} = S_{(s)} \quad \text{égalité de potentiels chimiques} \end{cases}$

  La variance vaut donc 6-5=1. Avec la pression fixée, on n'a plus de degré de libertés. La température ne peut pas évoluer tant que la transformation n'est pas finie : **on a un palier de température**.

- **Après la troisième rupture de pente :** on n'a plus que B_s et S_s non-miscibles.

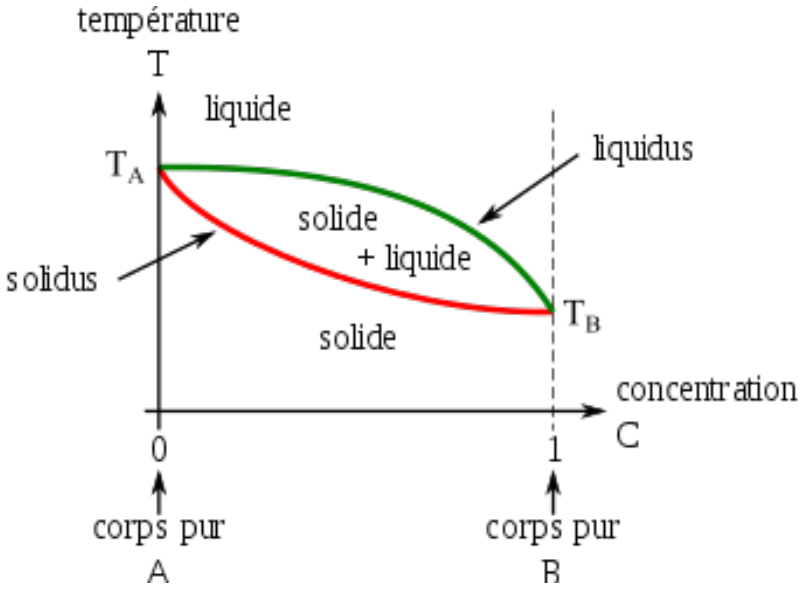
  Variables intensives : P, T, x_S^{sol}, x_B^{sol}

  Relations : $\begin{cases} x_B^{\text{sol}} = 1 \quad \text{solides non-miscibles} \\ x_S^{\text{sol}} = 1 \quad \text{solides non-miscibles} \end{cases}$

  La variance vaut donc 4-2=2. Avec la pression fixée, on a encore 1 degré de liberté. La température peut donc de nouveau évoluer.

2.5 Solides miscibles

Dans le cas d'un mélange de deux solides miscibles, on obtient un diagramme différent. En effet, on obtient un fuseau et il n'y a pas de palier eutectique. On a toujours un liquidus et un solidus. On peut citer comme exemple de solides miscibles le mercure et l'or (amalgation).



Les courbes de refroidissements ont dans ce cas toutes la même alors, à savoir deux ruptures de pente avec apparition du solide à la 1ère rupture, processus exothermique qui ralentit le refroidissement, et disparition du liquide à la 2ème rupture.

Depuis le temps que l'on en parle, il est temps de regarder les applications, et surtout l'application au salage des route non ? Fini le teasing !!

3 Utilisation

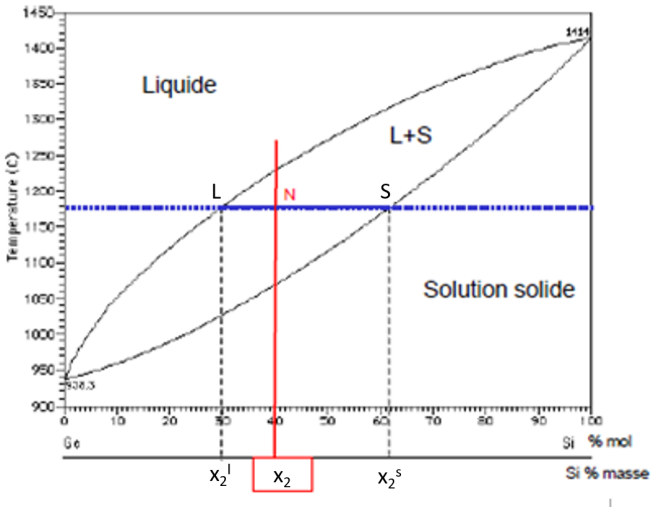
Mais d'abord...

3.1 Théorèmes

NE PAS DESSINER DE FUSEAU AU TABLEAU SANS AVOIR INTRODUIT LES DIAGRAMMES DE SOLIDES MISCIBLES

3.1.1 Théorème de l'horizontale : lecture de graphe

On prend un mélange solide-liquide des composés 1 et 2. On note la quantité de matière totale n, qui est la somme des quantités de matière de solide et de liquide : $n = n_1 + n_2 = n^s + n^l$. On note alors les fractions molaires de solide et de solide x^s et x^l respectivement, et les fractions molaires des espèces 1 et 2 dans une phase α donnée sont notées x_1^α et $x_2^\alpha = 1 - x_1^\alpha$.



Pour lire un diagramme binaire il faut tout d'abord y déterminer la fraction molaire de l'espèce 2 par exemple dans la phase liquide et dans la phase solide. Pour se faire, on sait quelle est la fraction x_2 totale en espèce 2 que l'on a introduite dans le système ainsi que la température de ce dernier, donc il suffit de poser le point (x, t) dans le diagramme, ici le point N, et de tracer une horizontale (d'où le nom du théorème) à la température correspondante. On note alors les point L et S respectivement sur le liquidus et le solidus. On lit alors directement sur le diagramme x_2^l qui est l'abscisse de L, ainsi que x_2^s qui est l'abscisse de S. On en déduit x_1^l et x_1^s.

Pourquoi ça marche ? On se place dans une zone diphasée et si on fait le calcul on trouve une variance de 2. Si on fixe P et T, il ne reste plus aucun degré de liberté et la composition est fixée : c'est celle qu'on lit avec le théorème de l'horizontale.

3.1.2 Théorème des moments chimiques

On peut alors écrire

$$n_2 = x_2 n = x_2(n^s + n^l)$$

or

$$n_2 = n_2^s + n_2^l$$

Et

$$\begin{cases} n_2^s &= x_2^s n^s \\ n_2^l &= x_2^l n^l \end{cases}$$

Donc

$$n_2 = n_2^s + n_2^l = x_2^s n^s + x_2^l n^l$$

Et finalement

$$x_2 n^s + x_2 n^l = x_2^s n^s + x_2^l n^l$$
$$(x_2 - x_2^l) n^l = (x_2^s - x_2) n^s$$

Or sur le graphe on a $x_2 - x_2^l = NL$ et $x_2^s - x_2 = NS$. On obtient donc

$$NLn^l = NSn^s$$

On remarquer que

$$NLn^l = NSn^s = NS(n - n^l) \Rightarrow (NL + NS)n^l = NSn \Rightarrow LSn^l = NSn$$

On obtient donc le théorème des moments :

$$\boxed{\begin{cases} n^l = \dfrac{NS}{LS} n \\ n^s = \dfrac{NL}{LS} n \end{cases}}$$

3.2 Applications

3.2.1 Salage des routes : diagramme eau/sel

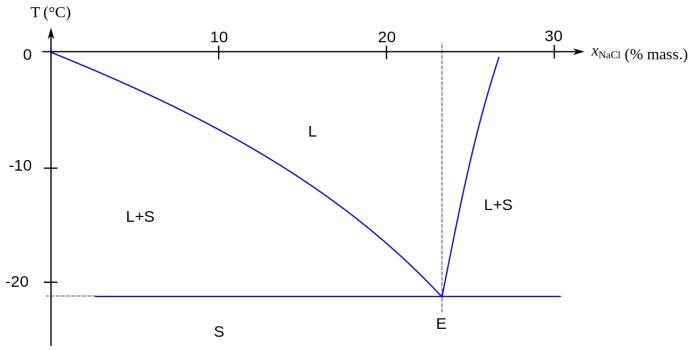


Figure 18.2 – Diagramme eau sel.

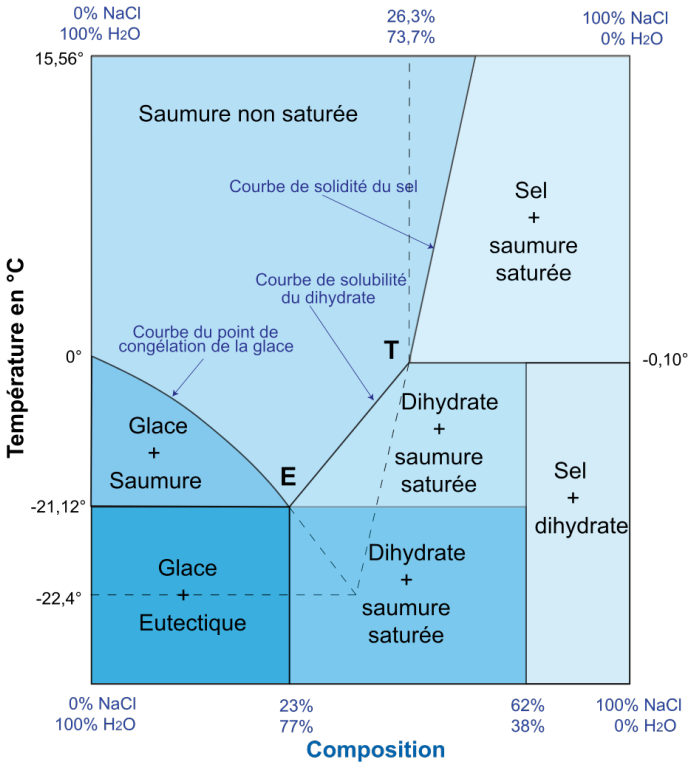


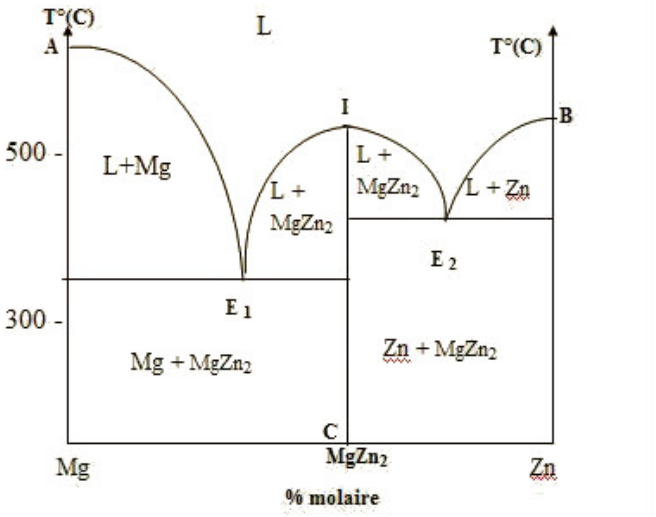
Figure 18.3 – Diagramme eau sel compliqué.

Si il y a de l'eau sur la route, elle peut geler la nuit. Mais si on la sale, il faut aller beaucoup plus bas en température !

3.2.2 Alliage Magnésium/Zinc

Les alliages de magnésium sont très intéressants dans l'industrie car ils sont très légers et permettent donc de gagner du poids.

Étudions un des ces alliages en particulier, à savoir l'alliage magnésium-zinc.



Ce diagramme peut être découpé en deux, avec un diagramme de solides non-miscibles de chaque côté. La nouveauté ici est la présence d'un **composé défini**, qui est un composé donc le changement de phase se fait à fusion constante.

Pour trouver sa formule, il faut connaître la **fraction molaire** d'un de ces constituants. Dans le diagramme Mg/Zn, le composé défini correspond à $x_{\text{Zn}} = \frac{2}{3}$.

En mettant le composé défini sous la forme Mg_aZn_b, on aurait $\frac{b}{a+b} = \frac{2}{3}$. Il suffit de prendre les plus petits entiers a et b vérifiant cette équation. On trouve ici que $b = 2$ et $a = 1$ donc le composé défini est bien MgZn_2.

On peut attribuer à chaque domaine les phases présentes, et on peut s'amuser à tracer les courbes de refroidissements ou à déterminer les compositions de phases pour un x_{Zn} donné.

Conclusion

Nous avons vu au cours de cette leçon que l'étude des mélanges de deux corps pur a permis de définir les diagrammes binaires qui caractérise ces mélanges. Nous avons vu deux type de diagramme : diagramme binaire liquide/solide avec phase solides miscibles et ceux avec phases solides non miscibles. Pour ce dernier, nous avons mis en évidence l'existence du point eutectique qui permet d'obtenir une température de fusion du mélange plus faible que celle des deux corps pur.

C'est le cas pour l'exemple eau+sel que nous avons vu en introduction. Pour ce mélange, la température de fusion est T = -21 °C. Donc le salage des routes sert bien à empêcher la formation de glace en cas de neige. Ces diagrammes sont également utilisé dans l'industrie, notamment pour former des alliages.

On peut également obtenir ce type de diagramme dans le cas du changement d'état liquide/vapeur.

Commentaires lors de l'oral blanc du 15 mai 2020 :

- Savoir définir la fusion congruente et comment la repérer sur un diagramme binaire (et donc savoir ce qu'est une fusion non congruente
- Connaître le terme de solution solide pour désigner un mélange de solides (totalement ou partiellement) miscibles, savoir qu'il y a des solutions solides d'insertion et de substitution
- Connaître différents types d'alliages/mélanges : l'acier (fer carbone avec 5% en masse de carbone), les mélanges à miscibilité totale (Ag-Au mélange quasiment idéal, Si-Ge), à miscibilité partielle (Pb-Zn)
- Une impureté commune pour l'acier est le soufre : il prend la place du carbone localement et engendre des défauts dans la structure de l'acier, provoquant une chute des propriétés mécaniques. Ce soufre vient en général des minerais.
- Il y a des aciers durs, cassants et des aciers mous. Savoir ce qu'est une courbe de traction (déformation en fonction de la contrainte) et son allure quand l'acier est cassant (croissance linéaire avec pente = module d'Young puis brisure de la courbe)
- Montrer un exemple de calcul pour passer de fraction molaire à massique et inversement
- Faire un exemple à la fin avec le calcul en question puis un calcul de quantités de matière avec les différents théorèmes serait pas mal.
- On peut évoquer les phénomènes de métastabilité et de retard à la cristallisation quand on montre les courbes de refroidissement (on peut peut-être le voir sur les courbes expérimentales)
- Quand il fait trop froid, on remplace le sel par du chlorure de césium (par exemple au Canada)
- Savoir justifier la non-miscibilité de l'acide stéarique et benzoïque à partir de considérations de liaison chimique.
- Savoir justifier la position de la notion du composé défini (après le mélange eau-sel)
- Se préparer à d'éventuelles questions sur le point critique

Analyse thermique par refroidissement isobare

✍ Girard p331 ⏲

Matériel : plaque chauffante + bain d'huile de silicone, thermomètre à mercure (on peut uniquement utiliser ceux là), tube à essai, erlenmeyer.

TOUT FAIRE SOUS HOTTE

- Mettre la naphtalène solide dans un tube à essai. Fixer dessus un réfrigérant fait maison (bouchon avec un trou et une pipette) pour faire condenser les possibles vapeurs.
- Chauffer le tube au bain à huile pour dépasser la température de fusion du naphtalène.
- Attacher l'erlenmeyer à une pince sans qu'il touche la paillasse. Attacher le tube à essai pour qu'il entre dans l'erlenmeyer, fixer dessus un bouchon à un trou et le thermomètre (il doit être assez plongé dans le liquide).
- Fermer les vitres de la hotte, prendre les mesures de la température toutes les minutes.

Si on attend la solidification complète, en principe le thermomètre est coincé. Il faut donc à nouveau chauffer le tube à essai pour pouvoir le retirer.

Dès que la manip est terminée, tout ce qui a été en contact avec le mélange liquide ou solide (thermomètre, spatule, entonnoir, ...) se nettoie à l'acétone sauf le tube à essai. Concernant le labo de l'ENS, il faut emballer le tube avec du papier aluminium et jeter le tout à la poubelle. Il faudra demander la procédure le jour J.

LC 19

Application du premier principe de la thermodynamique à la réaction chimique

Niveau : CPGE (MP)

Extrait du programme :

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Application du premier principe à la transformation physico-chimique	
État standard. Capacité thermique standard à pression constante. Enthalpie standard de réaction. Enthalpie standard de changement d'état. État standard de référence d'un élément, enthalpie standard de formation. Loi de Hess.	Déterminer l'enthalpie standard de réaction à l'aide de tables de données thermodynamiques et de la loi de Hess.
Enthalpie standard de dissociation de liaison.	Estimer l'ordre de grandeur d'une enthalpie standard de réaction à partir des énergies de liaison.
Effets thermiques pour une transformation isobare : – transfert thermique causé par la transformation chimique en réacteur isobare isotherme (relation $\Delta H = Q_p = \xi\ \Delta_r H°$) ; – transfert thermique causé par un changement d'état physique isobare isotherme ; – transformation exothermique ou endothermique.	Déterminer le transfert thermique entre le système en transformation physico-chimique et le milieu extérieur. Évaluer la température atteinte par un système siège d'une transformation physico-chimique supposée isobare et réalisée dans un réacteur adiabatique. **Mettre en œuvre une démarche expérimentale mettant en jeu des effets thermiques lors d'une transformation chimique.**

Bibliographie

✍ *Chimie PC (le blanc et rouge)*, **Grecias**	p.63 Un chapitre nickel
✍ *Chimie PC (vert et bleu)*, **Grecias**	p5 pour une première partie
✍ *Chimie générale, p257*, **JFLM**	Calorimétrie acide-base
✍ *Usuel de chimie générale et minérale*, **Bernard, Busnot**	Valeurs des énergies
✍ M. Vérot http://agregationchimie.free.fr/	Le contenu et les exemples
✍ https://edu.rsc.org/resources/endothermic-solid-solid-reactions/739.article	Réaction endothermique entre deux solides

Prérequis

- ➢ États standards
- ➢ thermodynamique physique

Expériences

- ☕ Réaction endothermique entre deux solides

1 Premier principe . . . 921
- 1.1 Énonce . . . 921
- 1.2 Enthalpie de réaction . . . 922
- 1.3 Rappel sur les états standards (facultatif) . . . 923
- 1.4 Nécessité des états standard . . . 924

2 Calcul d'une enthalpie de réaction . . . 925
- 2.1 Enthalpie standard de formation et cycle de Heiss . . . 925
- 2.2 Enthalpie standard de dissociation de liaison . . . 926
- 2.3 Température de flamme . . . 927

3 Détermination expérimentale . . . 928

Introduction

Equation-bilan : pas d'information sur les échanges d'énergie mis en jeu

Réaction endothermique entre deux solides : Hydroxyde de baryum et chlorure d'ammonium

✍ https://edu.rsc.org/resources/endothermic-solid-solid-reactions/739.article ⏲ 5mn

Vidéo : https://youtu.be/2aSNBfxxgLs

Matériel : Bécher, petri, thermomètre QUI DESCEND À -30 (type thermocouple ?), balance, agitateur.

Produits : 32 g de Barium hydroxide-8-water (corrosif) ; 10g de Chlorure d'Ammonium (nocif).

Sous hôte :

Mettre un fond d'eau dans un pétri, puis poser un bécher sur le fond d'eau. Cette eau va geler pendant la réaction, collant le pétri au bécher.

Dans le bécher mettre les deux solides l'un après l'autre, et le touiller avec le thermomètre.

L'eau gèle, et tu peux soulever le pétri avec le bécher.

Industrie : métallurgie du zinc, il est nécessaire de savoir comment va évoluer la température du milieu réactionnel pour limiter au maximum les apports d'énergie inutiles et coûteux. En effet, en 2007, la consommation mondiale du zinc a été estimée à 11 millions de tonnes, et 70% proviennent de la production minière (les 30 autres % proviennent du recyclage) (cf Techniques de l'ingénieur, Métallurgie du zinc).

Définition au cas où :
Un constituant physico-chimique est une espèce chimique donnée dans une phase (région de l'espace dans laquelle toutes les grandeurs intensives sont des fonctions continues des coordonnées de l'espace) donnée.

Pour étudier ces systèmes qui échangent de l'énergie avec l'extérieur, il faut utiliser le premier principe de la thermodynamique.

1 Premier principe de la thermodynamique

De la même façon qu'en physique l'approche mécanique est apparue insuffisante, il est devenu nécessaire d'inclure les échanges thermiques dans la caractérisation des réactions chimiques.

1.1 Énonce

Pour cela, on s'appuie sur ce qui a été fait en physique et notamment le premier principe, qui est un principe de conservation de l'énergie.

Au cours d'une transformation thermodynamique quelconque d'un système fermé, la variation d'énergie s'écrit :

$$\Delta E_{\text{macro}} + \Delta U = Q + W$$

avec W travail des forces de pression et autres travaux reçus et Q transfert thermique reçu.

En chimie, le système est le milieu réactionnel (les constituants physico-chimiques en présence), qu'on considérera **fermé** dans le cadre de cette leçon. De plus, on **néglige la variation d'énergie macroscopique**. Ce que signifient ces hypothèses c'est que l'altitude et la vitesse du système sont constante, et que le réacteur est fermé, c'est à dire qu'on effectue pas la réaction dans un écoulement.

Dans le cadre des réactions chimiques où aucun travail électrique n'est appliqué, seul le travail des forces de pression entre en jeu, de plus, les transformations sont monobares, le premier principe se réécrit alors

$$\Delta U = Q - P_e \Delta V = Q - \Delta(P_e V)$$

On retrouve alors l'**enthalpie** $H = U + P_e V$ et le premier principe s'écrit donc :

$$\Delta H = Q_P$$

.

Remarque : H est une fonction d'état et sa variation ne dépend pas du chemin suivi, cela sera utile par la suite.

La question est maintenant de savoir comment exprimer la variation d'enthalpie.

1.2 Enthalpie de réaction

H étant une fonction de T et des n_i (Techniquement aussi de P mais les transformations sont monobares), on peut écrire que la variation élémentaire d'enthalpie est :

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,n_i} dT + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_j} dn_i = C_P dT + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,n_j} dn_i$$

C_p est la capacité calorifique à pression constante, analogue à C_v dans le traitement avec U.

Or la particularité de la thermochimie, par rapport à la thermodynamique physique est le fait qu'il y a possibilité d'un réaction chimique

$$\sum_i \nu_i A_i = 0$$

Les quantités de matière sont donc susceptibles d'évoluer, on préfère donc utiliser l'avancement qu'on peut relier aux quantités de matière des différents constituants : pour chaque constituant i, $dn_i = \nu_i d\xi$.

On obtient alors :

$$dH = C_P dT + \sum_i \nu_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,P} d\xi$$

On remarque que la partie de droite ne dépend que du bilan de réaction considéré, on va alors poser :

$$\Delta_r H = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T,P} = \sum_i \nu_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T,P}$$

l'**enthalpie de réaction**, qui représente l'énergie reçue par le système au cours de la transformation. Finalement, la variation élémentaire d'enthalpie est :

$$dH = \Delta_r H(T,P,\xi) d\xi + C_P(T,P,\xi) dT \tag{19.1}$$

Remarque : Pour être rigoureux, il faudrait introduire les enthalpies molaires partielles puisque, si l'enthalpie standard de réaction ne dépend pas de la pression pour un gaz parfait ou un phase condensée incompressible, c'est parce que les enthalpies molaires partielles n'en dépendent pas. Mais on n'a pas le temps et ça sert pas à grand chose dans l'exposé donc on le met sous le tapis.

Retour sur la petite expérience

On peut écrire une variation d'enthalpie le long d'une réaction chimique : $\Delta H = \int \Delta_r H d\xi + \int C_p dT$. C_p est toujours positif, ici dT est négatif, ainsi si on regarde la réaction qu'on a effectué, on comprend tout de suite que si on néglige les apports d'énergie extérieurs, on a $\Delta_r H$ qui doit être positif pour avoir $\Delta H = 0$. Mais on y reviendra dans 3 minutes.

Remarque : Notons avant de continuer que la notion d'enthalpie de réaction peut être étendue à d'autres grandeurs thermodynamiques comme l'énergie interne ou l'enthalpie libre. On parle de manière générale de grandeur de réaction. On note ce type de grandeurs avec un Δ_r !

Cependant, $\Delta_r H$ est une fonction de T, P, ξ, il serait assez fastidieux de référencer toute les enthalpies de réaction pour toutes les conditions de pression et de température possibles. Pour simplifier les calculs, on a donc besoin d'utiliser la notion d'état standard qui a été définie dans le chapitre précédent.

1.3 Rappel sur les états standards (facultatif)

le symbole ° signifie que les différents composés sont pris dans leur état standard. Il s'agit de l'état de la substance sous une pression P = 10^5 Pa. Ils sont dans un état hypothétique dans lequel les particules n'interagissent pas (pour un gaz, l'état standard est celui du gaz parfait et pour un soluté, il possède un comportement de solution infiniment diluée à une concentration prise à c = 1 mol/L). Nous parlerons d'état standard de référence s'il se trouve dans l'état d'agrégation le plus stable (exemple le graphite pour le carbone à température et pression ambiante).

- **Enthalpie standard de formation d'un corps à T :** c'est l'enthalpie standard de la réaction formant une mole du corps considéré à partir des éléments le constituant pris dans leur état standard de référence à T, elle est notée $\Delta_f H^\circ$, elle vaut 0 pour un corps simple dans son état standard de référence
  Ex : à 298K, $H_2(g) + \frac{1}{2}O_2(g) = H_20(l)$ $\Delta_f H^\circ(H_2O)$
  On utilise les enthalpies standard de formation pour déterminer les enthalpies standard de réaction avec la loi de Hess : $\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i \Delta_f H^\circ(T)$

- **Changement d'état :** $H_2O(l) = H_2O(g)$, on associe une enthalpie standard de changement d'état, qu'on appelle chaleur latente et que vous avez déjà vu en physique

- **Energie d'ionisation :** Liée à la réaction $M(g) = M^+(g) + e^-(g)$, par ex : $NH_3(g) = NH_3^+(g) + e^-(g)$ avec EI = 1003 kJ/mol
  Remarque : En toute rigueur, l'énergie d'ionisation est définie comme étant l'énergie interne standard de réaction à 0K mais l'enthalpie standard de réaction à 298K est très proche de cette valeur donc on assimile en général les deux valeurs.

- **Affinité électronique :** Energie de la réaction $M^-(g) = M(g) + e^-(g)$, perte d'un électron pour un atome isolé, par ex : pour l'oxygène, AE = 141 kJ/mol

- **Energie réticulaire** $C_xA_y(crist) = xC^{p+}(g) + yA^{q-}(g)$, réaction fictive qui sépare les constituants d'un cristal et conduit aux ions en phase gazeuse, sans interaction, pour rendre compte de l'interaction entre constituants d'un solide ionique, par ex : Pour NaCl $E_{ret} = 770$ kJ/mol

1.4 Nécessité des états standard

On fait les approximations suivantes afin de s'affranchir de la dépendance en pression et en l'avancement, et de supposer que les constituants sont dans leur état standard.

- Chaque gaz est assimilé à un gaz parfait.
- Chaque état condensé est supposé incompressible.
- Solutions infiniment diluées
- Approximation des mélanges idéaux : interactions A-A, A-B, B-B identiques

Remarque : Savoir quelle hypothèse sert où :
GP+solutions diluées : indépendance en l'avancement [1]
GP+incompressible : indépendance en la pression
GP+mélanges idéaux : état standard.

On peut alors approximer l'enthalpie de réaction $\Delta_r H(T,P)$ à l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H°(T)$ qui est l'enthalpie standard de la même réaction avec les constituants dans leur état standard, et faire de même avec les capacités thermiques. On a ainsi :

$$dH = \Delta_r H°(T)d\xi + {C_P}°(T)dT \tag{19.2}$$

De plus, on peut faire une dernière approximation : en l'absence de changement d'état, les capacités thermiques standard et les enthalpie standard de réaction sont indépendantes de la température et de l'avancement : c'est l'**approximation d'Ellingham**. Ainsi, on a, en intégrant sur toute la transformation, en partant de $\xi_i = 0$ et en allant jusqu'à ξ :

$$\Delta H = \Delta_r H°\xi + {C_P}°\Delta T = Q_P. \tag{19.3}$$

Petite note sur ces approximation

L'approximation d'Ellingham est d'autant plus justifiée que $\Delta_r {C°}_p$ est proche de zéro. C'est en pratique souvent le cas car d'une part les ${C_p}°$ sont du même ordre de grandeur et d'autre part les somme des coefficients stœchiométrique des réactifs et des produits sont souvent proches.
Dès qu'il y a un changement d'état, il y a discontinuité de l'enthalpie, l'approximation d'Ellingham est alors directement mise en défaut. Il faut donc bien faire attention à toute les enthalpies de changement d'état s'il y a de telles transformations avec la température.
Il faut alors utiliser les lois de Kirchoff, qui vont au delà du cours ici présenté (✍ Verot p9).

$\xi\Delta_r H°(T)$ est alors l'énergie consommée/produite par les réactions chimiques, et ${C_P}°\Delta T$ est l'énergie nécessaire à l'échauffement/au refroidissement des composés chimiques.

Cette expression du premier principe est bien plus maniable puisqu'on a facilement accès à l'avancement final de la réaction, et surtout parce que les enthalpies standard molaires sont tabulées à 298K.

On remarque que, à T constante :

- si $\Delta_r H°(T) > 0$ alors $Q_P > 0$: le système reçoit de l'énergie thermique de l'extérieur, la réaction est dite endothermique (ex : fusion de la glace $\Delta_{\text{fus}} H° = 6,01$ kJ/mol, exp d'intro [2]).
- si $\Delta_r H°(T) < 0$ alors $Q_P < 0$: le système donne de l'énergie thermique à l'extérieur, la réaction est dite exothermique (ex : liquéfaction de la vapeur d'eau $\Delta_{liq} H° = -40,65$ kJ/mol).

Maintenant, qu'on a posé les bases théoriques, on va voir comment calculer cette enthalpie.

1. C'est compliqué, il faut regarder la dépendance de μ en ξ, et l'expression du potentiel chimique n'est accessible que dans les cas particuliers idéaux
2. $Ba(OH)_2(s)+2NH_4Cl(s) \longrightarrow 2NH_3(g)+2H_2O(l)+BaCl_2(s)$, $\Delta_f H°(Ba(OH)_2(s)) = -944,7$ kJ/mol, $\Delta_f H°(NH_4Cl(s)) = -314,4$ kJ/mol, $\Delta_f H°(BaCl_2(s)) = -858,6$ kJ/mol, $\Delta_f H°(NH_3(g)) = -45,9$ kJ/mol, $\Delta_f H°(H_2O(l)) = -285,8$ kJ/mol et alors $\Delta_r H° = 51,5$ kJ/mol

2 Calcul d'une enthalpie de réaction

Il existe deux méthodes pour calculer une enthalpie de réaction. Les deux méthodes utilisent une propriété très utile de l'enthalpie : **elle ne dépend pas du chemin suivi car c'est une fonction d'état**. Ainsi, on peut choisir n'importe quel chemin **fictif** par lequel la réaction pourrait passer sans que ce soit réellement le cas, du moment que les états initial et final sont les bons.

2.1 Enthalpie standard de formation et cycle de Heiss

Une première méthode consiste alors à dissocier les réactifs dans un premier temps puis à former les produits dans un second temps. L'enthalpie de réaction se calcule alors en utilisant les enthalpies standards de formation qui ont le bon goût d'être tabulées. On appelle cette méthode le **cycle de Heiss**.

Reprenons l'expérience qualitative qui a été conduite en introduction. Son équation s'écrit

$$\mathrm{Ba(OH)_2, 8H_2O\ _{(s)} + 2NH_4Cl\ _{(s)} \Rightarrow 2NH_3\ _{(g)} + 10H_2O\ _{(l)} + BaCl_2\ _{(s)}}$$

Pour cela, on dissocie les réactifs :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ba(OH)_2, 8H_2O\ _{(s)} \Rightarrow Ba\ _{(s)} + 5O_2\ _{(g)} + 9H_2\ _{(g)}} &\qquad -\Delta_f H^\circ(\mathrm{Ba(OH)_2, 8H_2O\ _{(s)}}) \\ \mathrm{2NH_4Cl\ _{(s)} \Rightarrow N_2\ _{(g)} + Cl_2\ _{(g)} + 4H_2\ _{(g)}} &\qquad -2\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_4Cl\ _{(s)}}) \end{aligned}$$

On obtient alors l'état intermédiaire : $\mathrm{Ba\ _{(s)} + 5O_2\ _{(g)} + N_2\ _{(g)} + Cl_2\ _{(g)} + 13H_2\ _{(g)}}$

Il suffit alors de reformer les produits :

$$\begin{aligned} \mathrm{N_2\ _{(g)} + 3H_2\ _{(g)} \Rightarrow 2NH_3\ _{(g)}} &\qquad +2\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_3\ _{(g)}}) \\ \mathrm{Ba\ _{(s)} + Cl_2\ _{(g)} \Rightarrow BaCl_2\ _{(s)}} &\qquad +\Delta_f H^\circ(\mathrm{BaCl_2\ _{(s)}}) \\ \mathrm{10H_2\ _{(g)} + 5O_2\ _{(g)} \Rightarrow 10H_2O\ _{(l)}} &\qquad +10\Delta_f H^\circ(\mathrm{H_2O\ _{(l)}}) \end{aligned}$$

Finalement, on somme les enthalpies pour trouver l'enthalpie standard de la réaction :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^\circ &= -\Delta_f H^\circ(\mathrm{Ba(OH)_2, 8H_2O\ _{(s)}}) - 2\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_4Cl\ _{(s)}}) \\ &\quad + 2\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_3\ _{(g)}}) + \Delta_f H^\circ(\mathrm{BaCl_2\ _{(s)}}) + 10\Delta_f H^\circ(\mathrm{H_2O\ _{(l)}}) \\ &= -(-3345) - 2\times(-314) + 2\times(-46) + (-859) + 10\times(-286) \\ &= 162\ \mathrm{kJ/mol} \end{aligned}$$

On trouve bien une enthalpie standard de réaction positive, ce qui nous indique que la réaction est endothermique comme prévu.

Remarque

Certains proposent d'autres équations pour cette réaction :

- $\mathrm{Ba(OH)_2, 8H_2O\ _{(s)} + 2NH_4Cl\ _{(s)} \Rightarrow 2NH_3\ _{(g)} + 8H_2O\ _{(l)} + BaCl_2, 2H_2O\ _{(s)}}$
  Dans ce cas, $\Delta_r H^\circ = 135$ kJ/mol.
- $\mathrm{Ba(OH)_2(s) + 2NH_4Cl(s) \longrightarrow 2NH_3(g) + 2H_2O(l) + BaCl_2(s)}$
  On a $\Delta_f H^\circ(\mathrm{Ba(OH)_2\ _{(s)}}) = -944,7$ kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_4Cl\ _{(s)}}) = -314,4$ kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(\mathrm{BaCl_2\ _{(s)}}) = -858,6$ kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(\mathrm{NH_3\ _{(g)}}) = -45,9$kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(\mathrm{H_2O\ _{(l)}}) = -285,8$ kJ/mol.
  Dans ce cas, $\Delta_r H^\circ = 51,5$ kJ/mol.

Comme ici on veut juste montrer la méthode du cycle de Heiss, ça n'a pas d'importance.

2.2 Enthalpie standard de dissociation de liaison

2.2.1 Définition

Il est possible de choisir un autre chemin fictif que celui passant par les enthalpies standards de formation. Ce chemin fait intervenir les **enthalpies standards de dissociation de liaison**.

L'énergie de liaison correspond à l'énergie thermique à apporter à une molécule diatomique à l'état gazeux pour la dissocier par rupture homolytique en ses deux atomes à l'état gazeux selon un réaction de la forme

$$A-B\ _{(g)} \longrightarrow A_{(g)} + B_{(g)}$$

On note alors $D(A-B)$ l'enthalpie de réaction pour cette transformation. C'est une grandeur positive qui est d'autant plus grand que la liaison est forte.

Cependant, on ne peut pas passer aussi facilement du cas de molécules diatomiques au cas de molécules polyatomiques. En effet, les énergies de liaison entre les atomes d'une molécule polyatomique dépendent fortement de l'environnement de ces atomes (atomes voisins électronégatifs, ...). Dans ce cas, on utilise une enthalpie **moyenne** calculée pour plusieurs composés.

Exemple : la liaison O–H

- $H_2O\ _{(g)} \longrightarrow H_2\ _{(g)} + O\ _{(g)}$ donne $\Delta_r H^\circ = 2 \times D$(O–H)
  On trouve alors D(O–H)=492 kJ/mol à 298.15 K
- $HO\ _{(g)} \longrightarrow H\ _{(g)} + O\ _{(g)}$ donne $\Delta_r H^\circ = \times D$(O–H)
  On trouve alors D(O–H)=428 kJ/mol à 298.15 K

En moyenne, on utilise $D_m{}^\circ$(O–H)=463 kJ/mol à 298.15 K

Bien qu'elle soit définie à 0 K, on utilise des enthalpies standards de dissociation de liaison tabulées à 298.15 K. Cette enthalpie permet d'emprunter un chemin fictif qui passe par la **rupture homolytique de toutes les liaisons vers les atomes en phase gaz à 298.15 K**.

2.2.2 Exemple d'application

Prenons comme exemple la combustion de l'éthane :

$$H_3C-CH_3\ _{(g)} + \frac{7}{2}O_2\ _{(g)} \Rightarrow 2CO_2\ _{(g)} + 3H_2O\ _{g}$$

Remarques

Avant même de commence, il faut noter que :

- l'écriture en formule semi-développée est conseillée lors de la leçon pour une histoire de pédagogie ;
- il faut connaître ses structures de Lewis ;
- **il faut penser à écrire les réactifs et les produits EN PHASE GAZ**

Faisons un bilan des liaisons détruites et formées : on casse une liaison $C-C$, 6 liaisons $C-H$ et $\frac{7}{2}$ liaisons $O=O$. On forme ensuite 4 liaisons $C=O$ et 6 liaisons $H-O$. On a donc :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ(298.15K) &= 6D_m{}^\circ(\mathrm{C-H}) + D_m{}^\circ(\mathrm{C-C}) + \frac{7}{2}D_m{}^\circ(\mathrm{O=O}) - 4D_m{}^\circ(\mathrm{C=O}) - 6D_m{}^\circ(\mathrm{H-O}) \\ &= -1367\ \mathrm{kJ/mol}\end{aligned}$$

En passant par les enthalpies de formation, on trouve $\Delta_r H^\circ = -1516.7$ kJ/mol. L'écart s'explique par le fait qu'on utilise des moyennes pour les enthalpies standards de de dissociation de liaison.

Attention

$$D_m{}^\circ(\mathrm{C=O}) \neq 2 \times D_m{}^\circ(\mathrm{C-O})$$

Vous reprendrez bien un dernier exemple ?

2.3 Température de flamme

La température de flamme est la température maximale atteinte lors d'une réaction **adiabatique** isobare. Pour la calculer, il faut faire quelques hypothèses :

- $\Delta_r H^\circ$ **ne dépend pas de l'avancement** ξ**.**
  Pour le système initialement à la température T_0 et maintenu à la pression P°, on a
  $$0 = \Delta H = C_p{}^\circ \Delta T + \Delta_r H^\circ \xi$$
  En notant i chaque constituant du système, on a donc
  $$-\Delta_r H^\circ \xi = \left(\sum_i c_{p,i}{}^\circ n_i \right) \Delta T$$
  avec $c_{p,i}{}^\circ$ la capacité calorifique molaire standard de l'espèce i et n_i sa quantité de matière.
  Le membre de droite de l'égalité est difficile à calculer directement. Cependant, on peut passer par le chemin fictif
  $$\text{État initial} \to \textit{réaction} \to \text{Équilibre chimique} \to \textit{chauffage} \to \text{État final}$$
- **l'avancement** ξ **est l'avancement maximal** $\xi_{\max}$

Application : Brûler 1 mol d'éthanol (vas-y Yohann, fais-toi plaisir). On considère que O_2 est en proportion stoechiométrique, donc qu'on a $\frac{7}{2}$ mol d'O_2. L'air étant composé à environ 20% d'O_2 et 80% de N_2, on déduit qu'il y a $4 \times \frac{7}{2} = 14$ mol de N_2.

- On fait d'abord la réaction : on a déjà calculé $\Delta_r H^\circ = -1516.7$ kJ/mol. On considère la réaction totale donc $\xi = \xi_{\max} = 1$ mol. La réaction a donc dégagé 1516.7 kJ de chaleur.
- On en déduit la température. Une fois la réaction finie, on a $2\mathrm{CO_2}_{\,(g)}$, $3\mathrm{H_2O}_{\,(g)}$ et **surtout on n'oublie pas** les 14 mol de $\mathrm{N_2}_{\,(g)}$. Alors on trouve
  $$\Delta T = \frac{\Delta H_{\text{réaction}}}{c_{p,\mathrm{CO_2}}{}^\circ n_{\mathrm{CO_2}} + c_{p,\mathrm{H_2O}}{}^\circ n_{\mathrm{H_2O}} + c_{p,\mathrm{N_2}}{}^\circ n_{\mathrm{N_2}}} = \cdots = 2.7 \times 10^3\,\mathrm{K}$$

Ainsi, en partant de $T_0 = 300$ K, on trouve une température de flamme de 3000 K.

Remarque

Il s'agit ici d'une limite haute de température. En pratique, les fuites thermiques ne permettent pas d'atteindre une telle température.

Nous avons calculé de façon théorique une enthalpie de réaction, ce qui nous a ensuite permis de déterminer la température atteinte dans le milieu réactionnel. On peut ainsi savoir si cette réaction est entretenue ou pas.
Il est ensuite intéressant de pouvoir déterminer expérimentalement les enthalpies de réaction puisque nous avons utiliser de nombreuses approximations (gaz parfaits, mélanges idéaux, Ellingham, énergie de liaison en phase gazeuse...).

3 Comment déterminer expérimentalement une enthalpie de réaction ?

Remarque : Il faut au préalable déterminer la masse en eau du calorimètre.

Chaleur d'une réaction acido-basique

✍ Cachau p190 ⏲ 5min

Dans le DEWAR, On verse 90 mL d'eau distillée (pipette jaugée) et 10 mL d'acide chlorhydrique. On ferme avec un bouchon à deux trous. On insère dans l'un des orifices la sonde thermométrique. L'autre est en dessous d'une burette de 25 mL dans laquelle on a versé la soude concentrée. Toutes les 30 s, on verse par 1 mL la soude. On attend 20 s après ajout pour lire la température. **C'est important d'être régulier**.

Réaction :

$$H^+(aq) \ + \ HO^-(aq) \ = \ H_2O(l)$$

En préparation, on aura bien entendu tracé la courbe complète. Attention, il faut aller jusqu'à 40 mL et nos hypothèses sur C_p deviennent très osées.

Il faut aussi déterminer μ la masse en eau du calorimètre.

Pour faire les choses bien, on peut aussi déterminer le transfert thermique du calorimètre, pour voir quelles sont ses pertes. Pour se faire, on y met de l'eau chaude et on trouve une $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}|_0$.

On a ainsi accès à l'enthalpie standard de réaction. On suppose la réaction unique et totale. On applique le premier principe pour une réaction adiabatique :

$$C_b V_b \Delta_r H^\circ + (m_{eau} + \rho_{eau} V_b + \mu) c_{eau} \Delta T = 0$$

Donc en traçant

$$\Delta T - \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right|_0 \Delta T = f\left(\frac{C_b V_b}{(m_{eau} + \rho_{eau} V_b + \mu) c_{eau}}\right)$$

on obtient une droite de pente $-\Delta_r H^\circ$.

Nous allons déterminer par le calcul la valeur théorique : $\Delta_f H^\circ(H^+(aq)) = 0$ kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(HO^-(aq)) = -230$ kJ/mol, $\Delta_f H^\circ(H_2O(l)) = -285,8$ kJ/mol et alors : $\Delta_r H^\circ = -55,8$ kJ/mol, la réaction est bien exothermique.

Conclusion

Dans cette leçon, on a vu plusieurs applications aux transformations chimiques du premier principe de la thermodynamique. On a considéré les réactions quantitatives. Mais on sait que ce n'est pas toujours le cas. Cependant, pour prévoir les équilibres, il nous faut introduire la grandeur entropie et le second principe qui donne des conditions d'équilibre.

Commentaires

On a pas le temps d'aborder les transformations et les états standard mais on suppose que cela a été aborder dans le chapitre/la partie juste avant.

On a a priori pas le temps de parler des processus de référence.

Questions

Autres étapes de la métallurgie du zinc ? lixiviation, élimination des ions fer (III), cémentation et enfin électrolyse (voir Techniques de l'ingénieur M2270 V2, Métallurgie du zinc).
Grillage de la blende : sulfure de zinc en oxyde de zinc, avec production de dioxyde de soufre (utiliser pour la production de soufre), on obtient de la calcine
Lixiviation de la calcine : mise en solution du zinc par oxydation avec acide sulfurique
Électrolyse après élimination de toutes les autres espèces en solution : réduction des ions zinc (II) pour obtenir du zinc solide

Hypothèses pour la température de flamme ? Transformation isobare et adiabatique. Adiabatique car rapide et la flamme se produit dans un milieu gazeux qui est donc un bon isolant thermique.

Sécurité vis-à-vis des produits chimiques utilisés ? Hydroxyde de Baryum : corrosif, toxique par inhalation, contact avec la peau et ingestion donc gant, lunette et hotte
Chlorure d'ammonium : nocif par ingestion, irritant pour les yeux et par inhalation donc lunette et hotte
Soude à 6M : très concentrée donc gant,lunettes, hotte

Qu'est-ce qui donne l'évolution de l'enthalpie standard de réaction avec la température ? La loi de Kirchoff : $\frac{dH^\circ}{dT}\big|_{P,xi} = C_P{}^\circ$.
Donc $\frac{d\Delta_r H^\circ}{dT} = \Delta_r C_P{}^\circ$, en général, on ajoute l'approximation d'Ellingham qui dit que $\Delta_r C_P{}^\circ$ est indépendante de la température ou vaut $0,5\ K^{-1} \cdot mol^{-1}$ en l'absence de changement d'état.

Comment s'écrit le second principe en chimie ? $dS = \delta S_e + \delta S_i$ avec $\delta S_e = \frac{Q}{T_{ext}}$ et $\delta S_i >= 0$
Évolution monobare et monotherme : $G = U + PV - ST$ et alors $\Delta_r G d\xi <= 0$
En pratique, on compare le quotient réactionnel et la constante d'équilibre puisque $\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i = RT \ln\left(\frac{Q}{K^\circ}\right)$.
On peut alors prédire l'évolution du système et optimiser les procédés.

Lien entre la variation d'ethalpie et la variation d'énergie interne ? $H = U + PV$ + loi des gaz parfaits + on néglige le travail des forces de pression pour les phases condensées.
$\Delta_r H^\circ = \Delta_r U^\circ + \sum_{i,gaz} \nu_i RT$

Autre méthode pour déterminer une chaleur de réaction ? Bombe calorimétrique, mise au point par Marcellin Berthelot en 1879 : on est à volume constant (et plus à pression constante) et alors $\Delta U = Q_V$. On peut déterminer l'enthalpie de combustion.

Détermination de la masse en eau du calorimètre ? Méthode des mélanges
On suppose la transformation adiabatique, on applique le premier prinicpe (pas de réaction chimique) :
$(m^f_{eau} + m^c_{eau} + \mu) c_{p,eau}(T_f - T_i) = 0$

Ordre de grandeur énergies de liaison Liaison C-C : 350 kJ/mol
Interaction de VdW : 2 kJ/mol (Keesom, permanent-permanent ; idem pour Debye, permanent-induit), 30 kJ/mol (London, instantané-induit)
Liaison H : 1-4 kJ/mol

LC 20

Détermination de constantes d'équilibre

Niveau : CPGE (MPSI/PCSI)

Programme officiel (MPSI)

- Exploiter une courbe de titrage pour déterminer une valeur expérimentale d'une constante thermodynamique d'équilibre.
- Déterminer une constante d'équilibre.
- Réactions AB : Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Retrouver les valeurs de constantes d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement).

Bibliogra-pH-ie

- ✍ *Chimie Tout-en-un MPSI*, **Fosset** — Méthode de Gran
- ✍ *Des réactions de la famille acide-base*, **Cachau-Hereillat** — Acide acétique
- ✍ *Florilège de chimie pratique*, **Daumarie** — Coefficient de partage du diiode et/on mesure d'un pK_i
- ✍ Bordas Espace — Dosage de l'acide éthanoïque "simplement"
- ✍ *L'épreuve orale du CAPES de chimie* **Porteu de Buchère** — K_s d'AgCl
- ✍ https://fr.wikipedia.org/wiki/Détermination_des_constantes_d'équilibre

Prérequis

- ➢ Avancement
- ➢ Acide/base de Bronsted
- ➢ Equilibre de précipitation
- ➢ Mesure de pH-métrie, conductimétrie, spectropHotométrie
- ➢ Oxydo-réduction
- ➢ Titrage

Expériences

- Mesure du pK_A de l'acide éthanoïque par colorimétrie et pH-métrie
- Mesure du pK_i du BBP par spectropHotométrie
- Mesure du pK_s de l'AgCl par potentiométrie

1 Théorie : loi de Guldberg et Waage . . . 933
1.1 Notion d'activité et constante d'équilibre . . . 933
1.2 Loi d'évolution d'un système . . . 934
1.3 Détermination théorique d'une constante . . . 934
1.4 Stratégie de détermination expérimentale d'une constante . . . 935
2 Détermination directe de constante d'équilibre . . . 935
2.1 Produit ionique de l'eau par conductimétrie . . . 935
2.2 Constante d'acidité de l'acide éthanoïque par pH-métrie . . . 936
2.3 Produit de solubilité d'AgCl par potentiométrie . . . 936
3 Détermination indirecte : titrage/dosage . . . 938
3.1 Constante d'acidité par la méthode de Gran . . . 938
3.2 Constante de complexation du bleu de bromophénol (BBP) . . . 939
3.3 Coefficient de partage . . . 940

Introduction

En 1803 Claude-Louis Berthollet découvre qu'il est possible d'avoir des réactions chimiques réversibles dans des lacs de natron. Jusqu'alors l'avancement de la connaissance en chimie était que toute réaction était totale et donc contrainte par un réactif limitant qui viendrais à manquer. La réaction qui se produit aux lacs de natron pouvant aller dans les deux sens, direct et indirect, cela signifie qu'un état d'équilibre doit exister où la réaction directe et l'indirecte se compensent.

Nous allons donc chercher à quantifier cet état d'équilibre.

1 Théorie : loi de Guldberg et Waage

À chaque fois que l'on parlera de constante d'équilibre, on se place dans une situation d'équilibre. Cela signifie que la température est fixée, et que l'état pHysicochimique du système n'évolue plus.

Toutes les expériences que l'on va faire ici se placeront dans une situation d'équilibre chimique.

1.1 Notion d'activité et constante d'équilibre

Si on prend un système qui est régi par une équation chimique, $\sum \nu_i A_i = 0$, la réaction peut avoir lieu dans deux sens. Vers la formation des produits (qui ont des $\nu_i > 0$) ou vers celle des réactifs. On peut définir par la **loi d'action des masses** ou loi de G. et W. la constante d'équilibre de la réaction chimique :

La constante d'équilibre d'une réaction $\sum \nu_i A_i = 0$ s'écrit sous la forme suivante, avec le *eq* qui veut dire équilibre et t'insistes dessus bordel.

$$K^\circ = \prod a(A_i)_{\text{eq}}{}^{\nu_i} \tag{20.1}$$

Dans cette équation on fait apparaître l'activité chimique des composés. Chaque espèce dans le milieu réactionnel a une activité chimique, notée $a(A_i)$. Cette activité chimique peut s'exprimer de manière générique dans les cas qui sont traités dans notre programme :

type	activité
solvant	1
solide	1
soluté	C/C° = concentration sur C standard (1 mol/L)
gaz	P/P° = pression partielle sur P standard (10^5 Pa)

Il est bon de remarquer que l'activité augmente avec la concentration ou la pression partielle, donc augmente avec l'avancement pour les produits, et inversement diminue avec l'avancement pour les réactifs.

Exemple

$$\text{Ca}^{2+}{}_{(\text{aq})} + 2\text{HCO}_3^{2-}{}_{(\text{aq})} = \text{CaCo}_{3\ (\text{s})} + \text{CO}_{2\ \text{g}} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$$

$$K^\circ = \frac{1 \times \dfrac{P_{\text{CO}_2,\text{eq}}}{P^\circ} \times 1}{\dfrac{[\text{Ca}^{2+}]_{\text{eq}}}{C^\circ} \times \left(\dfrac{[\text{HCO}_3^{2-}]_{\text{eq}}}{C^\circ}\right)^2}$$

Quelques informations utiles sur K : Sans dimension, associé à $\mathrm{pK} = -\log K$, et défini pour la plus petite stoechiométrie possible, dépend de T et P, mais pas des concentrations initiales. Beaucoup de valeur de K° sont tabulées. Par exemple le pKe correspond à la constante de dissociation de l'eau en HO- et H3O+, et vaut 14 à P° et 298K.

Test pour voir si Timéo suit : $K_e = \dfrac{[\mathrm{H_3O^+}]_{\mathrm{eq}}[\mathrm{HO^-}]_{\mathrm{eq}}}{C^{\circ 2}}$, donc à l'équilibre dans l'eau pure, $[\mathrm{H_3O^+}] = ?\ 10^{-7}$ bravo Timéo ! *Mais c'est qu'il s'améliore celui-là.*

1.2 Loi d'évolution d'un système

Ainsi si on connaît K°, et que l'on connaît les concentration initiales, on peut déterminer l'évolution du système, puisqu'on sait que la quantité $\prod a(A_i)^{\ \nu_i}$ va évoluer vers son état d'équilibre. Ainsi on définit $Q = \prod a(A_i)^{\ \nu_i}$. Cette définition nous donne directement une condition d'évolution du système ! Étant donné que l'activité augmente avec l'avancement pour les produits et diminue pour les réactifs, on a :

- $Q < K^\circ$ indique une évolution dans le sens direct
- $Q > K^\circ$ indique une évolution dans le sens indirect
- $Q = K^\circ$ indique que l'on a atteint l'équilibre

Exercice pour voir si Timéo suit toujours

Prenons la réaction modèle d'acidité faible, et négligeons l'autoprotolyse de l'eau : $AH = A^- + H^+$. La constante d'équilibre associée est K_a

On met initialement c_i =0.01 mol d'acide dans un litre d'eau préalablement acidifiée à pH 5 (1 litre en tout). Le pKa de cet acide vaut 2. Que vaut le pH à l'équilibre ?

Tableau d'avancement, on nomme l'avancement x, $Q = \dfrac{(10^{-\mathrm{pH}_{init}} + x)x}{c^\circ(c_i - x)}$, et finalement à l'équilibre on a x_f, et une eq d'ordre 2 : $\dfrac{(10^{-\mathrm{pH}_{init}} + x_f)x_f}{c^\circ(c_i - x_f)} = 10^{-\mathrm{pKa}}$. On trouve $x_f = 0.0062$, pH=2.2.

Mais comment déterminer ces constantes lorsqu'elles ne sont pas tabulées ?

1.3 Détermination théorique d'une constante

Une première stratégie non-expérimentale de détermination de constante d'équilibre est la recherche dans les tables. Évidement tout n'est pas tabulé, mais il y a une astuce.

Si on considère deux réactions en chaînes, par exemple $A + B = C + D$ puis $C + D = E + F$, on peut tout à fait considérer l'équation $A + B = E + F$. Si les deux premières ont une constante d'équilibre connue, on peut connaître la constante d'équilibre de la 3eme.

En effet $K_1 = \dfrac{a(C)a(D)}{a(A)a(B)}$ et $K_2 = \dfrac{a(E)a(F)}{a(C)a(D)}$ **à l'équilibre**. Or $K_3 = \dfrac{a(E)a(F)}{a(A)a(B)} = K_1K_2$.

Généralisation : Si on considère un ensemble de réactions R_i de constantes d'équilibres K_i, et qu'il existe une réaction s'écrivant sous la forme $R = \sum \alpha_i R_i$, alors la constante d'équilibre associée à cette réaction est $K = \prod (K_i)^{\alpha_i}$.

Exemple

$C_4H_4O_4$, l'acide maléique, est un acide double qui a deux pKa dans l'eau. Sa première acidité est à 1.83 et sa deuxième à 6.07. La réaction $C_4H_4O_4$=$C_4H_2O_4^{2-}$+2H^+ est la somme de ses deux acidités. Sa constante d'équilibre vaut donc $K = K_{a1}K_{a2}$, soit $10^{-7.9}$.

1.4 Stratégie de détermination expérimentale d'une constante

C'est bien beau tout ça, mais que se passe-t-il si on veut déterminer expérimentalement une constante d'équilibre ? Et bien c'est ce que nous allons voir. Dans les exercices on trouve les concentrations avec des constantes tabulées. Pour déterminer une constante d'équilibre, c'est le chemin inverse qu'il faut faire : Connaissant les concentrations, il faut en déduire la constante qui les lie. Il est donc crucial de maîtriser les différents techniques de détermination de concentrations.

Pour être sûr de ne pas se planter, il faut s'assurer **d'être à l'équilibre physique et chimique.** La température doit donc rester constante, même pour une réaction exothermique...

Il faudra bien insister, pour chaque expérience ci dessous, sur le fait qu'on est bien à l'équilibre et que T=cste.

2 Détermination directe de constante d'équilibre

Dans cette partie, on s'intéresse à la détermination d'une constante d'équilibre par la mesure directe et unique d'une grandeur indicatrice de l'avancement de l'équilibre. Cette méthode est rapide mais souvent peu précise car elle dépend trop de la précision absolue de l'appareil et de la pureté du mélange réactionnel.

2.1 Produit ionique de l'eau par conductimétrie

Il faudra bien insister, pour chaque expérience ci dessous, sur le fait qu'on est bien à l'équilibre et que T=cste.

Une des constantes d'équilibre les plus connues est la produit ionique K_e de l'eau. Elle correspond à l'équilibre

$$2H_2O = H_3O^+ + HO^-$$

	H_2O	H_3O^+	HO^-
État initial	solvant	0	0
Équilibre	solvant	h	h

En notant h la concentration en ion H_3O^+, un rapide tableau d'avancement tenant compte du fait que l'eau soit un solvant nous permet n'écrire :

$$K_e = \frac{[H_3O^+][HO^-]}{(C°)^2} = \frac{h^2}{(C°)^2}$$

Si on mesure la conductivité σ d'une eau permutée ($\simeq$ distillée), la loi de Kolhrausch donne

$$\sigma = (\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HO^-})h$$

On obtient donc K_e par la formule :

$$K_e = \left(\frac{\sigma}{(\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{HO^-})C°}\right)^2 \tag{20.2}$$

Mesure directe de K_e

✍ ⏲

Étalonner le conductimètre puis plonger la sonde dans de l'eau distillée. Mesurer σ et en déduire K_e.

Données : $\lambda_{H_3O^+} = 3.498 \times 10^1$ mSm^2/mol et 19,86 pour HO^-, à 25°C.

Remarques

- On peut contrôler la pureté de l'eau avec cette mesure.
- On n'obtient pas la valeur connue de 10^{-14} car il y a un équilibre avec le CO_2 de l'air, et le jour de passage on ne sera sûrement pas dans les conditions standards à 298 K.
- L'étalonnage du conductimètre est essentiel car on mesure une valeur unique et non pas une variation.

2.2 Constante d'acidité de l'acide éthanoïque par pH-métrie

Il faudra bien insister, pour chaque expérience ci dessous, sur le fait qu'on est bien à l'équilibre et que T=cste.

On s'intéresse maintenant à une constante d'acidité à travers l'acide éthanoïque. L'équilibre s'écrit

$$CH_3COOH + H_2O = CH_3COO^- + H_3O^+$$

	CH_3COOH	H_2O	CH_3COO^-	H_3O^+
État initial	C_a	SOLVANT	0	0
Équilibre	$C_a - h$	SOLVANT	h	h

On note encore une fois h la concentration en H_3O^+. D'après le tableau d'avancement,

$$K_A = \frac{[CH_3COO^-][H_3O^+]}{[CH_3COOH]C^\circ} = \frac{h^2}{(C_a - h)C^\circ}$$

Le pH peut ainsi être relié non seulement à l'avancement mais aussi à la constante K_A :

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{h}{C^\circ}\right) \qquad \Rightarrow \qquad K_a = \frac{C^\circ \cdot 10^{-2\text{pH}}}{C_a - C^\circ \cdot 10^{-\text{pH}}}$$

☕

Mesure directe du K_A de l'acide éthanoïque

✍ ⏲

Étalonner le pH-mètre puis plonger la sonde dans de une solution d'acide éthanoïque de concentration connue. Mesurer le pH et en déduire K_A.

Remarques

- Les incertitudes viennent principalement de l'appareil et des électrodes, ainsi que de l'étalonnage.
- Les erreurs de cette méthode sont généralement dues au fait que les potentiomètres sont faits pour mesurer des variations et non pas des mesures uniques.

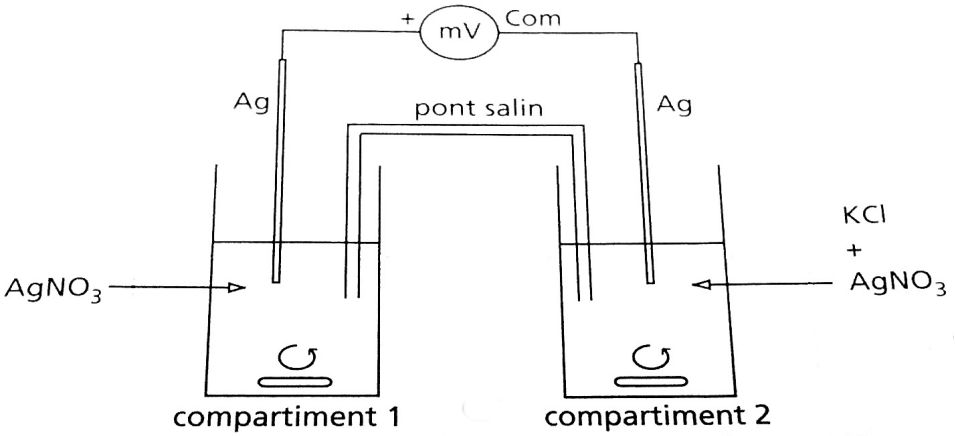
2.3 Produit de solubilité d'AgCl par potentiométrie

On finit cette partie sur la mesure directe par une troisième constante d'équilibre : le produit de solubilité. Pour ce faire, on utilise l'exemple d'AgCl, dont le produit de solubilité correspond à l'équilibre

$$AgCl_{(s)} = Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)} \qquad \text{et} \qquad K_s(AgCl) = \frac{[Ag^+][Cl^-]}{a_{AgCl_{(s)}} C^{\circ 2}}$$

Pour mesurer K_s, on va utiliser le montage suivant :

- Compartiment (1) : électrode d'argent dans une solution d'$AgNO_3$
- Compartiment (2) : électrode d'argent dans une solution de KCl avec quelques gouttes d'$AgNO_3$
- Les deux compartiments sont reliés par un pont salin
- Un millivoltmètre est placé sur les deux électrodes



Chaque compartiment est le siège d'une équation d'oxydation : dans le compartiment (1) les ions Ag^+ réagissent avec l'argent solide et dans le compartiment (2) les ions Ag^+ et Cl^- réagissent pour former AgCl. Lorsque la solution est saturée, *i.e.* quand la dissolution d'AgCl est à l'équilibre, on observe une ddp et on peut en déduire le K_s. En effet, les potentiels des électrodes valent, d'après la formule de Nernst,

$$\begin{cases} E_1 = E^0(\mathrm{Ag^+/Ag}) + \dfrac{RT}{\mathcal{F}} \ln\left(\dfrac{[\mathrm{Ag^+}]_1}{C^\circ}\right) \\ E_2 = E^0(\mathrm{Ag^+/Ag}) + \dfrac{RT}{\mathcal{F}} \ln\left(\dfrac{[\mathrm{Ag^+}]_2}{C^\circ}\right) \end{cases}$$

donc on obtient

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln\left(\frac{[Ag^+]_1}{[Ag^+]_2}\right)$$

Or l'équilibre de dissolution dans le compartiment (2) garantit que $[Ag^+]_2 = K_s \dfrac{C^{\circ 2}}{[Cl^-]_2}$, ce qui nous donne

$$\Delta E = \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln\left(\frac{[Ag^+]_1[Cl^-]_2}{K_s C^{\circ 2}}\right)$$

On peut finalement exprimer K_s comme étant :

$$K_s(AgCl) = \frac{[Ag^+]_1[Cl^-]_2}{C^{\circ 2}} - \exp\left(\frac{RT}{\mathcal{F}}\Delta E\right) \tag{20.3}$$

Mesure directe du K_s d'AgCl

✍ Porteu de Buchèrep75 ⏲ 5 min

Matériel :

- solution d'$AgNO_3$ à 0.01 M
- solution de KCl à 0.01 M
- 2 électrodes d'argent

- un millivoltmètre
- KNO_3 saturé + papier filtre, ce sera le pont salin

Dans un premier bécher (bécher (1)), plonger une électrode d'argent dans 50 mL d'$AgNO_3$.

Dans le second bécher (bécher (2)), plonger une électrode d'argent dans 50 mL de KCl auxquels on a ajouté quelques gouttes d'$AgNO_3$.

Mesurer la ddp entre les deux électrodes. La réaction de formation du chlorure d'argent a lieu dans le compartiment (2) lorsque l'on voit un précipité blanc se former.

Il faut attendre un peu que l'équilibre soit bien établi pour que la mesure au voltmètre soit stable et donc fiable. On lance donc l'expérience après avoir expliqué le matériel utilisé et on explique la théorie avant de relever le point de mesure. **Attention : le pont salin ne doit pas contenir d'ions chlorure.**

on peut comparer à la valeur tabulée $\mathrm{p}K_s = 9.752$.

Remarque

On peut connaître K_s en calculant $\Delta_r G = \Delta_r H - T\Delta_r S = -RT\ln(K_s)$

3 Détermination indirecte : titrage/dosage

Il faudra bien insister, pour chaque expérience ci dessous, sur le fait qu'on est bien à l'équilibre et que T=cste.

3.1 Constante d'acidité par la méthode de Gran

On va reprendre l'exemple de l'acide éthanoïque. On rappelle qu'elle décrit l'équation

$$CH_3COOH + H_2O = CH_3COO^- + H_3O^+$$

On a alors l'équation $\mathrm{pH} = \mathrm{pK}_A + \log\left(\frac{[CH_3COO^-]}{[CH_3COOH]}\right)$, avec $[CH_3COO^-] = \frac{CV}{V_{\text{tot}}}$ et $[CH_3COOH] = \frac{C_0V_0 - CV}{V_{\text{tot}}}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathrm{pH} &= \mathrm{p}K_A + \log\left(\frac{CV}{C_0V_0 - CV}\right)\\ cV10^{-\mathrm{pH}} &= K_A(C_0V_0 - CV)\\ V10^{-\mathrm{pH}} &= K_A(V_{\text{eq}} - V)\end{aligned}$$

En traçant $V10^{-\mathrm{pH}} = f(V)$, on obtient une droite dont la pente est K_A et l'ordonnée à l'origine donne le volume équivalent.

Pour que ça marche, il faut cependant que la réaction soit quantitative.

Remarque

Un bon vieux titrage pH-métrique ça fonctionne aussi.

L'avantage de cette méthode par rapport à une mesure directe est sa précision ainsi que sa capacité à déterminer V_{eq}. Cependant, elle est destructive.

3.2 Constante de complexation du bleu de bromophénol (BBP)

Une autre méthode de détermination expérimentale de la constante d'équilibre peut-être par spectrophotométrie si l'espèce considéré est coloré ce qui est le cas d'un indicateur coloré par exemple. Dans le cas présent l'indicateur coloré est le bleu de bromophénol et forme un couple acide-base que nous écrirons InH/In, ainsi la formule de Henderson-Hasselbalch est toujours valable :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK}_i + \log \frac{[\mathrm{In}^-]}{[\mathrm{InH}]}$$

Beer-Lambert donne

$$A = l(\epsilon_{\mathrm{InH}}[\mathrm{InH}] + \epsilon_{\mathrm{In}^-}[\mathrm{In}^-])$$

.

On note c_0 la concentration initiale en BBP que l'on met dans la solution. On va alors noter A_{InH} l'absorbance de la solution quand on est à pH<pK-1, et A_{In^-} celle à pH>pK+1. On a alors :

$$A = (A_{\mathrm{In}^-}[\mathrm{In}^-] + A_{\mathrm{InH}}(c_0 - [\mathrm{In}^-]))/c_0$$

Ainsi on peut directement écrire

$$[\mathrm{InH}] = c_0 \frac{A_{\mathrm{In}^-} - A}{A_{\mathrm{In}^-} - A_{\mathrm{InH}}} \qquad [\mathrm{In}^-] = c_0 \frac{A - A_{\mathrm{InH}}}{A_{\mathrm{In}^-} - A_{\mathrm{InH}}}$$

Et finalement on a la loi qui nous intéresse :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pK} + \log \frac{A - A_{\mathrm{InH}}}{A_{\mathrm{In}^-} - A} \tag{20.4}$$

Mesure spectrophotométrique du K du bleu de bromophénol

✍ Florilège de chimie pratique, Daumarie ⏲ 35mn prépa, 5mn passage

Prendre une solution basifiée (avec un pH aux alentours de 8) de 250mL puis la verser dans un bécher de 500 mL, ajouter du bleu de bromophénol (à la louche). Abaisser le pH à 7.0 en versant de l'acide chlorhydrique (plus la solution est concentré plus le résultats obtenu à la fin sera précis car la variation de concetration du bleu de bromophénol sera plus faible, mais par contre ajuster le pH sera plus dur.)

Mettre dans une cuve et mesurer le spectre d'absorption. Répéter l'opération en abaissant progressivement le pH jusqu'à 2.5 (les valeurs de pH intermédiaires doivent être aux nombre de 5 à 10 et importe peu du moment quelles sont relativement régulièrement espacées, mais la valeur de départ de 2.5 et de 7 sont de préférence à atteindre précisément).

En présentation refaire une mesure à un pH entre 2.5 et 7 auquel il n'existe pas de mesure.

Il ne reste ensuite qu'à choisir une longueur d'onde (celle à laquelle l'absorbance de la solution à pH 7 est maximum) et à en extraire les valeurs de l'absorbance pour chaque pH. A_{InH} sera l'absorbance pour pH=2.5 et A_{In^-} sera l'absorbance pour pH=7.

On s'attend à pK = 4.1.

Généralement cette expérience donne des résultats éloignés de la valeur tabulée. Il existe plusieurs raisons, mais la principale est sans doute que lorsqu'on fait varier le pH du milieu on utilise un volume d'acide non négligeable ($\simeq$ 150ml) ainsi au cours des mesures il y a un effet de dilution du bleu de bromophénol. On peut résoudre se problème en acidifiant la solution avec un acide très concentré ou avec des cristaux d'une espèce acide.

3.3 Coefficient de partage

Prenons comme exemple l'équilibre de partage du diiode entre l'eau et le cyclohexane :

$$\mathrm{I_{2\ eau}} = \mathrm{I_{2\ cyclo}}$$

On définit la **coefficient de partage** comme étant la constante d'équilibre de cette réaction :

$$P = \frac{[\mathrm{I_2}]_{\mathrm{cyclo}}}{[\mathrm{I_2}]_{\mathrm{eau}}}$$

Cette constante traduit l'affinité d'un soluté par rapport à un solvant organique relativement à l'eau.

Mesure du coefficient de partage du diiode

✍ Florilège de chimie pratique, Daumarie ⏲ 5 min

Dissoudre 1 g de diiode dans 200 mL d'eau. Une grande partie du diiode ne devrait normalement pas s'être dissoute. Ajouter 20 mL de cylcohexane. La pHase aqueuse jaune pâle devient incolore et la pHase organique devient fushia.

Extraire la pHase aqueuse et la doser avec du thiosulfate de sodium à 0.1 M. On a la réaction :

$$2\mathrm{S_2O_3^{2-}} + \mathrm{I_2} = 2\mathrm{I^-} + \mathrm{S_4O_6^{2-}}$$

En déduire la quantité de diiode dans la phase aqueuse.

On connaît la quantité de diiode totale, on connaît la quantité de diiode en phase aqueuse donc on connaît la quantité de diiode en phase organique. En déduire le coefficient de partage après avoir converti ces quantités en concentrations.

On trouve (normalement) que le diiode est 8 fois plus présent dans le cyclohexane que dans l'eau, ce qui est prévisible puisque le diiode est apolaire comme le cyclohexane.

Conclusion

Rappel de ce que l'on a vu. On peut maintenant étudier plus en détail la thermodynamique des $\Delta_r G$ qui est sous-jacente, et l'appliquer à l'optimisation de porcessus chimiques !

LC 21

Cinétique homogène

Niveau : CPGE

Extraits du programme

Formation expérimentale

Suivi cinétique de transformations chimiques Suivi en continu d'une grandeur physique. Rôle de la température.	Mettre en oeuvre une méthode de suivi temporel. Exploiter les résultats d'un suivi temporel de concentration pour déterminer les caractéristiques cinétiques d'une réaction. Proposer et mettre en oeuvre des conditions expérimentales permettant la simplification de la loi de vitesse. Déterminer la valeur d'une énergie d'activation.

Formation disciplinaire

En réacteur fermé de composition uniforme	
Vitesses de disparition d'un réactif et de formation d'un produit.	Déterminer l'influence d'un paramètre sur la vitesse d'une réaction chimique. Relier la vitesse de réaction à la vitesse de disparition d'un réactif ou de formation d'un produit, quand cela est possible.
Vitesse de réaction pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Lois de vitesse : réactions sans ordre, réactions avec ordre simple (0, 1, 2), ordre global, ordre apparent.	Établir une loi de vitesse à partir du suivi temporel d'une grandeur physique. Exprimer la loi de vitesse si la réaction chimique admet un ordre et déterminer la valeur de la constante cinétique à une température donnée. Déterminer la vitesse de réaction à différentes dates en utilisant une méthode numérique ou graphique. Déterminer un ordre de réaction à l'aide de la méthode différentielle ou à l'aide des temps de demi-réaction. Confirmer la valeur d'un ordre par la méthode intégrale, en se limitant strictement à une décomposition d'ordre 0, 1 ou 2 d'un unique réactif, ou se ramenant à un tel cas par dégénérescence de l'ordre ou conditions initiales stoechiométriques.
Temps de demi-réaction. Temps de demi-vie d'un nucléide radioactif.	Approche documentaire : à partir de documents autour des radionucléides, aborder par exemple les problématiques liées à leur utilisation, leur stockage ou leur retraitement.
Loi empirique d'Arrhenius ; énergie d'activation.	Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction chimique. Déterminer la valeur de l'énergie d'activation d'une réaction chimique à partir de valeurs de la constante cinétique à différentes températures. Approche documentaire : à partir de documents, découvrir la notion de mécanismes réactionnels

Bibliographie

- ✍ *Chimie tout-en-un MPSI-PTSI, J'intègre*, **Fosset, Baudin et Lahitète** ⟶ La base de la leçon
- ✍ *Chimie MPSI-PTSI*, **Grécias** ⟶ D'autres exemples
- ✍ **L'oxydoreduction**,*Sarrazin, Verdaguer* ⟶ Bouteille bleue
- ✍ **40 expériences illustrées de Chimie organique et générale**, *Martinand-Lurin, Grüber* ⟶ Érythrosine B

Prérequis

- ➢ Loi de Beer-Lambert
- ➢ Équations Bilans

Expériences

- Bouteille Bleue
- Érythrosine B x3 ou plus en préparation

1 Modèles cinétiques . . . 943
1.1 Vitesse de réaction . . . 943
1.2 Loi de vitesse, ordres partiels, ordre global . . . 944
1.3 Constante de vitesse et loi d'Arrhénius . . . 944
2 Suivi expérimental d'une cinétique . . . 945
2.1 Méthodes de suivi . . . 945
2.2 Méthode par absorbance . . . 945
2.3 Exemple de suivi cinétique . . . 946
3 Détermination des paramètres de modélisation . . . 947
3.1 Exploitation des conditions expérimentales . . . 947
3.2 Méthodes intégrales et différentielles . . . 947
3.3 Exploitation des courbes . . . 948
3.4 Résolution d'exercice . . . 948

Introduction

La cinétique chimique est l'étude de l'aspect temporel de la réaction chimique. Elle vient en complément de l'étude thermodynamique qui ne s'intéresse elle qu'aux états initiaux et finaux. Ainsi la thermodynamique prédit que le diamant ne devrait pas exister en surface (graphite forme stable). C'est la cinétique qui prédit aussi que les aliments se conservent mieux au froid qu'à température ambiante.
On peut aborder la cinétique sous deux angles : microscopique avec l'étude des mécanismes et macroscopique, s'appuyant sur des résultats expérimentaux. Cette leçon (et en MPSI en général), on ne s'intéresse qu'à l'étude macroscopique de la cinétique.
On va commencer par définir les outils utilisés en cinétique. On considère dans toute la leçon des systèmes **fermés** (sans échange de matière avec l'extérieur), **isothermes** (à température constante), **homogènes** (constitués d'une seule phase), ce qui simplifiera l'étude pour une première approche de la cinétique.

Pour introduire par l'exemple sans manip, on peut parler de la forme la plus stable du carbone : le graphite. Un diamant ne va pas naturellement se transformer en graphite, parce qu'il est cinétiquement bloqué.

[PROBLÉMATIQUE] La bouteille bleue :

✍ Sarrazin p179, https://youtu.be/PRa4utKz03I

Le bleu de méthylène est un indicateur coloré qui permet de suivre les propriétés redox du milieu. Sa forme oxydée est bleue, alors que sa forme réduite est incolore. Le glucose réduit BM en BMH, initialement la bouteille est incolore. Lorsqu'on l'agite, l'O2 dissous oxyde la forme réduite BMH et le milieu prend une coloration bleue. On observe la réaction (1) est plus lente que la (2).

1 Modèles cinétiques

1.1 Vitesse de réaction

Considérons une réaction sous la forme

$$0 = \sum_i \overline{\nu_i} A_i$$

où $\overline{\nu_i}$ est le coefficient stoechiomètre algébrique de l'espèce i (négatif si c'est un réactif, positif si c'est un produit).

La **vitesse de formation** de l'espèce i s'écrit alors

$$v_i = \frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = \overline{\nu_i}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

On peut alors définir une vitesse unique de réaction, exprimée en mol/s, par

$$v = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\overline{\nu_i}}\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t}$$

Cependant, cette vitesse est une variable extensive. C'est pourquoi on préfère définir une **vitesse (volumique) de réaction**, exprimée en mol/L/s, par

$$v = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

Pour une transformation isochore (ce qui sera le cas dans toute cette leçon), on écrit alors

$$v = \frac{1}{\overline{\nu_i}}\frac{\mathrm{d}[A_i]}{\mathrm{d}t}$$

Exemple

Afin de mieux visualiser ces notations, on utilise comme exemple la réaction de l'erythrosine B (colorant rose, appelé E127), avec ClO^- qui forme une espèce nommé E127F :

$$E127 + ClO^- \longrightarrow E127F$$

1.2 Loi de vitesse, ordres partiels, ordre global

Pour certaines réactions chimiques, à température constante, la vitesse de réaction peut s'écrire en fonction des concentrations des réactifs sous la forme :

$$v = k \prod_{\text{réactif } i} [A_i]^{\alpha_i}$$

où k est la **constante de vitesse** de la réaction et α_i est l'**ordre partiel** par rapport au réactif A_i, *a priori indépendant de* ν_i.

On appelle **ordre global** α de la réaction la somme des ordres partiels : $\alpha = \sum_i \alpha_i$.

Exemple

La vitesse de la réaction de l'E127 se met sous la forme $v = k[E127]^\alpha[ClO^-]^\beta$

En général, la concentration des réactifs ET des produits interviennent, si bien que l'on a $v = k \cdot f([A_i])$

Exemple

Pour la réaction $2O_3 \longrightarrow 3O_2$, on a $v = \frac{k_1 k_2 [O_3]^2}{k_{-1}[O_2]+k_2[O_3]}$.

1.3 Constante de vitesse et loi d'Arrhénius

La constante de vitesse k d'une réaction est une grandeur dont l'unité dépend de l'ordre global de la réaction. En notant γ cet ordre global, k s'exprime en $L^{\gamma-1}mol^{1-\gamma}s^{-1}$.

Exemple

Pour la réaction de E127, $\gamma = 1$. On en déduit que k s'exprime en s^{-1}.

La **loi semi-empirique d'Arrhénius** permet d'exprimer k avec la relation

$$k = A\exp\left(-\frac{\mathcal{E}_A}{RT}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\ln k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{E}_A}{RT^2}$$

où l'**énergie d'activation molaire** $\mathcal{E}_A$ et A ne dépendent pas de la température. Cette loi, bien que trouvée de façon expérimentale, a été "démontrée" en peu plus tard par la théorie.

On peut interpréter cette loi de la façon suivante : plus on chauffe, plus les molécules s'agitent donc plus on a de collisions par unité de temps donc plus la réaction est rapide.

☕

On peut ainsi comprendre la manip de la bouteille bleue faite en introduction.

Ordre de grandeur

Si $\mathcal{E}_A \simeq 50$ kJ/mol, alors k est doublée si T augmente de 10°C. En général, les réactions ont des énergis d'activation entre 40 et 130 kJ/mol.

Tout ça est bien beau mais comment déterminer expérimentalement cette vitesse de réaction ? Réponse : en accédant à l'évolution des concentrations en fonction du temps.

↓

2 Suivi expérimental d'une cinétique

Nous voulons maintenant suivre l'évolution avec le temps d'une concentration.

2.1 Méthodes de suivi

On rappelle que pour déterminer la composition d'un système on a globalement titrage, dosage, conductimétrie, pH-métrie et absorbance.

Ici on veut suivre une concentration en direct, alors il faut réfléchir à ce qui est le meilleur compromis de vitesse, d'efficacité et de non destructivité. Le titrage, c'est mort, il faut prélever et détruire. Le dosage, c'est trop long, il faut diluer et doser proprement à chaque fois. Ce sont des méthodes chimiques, elle nécessitent l'établissement d'un équilibre et sont donc inenvisageables.

Il est à noter qu'elles sont cependant faisable à condition d'effectuer une **trempe** de la réaction, *i.e.* un refroidissement brutal qui arrête la réaction.

Réalisation d'une trempe

✍ ✍ https ://youtu.be/PRa4utKz03I ⏲ 1mn

"Bouteille bleue" dans deux tubes à essai. On en plonge un dans un bain de glace. L'autre devient incolore, pas celui dans la glace => réaction arrêtée :)

Les méthodes de suivi conductimétrique et pH-métrique sont en revanche rapides, faites *in-situ*, et donc nettement plus avantageuses. Ce sont des méthodes physiques, reposant sur des propriétés des molécules plutôt que sur leur réactivité.

Pour l'exemple qui suit, nous avons donc décidé de faire un suivi d'absorbance !

2.2 Méthode par absorbance

Dans la limite des faibles concentrations si on a une seule espèce qui absorbe à la longueur d'onde que l'on choisit, on a, avec C la concentration de l'espèce et A_0 une constante :

$$A = A_0 \times \frac{C}{C^o} \tag{21.1}$$

Ainsi pour suivre l'évolution de la concentration il suffit de suivre l'évolution de l'absorbance.

Il est à noter que le temps de réaliser la mesure d'absorbance, la réaction chimique va continuer à se produire. Il est donc important de réaliser les mesures d'une façon reproductibles, en chronométrant précisément le temps entre le prélèvement dans le milieu réactionnel et la prise de mesure.

2.3 Exemple de suivi cinétique

$$E127 + ClO^- \rightarrow E127F$$

Posons un peu les détails. E127 est une espèce colorée avec un maximum d'absorbance autour de 528nm. $A = \epsilon \ell [E127]$. E127F pour sa part n'est pas coloré, ce qui est cool parce qu'on peut ainsi faire le suivi cinétique très facilement !

Suivi cinétique, erythrosine B (E127)

✍ 40 expériences illustrées p.132-140 ⏲ 2mn

En préparation : Faire le blanc, trouver un moyen de suivre le spectro proprement par ordinateur. On fait différentes concentrations

Matériel : eau de Javel de concentration en ion hypochlorite connue environ 10^{-1}M , solution d'E127 de concentration connue à environ 10^{-6}M, chrono, un spectrophotomètre, une cuve, une pipette de 10 mL.

Il y a deux possibilités pour démarrer l'expérience :

- Verser rapidement un volume d'eau de Javel depuis un bécher contenant un volume précis d'E127 : on perd en précision sur la quantité de matière initiale de ClO- mais on gagne en rapidité pour avoir des mesures d'absorbance le plus tôt possible.
- On verse moins rapidement l'érythrosine B avec une pipette graduée/jaugée, on perd en rapidité mais on gagne en précision sur le volume introduit ; pour avoir une exploitation des courbes quantitatives la plus fiable possible, on utilise cette méthode. !

Finalement, on homogénéise (toujours le plus rapidement possible) la solution et on la verse dans une cuve sans oublier d'avoir fait le blanc avec l'eau de Javel qui a une petite coloration (epsilonesque). On lance l'acquisition !

Penser à en faire une deuxième cuve en dehors du spectro pour montrer ce qu'il se passe.

À la fin, ne pas oublier de retirer la cuve du spectro.

Prendre un échantillonnage régulier court (2s par exemple pour pouvoir dériver).

On a obtenu la concentration en fonction du temps, il faut alors traiter ces informations pour obtenir des informations quand à la cinétique de la réaction.

↓

Maintenant on a la concentration en fonction du temps, on a très fortement envie de trouver la loi de vitesse pour généraliser.

Dans le cadre d'une leçon sans expériences, il faut prendre un jeu de données connu pour suivre l'évolution d'une réaction.

3 Détermination des paramètres de modélisation

On présente ici deux méthodes **expérimentales** simplifiant l'expression de la loi de vitesse, puis deux méthodes **de calculs** permettant la détermination des ordres partiels et/ou global à partir des résultats expérimentaux.

3.1 Exploitation des conditions expérimentales

Un choix adapté de conditions expérimentales permet de simplifier l'expression de la loi de vitesse.

3.1.1 Le mélange stoechiométrique

	E127	ClO^-	E127F
État initial	$[E127]_0 = c_0$	$[ClO^-]_0 = c_0$	0
État intermédiaire	$c_0 - x$	$c_0 - x$	x

$[E127]_0$=$[ClO^-]_0$, donc ces concentrations restent égales tout au long de l'expérience, ce qui donne une vitesse $v = k[E127]^{\alpha+\beta}$. On obtient **l'ordre global**.

3.1.2 Dilution d'Ostwald, dégénérescence de l'Ordre

MÉTHODE QUE L'ON UTILISE NOUS. On met un des deux en tellement grande quantité par rapport à l'autre que les variations de concentration du premier sont négligeable. $v = k_{app}[E127]^{\alpha}$, avec k_{app} =$[ClO^-]_0$ $^{\beta}$.

	E127	ClO^-	E127F
État initial	$[E127]_0$	$[ClO^-]_0$	0
État intermédiaire	$[E127]_0 - x$	$\simeq [ClO^-]_0$	x

On obtient l'ordre partiel, et le tracé de cette méthode avec plusieurs concentrations initiales en le diluant permet de déterminer l'autre ordre. Une fois qu'on a fait ça, on peut déterminer les ordres et trouver la loi de vitesse !

3.2 Méthodes intégrales et différentielles

Pour trouver la loi de vitesse, on veut une expression analytique de $[E127](t)$. On a déjà que la vitesse est en $v = k[E127]^{\gamma}$. Pour ce faire, deux méthodes !

3.2.1 Méthode différentielle

On utilise le logarithme afin de se simplifier le calcul. En effet des puissance c'est difficile d'y faire une régression, alors qu'une droite, rien de plus simple.

$$v = \frac{\mathrm{d}[E127]}{\mathrm{d}t} = k[E127]^{\gamma}$$

$$\ln(v) = \ln\left(\frac{\mathrm{d}[E127]}{\mathrm{d}t}\right) = \ln(k) + \gamma \ln([E127])$$

On trace $\ln(v)$ en fonction de ln[E127] et on a une droite de pente γ, d'ordonnée à l'origine $\ln k$!

Problème, les dérivées numériques c'est pas toujours la panacée, on peut les contourner avec la méthode intégrale.

Méthode différentielle

✍ ⏲ 1mn

On fait la méthode différentielle et ça donne une idée de γ.

3.2.2 Méthode intégrale

MÉTHODE QUE L'ON UTILISE ICI. En pratique les ordres partiels ou globaux sont des nombres entiers, donc 1, 2 ou 3. On va traiter les trois cas.

Ordre	Expression
$\alpha = 0$	$[E127] = -k \times t + [E127]_0$
$\alpha = 1$	$\ln[E127] = -k \times t + \ln[E127]_0$
$\alpha = 2$	$\frac{1}{[E127]} = k \times t + \frac{1}{[E127]_0}$

Méthode intégrale

✍ ⏲ 2mn

On trace alors les trois possibilités, et on voit laquelle fait le plus une droite !

3.3 Exploitation des courbes

En regardant quelle courbe est une droite, on valide l'hypothèse correspondante. L'expression correspondante de [E127] en fonction du temps permet de remonter à k_{app} et α. Il suffit alors de répéter l'expérience pour différentes valeurs de $[ClO^-]_0$ et de tracer $\ln(k_{app})$ en fonction de $[ClO^-]_0$ pour obtenir k et β (ce n'est pas une méthode différentielle cependant).

3.4 Résolution d'exercice

Résoudre un exercice typique trouvé en ligne, de façon a donner la méthode propre de résolution de ce type de problèmes. Cela permet de remplacer les expériences.

✍ http://dlecorgnechimie.fr/wp-content/uploads/2014/06/TD_chapitre3_corrige1.pdf

✍ https://chimie-pcsi-jds.net/exercices/cinetique_exercices.pdf

Conclusion

Cinétique = important car informations complémentaires à la thermo (cf Diels-Alder endo, exo, Est-ce qu'on parle vraiment de ça ? c'est de la PC...).
Une expérience = un ordre (partiel ou global) + une constante de vitesse (Apparente ou pas)
On peut ouvrir sur la description microscopique, la détermination de E_a si pas fait, les réacteur ouverts, sur la décroissance radioactive (étude documentaire au programme).

LC 22

Évolution et équilibre chimique

Niveau : PSI/MP

Extraits du programme

Le but de cette partie (Thermodynamique de la transformation chimique) est double : d'une part aborder les transferts thermiques d'un système engagé dans une transformation chimique, et d'autre part
établir et utiliser le critère d'évolution spontané d'un système chimique, ce qui nécessite l'introduction de la fonction G et du potentiel chimique.

La notion d'affinité chimique n'est pas utilisée, le sens d'évolution spontanée d'un système hors d'équilibre, à température et pression fixées, est déterminé par le signe de $\Delta_r G$.

Enthalpie libre de réaction. Enthalpie libre standard de réaction. Relation entre $\Delta_r G$, $\Delta_r G^o$ et Q_r ; évolution d'un système chimique. Entropie molaire standard absolue. Entropie standard de réaction	Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à p et T fixées. Prévoir le sens d'évolution à p et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Interpréter ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction.
Constante d'équilibre ; relation de Van't Hoff. Relation entre $\Delta_r G$,K^o et Q_r.	Définir la constante thermodynamique d'équilibre à partir de l'enthalpie libre standard de réaction. Prévoir le sens d'évolution à p et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de Q_r et K^o. Énoncer et exploiter la relation de Van't Hoff. Déterminer la valeur de la constante d'équilibre thermodynamique à une température quelconque. Déterminer la valeur d'une constante d'équilibre thermodynamique d'une réaction par combinaison de constantes d'équilibres thermodynamiques d'autres réactions.
État final d'un système : équilibre chimique ou transformation totale.	Déterminer la composition chimique d'un système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Mettre une oeuvre une démarche expérimentale pour déterminer la valeur d'une constante d'équilibre en solution aqueuse.

Commentaire du Jury :

A l'issu de la leçon, un élève doit être en mesure de répondre aux questions suivantes :

- le système chimique étudié est-il au repos chimique ou évolue-t-il ?
- Dans le cas d'une transformation spontanée, dans quel sens évolue le système ?
- L'état final en fin d'évolution est-il un état d'équilibre chimique ?
- Quelle est la composition du système en fin d'évolution ?

Il ne faut pas parler d'affinité chimique !

Bibliographie

✍ *Chimie MP (blanc)*, **Grécias** — Base de la leçon (j'avais pas trouvé celui de PSI)
✍ *Chimie PSI (bleu et orange)*, **Grécias** — Ex pour la partie 2
✍ *Florilège de chimie pratique*, **Daumarie** — Coeff de partage
✍ *BUP 2005, 99, 879(1), 1173-1179, p.111* — Seringue de NO_2

Prérequis

- ➢ Premier principe de la thermodynamique
- ➢ Différentielle de G
- ➢ Enthalpie standard de réaction

Expériences

- ☕ Dépendance en pression et température de l'équilibre NO_2/N_2O_4

1 Second principe de la thermodynamique en Chimie . . . 951
1.1 Choix du potentiel . . . 951
1.2 Application du second principe . . . 952
1.3 Condition d'évolution et d'équilibre . . . 952
2 Évolution d'un système chimique . . . 953
2.1 Calcul de $\Delta_r G$ à partir du potentiel chimique . . . 953
2.2 Influence des paramètres extérieurs . . . 953
2.3 Relation entre constantes d'équilibre . . . 956
3 État final d'un système chimique : exercices résolus . . . 956
3.1 Exercices . . . 956
3.2 Équilibre chimique . . . 958
3.3 Transformation totale . . . 958

Introduction

Le premier principe de la thermodynamique, que nous avons étudié dans une leçon précédente, nous a permis, au cours d'expériences de calorimétrie par exemple, d'étudier la quantité d'énergie dégagée par une réaction chimique. Cependant nous avons toujours considéré que la réaction avait lieu. Existe-t-il un moyen autre que l'expérience de déterminer si une réaction à lieu ? Peut-on exploiter cela pour optimiser des procédés chimiques ?

1 Second principe de la thermodynamique en Chimie

7. Application du second principe à une transformation chimique	
Enthalpie libre de réaction. Enthalpie libre standard de réaction. Relation entre $\Delta_r G$, $\Delta_r G°$ et Q_r ; évolution d'un système chimique. Entropie standard de réaction $\Delta_r S°$.	Relier création d'entropie et enthalpie libre de réaction lors d'une transformation d'un système physico-chimique à P et T fixées. Prévoir le sens d'évolution à P et T fixées d'un système physico-chimique dans un état donné à l'aide de l'enthalpie libre de réaction. Déterminer les grandeurs standard de réaction à partir des tables de données thermodynamiques. Déterminer les grandeurs standard de réaction d'une réaction dont l'équation est combinaison linéaire d'autres équations de réaction. Interpréter ou prévoir le signe de l'entropie standard de réaction.

Pour décrire un système thermodynamique, il existe plusieurs ensembles de variables. Les variables T, P, n_i sont particulièrement adaptées, on les appelle **variables de Gibbs**. Cependant quand le système est le siège d'une réaction chimique, on peut remplacer les n_i par l'avancement ξ, on parle alors de variables de **De Donder**.

On rappelle que l'avancement correspond à la variation des quantités de matières de réactifs et de produits entre l'état i initial et un instant t. L'avancement infinitésimal est défini par : $\mathrm{d}\xi = \dfrac{\mathrm{d}n_i}{\nu_i}$

On considère un système monophasé **à T et P constantes**, où se déroule la réaction chimique d'avancement ξ

$$\sum_i \nu_i A_i = 0 \tag{22.1}$$

1.1 Choix du potentiel

Dans ces conditions l'utilisation de G enthalpie libre est un bon choix. En effet G dépend des variables T, P et ξ comme suit :

$$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P + \sum_i \mu_i \nu_i \mathrm{d}\xi \tag{22.2}$$

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,\xi} \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,\xi} \mathrm{d}P + \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{P,T} \mathrm{d}\xi \tag{22.3}$$

On nomme **enthalpie libre de réaction** :

$$\Delta_r G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,P} = \sum_i \nu_i \mu_i \tag{22.4}$$

1.2 Application du second principe

Rappelons brièvement le second principe :

$$\mathrm{d}S = \delta S_{ech} + \delta S_{creation} = \frac{\delta Q}{T_{ext}} + \delta S_{creation} \qquad \text{avec } \delta S_{creation} \geq 0 \tag{22.5}$$

On repars de la définition de G :

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(PV) - \mathrm{d}(TS) \tag{22.6}$$

Or on a que $\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V = \delta W + \delta Q$. Ainsi on peut réinjecter dans les équation précédente et trouver :

$$\mathrm{d}G = V\mathrm{d}P - S\mathrm{d}T - T\delta S_{creation} \tag{22.7}$$

Du fait du caractère monobare et monotherme de la réaction considérée, on a :

$$\mathrm{d}G = \Delta_r G \mathrm{d}\xi = -T\delta S_{creation} \leq 0 \tag{22.8}$$

Cette équation fondamentale nous donne une condition d'évolution du système !

1.3 Condition d'évolution et d'équilibre

En effet le second principe donne une condition d'évolution du système : le système évolue toujours dans le sens de la maximisation (sous contraintes) de l'entropie. C'est exactement ce que l'on a ici ! Le **signe** de $\delta_r G$ prédit le sens d'évolution du système !

- $\Delta_r G < 0 \Rightarrow \mathrm{d}\xi > 0$, le système évolue dans le sens direct.
- $\Delta_r G > 0 \Rightarrow \mathrm{d}\xi < 0$, le système évolue dans le sens indirect.
- $\Delta_r G = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\xi = 0$, le système est à l'équilibre.

En un graphique comme en cent :

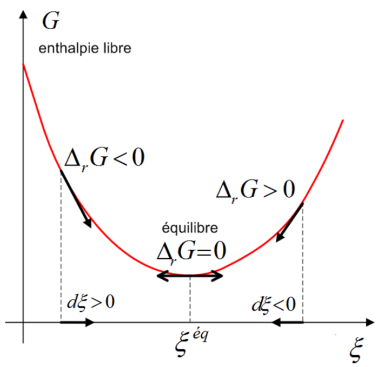


FIGURE 22.1 – L'enthalpie libre est un potentiel thermodynamique pour la réaction chimique. Sa valeur à T et P constants va être minimiser selon la seule variable libre : ξ.

2 Évolution d'un système chimique

2.1 Calcul de $\Delta_r G$ à partir du potentiel chimique

On a vu que $\Delta_r G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,P}$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\Delta_r G &= \sum_i \left(\frac{\partial n_i}{\partial \xi}\right)_{T,P,n_{j\neq i}} \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j\neq i}} \\ &= \sum_i \nu_i \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,P,n_{j\neq i}} \\ &= \sum_i \nu_i \mu_i \\ &= \sum_i \nu_i (\mu_i^o + RT\ln(a_i)) \\ &= \Delta_r G^o + RT\ln\left(\prod_i a_i^{\nu_i}\right)\end{aligned} \tag{22.9}$$

On reconnaît le quotient réactionnel $Q = \prod_i a_i^{\nu_i}$, et on sait que $\Delta_r G^o = -RT\ln K^o$ (relation appelée loi d'action de masse ou relation de Guldberg et Waage) donc on a finalement

$$\Delta_r G = RT\ln\left(\frac{Q}{K^o}\right) \tag{22.10}$$

En comparant Q et K^o, on peut prévoir l'évolution du système :

- Si $Q < K^o$, alors $\Delta_r G < 0$ donc le système évolue dans le sens direct
- Si $Q = K^o$, alors $\Delta_r G = 0$ donc le système est à l'équilibre chimique
- Si $Q > K^o$, alors $\Delta_r G > 0$ donc le système évolue dans le sens indirect

Q et K^o dépendent des paramètres extérieurs tels que la pression, la concentration ou la température. Il faut donc connaître leur dépendance en ces paramètres.

↓

2.2 Influence des paramètres extérieurs

Pour illustrer l'influence des paramètres extérieurs sur l'évolution d'un équilibre, on va utiliser l'exemple de l'équilibre

$$N_2O_{4\ (g)} \rightleftharpoons 2NO_{2\ (g)}$$

	$N_2O_{4\ (g)}$	$2NO_{2\ (g)}$	$n_{\text{tot, gaz}}$
État initial	n_0	n_1	$n_0 + n_1 + n_{\text{inerte}}$
Équilibre	$n_0 - \xi$	$n_1 + 2\xi$	$n_0 + n_1 + n_{\text{inerte}} + \xi$

Le quotient réactionnel de l'équilibre s'écrit

$$Q = \frac{a(NO_2)^2}{a(N_2O_4)} = \frac{{P_{NO_2}}^2}{P_{N_2O_4}P^o} = \frac{\left(\frac{n_{NO_2}}{n_{\text{tot, gaz}}}P\right)^2}{\frac{n_{N_2O_4}}{n_{\text{tot, gaz}}}P \cdot P^o}$$

d'où, en utilisant le tableau d'avancement,

$$Q(\xi, P, n_0, n_1) = \frac{(n_1+2\xi)^2}{(n_0-\xi)n_{\text{tot, gaz}}}\frac{P}{P^o} = \frac{(n_1+2\xi)^2}{(n_0-\xi)(n_0+n_1+n_{\text{inerte}}+\xi)}\frac{P}{P^o} \tag{22.11}$$

L'équilibre est défini par $\Delta_r G = 0$, ce qui revient à avoir :

$$\text{Equilibre chimique} \iff K^o(T) = Q(\xi, P, n_0, n_1) = \frac{(n_1+2\xi)^2}{(n_0-\xi)(n_0+n_1+n_{\text{inerte}}+\xi)}\frac{P}{P^o} \tag{22.12}$$

Seringue de NO_2/N_2O_4

✍ BUP 2005, 99, 879(1), 1173-1179, p.111 ✍ https://youtu.be/L6GfhqoCz8Y

Sous hotte dans un cristallisoir contenant un peu d'eau, déposer des copeaux de cuivre ($\simeq$ 5g). Placer un entonnoir à l'envers au-dessus pour confiner le cuivre. A l'aide d'une pipette Pasteur, introduire (par la tubulure de l'entonnoir) de l'acide nitrique concentré (16mol/L).

$$8H^+_{\ (aq)} + 2NO_3^-_{\ (aq)} + 3Cu_{\ (s)} \rightleftharpoons 3Cu^{2+}_{\ (aq)} + 2NO_{\ (g)} + 4H_2O_{\ (l)}$$

$$NO_{\ (g)} + \frac{1}{2}O_{2\ (g)} \rightleftharpoons NO_{2\ (g)}$$

On remplit 3-4 seringues de $NO_{2\ (g)}$. On atteint alors un équilibre entre $NO_{2\ (g)}$ (gaz roux) et $N_2O_{4\ (g)}$ (gaz incolore).

• Influence de la température :

On trempe la seringue dans de l'eau froide, puis dans de l'eau chaude. La seringue "froide" s'éclaircit (mais pas énormément), la seringue "chaude" est visiblement plus foncée. Comme la réaction de dismutation est exothermique, l'équilibre va se déplacer vers le réactif quand la température croît, d'où l'augmentation de la pression partielle en N_2O_4 dans la seringue.

• Influence de la pression :

On enfonce rapidement le piston pour augmenter la pression du gaz à T constante. On observe tout d'abord une coloration plus foncée car la concentration en dioxyde d'azote augmente rapidement. En attendant un peu on atteint un nouvel équilibre et le gaz est moins coloré.

2.2.1 Influence de la température sur K^o

L'évolution de $K^o(T)$ est donnée par la **loi de Van't Hoff** :

$$\frac{\mathrm{d}\ln K^o}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2} \tag{22.13}$$

On peut interpréter cette relation de la façon suivante :

- Si la réaction est exothermique : $\Delta_r H^o < 0$ donc $\frac{\mathrm{d}\ln K^o}{\mathrm{d}T} < 0$: $\ln(K^o)$ et donc K^o diminue si T augmente.

  Une augmentation de T fait diminuer K^o. Si était à l'équilibre, on avait $Q = K^o$. Puisque K^o a diminué, on se retrouve avec $Q > K^o$ donc on a **évolution dans le sens indirect de l'équilibre**.

- Si la réaction est endothermique : $\Delta_r H^o > 0$ donc $\frac{\mathrm{d}\ln K^o}{\mathrm{d}T} > 0$: $\ln(K^o)$ et donc K^o augmente si T augmente

  Une augmentation de T fait augmenter K^o. Si était à l'équilibre, on avait $Q = K^o$. Puisque K^o a augmenté, on se retrouve avec $Q < K^o$ donc on a **évolution dans le sens direct de l'équilibre**.

Pour l'équilibre $N_2O_4\ _{(g)} \rightleftharpoons 2NO_2\ _{(g)}$, la réaction est endothermique donc $\Delta_r H^o > 0$. Une augmentation de température déplace donc l'équilibre dans le sens direct *i.e.* dans le sens de formation de NO_2. C'est bien ce qu'on observe lorsque la seringue chaude est plus foncée que la seringue froide.

Démonstration de Van't Hoff

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_de_van_'t_Hoff. La démonstration utilise la relation de Gibbs-Helmotz https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_de_Gibbs-Helmholtz.

2.2.2 Influence de la pression et de la quantité sur Q

On a vu que la température changeait la valeur de K^o et rendait invalide la relation $Q = K^o$. Cependant, il est aussi possible de changer la valeur de Q pour invalider cette relation. Q ne dépend pas de la température contrairement à K^o, mais on a vu qu'il dépendait de la pression P et des quantités initiales n_0 et n_1 d'espèce chimique.

Remarque

Q peut aussi dépendre de la quantité d'une espèce **gazeuse** qui n'intervient pas dans l'équilibre car on doit prendre en compte cette quantité quand on calcule $n_{\text{tot, gaz}}$.

Pour l'équilibre $N_2O_4\ _{(g)} \rightleftharpoons 2NO_2\ _{(g)}$, on a $Q(\xi, P, n_0, n_1) = \frac{(n_1+2\xi)^2}{(n_0-\xi)(n_0+n_1+n_{\text{inerte}}+\xi)}\frac{P}{P^o}$. En partant d'un équilibre établi ($Q = K^o$), on en déduit que :

- Si la pression P augmente, Q augmente aussi et donc $Q > K^o$. Ainsi, $\Delta_r G > 0$ donc l'équilibre évolue dans le sens indirect, *i.e.* dans le sens de consommation de NO_2. C'est bien ce qu'on observe lorsque le gaz devient moins coloré qu'on appuie sur le piston.
- Si on ajoute du réactif N_2O_4, n_0 augmente donc Q diminue. Alors $Q < K^o$ donc on a évolution dans le sens direct *i.e.* dans le sens de consommation de N_2O_4.
- Si on ajoute du produit NO_2, n_1 augmente donc Q augmente. Alors $Q > K^o$ donc on a évolution dans le sens indirect *i.e.* dans le sens de consommation de NO_2.
- Si on ajoute un gaz inerte, n_{inerte} augmente donc Q diminue. Alors $Q < K^o$: on a évolution dans le sens direct.

2.2.3 Principe de Le Châtelier

Le principe de le Chatelier correspond à un principe dit *de modération*. Si l'on impose une modification (concentration, température, pression) à un système chimique en équilibre, le système évolue vers un nouvel état d'équilibre de manière à contrecarrer la modification introduite.

Si l'on chauffe un mélange dont la réaction directe est exothermique, le système en trop grande quantité de chaleur l'évacuera en réalisant une réaction endothermique, soit la réaction inverse.

Si l'on comprime un mélange qui dégaze plus de gaz qu'il n'en consomme, la réaction va également se passer en sens inverse, de façon à con trecarrer la modification.

2.3 Relation entre constantes d'équilibre

Comme on l'a vu au cours des leçons précédentes sur le premier principe, il est possible de déterminer des $\Delta_r H^o$ par le calcul à l'aide de chemins fictifs et de valeurs tabulées, et bien il est également tout à fait possible de le faire pour $\delta_r G$.

Ainsi les cycles de Heiss et les combinaisons linéaires sont toujours d'actualité. Cependant, les valeurs les plus souvent tabulées sont les $\Delta_f H^o$ et les S^o. Il existe cependant un lien direct entre ces deux valeurs et $\Delta_r G^o$:

$$\Delta_r G^o(T) = \Delta_r H^o(T) - T\Delta_r S^o(T) \tag{22.14}$$

Mais dans le cadre de l'approximation d'Ellingham on pose que la dépendance en T de $\Delta_r S$ et $\Delta_r H$ est nulle, et donc que :

$$\Delta_r G^o(T) = \Delta_r H^o - T\Delta_r S^o \tag{22.15}$$

3 État final d'un système chimique : exercices résolus

3.1 Exercices

✍ *Les nouveaux précis, Chimie MP-PT*, **Mesplède**

Application 1 **Synthèse de l'ammoniac**

Soit l'équation bilan de la réaction de synthèse de l'ammoniac : $N_2(g) + 3\,H_2(g) \overset{\frac{1}{2}}{\rightleftharpoons} 2\,NH_3(g)$.

a) Quelle est l'expression générale de l'affinité chimique de la réaction en fonction des μ_B^0 et des p_B ?

b) Dans un réacteur maintenu à 300 bar, on mélange à 450 °C, 2 moles d'ammoniac, 1 mole de diazote et 5 moles de dihydrogène.

Quelle est l'affinité chimique du système sachant que $\mathcal{A}^0(723\ \text{K}) = -65\ \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$?

c) Dans quel sens va se produire la réaction chimique ?

Solution

a) Il faut revenir à la définition de l'affinité.

$$\mathcal{A}(T, p, \xi) = -\sum_B \nu_B \mu_B = \mu_{N_2} + 3\mu_{H_2} - 2\mu_{NH_3}$$

$$= \mu^0_{N_2} + 3\mu^0_{H_2} - 2\mu^0_{NH_3} + RT \ln \frac{p_{N_2}}{p^0} + 3RT \ln \frac{p_{H_2}}{p^0} - 2RT \ln \frac{p_{NH_3}}{p^0}.$$

$$\mathcal{A}(T, p, \xi) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln \frac{p^2_{NH_3} \times (p^0)^2}{p_{N_2} \times p^3_{H_2}}, \text{ avec } \mathcal{A}^0(T) = \mu^0_{N_2} + 3\mu^0_{H_2} - 2\mu^0_{NH_3}.$$

b) $p_{N_2} = \frac{1}{1+2+5} \times 300 = 37{,}5$ bar ; $p_{H_2} = \frac{5}{1+2+5} \times 300 = 187{,}5$ bar ;

$p_{NH_3} = \frac{2}{1+2+5} \times 300 = 75$ bar.

Toutes ces pressions partielles sont calculées dans **l'état initial** du système.

$$\mathcal{A}(T, p, \xi) = -65\,000 - 8{,}314 \times 723 \ln \frac{75^2 \times 1^2}{37{,}5 \times 187{,}5^3} = -738\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

c) La réaction chimique évolue dans le sens où $\mathcal{A}\,d\xi > 0$, or $\mathcal{A} < 0$ **: la réaction va donc se produire dans le sens 2,** avec dissociation de l'ammoniac.

Attention : remplacer $\mathcal{A}$ par $-\Delta_r G$

Application 2 **Synthèse de la propanone**

La propanone est obtenue par déshydrogénation du propan-2-ol sur un catalyseur à base de cuivre selon l'équation bilan :

$$CH_3CH(OH)CH_3 \overset{\frac{1}{2}}{\rightleftharpoons} CH_3COCH_3 + H_2 .$$

Les constantes d'équilibre $K^0(T)$ suivantes ont été déterminées :

T/K	416,7	455,7	491,6
$\mathbf{K^0(T)}$	0,124	0,525	1,57

a) Déterminer les grandeurs $\Delta_r H^0$ et $\Delta_r S^0$ pour cette réaction.

b) En déduire $K^0(440\ K)$.

c) On mélange à 440 K, 1 mole de propanone, 1 mole de dihydrogène et 1 mole de propan-2-ol sous la pression constante de 3 bar.
Dans quel sens la réaction évolue-t-elle ?

Solution

a) Relions $\ln K^0(T)$ aux grandeurs standard de réaction :

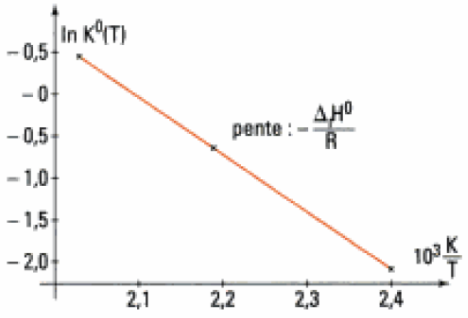
$$\ln K^0(T) = \frac{\mathcal{A}^0(T)}{RT} = -\frac{(\Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0)}{RT} = -\frac{\Delta_r H^0}{RT} + \frac{\Delta_r S^0}{R} .$$

$\ln K^0(T)$ est donc une fonction affine de $\frac{1}{T}$ de pente $-\frac{\Delta_r H^0}{R}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{\Delta_r S^0}{R}$.

T/K	416,7	455,7	491,6
$\mathbf{10^3\ K/T}$	2,40	2,19	2,03
$\mathbf{K^0(T)}$	0,124	0,525	1,57
$\mathbf{\ln K^0(T)}$	−2,087	−0,644	0,451

Pente : $-\frac{\Delta_r H^0}{R} = \frac{0{,}451 - (-2{,}087)}{(2{,}03 - 2{,}40)\cdot 10^{-3}}$.

$$\mathbf{\Delta_r H^0 \approx 57{,}0\ kJ \cdot mol^{-1}} .$$



À 491,6 K :

$$\ln K^0(491{,}6\ K) = -\frac{(\Delta_r H^0 - 491{,}6\Delta_r S^0)}{8{,}314 \times 491{,}6}$$

d'où : $\mathbf{\Delta_r S^0 \approx 120\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

b) $\ln K^0(T) = \frac{-\Delta_r H^0 + T\Delta_r S^0}{RT}$.

À 440 K :

$$K^0(440\ K) = \exp\left(\frac{-57\ 000 + 440 \times 120}{8{,}314 \times 440}\right) = 0{,}317.$$

c) Par définition : $Q(440\ K) = \frac{p_{H_2} p_{CH_3COCH_3}}{p_{CH_3CH(OH)CH_3} p^0}$, ces pressions étant calculées dans l'état initial.

Or : $p_{H_2} = p_{CH_3COCH_3} = p_{CH_3CH(OH)CH_3} = 1$ bar, d'où $\mathbf{Q(440\ K) = 1}$.

$$\mathcal{A}(\mathbf{440\ K}) = RT \ln \frac{K^0(440\ K)}{Q(440\ K)} = 8{,}314 \times 440 \ln \frac{0{,}317}{1} = \mathbf{-4\ 200\ J \cdot mol^{-1}} .$$

L'affinité du système initial étant négative, son évolution spontanée se fait dans le **sens 2**.

3.2 Équilibre chimique

✍ Grecias MP-PT p102 Exo4

Équilibre homogène, on fait l'exercice (synthèse industrielle du dihydrogène).

3.3 Transformation totale

✍ Grecias blanc et rouge-orange, MP-PT p95 résolution-type A-3 "Dismutation de FeO"

On montre le cas de transformation totale si $T \neq T_e$.

On parle de rupture d'équilibre lorsque l'une des phases condensées disparais. On est pas dans un état d'équilibre, mais dans une situation de rupture, parce que l'un des composants est absent. Cela ne peut arriver qu'avec des composants solides.

Conclusion

Nous avons au cours de cette leçon introduit tous les outils théoriques pour comprendre les critères d'un équilibre chimique et voir comment se servir de ces connaissances pour déplacer un équilibre.

La thermodynamique est donc un bon outil pour appréhender l'équilibre d'une réaction, mais ne doit pas être considérée seule quand on veut faire une synthèse, en laboratoire ou dans une usine. La prise en compte des autres facteurs (cinétique, économique, énergétique, écologique...) pour optimiser une réaction sera d'ailleurs l'objet d'une future leçon.

LC 23

Diagrammes potentiel-pH (construction exclue)

CPGE (MPSI)

Programme officiel (MPSI)

Lecture et utilisation des diagrammes potentiel-pH
Limite thermodynamique du domaine d'inertie électrochimique de l'eau.

Attribuer les différents domaines d'un diagramme fourni à des espèces données. Retrouver la valeur de la pente d'une frontière dans un diagramme potentiel-pH. Justifier la position d'une frontière verticale. Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé ou non d'une transformation par superposition de diagrammes. Discuter de la stabilité des espèces dans l'eau. Prévoir la stabilité d'un état d'oxydation en fonction du pH du milieu. Prévoir une éventuelle dismutation ou médiamutation. Mettre en oeuvre une démarche expérimentale s'appuyant sur l'utilisation d'un diagramme potentiel-pH.

Bibliographie

- ✍ *Chimie PCSI (blanc)*, **Grécias** ⟶ Top pour le cours
- ✍ *Tout-en-un Chimie PCSI*, **Fosset** ⟶ En complément
- ✍ **JFLM1** ⟶ Dosage du dioxygène (p77)
- ✍ **Porteu de Buchères** ⟶ Analyse du dosage du dioxygène (p245)
- ✍ **Cachau** ⟶ Analyse du dosage du dioxygène (p413)
- ✍ *BUP 770* ⟶ Hydrométallurgie du zinc
- ✍ *Techniques de l'ingénieur : Hydrométallurgie du zinc* ⟶ Hydrométallurgie du zinc
- ✍ *Chimie PC (vert et bleu)*, **Grécias** ⟶ Hydrométallurgie du zinc (chp21)
- ✍ *L'oxydoréduction*, **Sarrazin** ⟶ Fer et iode (p126) si on veut
- ✍ **Mesplède** ⟶ Fer et iode (p150) si on veut

Prérequis

- ➢ Réactions acido-basiques, de précipitation, de complexation
- ➢ Réactions d'oxydo-réduction, Formule de Nernst
- ➢ Nombre d'oxydation
- ➢ Dosages indirects
- ➢ diagramme de prédominance

Expériences

- Influence du pH sur une réaction rédox
- Dosage du dioxygène par la méthode de Winkler

1 Diagramme d'espèce unique . . . 961
1.1 Pertinence de l'usage d'un diagramme . . . 961
1.2 Lecture du diagramme . . . 962
1.3 Stabilité . . . 963
1.4 Détermination de constantes . . . 963
2 Superposition de diagrammes . . . 964
2.1 Superposition avec le diagramme de l'eau . . . 964
2.2 Fer en présence de permanganate . . . 965
2.3 Dosage du dioxygène dans l'eau par la méthode de Winkler . . . 966
3 Hydrométallurgie . . . 967
3.1 Élimination du fer . . . 967
3.2 Purification (tampon) . . . 968

Introduction

Lors de précédentes leçons nous avons étudié séparément les propriétés acido-basiques et oxydo-réductrices des espèces.

Pour cela on a définit la notion de diagramme de prédominance à une dimension. Néanmoins pour rendre compte de certaine réactions il faut tenir compte des deux phénomènes de concert, on passe donc à une représentation 2D : Les diagrammes E-pH.

Fer en présence de permanganate

✍ JFLM 🕒 3 min

Matériel : Un bécher, un pH metre/conductimetre, electrodes (reference, verre , platine), un adaptateur pour mesurer pH et E en même temps, solution de sel de Mohr, solution de permanganate de potasium, agitateur magnétique, soude 1 M, acide concentré.

On part d'une solution de sel de Mohr Fe^{2+} ($\simeq$ 20 mL) On ajoute du MnO_4^- tant qu'il y a décoloration (Attention de ne pas en mettre trop sinon l'excès de permanganate rose va cacher la coloration jaune des ions Fe^{3+} formés.

On change le pH jusque pH >2 pour montrer la formation du précipité de $Fe(OH)_2$

1 Diagramme d'espèce unique

1.1 Pertinence de l'usage d'un diagramme

Prenons un exemple, les ions du Fer. Si on prend le couple OxRed Fe^{3+}/Fe^{2+} on a

$$Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$$

La formule de Nernst, que nous avons déjà vu lors du cours sur l'oxydoréduction, nous donne que l'équilibre des proportions entre ces deux ions est fixé uniquement par le potentiel. (*Écrire l'équation et tracer la flèche de prédominence*)

$$E = E^o + 0.06 \log \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]}$$

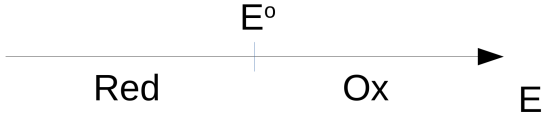


FIGURE 23.1 – Diagramme de prédominance

Si l'on considère le couple acido basique $Fe^{3+}/Fe(OH)_3$, on a une simple équation acido basique de dissolution, de pKs=37. Et là, malheur, le pH intervient, mais bon ça va il est tout seul.

$$Fe(OH)_3 = Fe^{3+} + 3HO^-$$

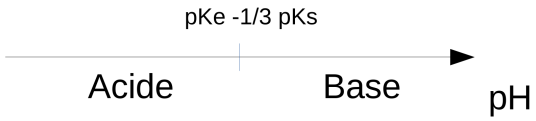


FIGURE 23.2 – Diagramme de prédominance

$$Ks = \frac{[\mathrm{Fe}^{3+}][HO]^3}{(C^o)^4} \qquad \text{d'où}$$

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pKe} - \frac{1}{3}(pKs - \log[\mathrm{Fe}^{3+}])$$

Mais il se passe quoi si je veux regarder l'équilibre entre Fe^{2+} et $Fe(OH)_3$?

Bah là on fait intervenir les deux ! Le pH ET le potentiel, il est alors intéressant, pour un élément chimique donné, de tracer son diagramme de prédominance en deux dimensions, avec le pH en abscisse et le potentiel en ordonnée ! D'ailleurs pour le fer ça donne... Ça !

1.2 Lecture du diagramme

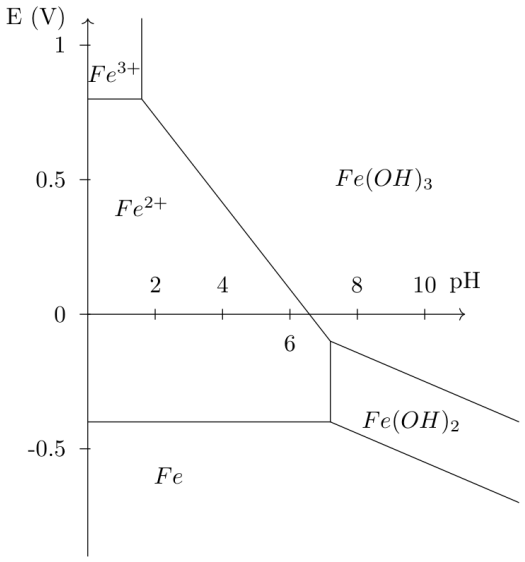


FIGURE 23.3 – Diagramme potentiel pH du fer.

Dans ce diagramme apparaissent cinq espèces, séparées par des frontières. Une façon simple de se repérer dans le diagramme est la suivante. Les espèces sont classées de bas en haut par nombre d'oxydation croissant, et de gauche à droite par basicité croissante.

n.o	pH	
III	$Fe^{3+}\ (aq)$ |	$Fe(OH)_3\ (s)$
II	$Fe^{2+}\ (aq)$	| $Fe(OH)_2\ (s)$
0	$Fe(s)$	

Ainsi les frontières verticales correspondent à diverses réactions (acido-basiques, précipitation, complexation) qui ne modifient pas le nombre d'oxydation de l'espèce observée. Nous avons déjà détaillé la complexation de Fe^{3+} en $Fe(OH)_3$, par exemple.

Les frontières horizontales correspondent à des variations du nombre d'oxydation indépendantes du pH (oxydo-réduction ne faisant pas intervenir d'ions H+ ou OH-). La frontière entre Fe^{2+} et Fe^{3+}, déjà abordée, en est un exemple.

Par extension, les frontières obliques correspondent à des réactions changeant de degré d'oxydation d'un élément tout en faisant intervenir des ions H+ ou OH-. Si l'on écrit la demi-équation entre le Fer(II) et Fe(OH)3 :

$$Fe(OH)_3 + 3H_3O^+ + e^- = Fe^{2+} + 6H_2O$$

La formule de Nernst donne alors :

$$E = E^o + 0.06 \log[Fe^{2+}] - 0.18\text{pH}$$

La pente est de $0.06\alpha/n$, avec n le nombre d'électrons échangés dans la demi-équation, et α le nombre stoechiométrique de H + dans la demi-équation.

La convention de tracé

Il existe plusieurs conventions de tracé. En effet si on regarde la position de la pente verticale entre Fe^{3+} et $Fe(OH)_3$ on voit qu'elle dépend de la concentration en Fe^{3+}.

Nous ne nous attarderons pas sur les conventions, mais la plus courante est une concentration totale en élément fixée. Ici on a pris pour tous les diagrammes la convention $c_{tot} = 10^{-2}$mol/L ?

1.3 Stabilité

La façon la plus simple de lire un tel diagramme est de se placer à des coordonnées données, et d'y lire directement l'espèce prédomiante. Par exemple à pH acide et à haut potentiel, on retrouve Fe^{3+}, ce qui signifie que c'est l'espèce prédominante dans ce domaine.

Il est à noter que pour les espèces solides, le diagramme ne donne pas un domaine de prédominance, mais un domaine d'existence, à l'intérieur duquel le solide existe, et à l'extérieur duquel il n'existe pas.

1.4 Détermination de constantes

Une des intérêts principaux d'un diagramme E-pH est de permettre de trouver des constantes thermodynamiques.

1.4.1 Potentiel standard

La lecture à pH nul en tenant compte de la convention d'écriture donne directement le potentiel standard de tous les couples considérés.

Exemple : Fe^{3+}/Fe^{2+} 0,771

1.4.2 Ka et Ks

De la même façon, comme nous l'avons vu précédemment, à partir du pH de précipitation ou de complexation d'une espèce, et toujours en tenant compte de la convention de tracé, on peut remonter jusqu'au pKs ou au pKa de l'espèce. Il suffit d'écrire l'équation et de lire sur le diagramme la valeur du pH à la frontière.

On a pu voir comment se lit un diagramme pour une seule espèce, mais ce qui nous intéresse c'est généralement le cas des diagrammes à plusieurs espèces, afin de trouver qui réagit avec qui pour donner quoi !

2 Superposition de diagrammes

Rien qu'avec l'utilisation d'un solvant, on se retrouve toujours avec au moins 2 espèces différentes, ce qui rend l'étude séparée des diagrammes E-pH inutile. Cependant, lorsqu'on les superpose, on devient en mesure de déterminer quelles espèces seront stables ensembles et lesquelles vont réagir ensemble (et quels produits seront formés).

Retenons cependant quelque chose d'important : les diagrammes E-pH donnent des informations **thermodynamiques** sur une réaction. Ils ne permettent pas de prédire la cinétique d'une réaction, comme par exemple un blocage cinétique.

Ainsi, la superposition de deux diagrammes nous dit uniquement qu'**une réaction entre deux espèces dans des conditions données (pH) dont les domaines sont disjoints dans ces conditions sera thermodynamiquement favorable**. À l'inverse, si deux espèces ont leur domaine qui s'intersecte, alors leur réaction ne sera pas thermodynamiquement favorable.

2.1 Superposition avec le diagramme de l'eau

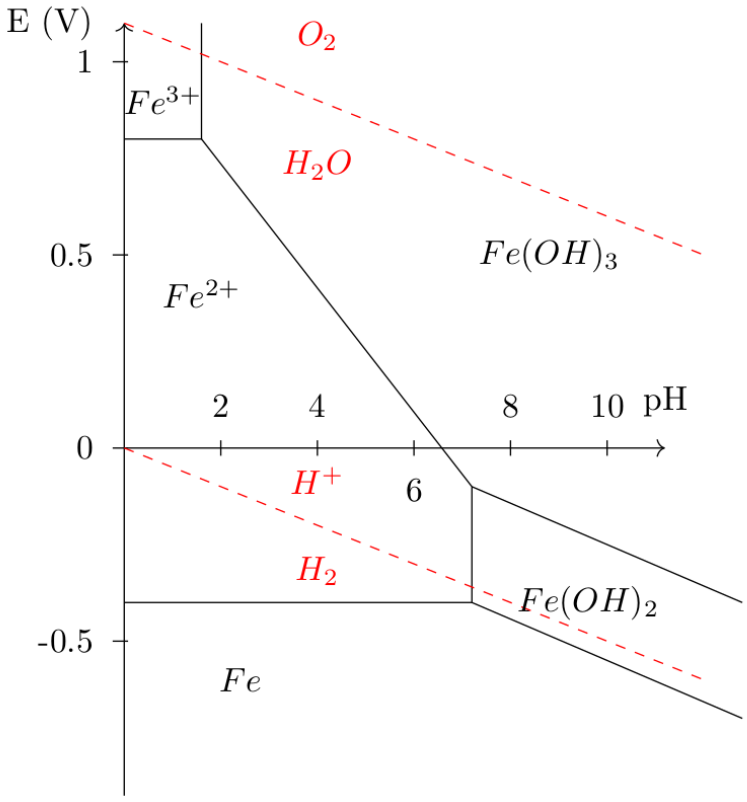
L'eau est dans la grande majorité des cas utilisée comme solvant, ce qui fait que la comparaison de diagrammes au diagramme de l'eau est très commune.

Le diagramme de l'eau met en jeu les couples O_2/H_2O et H^+/H_2. Les demi-équations redox et les potentiels de Nernst associés sont alors :

$$\begin{cases} O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O & E = E^0(O_2/H_2O) - 0.06\text{pH} \\ 2H^+ + 2e^- = H_2 & E = E^0(H^+/H_2) - 0.06\text{pH} \end{cases}$$

Superposons ce diagramme à celui d'autres espèces :

- **Fer en présence d'eau**

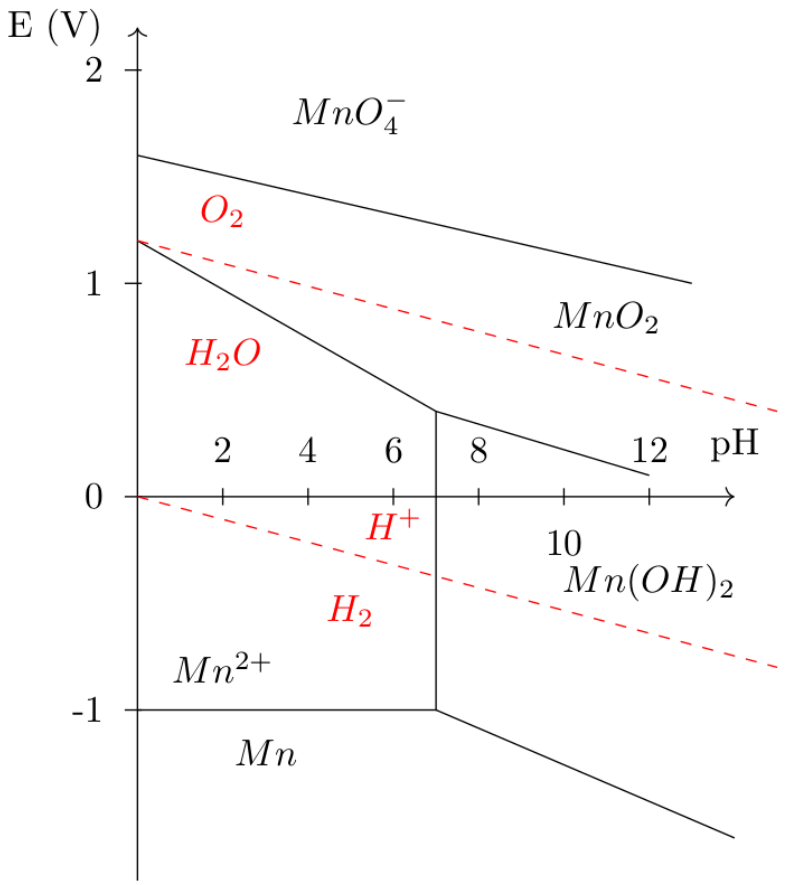


Cette superposition de diagrammes nous montre :

- Le fer solide n'est pas stable en présence d'eau car leur domaine sont disjoints. C'est le cas pour tout pH, mais on remarque qu'à pH acide les domaines sont bien plus disjoints qu'à pH basique, ce qui indique que la réaction est encore plus favorisée thermodynamiquement à pH acide.

  On apprend également que la réaction entre le fer solide et l'eau produit du H_2 gazeux et des ions Fe^{2+} si pH < 7 ou du $Fe(OH)_2$ si pH > 7.
- On voit également que les ions Fe^{2+} ne sont pas stables en présence de O_2 et donc réagissent pour former de l'eau et du Fe^{3+} si pH< 2 ou du $Fe(OH)_3$ si pH > 2.
- On peut déduire de ces deux premières remarques que le fer solide produit directement des ions Fe^{3+} ou du $Fe(OH)_3$ en présence de O_2.

- **Manganèse en présence d'eau**

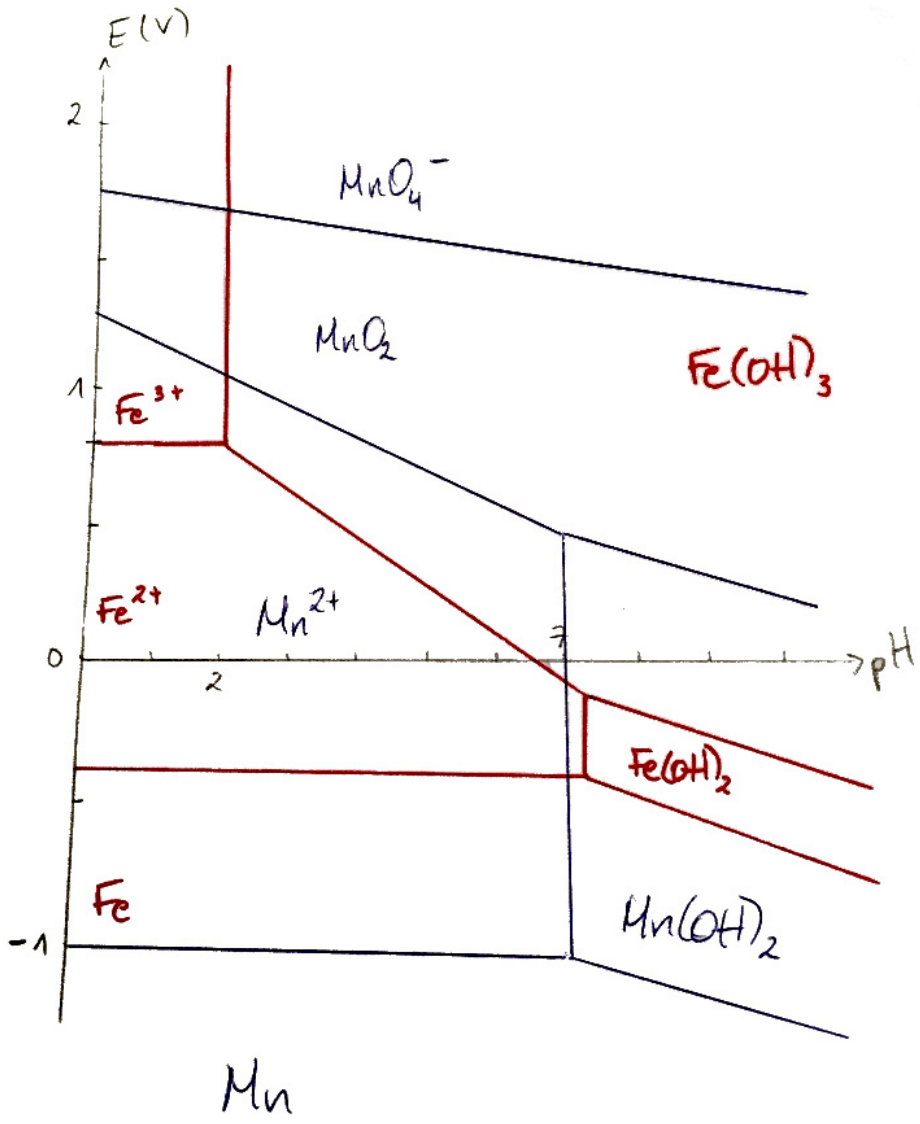


Cette superposition de diagrammes nous montre :

- MnO_4^- n'est pas stable dans l'eau. Cependant, on rencontre quand même ces ions en solution car la réaction entre MnO_4^- et l'eau est très lente. Cela montre bien que les diagrammes E-pH ne donne que des informations sur la thermodynamique d'une réaction et la cinétique.
- $Mn(OH)_2$ est oxydé en MnO_2 en présence d'O_2. C'est sur cette réaction que le dosage de Winkler, que l'on verra un peu plus tard

2.2 Fer en présence de permanganate

En introduction, on avait mis en présence des ions Fe^{2+} avec des ions permanganates et on a vu l'apparition du coloration jaune. On avait alors basifé le milieu pour voir apparaître un précipité. Pour comprendre cette expérience, superposons les diagrammes du fer et du manganèse.



On voit que les domaines de Fe^{2+} et de MnO_4^- sont disjoints. Les deux espèces réagissent donc pour former, en milieu acide, des ions Fe^{3+} et des ions Mn^{2+}. L'équation de la réaction s'obtient à partir des deux demi-équations :

$$\begin{cases} Fe^{2+} = Fe^{3+} + e^- \\ MnO_4^- + 8H^+ + 5e^- = Mn^{2+} + 4H_2O \end{cases}$$

On obtient donc la réaction

$$5Fe^{2+} + MnO_4^- + 8H^+ = 5Fe^{3+} + Mn^{2+} + 4H_2O$$

Si on basifie le milieu pour avoir un pH > 2, on voit qu'on sort du domaine de stabilité de Fe^{3+} pour obtenir du $Fe(OH)_3$, qui est bien le précipité obtenu.

2.3 Dosage du dioxygène dans l'eau par la méthode de Winkler

☕

Dosage du dioxygène dans l'eau par la méthode de Winkler

✍ JFLM1 p77 ⏲

Principe : On fait réagir l'O_2 dissout dans l'eau avec $Mn(OH)_2$ puis faire réagir avec de l'iode puis titrer l'iode avec du thiosulfate. On peut s'aider des diagrammes eau + Mn et I + Mn.

Pourquoi $Mn(OH)_2$? Il faut basifier le milieu avec de la soude pour faire la réaction entre l'iode et le manganèse. On utilise ensuite l'iodométrie pour doser l'hydroxyde de manganèse (III) Pour cela on arrête la réaction avec O2 en repartant en milieu acide, et d'une pierre deux coup, on redissout le manganèse. Ensuite réaction avec I- pour former du I2.

En live : On fait l'acidification + réaction avec KI (pour cela on a pris une partie de notre gros erlenmeyer et on l'a mis dans un petit bouché pour éviter de redissoudre du dioxygène.

Il reste à doser le diode formé par du thiosulfate de sodium.

En live : Dosage par colorimétrie avec de l'empoi d'amidon pour mieux repérer l'équivalence.

✍ Porteu-de Buchère p245 et Cachau-Hereillat pour l'analyse.

On écrit les équations bilans et les les bilans de quantité de matière à l'équivalence.

Pourquoi on met le thiodène en fin de titrage ? Déjà, le thiodène (amidon + urée) permet de repérer l'équivalence car quand l'amidon est complexé au diiode, le complexe est bleu foncé, et quand il n'y a plus de diiode la solution est incolore. Sinon l'équivalence est très difficile à repérer car la solution passe de jaune clair à incolore. Ensuite, la cinétique de la réaction entre le thiosulfate et le complexe amidon-diiode est très lente, donc si on ajoute le thiodène dès le début du titrage, il faudrait faire des petits ajouts et attendre longtemps entre chaque pour être sûr que tout le thiosulfate a réagi avant d'en ajouter et donc de ne pas dépasser l'équivalence. Ajouter le thiodène juste avant l'équivalence permet d'aller plus vite vers l'équivalence, et ensuite on fait de petits ajouts (mais c'est pas grave puisqu'on est proche de l'équivalence).

La superposition de diagrammes a naturellement de véritables applications industrielles. Nous allons nous pencher sur l'hydrométallurgie du zinc, qui utilise des réactions entièrement prévisibles par superpositions de diagrammes E-pH, et qui représente 80% de la production de zinc mondiale.

↓

3 Hydrométallurgie

Si certains métaux se trouvent quasi-purs naturellement (or, argent,...on parle de métaux natifs), pour la plupart, comme par exemple pour le zinc, il y a présence de nombreuses impuretés (Cu,Fe,...) à l'extraction. Les industries métallurgiques ont donc recourt à des procédés pour purifier le zinc. L'une de ces méthodes est naturellement basée sur l'utilisation des diagrammes E-pH : l'hydrométallurgie du zinc.

Cette méthode se déroule en 5 étapes : grillage, lixiviation, élimination du fer, purification et électrolyse. Elles ne seront pas toutes détaillées, car seules les étapes d'élimination du fer et de purification sont des applications directes du diagrammes E-pH.

L'érape de **grillage** consiste à oxyder tous les métaux par combustion. On se retrouve avec du ZnO ainsi que beaucoup d'autres impuretés métalliques. On les fait passer en solution grâce à un solvant acide : c'est la **lixiviation**.

3.1 Élimination du fer

On passe à la troisième étape du processus : l'**élimination du fer**.

Élimination de fer dans une solution de métaux

✍ BUP 770 ⏲ 7 min

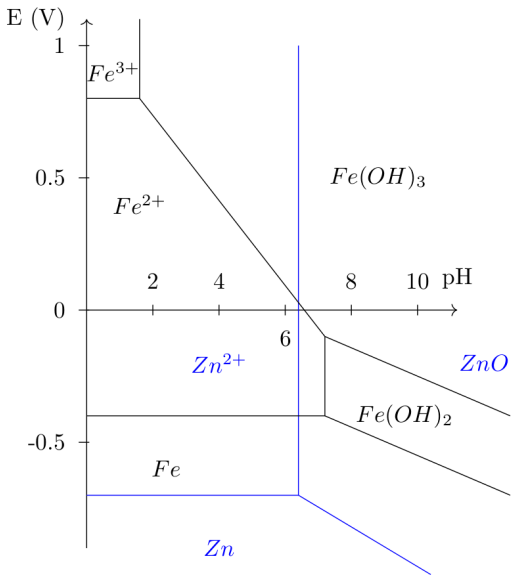
Matériel : Agitateur magnétique chauffant, filtre Buchner, trompe à eau, oxyde de zinc, chlorure de fer III, sulfate de cuivre II, pH-mètre/Potentiomètre, électrodes, thermomètre.

On va faire un mélange de chlorure de fer, d'oxyde de zinc et de sulfate de cuivre pour simuler le résultat après grillage (cette étape est aussi décrite dans le BUP si vous avez des penchants d'artificier et une cheminée pouvant monter à 950°C. Mais sinon le labo a des solutions déjà prêtes et c'est très bien. On n'a pas besoin de réellement contrôler les quantités de métaux que l'on verse, le but c'est qu'il y en ait.

On fait chauffer une solution de chlorure de fer et de sulfate de cuivre à 90°C, et pendant la chauffe on ajoute environ 3 g de sulfate d'ammonium (sans le sulfate d'ammonium, la filtrage du fer n'est pas possible). On peut tester la solution avec du thiocyanosulfate : il prend immédiatement une couleur brique, indiquant la présence d'ions fer.

On ajoute doucement de l'oxyde de zinc solide, environ 3 g encore. Il faut y aller doucement, le but est d'atteindre un pH d'environ 4,5. **Il est important d'utiliser de l'oxyde de zinc et de ne pas dépasser un pH de 5 :** un pH plus basique risque de faire précipiter le zinc, ce n'est pas le but, et l'usage d'une autre base risque de vous donner encore un autre précipité qui n'est pas souhaitable (la soude donne $Mg(OH)_2$ par exemple).

Un précipité rouille persistant apparaît dans la solution précédemment jaune. On le filtre sur Buchner. La solution obtenue est bleue à cause du cuivre (si elle est verte, il reste un peu de fer en suspension). On peut de nouveau tester la solution avec du thiocyanosulfate : aucune couleur rouge n'apparaît, on s'est bien débarrassé du fer.



On se place dans la bonne zone de pH, c'est à dire :

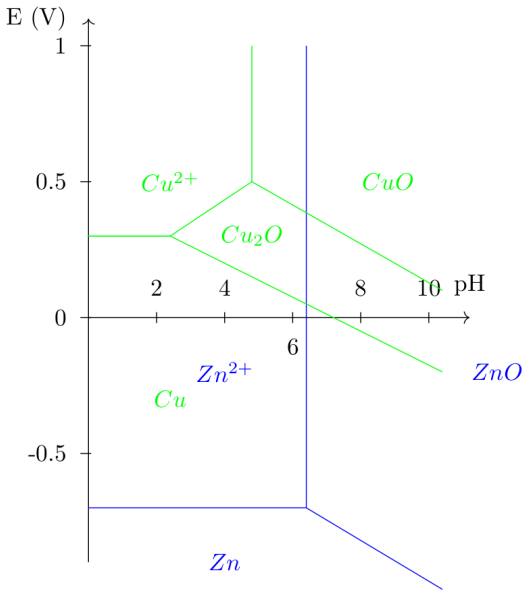
- pH>2 pour éviter que le fer soit sous forme libre
- pH<6.5 pour éviter que le zinc soit sous forme de précipité

Ainsi on fait précipiter le fer. L'hydroxyde de fer (III) est très difficile à filtrer industriellement, on ajoute donc du sulfate d'ammonium pour former de la jarrosite à la place. En filtrant, on récupère notre solution en ayant éliminé toute trace de fer. Il faut ensuite purifier la solution des autres ions métalliques.

3.2 Purification (tampon)

On attaque maintenant la 4ème étape du processus : la **purification**.

Dans un contexte industriel, il reste encore de nombreux ions métalliques en solution : Cu, Mg, Co, Ni... À l'exception de Mg, ils partagent une propriété : leur potentiel standard de réaction d'oxydation est plus élevé que celui entre Zn et Zn^{2+}. L'ajout de poudre de zinc dans la solution va donc réduire les ions métalliques sous une forme solide et filtrable, tandis que le zinc ajouté va se dissoudre.



Elimination du cuivre dans un mélange d'ions Zn^{2+} et Cu^{2+}

✍ BUP 770 ⏲ 3 min

Ajouter de la poudre de zinc à la solution pour réduire les autres ions métalliques (ils vont recouvrir la poudre) puis filtrer sur Buchner. La solution filtrée est décolorée : il n'y a plus de cuivre.

Les seuls ions métalliques encore en solution sont ceux du zinc et de manganèse. Par **électrolyse**, on peut récupérer le zinc. La solution peut être ré-utilisée pour une nouvelle lixiviation.

Conclusion

Il manque l'aspect cinétique → courbes I-E.

Commentaires

Prérequis : Pas le droit de mettre la construction des diagrammes E-pH, plus au programme. Réfléchir un peu plus sur la manip d'intro, qu'est-ce que les éleves savent : avoir les deux diagrammes de prédominance, faire des aller-retour entre expérience et théorie. C'est une leçon pour MPSI, à l'aise en théorie : UTILISER NERNST, surtout sur la première partie pour justifier que les frontières sont verticales, horizontales, obliques. On fait une leçon de MPSI, donc on peut justifier en Chimie de faire la théorie avant la manip. Commencer par décrire le diagramme en 30s : Pour chaque couple de points (E,pH), on sait quelle espèce prédomine. Montre l'intérêt du diagramme. Faire les diagrammes E-pH sur transparents. Ne pas hésiter à utiliser le logiciel CHIMGENE ! ! Sur pédagogie, on peut dire que la partie méthode de Winkler fait un bon DM (compte-rendu de TP par exemple).

Questions

Pourquoi on ajoute l'empois d'amidon à la fin du titrage ? Comment ça marche ? D'où vient le mot "empois" d'amidon ?

Comment gérer les déchets à la fin du titrage du dioxygène ? Qui est le responsable légal du traitement des déchets dans un lycée ? Le chef d'établissement.

Quand peut-on faire la méthode de Winkler au lycée ? EN TS spé physique, mais ça reste difficile à exploiter pour un lycéen.

Pourquoi on met toujours MnO4- dans la burette ? Sinon médiamutation

Quel est le gaz qui s'est formé quand vous avez plongé le clou dans l'acide nitrique ?

Où se trouve le domaine de corrosion dans le diagramme (E, pH) du fer ? Pourquoi une solution d'ions fer II n'est pas stable ?

Qu'est-ce que le degré chlorométrique d'une eau de Javel ? Qu'est-ce qu'on trouve aujourd'hui comme indication en composition sur les bouteilles d'eau de Javel ?

La réaction entre le diiode et les ions hypochlorite est-elle rapide ? Comment le savoir ? Si elle est lente, faites-vous une erreur par défaut ou par excès sur le degré chlorométrique ?

Dosage Winkler : on peut dire que le taux de O2 est faible ou pas ? Comment la solubilité évolue avec la température ? Comment le voit-on expérimentalement ? Le dosage de O2 par la méthode de Winkler est-il toujours d'actualité ?

Diagramme du fer : Comment le diagramme évolue si la concentration de tracé C0 diminue ? Ok pour le E et pour les pKs ? Et pour les pentes ?

Diagramme du manganèse : on connaît le MnO4- pourtant on le voit pas sur le diagramme pourquoi ? (dismutation)

Comment marche le papier pH ?

Zones particulières en hydrométallurgie ? Passivation, corrosion, immunité.

LC 24

Optimisation d'un procédé chimique

Niveau : CPGE PSI

Extraits du programme

Optimisation d'un procédé chimique : - par modification de la valeur de $K°$; - par modification de la valeur du quotient réactionnel.	Identifier les paramètres d'influence et leur sens d'évolution pour optimiser une synthèse ou minimiser la formation d'un produit secondaire indésirable. Approche documentaire : à partir de documents décrivant une unité de synthèse industrielle, analyser les choix industriels, aspects environnementaux inclus.

Bibliographie

✍ *J'intègre PSI-PSI** **Fosset, Baudin, Lahitète**	Chapitre 5
✍ *Chimie industrielle* **Perrin, Scharff**	Synthèse de l'ammoniac, chiffres
✍ *Chimie CAPES*	**Porteu-de Buchère**
✍ `https://fr.wikipedia.org/wiki/Procédé_Haber`	Procédé haber-Bosch

Prérequis

- ➢ Cinétique chimique
- ➢ Équilibre thermodynamique
- ➢ Sens d'évolutions d'un système

Expériences

- Influence de la température sur l'équilibre de deux complexes cuivrés
- Estérification au Dean Stack

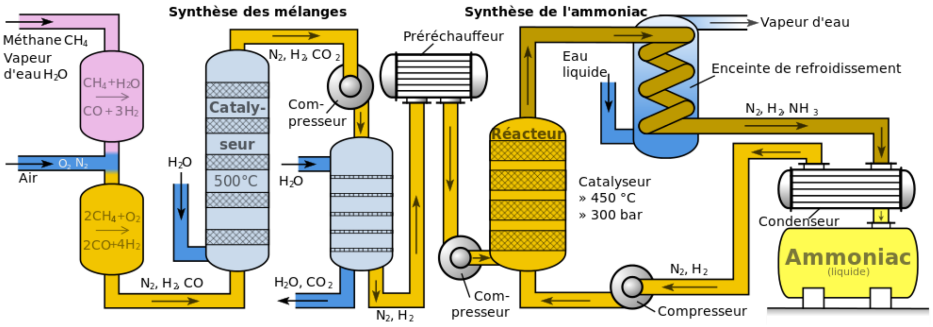
1 Optimisation de la cinétique . . . 972
1.1 Augmentation de la température . . . 972
1.2 Catalyse . . . 973
2 Cadre théorique thermodynamique . . . 974
2.1 Paramètres d'équilibre . . . 974
2.2 Variance . . . 975
3 Déplacement d'équilibre . . . 975
3.1 Rappels théoriques . . . 975
3.2 Augmenter K . . . 976
3.3 Diminuer Q . . . 977
3.4 Expérience de modification de Q . . . 977

Introduction

Lorsqu'on veut produire une certaine espèce chimique, il est naturel de s'intéresser à améliorer le plus possible les étapes de production afin de la rentabiliser au maximum. C'est ce qu'on appelle **optimiser** une procédé chimique. Cette leçon a pour objectif de donner quelques pistes sur comment un procédé industriel peut être optimisé et quels sont les paramètres de contrôle.

Cette leçon sera illustrée à travers le procédé industriel de la synthèse de l'ammoniac. L'ammoniac est une des molécules les plus produites au monde (environ 100 mégatonnes par an), et son processus de synthèse a été développé par Haber et Bosch au début du XXe siècle. L'ammoniac est la molécule de base pour les synthèses d'engrais (nitrates, urée) et constitue donc un enjeu économoique et écologique majeur.

Derrière cette réaction *a priori* simple, $N_{2\ (g)} + 3H_{2\ (g)} = 2NH_{3\ (g)}$, se cache un procédé industriel complexe avec de nombreux paramètres à ajuster afin d'optimiser le procédé. Ces choix industriels vont agir sur des aspects très différents voire incompatibles du procédé, à savoir son rendement, la pureté du produit, le temps, le coût financier et énergétique, les matières premières ou encore l'impact environnemental.



Certains de ces choix vont être discutés dans cette leçon, en abordant dans un premier temps l'aspect cinétique de certaines réactions, puis en s'intéressant au cadre thermodynamique dans lequel ces réactions s'incrivent et enfin en discutant des paramètres à ajuster pour déplacer un équilibre.

On commence avec optimisation assez intuitive : gotta go fast !

1 Optimisation de la cinétique

1.1 Augmentation de la température

Dans le cours sur la cinétique d'une réaction, on a vu que sa vitesse pouvait s'écrit sous la forme $v = kf(\{[A_i]\})$ avec k la constante de vitesse de la réaction et f une fonction dépendant de la concentration des espèces A_i intervenant dans la réaction.

Pour augmenter la vitesse de réaction, il suffirait d'augmenter k. Or k peut être exprimée en fonction de la température grâce à la loi semi-empirique d'Arrhénius :

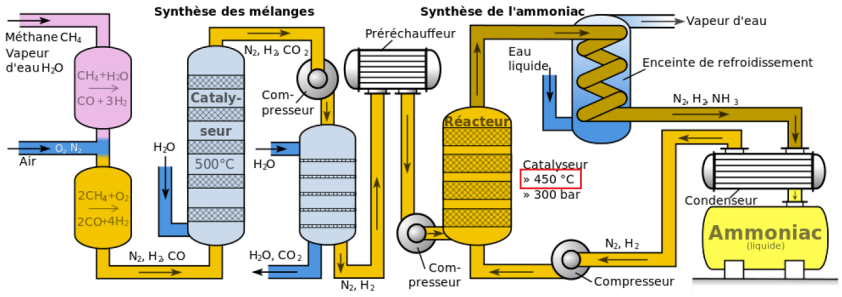
$$k = A \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_A}{RT}\right) \tag{24.1}$$

On voit donc qui si on augmente T, on augmente k donc on accélère la réaction. Cela se comprend facilement on se disant qu'augmenter T c'est avoir une agitation thermique des molécules plus forte donc plus de collisions par seconde donc la réaction se fait plus vite.

À titre d'ordre de grandeur, pour une énergie d'activation de 100 kJ/mol, augmenter T de 10°C revient à doubler k et donc doubler la vitesse de la réaction ! !

Pour la synthèse de NH3

Le réacteur est porté à 450°C. On comprend cependant qu'il y a un compromis entre augmenter T pour accélérer la réaction et le coût énergétique que cela implique. Il y a également des raisons thermodynamiques qui seront abordées plus tard.



Si on ne peut pas chauffer indéfiniment, on peut toujours accélérer la réaction par catalyse.

1.2 Catalyse

Un **catalyseur** est une espèce chimique qui augmente la vitesse de la réaction sans apparaître dans l'équation-bilan. Il existe plusieurs types de catalyse :

- Catalyse *homogène*

  Les réactifs et le catalyseur sont dans la même phase. C'est le cas par exemple de la catalyse avec les ions Cobalt. Ils sont dissouts dans la solution.

  Exemple : eau oxygénée et quelques gouttes de solution de sel de Mohr (Fe2+ et Fe3+)

- Catalyse *hétérogène*

  Les réactifs ne sont pas dans la même phase que le catalyseur. C'est le cas de la catalyse courante au fil de platine.

  Exemple : eau oxygénée et platine solide

  Plus la surface de contact est grande, plus la catalyse est efficace. Cela permet de facilement récupérer le catalyseur, cependant c'est généralement moins efficace que la catalyse homogène.

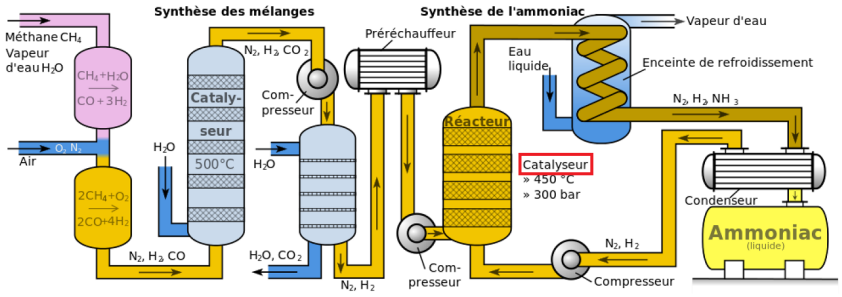
- Catalyse *enzymatique*

  C'est une enzyme qui catalyse la réaction.

  Exemple : eau oxygénée et rondelle de navet (enzyme : catalase)

Pour la synthèse de NH3

On catalyse la réaction en la faisant à la surface de fer α (au total il y en a 4 épaisseurs dans le réacteur). C'est donc une catalyse hétérogène.



Optimiser la cinétique de la réaction c'est bien, mais il faut aussi prendre en compte son aspect thermodynamique. Pour cela, il nous faut définir un cadre théorique.

2 Cadre théorique thermodynamique

Comme on l'a déjà vu, la modification de la cinétique ne permet pas d'améliorer le rendement. Même ma présence d'un catalyseur ne peut pas déplacer un équilibre. Nous allons dans cette partie montrer que des méthodes existent pour déplacer l'équilibre et tirer un maximum de produit de nos réactifs.

2.1 Paramètres d'équilibre

La première étape est de se poser la question des paramètres pertinents. En effet certains paramètres, comme le volume de la cuve réactionnel [1], sont sans influence, alors que d'autres comme la pression et la température ont une réelle influence sur la thermodynamique du système.

Définition : On nomme **paramètre d'équilibre** une grandeur intensive dont la modification entraîne une modification de l'état d'avancement à d'équilibre.

Seringue de NO_2/N_2O_4 OPTIONNEL

✍ BUP 2005, 99, 879(1), 1173-1179, p.111 ✍ https://youtu.be/L6GfhqoCz8Y

Sous hotte dans un cristallisoir contenant un peu d'eau, déposer des copeaux de cuivre ($\simeq$ 5g). Placer un entonnoir à l'envers au-dessus pour confiner le cuivre. A l'aide d'une pipette Pasteur, introduire (par la tubulure de l'entonnoir) de l'acide nitrique concentré (16mol/L).

$$8H^+_{(aq)} + 2NO_3^-{}_{(aq)} + 3Cu_{(s)} \rightleftharpoons 3Cu^{2+}_{(aq)} + 2NO_{(g)} + 4H_2O_{(l)}$$

$$NO_{(g)} + \frac{1}{2}O_{2\,(g)} \rightleftharpoons NO_{2\,(g)}$$

On remplit 3-4 seringues de $NO_{2\,(g)}$. On atteint alors un équilibre entre $NO_{2\,(g)}$ (gaz roux) et $N_2O_{4\,(g)}$ (gaz incolore).

• **Influence de la température :**

On trempe la seringue dans de l'eau froide, puis dans de l'eau chaude. La seringue "froide" s'éclaircit (mais pas énormément), la seringue "chaude" est visiblement plus foncée. Comme la réaction de dismutation est exothermique, l'équilibre va se déplacer vers le réactif quand la température croît, d'où l'augmentation de la pression partielle en N_2O_4 dans la seringue.

• **Influence de la pression :**

On enfonce rapidement le piston pour augmenter la pression du gaz à T constante. On observe tout d'abord une coloration plus foncée car la concentration en dioxyde d'azote augmente rapidement. En attendant un peu on atteint un nouvel équilibre et le gaz est moins coloré.

Pour le NH_3 :

Les paramètres d'équilibres sont aussi T et P, température et pression totales. S'ajoute cependant les pression partielles des trois gaz en présence : p_{N_2}, p_{H_2} et p_{NH_3}.

Fixer les paramètres d'équilibre permet de modifier l'équilibre du système, mais l'existence de la réaction chimique fait qu'on ne peut pas tous les fixer indépendamment. C'est par exemple ce qui fait qu'on ne peut pas avoir de mélange eau glace à autre chose que 0°C à température ambiante.

1. ou bien la couleur des cheveux de l'expérimentateurice.

2.2 Variance

Définition : On nomme **Variance** d'un système le nombre de paramètres intensifs que l'on doit fixer pour déterminer entièrement l'état d'équilibre du système. On peut aussi le voir comme le nombre de paramètre intensifs indépendants.

Calcul : Si on nomme X le nombre de paramètres intensifs décrivant le système et Y le nombre d'équations les reliants, on a $v = X - Y$. Il y a des méthodes de calcul et des formules, mais ici nous passerons par une détermination *a la mano fratré.*

Pour le NH_3 :

Il y a, comme on l'a vu, 5 paramètres d'équilibre. Le nombre de relations qui sont imposées par les équations physico-chimiques est de 2, à savoir la relation d'équilibre chimique et la somme des pression partielles. Ainsi on a $v = 3$. **CEPENDANT** [a] si on ajoute la condition de quantités stoechiométriques au début de l'expérience, on ajoute une équation et la variance tombe à $v = 2$.

Étant donné que les paramètres sur lesquels nous pouvons facilement influer sont la pression et la température, on a pile ce qu'il nous faut comme variance !

a. *insert "attention nouvelle règle" meme here*

Rupture d'équilibre : Il est bon de noter que si l'on fixe trop de paramètres intensif, plus que permis par la variance, on rompt l'équilibre. On se retrouve alors avec un seul côté de l'équation, comme dans le cas de la fonte de l'eau. En effet le cas de l'eau est à variance de 1. La pression est fixée par l'atmosphère, et on fixe aussi la température par l'ambiante. Alors on sort de l'équilibre et on a plus que de l'eau liquide à la fin [2].

Petite remarque : Il est dur de fixer des pressions partielles, les ruptures d'équilibres ont préférentiellement lieu pour les systèmes à basse variance.

Idéalement pour optimiser le rendement on voudrait se placer en rupture d'équilibre, comme avec l'eau, mais ici c'est trop compliqué, mais on peut faire d'autres choses plus simples : déplacer l'équilibre.

3 Déplacement d'équilibre

Les méthodes de déplacement d'équilibre sont une optimisation des paramètres afin de déplacer l'équilibre vers les produits soit en modifiant la constante d'équilibre du système à la hausse, soit en modifiant sont quotient réactionnel à la baisse.

3.1 Rappels théoriques

Définition : quotient réactionnel Il s'agit de $Q = \prod (a_i)^{\nu_i}$ avec a_i l'activité du composé i et ν_i son coefficient stoechiométrique (algébrique).

Définition : Constante de réaction Il s'agit de K^o. C'est une valeur tabulée qui dépend des condition expérimentale.

Sens d'évolution : Le sens d'évolution d'une réaction chimique est directe si $Q < K^o$, et inversement. C'est Q qui change jusqu'à atteindre K^o. Il est à noter que l'information thermodynamique (K^o et Q) ne donne aucune information sur la cinétique de la réaction.

Pour optimiser le rendement on peut donc déplacer Q et le tirer vers le bas au plus possible. La méthode la plus simple pour cela est de retirer les produits au fur et à mesure de leur formation. On peut aussi trouver les conditions expérimentales qui maximisent K^o.

2. Sauf si on a une clim d'enfer chez soi

3.2 Augmenter K

Loi de Van't Hoff : La constante d'équilibre K^o dépend de la température selon la loi suivante, avec $\Delta_r H^o$ l'enthalpie standard de la réaction :

$$\frac{\mathrm{d}\ln K^o}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r H^o}{RT^2} \tag{24.2}$$

Si la réaction est endothermique ($\Delta_r H^o > 0$), l'augmentation de la température entraîne un augmentation de K^o [3].

Influence de la température sur l'équilibre entre deux complexes de cuivre

✍ Porteu-de Buchère, p.69-71 ⏲ 5mn

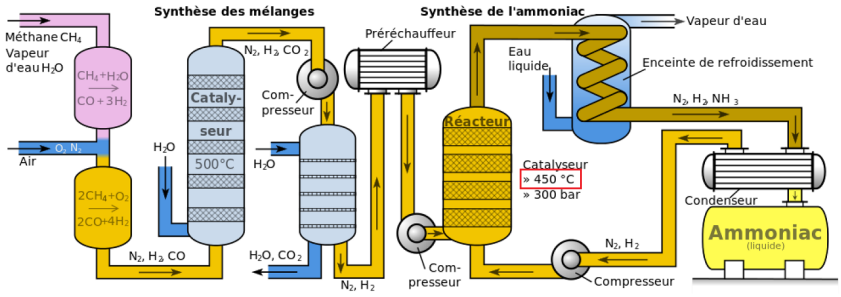
- Dans un bécher, dissoudre 1 g de sulfate de cuivre pentahydraté dans 20 mL d'une solution saturé de chlorure de sodium. La solution prend une couleur vert pomme, caractéristique de l'ion $[CuCl_4]^{2-}$.
- Dans un second bécher, dissoudre 1 g de sulfate de cuivre pentahydraté dans 20 mL d'eau distillée. La solution prend une couleur bleue, caractéristique de l'ion $[Cu(H_2O)_6]^{2+}$.
- Remplir un tube à essai de chacune des solutions (témoins). Mélanger le reste des deux solutions et répartir dans trois tubes à essais. Plonger l'un d'eux dans un bain glacé, il devient plus bleu. Plonger l'autre dans de l'eau bouillante, il devient plus vert.

La réaction $[Cu(H_2O)_6]^{2+} + 4Cl^- = [CuCl_4]^{2-} + 6H_2O$ est endothermique. L'augmentation de la température favorise donc la formation de $[CuCl_4]^{2-}$ (vert), en accord avec l'observation.

Cas du NH_3

La synthèse de l'ammoniac est une réaction exothermique, la constante d'équilibre est d'autant plus grande que la température est basse. Pourtant on se place à 400°C, et pas à l'ambiante !

Il y a en fait compétition entre la thermodynamique et la cinétique (cf partie 1). La température choisie par les industriels (400°C) est un compromis entre les deux. Ordres de grandeur : $K^o \sim 10^5$ à 25°C, $K^o \sim 10^{-6}$ à 400°C.



On voit donc que la cinétique et la thermodynamique sont en contradiction. À 400°C il nous faut donc jouer sur Q pour le diminuer autant que possible !

3. Loi de modération de Le Châtelier

3.3 Diminuer Q

Exprimons Q en fonction des paramètres du système.

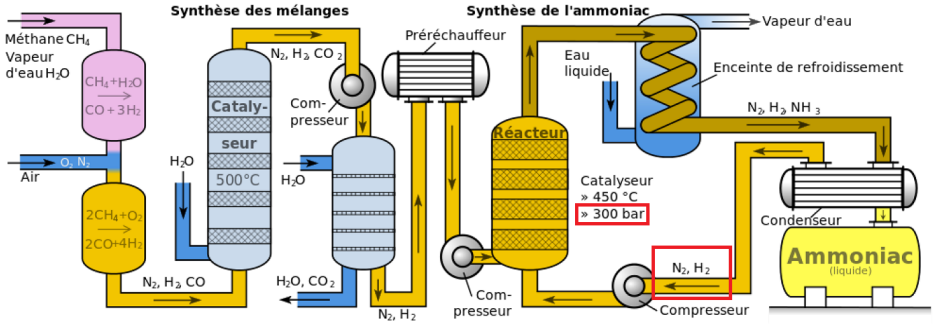
$$Q = \frac{P_{\mathrm{NH_3}}^2 P^{o2}}{P_{\mathrm{N_2}} P_{\mathrm{H_2}}^3} = \frac{x_{\mathrm{NH_3}}^2}{x_{\mathrm{N_2}} x_{\mathrm{H_2}}^3} \frac{P^{o2}}{P^2} \tag{24.3}$$

On voit que deux possibilités s'offrent à nous. La première est d'augmenter la pression autant que possible. C'est évidement une solution coûteuse et dangereuse, puisque le H_2 sous pression a une fâcheuse tendance à exploser. Cela explique la présence d'une pression de 300 bars dans le réacteur. Parler de la loi de le Châtelier.

On a de plus que $x_i = n_i/n_{\mathrm{tot}}$, on peut donc réécrire Q comme suit :

$$Q = \frac{x_{\mathrm{NH_3}}^2}{x_{\mathrm{N_2}} x_{\mathrm{H_2}}^3} \frac{P^{o2}}{P^2} = \frac{n_{\mathrm{NH_3}}^2 n_{\mathrm{tot}}^2}{n_{\mathrm{N_2}} n_{\mathrm{H_2}}^3} \frac{P^{o2}}{P^2} \tag{24.4}$$

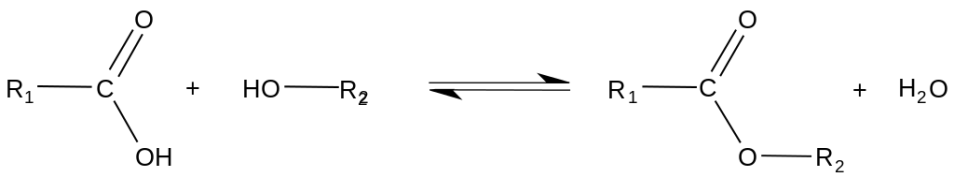
L'ajout d'un composé inactif en gardant tous les autres paramètres constants augmente n_{tot}, donc Q, ce qui n'est pas intéressant pour nous. En revanche, retirer l'ammoniac au cours de la synthèse fait baisser à la fois $n_{\mathrm{NH_3}}$ et n_{tot}. En pratique, comme l'ammoniac n'est pas directement séparable des réactifs, tous les gaz en sortie du réacteur sont emmenés dans un condenseur. L'ammoniac y est liquéfié par augmentation de la pression, tandis que le dihydrogène et le diazote (qui se liquéfient à une pression plus élevée que l'ammoniac) sont réinjectés dans le réacteur.



3.4 Expérience de modification de Q

On s'intéresse à une réaction d'estérification en milieu acide, qui forme de l'eau en sous-produit. Le principe de l'appareil Dean-Stark est d'éliminer progressivement l'eau du milieu réactionnel afin de déplacer entièrement l'équilibre.

Dans le ballon, l'eau et le cyclohexane s'évaporent, se condensent dans la colonne réfrigérante, et tombent dans le collecteur latéral (voir Figure 2). Comme l'eau est plus dense que le cyclohexane, elle tombe au fond et ne retourne pas dans le ballon. Ainsi, on obtient un rendement théorique de 100% (jamais atteint en pratique à cause des pertes lors de l'extraction, séchage et évaporation).



Estérification avec un appareil Dean-Stark

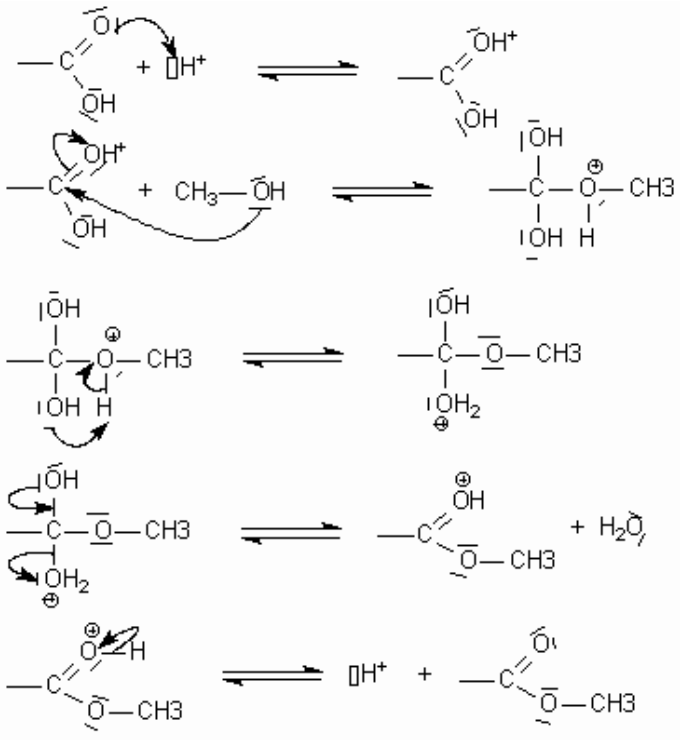
✍ poly de TP ⏲ 1h+15mn

- Assembler l'appareil Dean-Stark avec un ballon tricol de 100 mL et remplir le collecteur latéral de cyclohexane.
- Introduire dans le ballon 11.0 mL de 3-méthylbutan-1-ol pur, 6.0 mL d'acide éthanoïque pur et 15 mL de cyclohexane. Ajouter goutte à goutte 1 mL d'acide sulfurique concentré. Mettre à reflux à 130°C pendant environ 45 min.
- Lorsque le niveau d'eau dans le collecteur n'évolue plus ($\sim$ 2 mL), arrêter le reflux et verser le brut dans un erlenmeyer. Ajouter 20 mL d'une solution saturée de $NaHCO_3$ et agiter et séparer les deux phases avec une ampoule à décanter.
- Sécher la phase organique sur $NaSO_3$ anhydre, filtrer sur coton et évaporer le solvant sous pression réduite (230 mbar, 40°C) dans un ballon taré. Peser le produit et déduire le rendement. On attend $\sim$75%.

Conclusion

Dans ce cours on s'est focalisé sur deux aspects de l'optimisation d'un procédé chimique : l'aspect cinétique et l'aspect thermodynamique. Mais il faut garder à l'esprit qu'il y a d'autre choses à optimiser en pratique : les coûts économiques/énergétiques, la minimisation des risques (là dans la synthèse de l'ammoniac on pourrait encore augmenter la pression pour augmenter le rendement, mais c'est très énergivore et potentiellement dangereux), ou encore l'impact environnemental. Par exemple sur le schéma de la synthèse, on voit qu'à un moment il y a rejet de CO_2 : ce CO_2 va en pratique être collecté et réutilisé pour la synthèse de l'urée.

Annexe :



Commentaires

Expérience 1 : Les solutions de complexe peuvent être préparées à l'avance. On a changé les proportions pour avoir des solutions bien colorées et en quantité suffisante. Le changement de couleur dans le bain de glace n'est pas très visible, il faut laisser tremper longtemps.

Loi de Van't Hoff : On a choisi de ne pas faire la démonstration parce qu'elle apparaît déjà dans les chapitres précédents de thermodynamique. **Influence de la pression sur Q :** On peut faire une démonstration théorique en faisant apparaître un terme en $P^{\sum \nu_i}$, mais on trouvait que c'était un peu lourd pour pas grand-chose.

Ajout/retrait d'un constituant : On peut discuter dans cette partie du caractère actif ou inactif du composé ajouté, de l'effet d'ion commun et de la loi de Oswald (augmentation du taux de dissociation d'un acide lorsqu'il est dilué) avec éventuellement une expérience qualitative pour l'illustrer (voir les leçons des années précédentes).

Expérience 2 : Bien sûr, toute la synthèse doit être faite en préparation. Il faut décider quoi montrer pendant la leçon, et surtout voir si on a le temps de le faire. **La phase d'évaporation est longue**, donc il faut probablement avoir un produit déjà évaporé sur le côté pour faire le rendement. Il se peut que le milieu réactionnel brunisse en fin de reflux, ce n'est pas très grave mais il doit y avoir une réaction parasite qui se passe (mais laquelle ?). En principe il faudrait aussi caractériser le produit (CCM ou IR), parce que ça n'a pas vraiment de sens de calculer un rendement sans savoir si la synthèse est réussie... En niveau 0, on peut faire sentir le bouchon du ballon au jury pour voir que c'est bien de l'ester de banane.

Autres : On peut ajouter une partie sur l'influence de la composition initiale, et montrer que le rendement est maximal lorsqu'on est en proportion stoechiométrique (voir le cours de thermochimie).

LC 25

Corrosion humide des métaux

Niveau : CPGE

Programme officiel (MP)

Transformations spontanées : notion de potentiel mixte.	Positionner qualitativement un potentiel mixte sur un tracé de courbes courant-potentiel.
Potentiel de corrosion, intensité de courant de corrosion, densité de courant de corrosion. Corrosion uniforme en milieu acide ou en milieu neutre oxygéné. Corrosion différentielle par hétérogénéité du support ou du milieu.	Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion uniforme à l'aide de données expérimentales, thermodynamiques et cinétiques. Citer des facteurs aggravants de la corrosion. Interpréter qualitativement un phénomène de corrosion différentielle faisant intervenir deux métaux à l'aide de courbes courant-potentiel.
Protection contre la corrosion : - revêtement ; - passivation ; - anode sacrificielle ; - protection électrochimique par courant imposé.	Exploiter des tracés de courbes courant-potentiel pour expliquer qualitativement : - la qualité de la protection par un revêtement métallique ; - le fonctionnement d'une anode sacrificielle. Mettre en oeuvre des protocoles illustrant les phénomènes de corrosion et de protection.

Bibliographie

- ✍ *L'Oxydo-réduction*, **Sarrazin** — Manips originales pp27-301
- ✍ *Chimie MP (blanc)*, **Grécias** — Cours complet
- ✍ *Chimie Tout-en-un MP*, **Fosset** — Autre approche du cours
- ✍ https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/electrochim/corrosion/corrosion.html

Prérequis

- ➢ RedOx
- ➢ E-pH
- ➢ i-E
- ➢ potentiel mixte

Expériences

- ☕ Aération différentielle
- ☕ Clous tordus

1 Théorie de la corrosion . . . 983
1.1 Définition . . . 983
1.2 Aspect thermodynamique : diagrammes E-pH . . . 983
1.3 Aspect cinétique : courbes I-E . . . 985
2 Étude expérimentale de la corrosion . . . 987
2.1 Corrosion uniforme . . . 987
2.2 Corrosion différentielle . . . 988
2.3 Corrosion galvanique [pas le temps] . . . 989
3 Protection contre la corrosion . . . 989
3.1 Par recouvrement . . . 989
3.2 Anode sacrificielle . . . 990
3.3 Application d'un courant . . . 991

Introduction

Maintenant que nous connaissons les bases de l'oxydoréduction et de l'électrochimie, nous allons nous intéresser à un cas pratique très courant, celui de la corrosion. C'est un phénomène que l'on connaît tous, par exemple, on sait que le fer rouille. Il représente un enjeu de sécurité considérable (sécurité d'un véhicule, d'une infrastructure métallique, ou d'un centre de stockage nucléaire) mais également économique (5t d'acier qui disparaissent chaque seconde dans le monde, près de 2% du PIB mondial perdu à cause de la corrosion chaque année). Nous allons d'abord définir plus précisément la notion de corrosion, voir l'étudier et surtout comment protéger les objets de la corrosion.

1 Théorie de la corrosion

1.1 Définition

✍ IUPAC Gold Book

Définition officielle : An irreversible interfacial reaction of a material (metal, ceramic, polymer) with its environment which results in consumption of the material or in dissolution into the material of a component of the enviroment. [...]

La corrosion est donc une réaction irréversible se produisant à l'interface entre un matériau et son envoronnement et qui cause la consommation du matériau où sa dissolution dans une des espèces composant son environnement.

Il existe deux types de corrosion : la **corrosion sèche** qui se fait dans une atmosphère sèche avec O_2 ou Cl_2 ; et la **corrosion humide** qui se fait en présence d'eau (liquide ou dans une atmosphère humide). Cette leçon ne traitera que la corrosion humide des métaux.

Un exemple classique de corrosion est celui du fer qui se transforme en Fe_2O_3, communément appelé rouille, via les réactions suivante :

$$2Fe + 2H_2O + O_2 \rightarrow 2Fe(OH)_2$$

$$4Fe(OH)_2 + 2H_2O + O_2 \rightarrow 4Fe(OH)_3$$

$$2Fe(OH)_3 \rightarrow Fe_2O_3 + 3H_2O$$

On peut ainsi tout de suite remarquer que la rouille des alliages de fer n'est pas réellement de la corrosion mais un signe de corrosion puisque l'oxyde de fer (III) $\alpha - Fe_2O_3$ est en réalité issu d'une réaction spontanée de l'hydroxyde de fer (III) en oxyde de fer (III).

On a affaire à de l'oxydoréduction donc on peut dégainer nos diagrammes E-pH

1.2 Aspect thermodynamique : diagrammes E-pH

Pour comprendre la thermodynamique des réaction entre deux espèces différentes, il faut superposer leurs diagrammes E-pH.

Bien évidemment, puisqu'on s'intéresse à la corrosion *humide* des *métaux*, les deux espèces en question seront l'eau d'un côté et un métal de l'autre (thank you Captain Obvious).

Deux types de réaction vont intervenir dans ces diagrammes : les réactions d'oxydoréduction et les réactions de complexation.

Diagramme de l'eau :

Ce diagramme est très simple : il ne fait intervenir que deux couples redox. On a alors

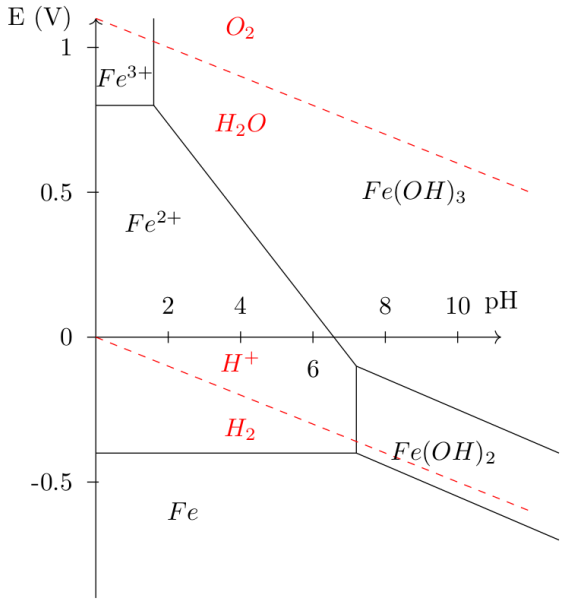
$$\begin{cases} O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O & E = E^0(O_2/H_2O) - 0.06pH \\ 2H^+ + 2e^- = H_2 & E = E^0(H^+/H_2) - 0.06pH \end{cases}$$

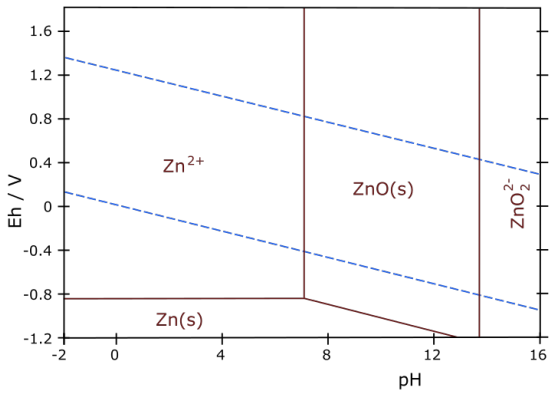
Ainsi, ce diagramme comporte deux droites de pente -0.06 unités de pH/V et d'ordonnées à l'origine les potentiels standards de O_2/H_2O et H^+/H_2 (attention à d'éventuelles surtensions et/où un potentiel de référence différent de l'ESH pour les valeurs des potentiels standards).

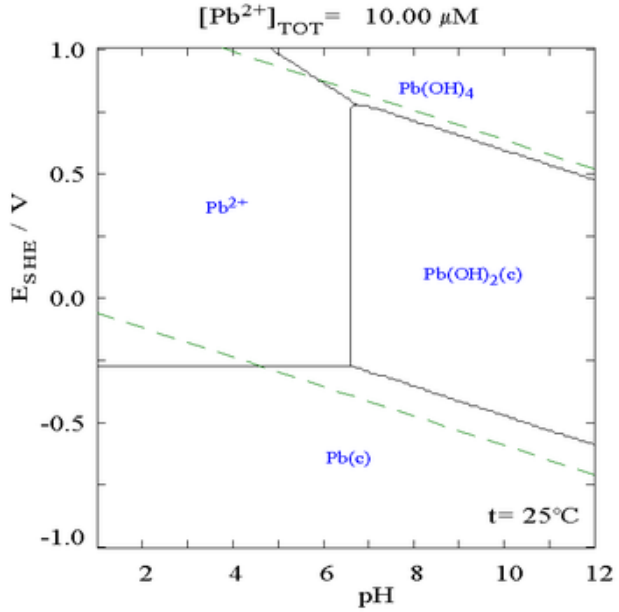
Diagramme d'un métal en présence d'eau :

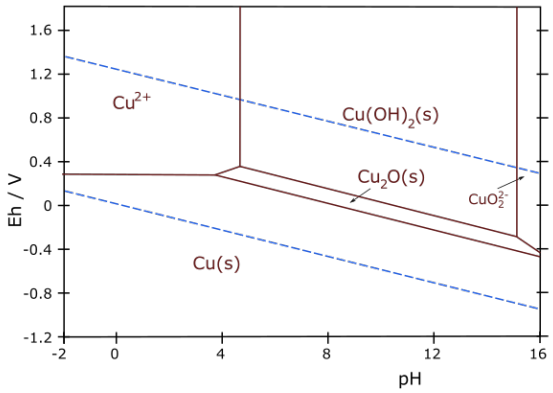
Lorsqu'on s'intéresse au diagramme d'un métal en présence d'eau, on définit plusieurs zones différentes :

- la zone d'immunité : zone dans laquelle le métal est stable dans l'eau
- la zone de corrosion : zone dans laquelle la forme stable dans l'eau est une forme ionique solvatée par l'eau
- la zone de passivation : zone dans laquelle la forme stable est un oxyde métallique solide (la notion de *passivation* sera abordée un peu plus tard dans la leçon).









On peut identifier sur ces diagrammes les zones d'immunité, de passivation et de corrosion.

On remarque alors que ni le fer, ni le zinc ne sont stables pour $E = 0$ V dans l'eau. On voit également que selon de pH, ils sont transformés en une forme ionique ou bien en une forme solide (passivation, cf partie 3). Par contre, on est bien dans la zone d'immunité du fer si on se place à un potentiel de -0.5 V et un pH de 4 par exemple. On voit également que le plomb n'est stable qu'à un pH basique dans l'eau. Le cuivre est stable en présence d'eau pour tout pH.

Mettre un morceau de fer et un morceau de plomb dans deux béchers d'acide différents. On voit une réaction pour le fer mais pas pour le plomb. On peut alors toucher le plomb avec du platine pour voir que la réaction a finalement lieu.

On observe que le plomb ne réagit pas en milieu acide contrairement à ce que prévoit son diagramme E-pH. Cependant, gardons à l'esprit que ces diagrammes ne représentent que l'aspect thermodynamique des réactions. En l'occurrence, le plomb ne réagit pas avec l'eau à cause d'un blocage cinétique.

L'aspect thermodynamique d'une réaction ne suffit pas pour la comprendre, il faut aussi l'aspect cinétique. Pour cela, on sort les courbes i-E du placard.

1.3 Aspect cinétique : courbes I-E

Pour comprendre la cinétique de la réaction entre deux espèces différentes en présence l'une de l'autre, il faut regarder leurs courbes i-E.

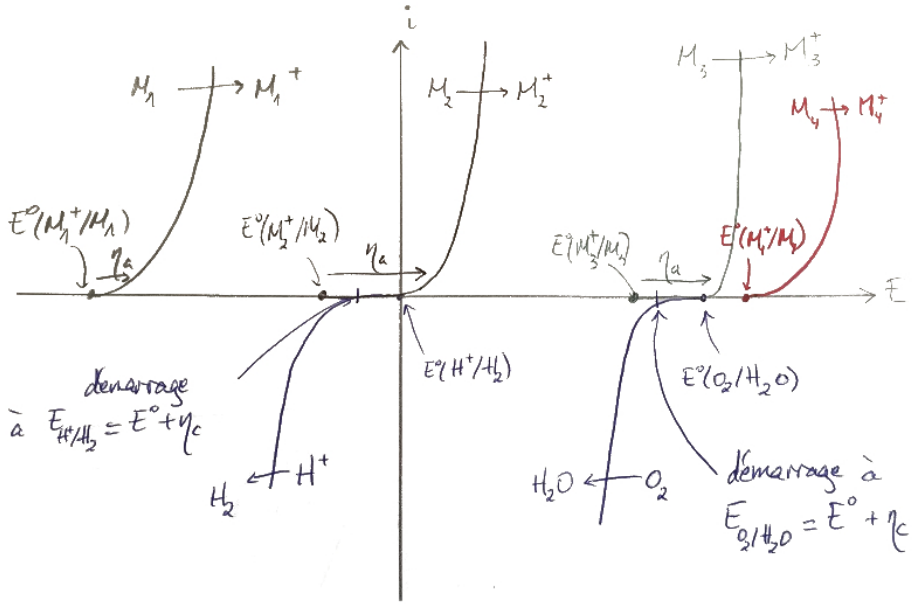
Pour cela, on rappelle quelques notions :

- un couple est rapide si une petite variation de potentiel autour de E^o donne une variation d'intensité non nulle
- un couple est lent si une petite variation de potentiel autour de E^o donne une variation d'intensité nulle (on a un plateau sur la courbe i-E)
- pour un couple lent, on parle de surtension cathodique η_c et anodique η_a les surtensions à appliquer pour mesurer respectivement une intensité négative et positive.

La corrosion d'un métal M passe par son oxydation en ion M^+ et une réduction du dioxygène dissout dans l'eau ainsi que de l'eau en H_2.

Dans le diagramme i-E (on peut aussi tracer un diagramme d'Evans, qui est un diagramme |i|-E), on place les courbes anodiques correspondant à des oxydations pour des intensités positives et les courbes cathodiques correspondant aux réductions pour des intensités négatives.

On peut alors définir un **potentiel mixte** E_{mixte} et une **intensité mixte** i_{mixte} pour deux espèces lorsque la courbe anodique d'oxydation de la première espèce coupe la courbe cathodique de réduction de la seconde espèce dans le diagramme d'Evans : les coordonnées du point d'intersection sont alors (E_{mixte}, i_{mixte}).



On note $E_{M+/M} = E^o(M^+/M) + \eta_a$ le potentiel standard du couple M^+/M auquel on ajoute une éventuelle surtension anodique. On fait de même pour les couples de l'eau (pour lesquels on a d'éventuelles surtensions cathodiques). Il existe alors plusieurs cas :

- si $E^o(M+/M) > E_{H+/H_2}$ et E_{O_2/H_2O} : on ne peut pas définir de i_{mixte}, cela correspond à une réaction thermodynamiquement infavorable. La corrosion n'a pas lieu. **(courbe rouge)**
- si $E^o(M+/M) < E_{O_2/H_2O} < E^o(M^+/M) + \eta_a$: i_{mixte} est défini mais vaut 0, cela correspond à un blocage cinétique. La corrosion par O_2 n'a pas lieu. Cependant, on peut également un i_{mixte} non-nulle par rapport à E_{H+/H_2} donc on a corrosion par l'eau. **(courbe verte)**
- si $E^o(M+/M) < E_{H^+/H_2} < E^o(M^+/M) + \eta_a$: on a un blocage cinétique donc pas de corrosion par l'eau (et donc pas de corrosion par O_2). **(courbe noire)**
- si $E^o(M^+/M) + \eta_a < E_{O_2/H_2O}$: on a un i_{mixte} non nul donc on a corrosion par O_2. **(courbe grise)**

L'idée à retenir c'est de comparer le potentiel E_a pour lequel la courbe anodique démarre à celui pour lequel la courbe cathodique E_c démarre. Si $E_a < E_c$, il y a corrosion. Sinon, soit on a blocage cinétique, soit la réaction n'est pas thermodynamiquement favorable.

Couple	E^o (V vs ESH)
Zn^{2+}/Zn	-0.76
Fe^{2+}/Fe	-0.44
Pb^{2+}/Pb	-0.13
Cu^{2+}/Cu	+0.34
Fe^{3+}/Fe^{2+}	+0.77
Ag^+/Ag	+0.7996
Au^{3+}/Au	1.52

On peut alors expliquer pourquoi certains métaux sont corrodés et d'autres non. Pour le plomb, la surtension cathodique de H^+/H_2 est assez forte pour causer un blocage cinétique. Cependant, si on met en contact le plomb avec du platine, la réduction de H^+ se fera sur la platine avec une surtension plus faible, au point qu'on aura plus un blocage cinétique.

2 Étude expérimentale de la corrosion

L'objectif de cette partie est d'analyser différentes expériences (réalisées si possible en direct) et de les interpréter avec nos outils théorique. **Quand c'est rose, c'est basique, donc on a réduit O_2**, et quand c'est vert, c'est acide, c'est là qu'on a oxydé le fer.

Fil rouge : les clous dans l'agar agar : préparation du milieu

✍ internet ! ⏲ 1h en tout

DOUBLER LES QUANTITÉS !

Matériel : bécher (250ml), sel, phénolphtaléine, ferricianure de potasium, agar agar.

Portez à ébullition 125 mL d'eau dans le bécher de 250 mL ; dissolvez-y petit à petit 2,0g d'agar-agar ; laissez bouillir jusqu'à ce que la solution soit claire. Ajoutez 0,1 g de phénolphtaléine, 0,1 g de $K_3Fe(CN)_6$ et 4g de NaCl.

Si ça mousse, sortir du feu.

On obtient la solution que j'appellerais par la suite le *Gelimmonde*©.

Fil rouge : les clous dans l'agar agar : disposition

✍ ⏲

Matériel : des clous LONGS, une petite plaque de fer, des fils de zinc et de cuivre, des boites de pétri, un tube à essai, une pile 1.5V.

Mettre les clous et une plaque de fer dans le gelimmonde©, avec différentes positions et dispositions, comme décrit au fur et à mesure de l'exposé.

pétri : 1 plié, trois entourés, 2 sur une pile

Essai : 1 dans un tube à essai.

2.1 Corrosion uniforme

La corrosion uniforme, c'est ce que l'on observe là :

FIGURE 25.1 – Corrosion uniforme sur des pipelines.

Montrer la plaque dans l'agar agar.

Toute la surface du matériaux est attaquée uniformément, et de ce fait il n'y a pas de circulation d'électrons dans le matériaux. En effet on effectue la réduction de H^+ au même endroit que l'oxydation du métal.

$$Fe_{(s)} + 2H^+ = Fe^{2+} + H_{2(g)}$$

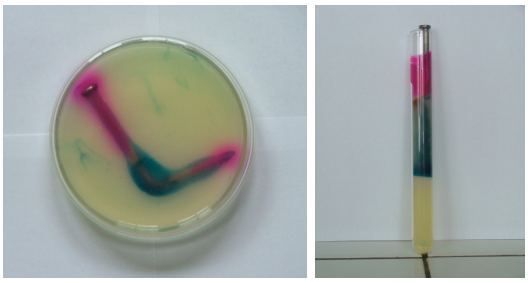
Cette corrosion dépend bien évidement de paramètres extérieurs, on a tous déjà remarqué qu'un bout de ferraille à l'ai libre rouille plus vite que dans une boite. Les facteurs aggravants principaux sont

- La vapeur d'eau atmosphérique
- la pluie (directement des H^+)
- l'eau de mer (car NaCl), la présence d'ions de manière générale

Cependant cette corrosion n'est généralement pas la plus problématique, en effet étant généralisée elle est relativement lente, et son uniformité fait qu'elle est aisément repérable.

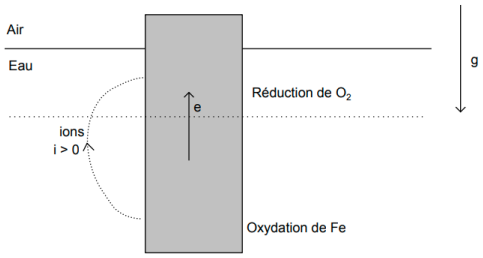
2.2 Corrosion différentielle

La corrosion différentielle, c'est ce qu'il se passe lorsque l'on a des inhomogénéités, soit dans le milieu, soit dans le matériaux.



Là on a deux inhomogénéités différentes.

- **Premier cas :** Vu qu'on a coupé la convection en augmentant diantrement la viscosité, on a un gradient de concentration en O_2 qui s'établit dans le tube à essai, ce qui donne une corrosion différentielle à cause du milieu.



- **Deuxième cas :** C'est le cas de l'usure mécanique. Une pièce fragilisée par l'usure, la pliure ou qui aurait par exemple une petite cavité sera le siège d'une corrosion différentielle, le métal s'abîme au niveau de la pliure.

Il est à noter que l'oxydation du doxigène se fait là où le dioxygène est abondant, mais que la réduction du fer se fait là où le dioxygène n'est point. O_2 est réduit en H_2O dans les zones à grande teneur en O_2. Donc l'oxydation qui accompagne la réduction de O2 se fait dans les zones complémentaires à faible teneur de O_2.

2.3 Corrosion galvanique [pas le temps]

Pile de corrosion

✍ Sarrazin p. 287 ⏲ 5mn

On prend deux métaux dans de l'acide chlorhydrique, et on observe la corrosion. Quand on les relie par un fil électrique, phénomène de pile, on voit bien ce qui se passe ! (Attention, Sarrazin se trompe, c'est la corrosion du fer qui est stoppée en présence de Zn, pas l'inverse). On les met dans deux béchers différents reliés par un pont salin pour plus de facilité.

Mettre de la phénolphtaléine comme indicateur coloré.

Rôle de la salinité

En milieu chlorure, c'est que la corrosion se fait dans un environnement localement acide avec une grande concentration en ions chlorure or ces ions chlorures ont tendance à décaper la couche protectrice existante. En diminuant le pH, on déstabilise généralement l'oxyde protecteur. Et comme les zones faiblement aérées sont les plus favorables à la corrosion (oxygénation différentielle) le phénomène est autocatalytique : on a une zone fragile où il y a accumulation locale d'ions chlorure et acidification qui favorise la corrosion qui favorise la formation d'une zone mal aérée, etc... Ça c'est l'effet de corrosion caverneuse. De plus, la conduction de la solution augmente ce qui permet d'écarter les zones anodique et cathodiques les unes des autres. Du coup, normalement on basifie à l'anode et on acidifie à la cathode. Si les deux zones ne sont pas trop loin, alors cela permet de former localement l'hydroxyde dans une zone intermédiaire. En présence d'ions chlorures, les zones sont plus écartées et on défavorise la formation de l'hydroxyde protecteur vu qu'il n'y a plus proximité et donc "rencontre" entre les ions Fe2+ et OH-. Et cet effet est plutôt lié à la force ionique.

Conséquences : *on a une corrosion nettement moins gentille, parce qu'elle est discrète, se passe dans un seul endroit, et qu'en plus, si par exemple on considère une fissure, elle agrandit les fissures ! C'est typiquement le genre de corrosion qu'on veut éviter à tout prix ! (enfin au prix du bateau quoi...)*

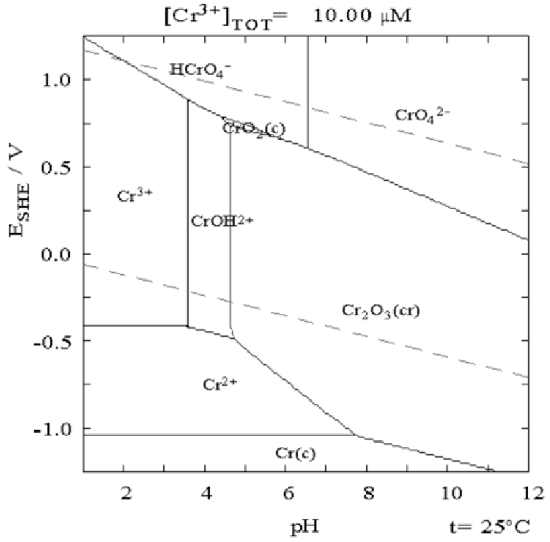
3 Protection contre la corrosion

3.1 Par recouvrement

Une première méthode consiste à isoler le métal du milieu oxydant, donc empêcher le contact avec l'eau et l'air. Plusieurs techniques d'isolement :

3.1.1 Isolation

- En recouvrant d'une peinture (par ex. les bateaux qu'on repeint fréquemment, la Tour Eiffel repeinte tous les 7 ans)
- Parkerisation dans l'industrie automobile : on plonge le fer dans un bain chaud de phosphate de zinc, le fer est recouvert d'une pellicule de phosphate de fer **étanche**
- Chromage : on recouvre les pièces en acier de chrome (en fait d'un oxyde de chrome) qui n'est pas corrodé (cinétique lente + zone de passivation pour des pH supérieurs à 4-5). Mais cette technique a été abandonnée : la moindre rayure laissait apparaître le fer qui se corrodait alors, jouant le rôle d'anode sacrificielle pour le chrome.



3.1.2 Passivation

De nombreux métaux sont protégés par passivation. L'aluminium (oxyde d'alumine, aspect patiné) ou le cuivre (vert de gris) le font très bien : l'oxyde formé par passivation recouvre d'une fine pellicule le métal, l'isolant de l'air. **Ici, on revient sur les diagrammes E-pH pour montrer le domaine de passivation.**

Passivation du fer

✍ 🕒 2mn

Le fer, attaqué par l'acide nitrique à 8 mol/L, puis passivé par celui à 16 mol/L, n'est ensuite plus attaqué par la première solution. Problème : la dé-passivation est très facile (il suffit d'une rayure, ou d'une zone non passivée, pour relancer la corrosion et détruire la couche de passivation. Autre expérience : dé-passiver à l'aide d'une jonction électrique avec une autre électrode (platine).

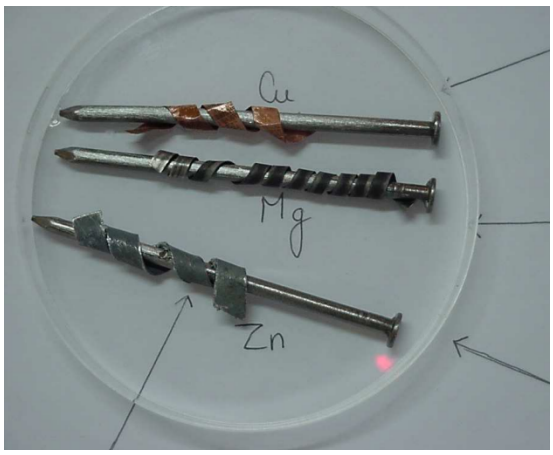
3.2 Anode sacrificielle

Une méthode très courante pour protéger des métaux est d'utiliser la corrosion différentielle (en fait galvanique) et d'introduire une hétérogénéité dans le matériau en lui greffant une anode sacrificielle (collée ou placée par piqûre), *i.e.* une pièce d'un métal plus réducteur qui va être oxydé en priorité et qui est souvent moins cher que le métal en question.

On revient sur l'expérience de corrosion galvanique de tout à l'heure : on peut l'interpréter dans l'autre sens !

C'est cette méthode qui est utilisée pour protéger la coque et autres parties métalliques de bateaux : des anodes sacrificielles (généralement en zinc pour les coques en fer) sont disposées sur les surfaces exposées et régulièrement remplacées.

Montrer les photos !!



3.3 Application d'un courant

Lorsque l'isolement du métal avec le milieu oxydant n'est pas possible ou que la passivation ne suffit pas (pour le fer par exemple), on a recours pour des structures de grandes tailles à une protection par courant imposé : l'idée est alors d'imposer à l'aide d'un générateur continu un potentiel au métal à protéger afin d'en empêcher l'oxydation. On le fait par exemple pour protéger certaines canalisations enterrées, et pour les rails de trains.

On a préparé au préalable des clous en fer dans l'agar-agar, mais en imposant une différence de potentiel entre eux (avec une pile de 1,5V). Un clou a été oxydé mais l'autre a été protégé en étant le siège de la réduction de l'eau.

https://publicacions.iec.cat/repository/pdf/00000087/00000045.pdf

Conclusion

La corrosion humide est un phénomène omniprésent dès que l'on parle de métaux puisqu'il s'agit de l'usure naturelle des métaux, la plupart n'étant pas stables thermodynamiquement dans l'eau. Deux aspects sont importants quelle que soit la corrosion étudiée : thermodynamique d'une part, cinétique d'autre part. Les deux aspects doivent être réunis pour avoir corrosion (qui reste généralement un phénomène lent).

On sait cependant protéger les métaux : revêtement, passivation, courant imposé, anode sacrificielle. Ces méthodes sont employées afin de contrer le phénomène de corrosion mais ont elles aussi un coût important. Compte tenu de l'omniprésence de ce phénomène, de son coût, et de ses conséquences, la compréhension de la corrosion et le développement de techniques pour l'empêcher est un enjeu majeur de l'industrie aujourd'hui encore.

Ouvrir sur la chimie verte avec la peinture et les solvants ?

Remarques diverses

Beaucoup de données dans le ✍ Verdaguer.

Manip quantitative possible :

☕

Rendement faradique de l'anodisation de l'aluminium

✍ Sarrazzin p. 298 ⏲

Préparation de la plaque en éliminant la couche d'alumine.

Peser la plaque d'aluminium avec précision.

Aluminium au + du générateur, plomb au -, plonger les électrodes dans un milieu acide. Placer une résistance en série pour suivre la tension au cours du temps aux bornes de la tension.

Régler l'alimentation de manière à avoir une valeur stable du courant et enclencher l'acquisition. On observe un dégagement gazeux sur l'électrode de plomb.

Après environ 15 min, arrêter l'électrolyse en notant précisément la durée. Essuyer la plaque d'alu et la peser avec précision.

On présente les résultats sur une plaque électrolysée en préparation. On plonge la plaque dans l'acide : pas de dégagement acide, donc l'aluminium est bien protégé.

Remarques du jury

Note de D. Chateau : "Cette leçon est présentée souvent sans recul et de manière trop proche des contenus bibliographiques. On constate des difficultés dans l'exploitation des expériences. Les courbes intensité-potentiel sont souvent mal maîtrisées. Le jury invite les candidats à approfondir leurs connaissances dans ce domaine, qui ne s'improvise pas. Les aspects cinétiques de la corrosion sont souvent négligés. Une mauvaise maîtrise des courbes intensité-potentiel en est en général la cause. Un lien existe entre les conditions de tracé des courbes i=f(E) et l'utilisation que l'on en fait dans l'application étudiée."

Correction 2018 : "La corrosion différentielle de la coque d'un bateau a lieu principalement à la quille qui joue le rôle d'anode (oxydation du Fer) et la cathode est au niveau de la ligne de flottaison (réduction de O2)."

Correction 2018 : "Le graissage de l'acier permet d'empêcher le contact avec H2O car la graisse est peu polaire."

Correction 2018 : "Connaître les alliages classiques (acier, bronze, laiton, acier inox)."

Retour 2015 : "Je pense que le jury a apprécié le fait que je justifie la nécessité de l'utilisation de i/E et de la cinétique avec une expérience ou je compare les prévision thermo (en plongeant, Pb, Zn, Cu...) dans HCl en comparant ce qu'on attend : dégagement gazeux pour tous les cas et ce qu'on observe : blocage cinétique sur le Plomb."

On peut aussi lire le cours d'électrochimie de Martin sur son site.

LC 26

Conversion réciproque d'énergie électrique en énergie chimique

Niveau : CPGE

Extraits du programme

3.1. Conversion d'énergie chimique en énergie électrique	
Approche thermodynamique.	Établir l'inégalité reliant la variation d'enthalpie libre et le travail électrique. Citer la relation entre la tension à vide d'une pile et l'enthalpie libre de réaction. Déterminer la capacité d'une pile en Ah.
Approche cinétique.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'une pile électrochimique et prévoir la valeur de la tension à vide. Citer les paramètres influençant la résistance interne du dispositif électrochimique. Mettre en oeuvre une démarche expérimentale utilisant des piles.
3.2. Conversion d'énergie électrique en énergie chimique	
Caractère forcé de la transformation. Électrolyseur.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer le fonctionnement d'un électrolyseur et prévoir la valeur de la tension de seuil. Déterminer un rendement faradique à partir d'informations fournies concernant le dispositif étudié.
Dépôt électrolytique.	Évaluer l'épaisseur d'un dépôt électrolytique ou la masse de produit formé pour une durée donnée d'électrolyse.
Recharge d'un accumulateur.	Utiliser les courbes courant-potentiel pour justifier les contraintes dans la recharge d'un accumulateur. Utiliser les courbes courant-potentiel pour expliquer la recharge d'un accumulateur et prévoir la valeur de la tension de seuil. Approche documentaire : à partir de documents sur des accumulateurs (lithium ion, nickel-métal hydrure), comparer la constitution, le fonctionnement, et l'efficacité de tels dispositifs

Bibliographie

✍ *Chimie Tout-en-un PSI*, **Fosset, Baudoin, Lahitète**	La base de la leçon
✍ *Chimie Tout-en-un MPSI-PTSI*, **Fosset, Baudoin, Lahitète**	La pile Daniell
✍ *Des expériences de la famille Réd-Ox*, **Cachau-Hereillat**	Courbes i-E de l'eau
✍ *L'oxydoréduction*, **Sarrazin, Verdaguer**	Courbes i-E de la pile Daniell et accumulateur au plomb
✍ *La chimie expérimentale. 1.Chimie générale*, **JFLM et Nowak-Leclercq**	Accumulateur au plomb
✍ *BUP 790 Une vie de Cuivre*	pour le cuivre, on peut aussi regarder *Chimie Industrielle* si on a du temps
✍ , **Porteu-de Buchère**	Extraction du cuivre

Prérequis

- ➢ Oxydoréduction
- ➢ Diagramme E-pH
- ➢ Courbes i-E
- ➢ Nernst

Expériences

- ☕ Pile Daniell
- ☕ Électrolyse de sulfate de sodium
- ☕ Accumulateur au plomb

1 Rappels théoriques . . . 995
1.1 Lien entre chimie et électricité . . . 995
1.2 Potentiel d'électrode . . . 996
1.3 Rappel sur les courbes iE . . . 996
2 Chimique into électrique : la pile Daniell . . . 996
2.1 Présentation de la pile . . . 996
2.2 Tension à vide . . . 997
2.3 Interprétation avec les courbes i-E . . . 998
3 Électrique into chimique : l'électrolyse . . . 999
3.1 Principe . . . 999
3.2 Mise en place expérimentale : . . . 999
4 Conversion réversible : l'accumulateur au plomb (tampon) . . . 1000

Introduction

L'électricité c'est trop bien, mais franchement, comment on fait pour la générer et la stocker ? Le but de cette leçon est de présenter quelques options de conversion et de stockage d'énergie électrique.

Petit blabla historique sur l'électricité animale et la pile volta ?

1 Rappels théoriques

On se rappelle bien de tout ce que l'on a fait en Oxydo-Réduction, on va aujourd'hui l'appliquer à des cas particuliers.

1.1 Lien entre chimie et électricité

Le lien principal entre chimie et électricité par la réaction d'oxydo-réduction, c'est l'enthalpie libre de réaction. On a, avec $\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A$ la constante de Faraday (96500 C/mol), n le nombre d'électrons échangés et E la force électromotrice :

$$\Delta_r G = -n\mathcal{F}E \tag{26.1}$$

démonstration

Soit un système chimique subissant une transformation élémentaire et échangeant avec l'exterieur : une quantité de chaleur δQ , un travail mécanique $-P\mathrm{d}V$ et un travail électrique δW_e.

Variation d'énergie interne : $\mathrm{d}U = \delta Q$ - $P\mathrm{d}V$ + δW_e

Variation d'enthalpie $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U$ + d(PV) = δQ + δW_e +$V\mathrm{d}P$

Variation d'enthalpie libre $\mathrm{d}G = \mathrm{d}H$ - d(TS) = δQ +δW_e +$V\mathrm{d}P$ -$T\mathrm{d}S$ -$S\mathrm{d}T$

La transformation est isobare et isotherme donc $\mathrm{d}P$=$\mathrm{d}T$=0

$$\mathrm{d}G = \delta Q + \delta W_e - T\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} + \delta S_{cr} \text{ donc } \mathrm{d}G = \delta W_e - T\delta S_{cr}$$

Examinons de plus près ce travail électrique (dans la pile) :

Reaction Red1 -> Ox1 + ne^- au potentiel E1.

Reaction Ox2 + ne^- -> Red2 au potentiel E2.

Avec E2 > E1 vu le sens de la réaction red/ox.

Si la réaction redox bilan Red1 + Ox2 -> Red2 + Ox1 s'effectue avec un avancement $\mathrm{d}x$ alors la variation d'enthalpie libre est $\mathrm{d}G = \Delta_r G\ \mathrm{d}x$.

Il y a $-n\mathcal{F}\ \mathrm{d}x$ coulombs qui passent du potentiel E2 au potentiel E1 donc le travail électrique est

$$\delta W_e = -n\mathcal{F}\ \mathrm{d}x\ (\text{E2 - E1})$$

Pour une transformation réversible :

$\mathrm{d}G = \delta W_e$ donc $\Delta_r G$ = - $n\mathcal{F}$(E2 - E1)

On a ainsi deux fonctionnement possibles. Soit on récupère du travail électrique d'une pile, soit on lui fournit du travail électrique, c'est alors une électrolyse. À noter que dans le cas non réversible, il va y avoir des pertes !

1.2 Potentiel d'électrode

Il me semble bon de rappeler également le potentiel d'électrode, au moins rapidement. On prend une réaction dans le sens de l'oxydation de i. R est la constante des gaz parfait $R = 8,314 J/(molK)$.

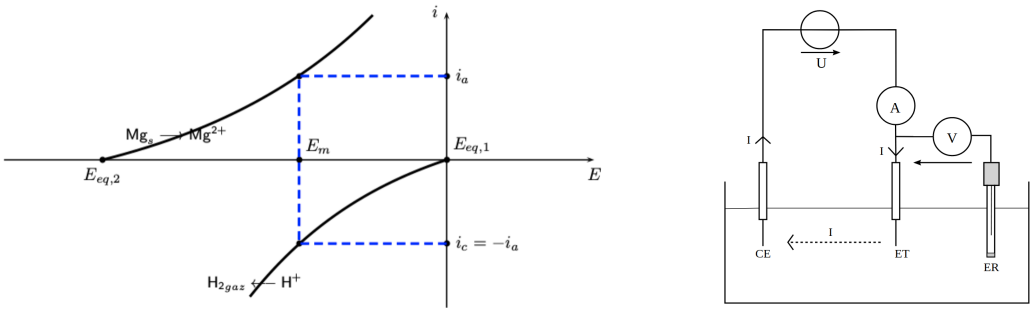
Ainsi si on met en contact électrique deux électrodes, on a pour différence de potentiel entre les deux $E = |E_2 - E_1|$.

$$E_i = E_i^o - \frac{RT}{n_i \mathcal{F}} \ln Q_r \tag{26.2}$$

1.3 Rappel sur les courbes iE

Lorsque l'on trace une courbe iE, on trace l'intensité en fonction du potentiel. Ainsi ce que l'on trace c'est directement une information de cinétique ! En effet on a que $i = -n\mathcal{F}\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$.

http://s.bourdreux.free.fr/sciences/agregation_fichiers/LECONS/CHIMIE/lc40.pdf



Pour mesurer une courbe iE on utilise le montage classique dit à trois électrodes. On peut ensuite superposer les diagrammes obtenus pour trouver les courants électriques dans les piles.

2 Chimique into électrique : la pile Daniell

2.1 Présentation de la pile

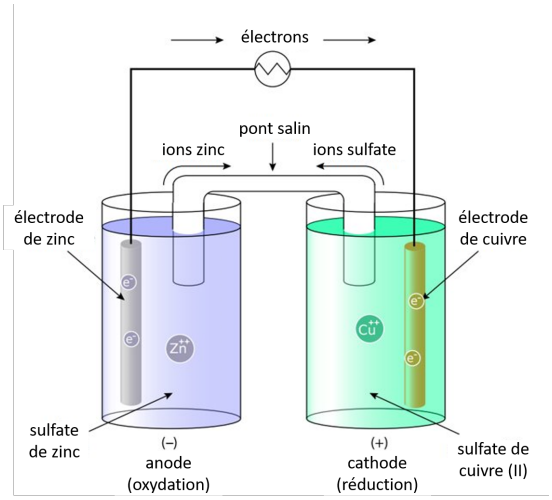


FIGURE 26.1 – Schéma expérimental de la pile Daniell.

Cette pile est composée :

- d'une électrode de zinc dans une solution de sulfate de zinc
  On y associe l'équation $Zn_{(s)} = Zn^{2+}{}_{(aq)} + 2e^-$ pour laquelle on exprime le potentiel de Nernst

$$E_{Zn} = E^o(Zn^{2+}/Zn) + \frac{RT}{2\mathcal{F}}\ln\left(\frac{[Zn^{2+}]}{C^o}\right)$$

- d'une électrode de cuivre dans une solution de sulfate de cuivre
  On y associe l'équation $Cu^{2+}{}_{(aq)} + 2e^- = Cu_{(s)}$ pour laquelle on exprime le potentiel de Nernst

$$E_{Cu} = E^o(Cu^{2+}/Cu) + \frac{RT}{2\mathcal{F}}\ln\left(\frac{[Cu^{2+}]}{C^o}\right)$$

- d'un pont salin pour assurer le transport des charges d'un bécher à l'autre

La pile a donc pour équation bilan

$$Cu^{2+}{}_{(aq)} + Zn_{(s)} \rightleftharpoons Cu_{(s)} + Zn^{2+}{}_{(aq)}$$

À partir des valeurs tabulées d'enthalpies libres standards de formation, on calcule que $\Delta_r G^o = -212$ kJ/mol, ce qui nous indique que nous avons écrit la réaction dans le sens direct d'évolution du système. Ainsi, le cuivre est réduit à la cathode et le zinc est oxydé à l'anode.

On a donc déterminé que le cuivre était le pôle + de la pile tandis que le zinc en était le pole -. La force électromotrice de la pile, égale à la différence de potentiel entre les deux électrodes, est alors

$$E = E_{Cu} - E_{Zn} = E^o(Cu^{2+}/Cu) - E^o(Zn^{2+}/Zn) + \frac{RT}{2\mathcal{F}}\ln\left(\frac{[Cu^{2+}]}{[Zn^{2+}]}\right) \tag{26.3}$$

Remarque

$E^o(Cu^{2+}/Cu) = 0.34$ V vs ESH tandis que $E^o(Zn^{2+}/Zn)$=-0.76 V vs ESH donc on a bien $E > 0$. Or $\Delta_r G = -2\mathcal{F}E$ donc on retrouve bien $\Delta_r G < 0$.

2.2 Tension à vide

Tension à vide de la pile Daniell

✍ 🕒 10 min

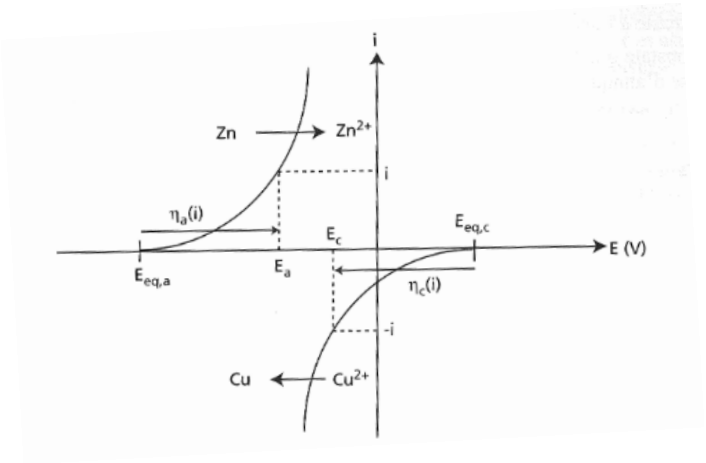
Matériel :

- 2 béchers de 150 mL
- une plaque de cuivre, une plaque de zinc (décapées)
- solution de $CuSO_4$ à 0.1 M
- solution de $ZnSO_4$ à 0.1 M
- un pont salin
- un millivoltmètre
- 2 princes crocodile

Réaliser la pile, mesurer sa f.e.m à vide. Comparer à $E^o(Cu^{2+}/Cu) - E^o(Zn^{2+}/Zn) = 1.1$ V.

C'est cool de connaître la tension à vide, mais que se passe-t-il si on fait débiter la pile dans une résistance ?

2.3 Interprétation avec les courbes i-E



On trace au tableau les courbes i-E correspondant à l'oxydation du zinc et à la réduction des ions Cu^{2+}. On voit qu'on peut bien définir un potentiel mixte E_{mixte} ainsi qu'une intensité mixte E_{mixte} car le cuivre est l'oxydant le plus fort tandis que le zinc est le meilleur réducteur.

On voit bien que la tension à vide est $E^o(Cu^{2+}/Cu) - E^o(Zn^{2+}/Zn)$ mais on constate également que la tension aux bornes de la pile doit diminuer par rapport à la tension à vide si on veut débiter un courant. Cette tension vaut

$$U = E_c - E_a = E^o(Cu^{2+}/Cu) - E^o(Zn^{2+}/Zn) - \eta_a - |\eta_c| - r_{\text{int}} i$$

avec r_{int} la résistance interne de la pile.

Tension de charge de la pile Daniell

Reprendre le montage précédent en ajoutant aux bornes des électrodes une branche avec un milliampèremètre et une résistance variable (un rhéostat par exemple).

Tracer la caractéristique de la pile $U = f(i)$. On est censé trouver quelque chose de la forme $U = E - r_{\text{int}} i$ avec E la fem. On peut essayer de remonter à la valeur des surtensions, et si ces dernières sont nulles, à $\Delta_r G$ en fonction de ce que l'on considère comme acquis.

La résistance interne de la pile est principalement attribuable au pont salin. Pour minisiser cette chute ohmique, on peut multiplier les ponts salins (= mettre des résistances en parallèle) ou concentrer les électrolytes.

De manière générale, cette chute ohmique traduit l'irréversibilité de la pile : l'énergie électrique débitée sera toujours un peu inférieure à l'énergie chimique sotckée.

Les piles c'est sympa, mais on peut faire aller les choses dans l'autre sens, comme on l'a déjà dit !

3 Électrique into chimique : l'électrolyse

Nous allons nous appuyer sur l'exemple de l'électrolyse de l'eau tout au long de cette partie.

http://culturesciences.chimie.ens.fr/content/electrolyse-de-leau-796

3.1 Principe

Une électrolyse consiste à tirer profit de l'énergie électrique fournie par une alimentation pour activer une réaction d'oxydoréduction autrement thermodynamiquement impossible. On plonge deux électrodes identiques dans une solution contenant les espèces à électrolyser (ici, H_2O).

On a présence d'ions H+ et HO- en solution (autoprotolyse de l'eau). On a alors oxydation de HO- à l'anode et réduction de H+ à la cathode :

$$\begin{cases} 2H^+_{(aq)} + 2e^- & = H_{2(g)} \\ 4HO^-_{(aq)} & = O_{2(g)} + 2H_2O_{(l)} + 4e^- \end{cases}$$

La dernière peut se réécrire : $2H_2O = O_2 + 4H^+ + 4e^-$.

Pour que la réaction soit possible, il faut appliquer une f.e.m. telle que $\Delta_r G = 0$. La différence des potentiels standard des deux couples valant 1,23V, on s'attend à ce que ce soit la tension minimale à appliquer. En effet des surtensions peuvent se produire !

On voit qu'on génère deux gaz potentiellement dangereux, puisque l'un d'eux est un excellent comburant (O_2), et l'autre a fait exploser un zeppelin en 1937.

Ainsi deux expériences sont possibles, une sans danger qui utilise un kit tout fait et une où on libère les gaz dans l'air.

On va faire les deeeeeeux ♡

3.2 Mise en place expérimentale :

Vidéo[1] de l'électrolyse de l'eau : https://youtu.be/D1CfxNvrGkA.

Kit Jeulin d'électrolyse de l'eau

✍ Jeulin ⏲ 10mn

Préparer tout un gros stock de H2 et de O2 avec le kit jeulin, pour pouvoir montrer qu'en fait on a fabriqué un accumulateur (de merde) à la fin.

(Calcul d'un rendement faradique d')Électrolyse de l'eau

✍ Ma tête ⏲ 5 minutes

Matériel : Deux béchers, de l'acide sulfurique, de la soude, de l'eau, deux électrodes (platine ?), un générateur, un ampèremètre ou une acquisition d'intensité.

Deux bécher sont remplis d'une solution aqueuse de sulfate de sodium (Na2SO4) (pour conduire l'électricité) à

1. Réalisée par nos amis du Québec.

laquelle on a ajouté quelques gouttes de Bleu de bromothymol (BBT). Ils sont reliés l'un à l'autre par un pont salin. Les deux électrodes, respectivement dans chacun des deux cristallisoirs, sont reliées à un générateur de courant.

On allume le générateur et on laisse l'électrolyse se faire. Les deux béchers changent de couleur à mesure que l'un devient acide et l'autre basique. À la fin de la manip, on peut bêtement mélanger les deux et retrouver une teinte plate !

remarque : bien s'assurer d'être initialement à pH=7 avec un peu de soude et un peu d'acide sulfurique.

Pour la version quantitative, on fait l'acquisition de l'intensité en fonction du temps. On intègre cette courbe, ce qui nous donne $Q = -nF\Delta x^{theorique} = -F\Delta N_{H^+}^{theorique}$. On a ainsi la valeur théorique de l'avancement de la réaction. On peut aussi faire ça à i constant et multiplier $i \times t$. c'est plus simple.

En effet les électrons qui ont transité peuvent aussi venir d'électrolyses d'autres espèces, ou peuvent avoir circulé par pertes Ohmiques dans le circuit (qui a une résistance et tout et tout).

On effectue ensuite la mesure de pH finale. Du côté acide (anode -) on a $\Delta N_{H^+} = 10^{-pH} - 10^{-7}$, et de l'autre on a $\Delta N_{HO^-} = 10^{-14+pH} - 10^{-7}$. Les deux doivent être sensiblement égaux.

On a alors le rendement faradique :

$$\eta = \frac{\Delta N_{H^+} + \Delta N_{HO^-}}{2\Delta N_{H^+}^{theorique}}$$

Deux remarques importantes : on peut remarquer la surtension, et on peut, si les béchers ne bougent pas trop, remarquer la différence de mobilité entre les ions HO- et H+.

☕

Retour du Kit Jeulin

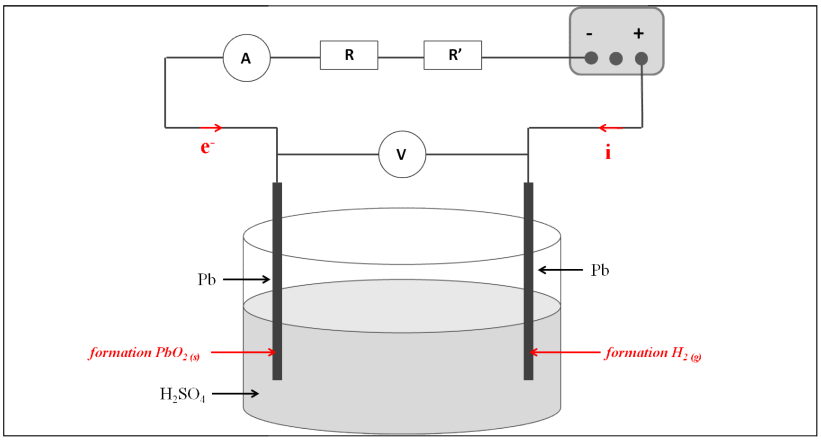
✍ ⏲

On prend le kit Jeulin, on dit que c'est la même chose mais où on a stocké les gaz, on branche un ventillo en sortie du kit, et bam ça tourne => notion de réversibilité de la conversion, **Transition qui DÉCHIRE.**

Remaque : On peut calculer le rendement faradique de cette manip en mesurant le volume de gaz produit par l'électrolyse. On a alors $n_{gaz} = PV/RT$, et $n_{e^-}^{theorique} = \frac{it}{\mathcal{F}}$. Rappel : $n_{e^-} = 2n_{H_2} = 4n_{O_2}$.

4 Conversion réversible : l'accumulateur au plomb (tampon)

Gaston Planté en 1859 inventa la première batterie rechargeable en mettant au point l'accumulateur au plomb. Ce dispositif électrochimique peut fonctionner alternativement comme électrolyseur (phase de charge) ou comme générateur (phase de décharge).



• **État initial et première charge**

Le système est initialement parfaitement symétrique. Lors de la première charge, on force un courant avec l'alimentation continue pour observer une oxydation du plomb à l'anode et une réduction de H^+ à la cathode :

$$\begin{cases} \mathrm{Pb}_{\ (s)} + 2\mathrm{H_2O} = \mathrm{PbO_2}_{\ (s)} + 4\mathrm{H^+} + 4\mathrm{e^-} \\ 2\mathrm{H^+} + 2\mathrm{e^-} = \mathrm{H_2} \end{cases}$$

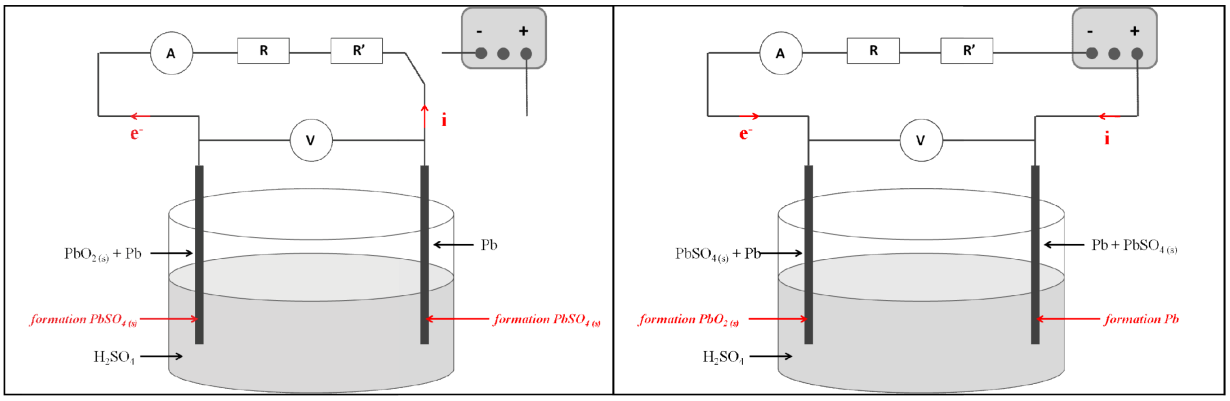
• Fonctionnement ultérieur

Si on coupe l'alimentation, le système se décharge. La cathode devient l'anode et inversement. L'oxyde de plomb PbO_2 est alors oxydé en Pb^{2+} donc on obtient du $PbSO_4$ solide à une électrode, tandis qu'à l'autre électrode Pb est oxydé en Pb^{2+} donc on obtient également du $PbSO_4$:

$$\begin{cases} \mathrm{Pb}_{\ (s)} + \mathrm{SO_4^{2-}} = \mathrm{PbSO_4}_{\ (s)} + 2\mathrm{e^-} \\ \mathrm{PbO_2}_{\ (s)} + \mathrm{SO_4^{2-}} + 2\mathrm{e^-} + 4\mathrm{H^+} = \mathrm{PbSO_4}_{\ (s)} + 2\mathrm{H_2O} \end{cases}$$

Ensuite on recharge l'accumulateur on faisant les réactions inverses :

$$\begin{cases} \mathrm{PbSO_4}_{\ (s)} + 2\mathrm{e^-} = \mathrm{Pb}_{\ (s)} + \mathrm{SO_4^{2-}} \\ \mathrm{PbSO_4}_{\ (s)} + 2\mathrm{H_2O} = \mathrm{PbO_2}_{\ (s)} + \mathrm{SO_4^{2-}} + 2\mathrm{e^-} + 4\mathrm{H^+} \end{cases}$$



On peut expliquer complètement le fonctionnement de l'accumulateur au plomb avec les courbes i-E tracées au tableau. On précise également sur le schéma où sont la cathode et l'anode pendant la charge et la décharge. En manip, on présente l'accumulateur au plomb déjà chargé et on calcule un rendement électrochimique (rapport des charges $Q_{\text{charge}}/Q_{\text{décharge}}$). (manip faite dans le JFLM)

• Calcul de rendement (tampon)

Accumulateur au plomb

✍ 10 min

Matériel :

- un bécher
- 2 plaques de plomb décapées
- solution de H_2SO_4 à 1 ou 2 M
- alimentation continue
- milliampèremètre
- ordinateur avec carte d'acquisition
- 2 boites de résistances pour former R (ajustement du courant de décharge)
- une boite de résistance pour R' (mesure du courant via la carte d'acquisition)

Faire fonctionner l'alimentation en mode contrôle de courant pendant la charge pour avoir un courant de charge constant (mesuré à l'ampèremètre), et trouver en préparation une valeur de R permettant d'obtenir un courant de décharge proche du courant de charge. Cela permet d'avoir un temps de décharge du même ordre de grandeur que le temps de charge.

En partant d'un accumulateur déchargé, lancer l'acquisition sous LatisPro et charger l'accumulateur pendant au maximum la moitié du temps prévu pour l'acquisition (1 à 2 minutes).

Décharger ensuite l'accumulateur. Utiliser le tableur pour intégrer le courant ayant circulé à travers l'accumulateur pendant la charge et la décharge afin de calculer le rendement coulombique. Faire de même avec la puissance pour obtenir le rendement énergétique (qui doit être plus faible).

Les rendements valent alors :

$$\eta_{\text{charge}} = \frac{\int_{\text{décharge}} |I| \mathrm{d}t}{\int_{\text{charge}} |I| \mathrm{d}t}$$

$$\eta_{\text{puissance}} = \frac{\int_{\text{décharge}} |E \cdot I| \mathrm{d}t}{\int_{\text{charge}} |E \cdot I| \mathrm{d}t}$$

Remarque

A partir du moment où le pas temporel de l'acquisition est constant, sa valeur importe en théorie peu sur le calcul du rendement. On conseil tout de même d'utiliser 1 s pour simplifier le calcul et obtenir des valeurs ayant un sens. De même, penser à mesurer à l'ohmmètre la valeur de R' pour l'injecter dans le tableur.

Conclusion

Ainsi on a vu que la conversion se fait avec pertes, et la minimisation de ces pertes est fondamentale. De plus la question de la recyclabilité se pose réellement, car on sait que les batteries de téléphones s'usent, et polluent.

Remarque pédagogique : il serait bon, dans le cadre d'un cours face à une vraie classe, de faire une approche documentaire visant à comparer les différents types d'accumulateurs, leur fonctionnement, et leurs problématiques respectives.

LC 27

Solubilité

Niveau : CPGE (MPSI)

Programme officiel (MPSI)

- Constante de l'équation de dissolution, produit de solubilité Ks ; solubilité et condition de précipitation ; domaine d'existence ; facteurs influençant la solubilité.
- Capacités exigibles : Déterminer la valeur de la constante d'équilibre pour une équation de réaction, combinaison linéaire d'équations dont les constantes thermodynamiques sont connues. Retrouver les valeurs de constantes d'équilibre par lecture de courbes de distribution et de diagrammes de prédominance (et réciproquement). Déterminer la composition chimique du système dans l'état final, en distinguant les cas d'équilibre chimique et de transformation totale, pour une transformation modélisée par une réaction chimique unique. Utiliser les diagrammes de prédominance ou d'existence pour prévoir les espèces incompatibles ou la nature des espèces majoritaires. Prévoir l'état de saturation ou de non saturation d'une solution, en solide. Exploiter des courbes d'évolution de la solubilité en fonction d'une variable.

Bibliographie

✍ *HPrépa PCSI*, **Durupty** ⟶ Contenu de la leçon, très complet
✍ *Tout-en-un PCSI*, **Fosset** ⟶ Très bien aussi, utile pour avoir une autre vision et compléter le Durupthy

✍ **Daumarie** ⟶ Solubilité de NaCl dans l'eau et le cyclohexane
✍ **Porteu-de Buchère** ⟶ Manips qualitatives (p266)

Prérequis

➢ Réactions acido-basiques
➢ Quotient réactionnel
➢ Dosage potentiométrique

Expériences

- Dissolution de NaCl dans de l'eau
- Influence de la température, du pH, d'ions communs
- Solubilité de NaCl dans l'eau et dans le cyclohexane

1 Équilibre hétérogène en solution aqueuse . . . 1004
1.1 Solubilité d'un solide . . . 1004
1.2 Constante d'équilibre . . . 1005
1.3 Condition d'existence du solide . . . 1005
2 Facteurs d'influence de la solubilité . . . 1006
2.1 Effet d'ion commun . . . 1006
2.2 Influence de la température . . . 1007
2.3 Effet du pH . . . 1008

Introduction

La formation de tartre dans la vie quotidienne encrasse les appareils électroménagers utilisant de l'eau (bouilloire, canalisations...), posant de réels problèmes sur leur durée de vie. Pour autant, le tartre n'apparait pas dans l'eau qui sort directement du robinet. D'où vient alors ce tartre et pourquoi n'existe-t-il sous forme solide qu'à certains endroits de notre maison ? Pour comprendre cela, nous allons étudier la notion de solubilité des composés chimiques. Nous nous limiterons dans cette leçon à la solubilité des solides ioniques en phase aqueuse.

1 Équilibre hétérogène en solution aqueuse

1.1 Solubilité d'un solide

Dissolution du NaCl et AgCl dans l'eau

Introduire petit à petit du NaCl ($K_s = 32,98$, $M = 58,44$ g/mol) dans 20 mL d'eau (penser à mettre un barreau magnétique pour faciliter la solubilisation). Constater qu'un dépôt de NaCl persiste au fond du bécher après en avoir ajouté une grande quantité (7 g environ pour 20 mL).

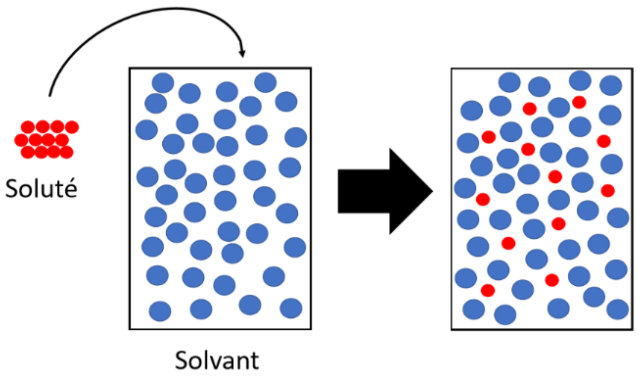
Effectuer la même chose avec du AgCl ($K_s = 1,78.10^{-10}$, $M = 143,32$ g/mol) et constater que le précipité apparait directement dans le bécher.

Attention : Si vous voulez comparer qualitativement la solubilité de deux solides ioniques, il faut avoir deux solides de même stoechiométrie. De plus, l'exemple du NaCl est à utiliser avec des pincettes car sa grande concentration en solution lorsqu'on dépasse s ne permet plus de se placer dans l'approximation des composés fortement dilués en solution (l'activité prend un facteur γ). À ne pas utiliser de manière quantitative !

La **solubilité** d'un solide A est la quantité maximale de ce solide que l'on peut dissoudre dans 1 L de solvant (par exemple l'eau). On peut l'exprimer de 2 façons différentes :

- en quantité de matière : $s = \dfrac{n(A)}{V}$ en mol/L
- en masse : $t = \dfrac{m(A)}{V}$ en g/L

Tant que la quantité de A est inférieure à cette quantité maximale, les entités (ions pour un solide ionique, des molécules de solide...) formant le solide sont dissociés et **solvatés** par le solvant. La solubilité d'un solide va donc dépendre des interactions entre le solide et le solvant : un solide apolaire sera bien solvaté dans un solvant apolaire et inversement.



Par exemple, NaCl est soluble dans l'eau mais très peu dans le cyclohexane. C'est l'inverse pour I_2.

Une fois qu'on a dépassé la solubilité d'un solide, on dit que la solution est **saturée** en ce solide. On a alors apparation d'un **précipité**.

Attention

La solubilité s'exprime peut-être en mol/L, mais il s'agit bien d'une **quantité de matière** et non d'une concentration ! En effet, ça n'a pas de sens de parler de la concentration d'un solide... Le programme est très strict à ce niveau là, ne jamais s'amuser à sommer une solubilité et une concentration sauf si on précise qu'on est dans 1 L.

1.2 Constante d'équilibre

On définit le **produit de solubilité** K_s comme étant la constante d'équilibre de la dissolution du solide, en prenant un coefficient stoechiométrique de 1 pour le solide. On définit également le pK_s par la relation $pK_s = -\log(K_s)$.

Exemples

Équation de dissolution	K_s à 298 K
$AgCl_{(s)} \rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$	$10^{-9.7}$
$Fe_2S_{3\ (s)} \rightleftharpoons 2Fe^{3+} + 3S^{2-}$	10^{-85}
$I_{2\ (s)} \rightleftharpoons I_{2\ (aq)}$	$10^{-2.9}$

On peut relier K_s à la solubilité s d'un solide. Prenons l'exemple de la dissolution d'AgCl vue en introduction.

	$AgCl_{(s)}$	Ag^+	Cl^-
État initial	excès	0	0
Équilibre	excès	s	s

On alors à l'équilibre $K_s(\text{AgCl}) = Q = \dfrac{[Ag^+][Cl^-]}{(C^o)^2} = \dfrac{s^2}{(C^o)^2}$ donc $s = C^o\sqrt{K_s} = 1.99 \times 10^{-5}$ mol/L (ou $t = 1.91 \times 10^{-3}$ g/L), ce qui montre qu'on peut dissoudre que très peu d'AgCl dans l'eau comme on l'a vu dans la manip introductive.

On peut le faire également lorsque la stoechiométrie est moins triviale, comme avec l'équation $Fe_2S_{3\ (s)} \rightleftharpoons 2Fe^{3+} + 3S^{2-}$:

	$Fe_2S_{3\ (s)}$	$2Fe^{3+}$	$3S^{2-}$
État initial	excès	0	0
Équilibre	excès	$2s$	$3s$

À l'équilibre, $K_s = Q = \dfrac{(2s)^2(3s)^3}{(C^o)^5}$ donc $s = C^o\left(\dfrac{K_s}{2^2 3^3}\right)^{\frac{1}{5}} = 3.9 \times 10^{-18}$ mol/L.

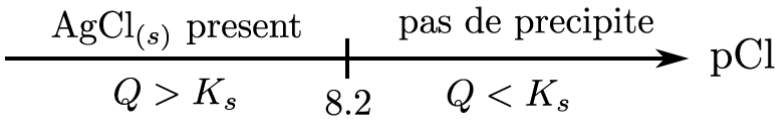
1.3 Condition d'existence du solide

Selon la valeur du quotient réactionnel Q correspondant à la réaction de dissolution, on peut déterminer si le précipité peut apparaître ou non :

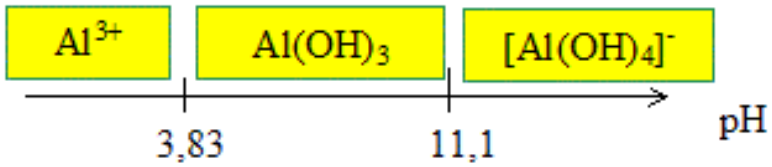
- si $Q < K_s$, le solide est totalement dissous.

- si $Q = K_s$, on est à l'équilibre. La solution est saturée en solide.
- si $Q > K_s$, on a dépassé la solubilité du solide et le précipité persiste en solution.

On peut donc tracer le **diagramme d'existence** du solide en fonction de la concentration d'une des espèces dissoutes. Par exemple, pour AgCl, on peut fixer C=[Ag^+]=0.1 mol/L et ajouter peu à peu des ions Cl^-. Alors $Q = \frac{C[Cl^-]}{(C^o)^2}$. Le solide existe ssi $Q \geq K_s$ donc ssi $pCl = -\log[Cl^-] \leq pK_s + \log C = 8.2$. On obtient donc le diagramme d'existence suivant :



On peut avoir des diagrammes un peu plus compliqués, comme par exemple pour $Al(OH)_3$ qui peut se dissoudre selon deux manières différentes en fonction du pH (on verra ça dans la seconde partie de la leçon).



2 Facteurs d'influence de la solubilité

Maintenant que l'on a vu toute la théorie derrière la solubilité, il est temps de regarder des cas pratiques de calcul de solubilité, et de trouver les facteurs principaux qui influencent la solubilité d'une espèce.

2.1 Effet d'ion commun

Reprenons notre solution d'AgCl, et ajoutons de l'acide chlorhydrique en concentration $c_0 = 0.01 \text{mol l}^{-1}$.

Instinctivement on se dit que si on ajoute des ions Cl, on prend de la place, et on en laisse moins pour les ions Cl du AgCl. Nous allons vérifier cela par le calcul.

État	$AgCl_{(s)}$	$= Ag^+_{(aq)}$	$+ Cl^-_{(aq)}$
Initial	Excès	0	c_0
Final	Excès	s	c_0+s

À l'équilibre on a $Q = K_s = s(s + c_0)$. Ainsi

$$s = \frac{-c_0 + \sqrt{c_0^2 + 4K_s}}{2} = 1.78 \times 10^{-8} \text{mol l}^{-1}$$

On avait obtenu $s = 1.99 \times 10^{-5}$ mol/L sans avoir d'ions Cl^- au départ. En ajoutant une quantité très faible d'ions chlorure, on a donc divisé par 1000 la solubilité d'AgCl !

L'effet d'ions commun diminue la solubilité d'un solide ionique. Il se produit lorsqu'une autre espèce dissoute a un ion en commun avec celle que l'on veut dissoudre.

Malheureusement le tartre c'est du $CaCO_3$, et franchement y'a pas grand chose qui nous fait de l'ion commun en cuisine pour s'en débarasser. Par contre un truc qui intervient souvent en cuisine c'est la chaleur !

2.2 Influence de la température

Une expérience très célèbre pour montrer l'effet de la température, c'est l'expérience de la pluie d'or. le principe est simple, on va dissoudre du diiodure de plomb dans de l'eau. Sauf que la solubilité du composé dépend de la température, comme nous allons le voir tout de suite !

Pluie d'or

✍ Internet ⏲ 5mn

Dans un gros tube à essai, mélanger 0,5 mL d'une solution de nitrate de plomb Pb(NO3)2 à 2,5% avec 0,5 mL d'iodure de potassium KI à 2,5% dans 10 mL d'eau distillée. Observer bien l'apparition du précipité jaune PbI_2.

A la bouilloire (penser à l'allumer avant), réchauffer le tube à essai jusqu'à disparition du précipité et obtention d'une solution incolore. Si cela ne se fait pas, c'est qu'il y a trop de solide ou pas assez d'eau en solution : ne pas hésiter à en rajouter à ce moment-là.

Plonger le tube à essai dans de la glace pour observer la réapparition du précipité recristallisé dans le tube à essai (penser à remuer le tube pour accélérer la recristallisation).

La solubilité du PbI2 étant de 0,69 g/L à 20°C et de 4,2 g/L à 100°C (7 fois plus), la recristallisation par chauffage-refroidissement peut se faire ici car le composé est plus soluble à chaud qu'à froid.

On peut aussi faire la pluie d'or en vidéo

https://youtu.be/5-753fEk7Nw.

La réaction étudiée est la dissolution du précipité jaune PbI 2 (s) . Le solide est formé immédiatement par mélange de deux solutions de iodure de potassium KI et de nitrate de plomb NO3Pb.

On chauffe la solution (malheur c'est un bec Bunzen ! On en profite pour étaler sa science et préciser qu'on sait que c'est désormais interdit au lycée et qu'on peut le remplacer par un bain-Marie) et hop le précipité disparait (logique car on a dit que c'était le cas pour la majorité des précipités).

Quand on arrête le chauffage et qu'on laisse tranquillement la solution revenir à température ambiante le précipité réapparaît lors d'un phénomène vachement joli qu'on appelle pluie d'or (même si c'est du plomb).

Dans ce cas là on fait une autre expérience :

Solubilité de $Ca(OH)_2$

✍ ma tête ⏲ 2mn

C'est un des composants principaux de l'eau de chaux (qui détecte le CO2).

Dissoudre à froid dans un bain de glace un maximum de la substance (15g dans 10mL), puis observer qu'il réapparaît en chauffant !

0,77 g/L (eau, 100°C) mais 1,85 g/L à 0

Attention au piège !. La variation de la constante d'équilibre avec la température n'est liée qu'à la loi de Van't Hoff, et donc à l'enthalpie de réaction. La solubilité peut donc augmenter ou diminuer avec la température selon le caractère endothermique ou exothermique de la réaction de formation du précipité.

On peut expliquer le dépôt de calcaire sur la bouilloire par la faible sollubilité à chaud de cette espèce, mais maintenant, si on veut l'enlever, comment on fait ?

2.3 Effet du pH

Le pH est peut-être notre ami ! Supposons que l'espèce dissoute soit fasse intervenir les couples acide-base de l'eau. Par exemple :

$$Al(OH)_{3(s)} = Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^-_{(aq)} \qquad Ks$$

Alors si on ajoute à l'état d'équilibre un acide, comme HCl, on va le faire réagir avec HO^-. Or si HO^- disparait, il se passe l'inverse d'un effet d'ions communs, on tire l'équilibre dans le sens de la dissolution !

☕

Suivi pH-métrique de la précipitation du Al(OH)3

✍ Porteu-de-Buchère p.83-86 ⏲ 10mn

Dans un bécher de 250 mL, introduire $V_0 = 10$ mL de chlorure d'aluminium AlCl3 à 0,1 mol/L et 5 mL d'acide chlorhydrique HCl à 0,1 mol/L. Compléter à 100 mL avec de l'eau distillée.

Doser la solution avec de la soude NaOH à 0,2 mol/L et suivre l'évolution de la réaction par pHmétrie. Verser au maximum 30 mL de soude (penser à re-remplir la burette !).

Les points d'équivalence auront lieu vers 3 mL, 17 mL et 22 mL, donc ne perdez pas de temps entre 5 et 15 mL.

Vérifier l'apparition puis la disparition du précipité en solution.

ATTENTION

La deuxième réaction provoquant la redissolution du précipité Al(OH)3 en solution est une réaction de complexation

$$Al(OH)_{3(s)} + OH^-_{(aq)} = Al(OH)^-_{4(aq)}$$

La complexation n'étant pas au programme des MPSI, elle n'est **PAS À PRÉSENTER** À L'ORAL ! De toute façon, ça arrive en fin de burette et vous aurez pas le temps de reremplir votre burette donc gardez ça de côté pour les questions.

La variation du pH en fonction du volume de soude ajouté est présentée figure en dessous. Analysons chaque partie du graphique :

- jusqu'à 3 mL, on dose les ions oxonium H3O+ en solution (acide fort-base forte).
- à 3 mL, on précipite notre solide ionique selon la réaction : Al3+(aq) + 3 OH-(aq) = Al(OH)3(s). Le point anguleux n'est ici pas piqué car il y a un retard cinétique de la précipitation dû à la première réaction acide fort-base forte. Là on explique le rapport pH-solubilité. C'est CETTE ÉQUIVALENCE LÀ qu'on exploite après
- à 19,5 mL, on a le saut de pH caractéristique de la consommation totale des ions Al3+ présents en solution. La soude ajoutée augmente alors fortement le pH de la solution.
- à 25 mL, on a la re-dissolution du précipité selon l'équation de complexation.

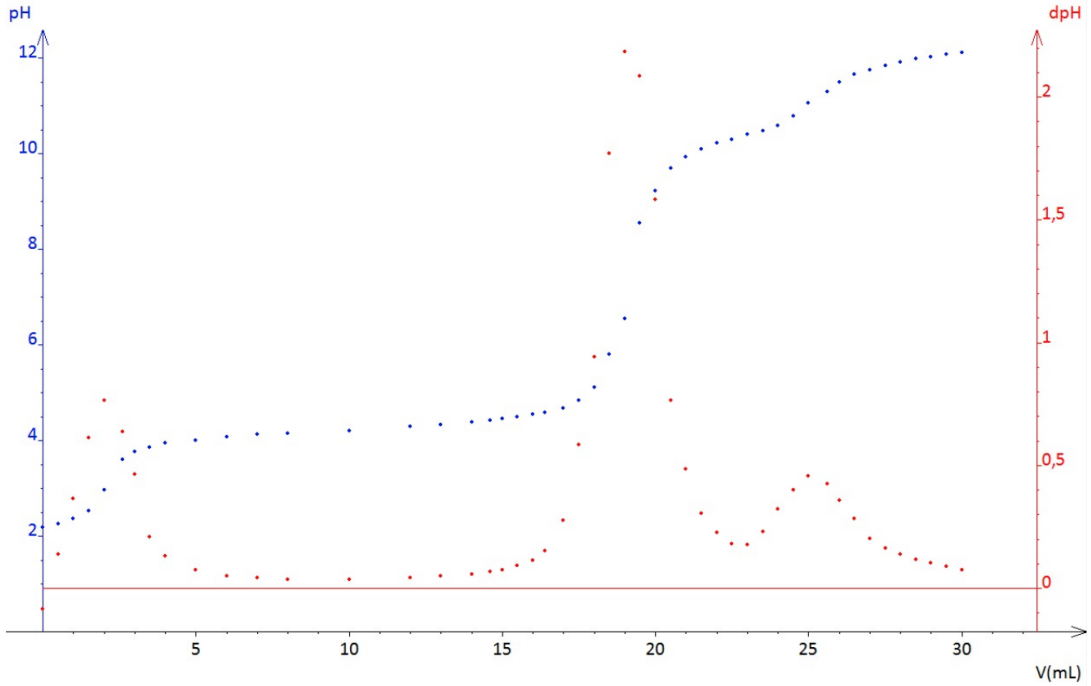


FIGURE 27.1 – Variation du pH (en bleu) et de la dérivée du pH (en rouge) en fonction du volume de soude ajouté dans le bécher. Est-ce qu'il est pas MAGNIFIQUE ce graphe ?

Analyse quantitative :

On peut remonter au Ks : à l'apparition du solide, il y a

$$\mathrm{Q} = \mathrm{K_s} = \frac{[\mathrm{Al^{3+}}][\mathrm{HO^-}]^3}{\mathrm{c^{o4}}} = \frac{1}{\mathrm{c^{o4}}} \frac{\mathrm{c_0 V_0}}{\mathrm{V_{tot} + V}} \times 10^{3(\mathrm{pH}-14)} \tag{27.1}$$

En pratique on trouve $K_s = \dfrac{0.1 \times 10}{100 + V_{eq}} 10^{3(pH-14)}$

Incertitude : On prend l'incertitude sur pH et sur V_{eq}. Le reste est considéré parfait.

$$\Delta K_s = K_s \sqrt{\left(\frac{\Delta V_{eq,1}}{V_{tot} + V_{eq,1}}\right)^2 + 3\left(\frac{\Delta \mathrm{pH}}{\mathrm{pH}}\right)^2} \tag{27.2}$$

Valeur tabulée : $K_s = 2.5 \times 10^{-33}$

Conclusion

En pratique, pour dissoudre du calcaire : eau glacée et acide ! ! Si vous voulez enlever votre tartre, brosser vous les dents avec de l'acide chlorhydrique.

Cependant il y a aussi les effets de cinétique à prendre en compte, surtout si on veut faire des réactions de dissolution à échelle industrielle, car plus il fait froid, plus les réactions vont lentement !

LC 28

Cinétique électrochimique

Niveau : CPGE

Extraits du programme

Surtension.

Allure des courbes courant-potentiel (intensité ou densité de courant) : - systèmes rapides et systèmes lents ; - nature de l'électrode ; - courant limite de diffusion ; - vagues successives ; - mur du solvant

Décrire le montage à trois électrodes permettant de mesurer une surtension.
Associer vitesse de réaction électrochimique et intensité du courant. Reconnaître le caractère lent ou rapide d'un système à partir des courbes courant-potentiel. Identifier les espèces électroactives pouvant donner lieu à une limitation en courant par diffusion. À partir de relevés expérimentaux, associer l'intensité du courant limite de diffusion à la concentration du réactif et à la surface immergée de l'électrode. Donner l'allure qualitative de branches d'oxydation ou de réduction à partir de données de potentiels standard, concentrations et surtensions de « seuil ».
Mettre en oeuvre un protocole expérimental utilisant des courbes courant-potentiel.

Bibliographie

✍ *Des expériences de la famille rédox*, **Cachau-Hereillat**	Courbes i-E
✍ **JFLM1**	Anode sacrificielle
✍ *Chimie MP/PT (blanc)*, **Grécias**	Cours avec applications (peu d'ODG)
✍ *Tout-en-un Chimie PC (violet)*, **Grécias**	
✍ *H-prépa Chimie MP*, **Durupthy**	Pour les ODG
✍ *De l'oxydoréduction à l'électrochimie*, **Verchier**	Pour approfondir

Prérequis

- ➢ Diagrammes E-pH
- ➢ Cinétique chimique
- ➢ Diffusion de matière

Expériences

☕

1 Cinétique électrochimique 1013
1.1 Vitesse de réaction et intensité 1013
1.2 Visualisation de la cinétique 1014
1.3 Montage à trois électrodes 1014
2 Lecture de courbes i-E 1015
2.1 Tracé expérimental 1015
2.2 Allure des courbes 1015
2.3 Surtensions 1015
2.4 Paliers de diffusion 1016
2.5 Superposition 1017
3 Application 1017
3.1 Anode sacrificielle 1017
3.2 Piles, électrolyses, accumulateur 1018

Introduction

D'habitude, pour étudier l'évolution possible d'un système chimique, on regarde surtout la thermodynamique. Or, ce n'est pas toujours suffisant

En effet, regardez : je mets une plaque de zinc dans du HCl. La thermo nous dit qu'on devrait avoir des bulles de H 2 qui se forment, puisque le potentiel standard de H + /H 2 est supérieur à celui de Zn 2+ /Zn. Or, on ne voit rien du tout.

-0,76 quand même... (Plomb ça ferait pareil)

Si on rajoute un fil de platine en contact électrique avec le métal cependant, la relation a magiquement lieu !

Faire une règle du Gamma.

Pourquoi ? Là est l'enjeu de cette leçon.

1 Cinétique électrochimique

Tout d'abord, parlons de réaction **Électrochimique**. Il s'agit d'une réaction d'oxydoréduction pour laquelle les réactions se passent à la surface d'une électrode. L'échange d'électrons est donc, pour une réaction électrochimique, permis par un fil que l'expérimentateur peut dévier !

1.1 Vitesse de réaction et intensité

✍ Grecias, p.183, 185 ; H-prépa, p.195-197 ; Tout-en-un, p.208. ; Fosset p.234

Prenons une réaction électrochimique qui s'appuie sur la réduction du Cu^{2+}, par exemple celle de la pile Daniell au Zn-Cu.

$$Cu^{2+} + 2e^- = Cu$$

La vitesse de la réaction s'exprime comme

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i}\frac{dn_i}{dt}$$

Au vu des coéfficients mis en jeu, ici on a $v = -\dfrac{dn(e^-)}{dt}$, avec $n(e^-)$ le nombre de moles d'électrons qui arrivent par l'électrode. Or le déplacement d'électrons est associé à une intensité et une charge q, et une intensité c'est mesurable. On a, avec $n = 2$ la stoechimétrie des électrons dans la réaction :

$$dq = n\mathcal{F}d\xi$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -n\mathcal{F}v$$

Avec $\mathcal{F} = -e\mathcal{N}_A$ la constante de faraday (96500C/mol).

Ainsi on a une façon expérimentale de remonter directement à la cinétique de la réaction, et ça c'est pas commun, et on aime ça !

Ainsi, le courant à l'électrode sera d'autant plus grand que :

- que le nombre d'électrons échangés lors de la réaction est grand.
- que la surface de l'électrode est grande.
- que la vitesse de réaction est grande.

Pour s'affranchir de la surface de l'électrode, on peut faire des études avec la densité de courant, $j = i/S$.

1.2 Visualisation de la cinétique

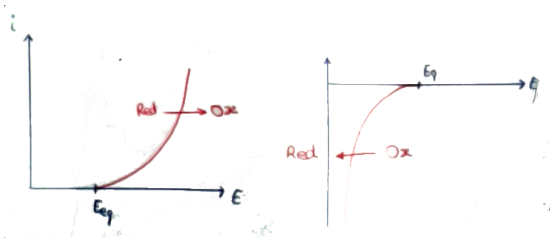
On a que i et v sont proportionnels, nous allons maintenant nous servir de ceci pour tracer ce que l'on appelle une courbe intensité potentiel. On se place sur une électrode donnée. Le principe est simple, on trace l'intensité, donc la vitesse, d'une réaction en fonction du potentiel que l'on impose sur l'électrode.

Rappelons la loi de Nernst

$$E = E^0 + \left(\frac{RT}{nF}\right) \ln \frac{a_{\text{ox}}^x}{a_{\text{red}}^y}$$

- À l'équilibre, $i = 0$, $E = E_e = E_{Nernst}$
- Si $E_{app} > E_e$, d'après la loi de Nernst, [Ox] augmente, on a une oxydation à l'électrode considérée
- l'inverse.

Tracer ceci en direct :



Mais comment on trace ces courbes ?

1.3 Montage à trois électrodes

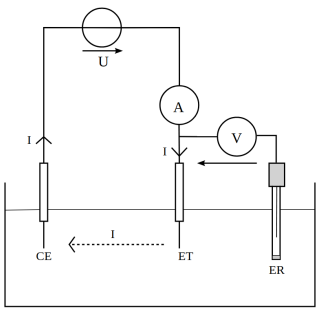


FIGURE 28.1 – Le montage à trois électrodes.

Afin de pouvoir tracer la courbe i(E) de l'électrolyse de l'eau, nous utilisons un montage à trois électrodes.

- l'électrode de travail est l'électrode dont on établit la courbe intensité-potentiel.
- l'électrode de référence permet de mesurer la différence de potentiel de la réduction ou de l'oxydation ayant lieu sur l'électrode de travail. Le courant ne doit pas passer dans celle-ci car son potentiel doit rester constant.
- Ainsi, on utilise une troisième électrode : l'électrode de contre-réaction, où se déroule la réaction complémentaire de l'électrode de travail.

On applique une différence de potentiel à l'aide d'un générateur, et on mesure le courant induit par cette différence de potentiel.

2 Lecture de courbes i-E

2.1 Tracé expérimental

Courbe i-E du système {Fe^{3+}/Fe^{2+} sur électrode de platine}

✍ *Des expériences de la famille Red-Ox*, **Cachau-Herraillat**, p.256 ⏲ 7 min

On fait ça pour la réaction entre Fe^{3+} et Fe^{2+}, sur des électrodes Pt. Les deux ions sont en solution dans des concentrations égales. Attention, prenez un petit bécher car si vous diluez les concentrations indiquées dans le bouquin, vous ne verrez rien du tout.

Beaucoup de choses à observer sur cette manip. Déjà, en jouant sur la molette fine du générateur, on explore le voisinage du point ($i = 0$, $E = E_{\text{Nernst}}$). C'est la partie jolie de la courbe, et c'est pour l'observer qu'on doit avoir une solution assez concentrée.

Ensuite, si on joue sur la molette grossière, on va d'abord observer les paliers de diffusion, puis le mur du solvant. C'est très intéressant mais le mieux c'est de le montrer au fur et à mesure. Là on se contente de faire la manip, on l'exploitera plus tard.

2.2 Allure des courbes

Le potentiel à $i = 0$ correspondant au potentiel de Nernst du couple redox étudié.

Dans le cas du fer, on devrait trouver 0.77 V mais dans notre expérience on devrait trouver un peu moins ($\simeq 0.68$ v). Cela s'explique par le fait que la formule du potentiel de Nernst fait intervenir les activités des différentes espèces chimiques intervenant dans l'équation. Par hypothèse, on dit que ces activités sont égales à la concentration pour un soluté, à la pression pour un gaz, ... Mais ça ne reste qu'une hypothèse, et ici ça explique pourquoi on ne trouve pas la bonne valeur de potentiel de Nernst.

Par convention, les courbes i-E à $i > 0$ correspondent aux oxydations tandis que celles à$i < 0$ correspondent aux réductions. Sur la courbe expérimentale on peut attribuer les différentes réactions aux parties de courbe correspondantes.

2.3 Surtensions

Le couple Fe^{3+}/Fe^{2+} est un couple dit **rapide** car une petite variation de potentiel autour du potentiel de Nernst résulte en une variation non nulle et mesurable de i.

Il existe cependant des couples **lents** pour lesquels une petite variation de potentiel autour du potentiel de Nernst ne donne aucune variation de i.

On définit alors la **surtension cathodique** comme étant la surtension nécessaire pour mesurer une intensité négative. Par symétrie, on définit également la **surtension anodique** comme étant la surtension nécessaire pour mesurer une intensité positive.

Ainsi, si on note E'_a et E'_c les potentiels pour lesquels les courbes anodiques et cathodiques "décollent", on définit les surtensions comme étant :

$$\eta_a = E'_a - E_{\text{Nernst}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_c = E'_c - E_{\text{Nernst}} < 0$$

On peut noter que la valeur de surtension dépend du **système** considéré, *i.e.* du couple rédox ET de l'électrode sur laquelle a lieu la réaction. On peut reprendre la manip introductive avec le zinc et utiliser du platine pour déclencher la réaction.

Remarque

C'est à ce niveau là qu'on observe des évolutions de système différentes des prédictions de la thermodynamique.

2.4 Paliers de diffusion

Jusque maintenant, on a ignoré une caractéristique importante des réactions redox : elles se produisent à la surface de l'électrode. Il faut donc pouvoir transporter les réactifs à la surface de l'électrode pour que la réaction ait lieu.

Ce déplacement de matière, que ce soit par convection, par diffusion ou par migration d'espèces chargées, ne se fait pas instantanément, et sa rapidité va limiter la vitesse de réaction. On peut s'affranchir des effets de la convection en agitant et de ceux de la migration avec un électrolyte support. On va donc considérer qu'il existe une couche, appelée **couche de Nernst** autour de l'électrode dans laquelle le transport est uniquement assuré par diffusion.

On note δ son épaisseur. C'est le transport dans cette couche qui est le facteur déterminant, donc on ne va s'occuper que de lui. Il y a un gradient de concentration en réactif entre la surface de l'électrode et le reste de la solution. On a alors la loi de Fick :

$$\overrightarrow{j_D} = -D\overrightarrow{\text{grad}C}$$

où $\overrightarrow{j_D}$ est le vecteur densité volumique de courant de matière et D est le coefficient de diffusion.

Si on considère un profil de concentration linéaire et en appliquant loi de Faraday (densité de courant $j = n\mathcal{F}j_D$, on montre que :

$$i = jS = n\mathcal{F}j_D S = n\mathcal{F}SD\frac{C_\infty - C_{\text{surf}}}{\delta}$$

avec S la surface de l'électrode Pour l'anode et la cathode, on a donc

$$i_a \propto [\text{Réducteur}] \qquad \text{et} \qquad i_c \propto [\text{Oxydant}]$$

Sur notre courbe i-E du couple Fe^{3+}/Fe^{2+}, on peut voir ces paliers de diffusion. Si on change les concentrations de certaines espèces, on va non seulement changer la hauteur du palier de diffusion mais en place on va changer la valeur du potentiel de Nersnt.

On peut cependant noter deux cas où on n'a pas de paliers de diffusion et donc où on a une croissance exponentielle de l'intensité avec la ddp :

- si l'espèce censée se diffuser est le solvant : c'est le **mur du solvant**

  La présence de ce mur a une conséquence : puisque l'eau est un solvant, tout couple avec un potentiel de Nernst en dehors de l'intervalle $[E(H^+/H_2); E(O_2/H_2O)]$ ne sera pas visible sur une courbe i-E.

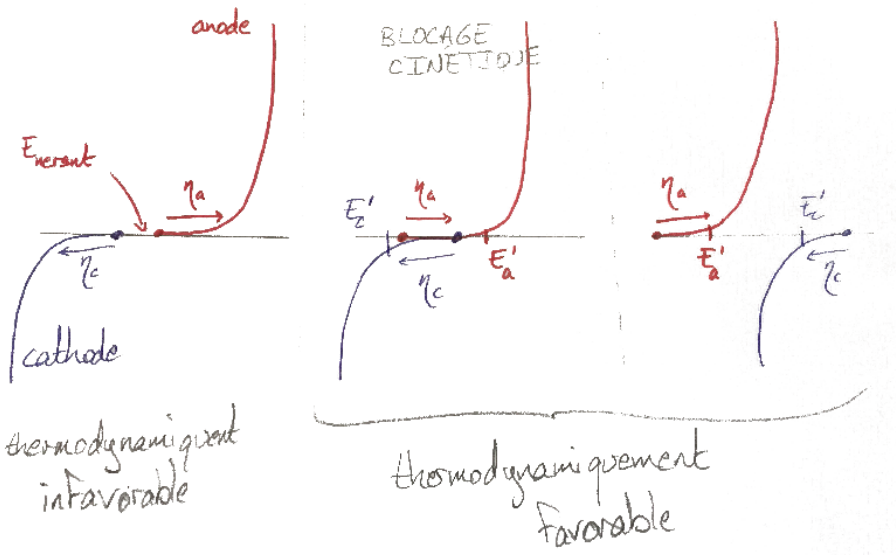
  On peut voir ces deux murs sur notre courbe i-E de Fe^{3+}/Fe^{2+}.

- si l'espèce censée se diffuser est le métal de l'électrode (exemple : électrode de Zn, de Fe, de Cu) : pas besoin de diffusion si tout le matos est déjà sur place.

2.5 Superposition

Une courbe i-E peut contenir plus d'un couple. Cela vient du fait que l'on peut additionner les courants. On peut donc s'intéresser à la courbe i-E pour chaque couple, puis tout additionner pour avoir l'allure globale de la courbe i-E. On parle de potentiel mixte et de réaction thermodynamiquement favorable si une courbe anodique (pour $i > 0$) a un potentiel de Nernst inférieur à celui correspondant à une courbe cathodique ($i < 0$).

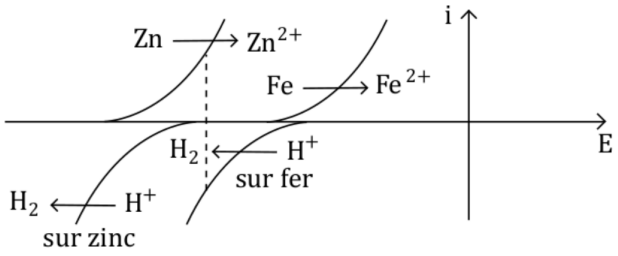
De plus, on a blocage cinétique si les surtensions sont suffisantes pour avoir $E'_a > E'_c$.



3 Application

3.1 Anode sacrificielle

Quand on a une machine, ou une construction, ou un bateau en fer, on ne veut pas qu'il s'abîme par oxydation. Or, la rouille fait d'énorme dégâts, puisque le fer n'esr pas stable thermodynamiquement au contact de l'eau aérée ! Ce phénomène, appelé corrosion, est un enjeu majeur pour l'industrie ; on estime que 20% de la production mondiale d'acier sert à remplacer ce qui a été abîmé par corrosion ! Heureusement, la cinétique peut nous donner des pistes pour protéger un métal, notamment en mettant dans le système un autre métal qui sera cinétiquement plus favorable à la réaction d'oxydation : c'est la protection par anode sacrificielle.



Courbes sur powerpoint, on explique rapidement : la réaction d'oxydation du Zn et de réduction de H3O+ sur une électrode de fer est celle qui est cinétiquement la plus favorable et qui va avoir lieu. En pratique,

☕

Anode sacrificielle

✍ JFLM1, p128 ⏲ 3-4 mn

Protocole détaillé dans le livre. Plutôt qu'une pince crocodile, enrouler directement la paille de fer au bout du fil de zinc, ça sera plus efficace. Attention, cette manip est très criticable : en vrai, il faudrait laisser la même quantité de paille de fer durant le même temps dans la même quantité d'acide. Bon. Rester qualitatif dans ses prétentions.

Envisager de rajouter un test au HO- comme test pour la présence de Zn 2+ (formation d'un précipité blanc).

3.2 Piles, électrolyses, accumulateur

Si y'a le temps, choper la LC26, et faire

☕

Tension à vide de la pile Daniell

✍ ⏲ 10 min

Matériel :

- 2 béchers de 150 mL
- une plaque de cuivre, une plaque de zinc (décapées)
- solution de $CuSO_4$ à 0.1 M
- solution de $ZnSO_4$ à 0.1 M
- un pont salin
- un millivoltmètre
- 2 princes crocodile

Réaliser la pile, mesurer sa f.e.m à vide. Comparer à $E^o(Cu^{2+}/Cu) - E^o(Zn^{2+}/Zn) = 1.1$ V.

Conclusion

La cinétique électrochimique est une étude nécessaire dans le cadre de la production, du stockage et de la consommation de l'énergie électrique, et nous est utile pour comprendre la corrosion humide des métaux.

Troisième partie

Montages de Physique

1 Dynamique du point et du solide 1023

2 Surfaces et interfaces 1031

3 Dynamique des fluides 1037

4 Capteurs de grandeurs mécaniques 1045

5 Mesures de température 1053

6 Transitions de phase 1061

7 Instruments d'optique 1071

8 Interférences lumineuses 1083

9 Diffraction des ondes lumineuses 1089

10 Spectrométrie optique 1095

11 Emission et absorption de la lumière 1103

12 Photorécepteurs 1111

13 Pouvoir rotatoire, biréfringence 1119

14 Polarisation des ondes électromagnétiques 1127

15 Production et mesure de champ magnétique 1137

16 Milieux Magnétiques 1145

17 Métaux 1153

18 Matériaux semi-conducteurs 1161

19 Effets capacitifs 1167

20 Induction, auto-induction 1175

21 Production et conversion d'énergie électrique 1185

22 Amplification de signaux 1195

23 Mise en forme, transport et détection de l'information 1209

24 Signal et Bruit 1219

25 Mesure de fréquences temporelles (domaine de l'optique exclu) 1229

26 Mesures de longueurs 1237

27 Systèmes bouclés 1245

28 Instabilités et phénomènes non-linéaires. 1257

29 Ondes : propagation et conditions aux limites 1267

30 Acoustique **1277**

31 Résonance **1287**

32 Couplage des oscillateurs **1299**

33 Régimes transitoires **1311**

34 Phénomènes de transport **1323**

35 Moteurs **1337**

MP 1

Dynamique du point et du solide

Commentaires du jury

- **2017 :** L'énoncé du titre de ce montage ouvre vers un large champ d'expérimentation. Si la mécanique des systèmes ponctuels, dans un référentiel galiléen, se déplaçant à une dimension est évidemment au programme, l'étude de la dynamique des systèmes complexes, des objets en rotation, ou de la dynamique dans un référentiel non galiléen est autorisée.
- **2014-2016 :** Contrairement à une idée apparemment répandue chez les candidats, les mesures précises en mécanique ne sont pas nécessairement hors d'atteinte, et il est possible de discuter quantitativement une loi de conservation en prenant en compte les incertitudes expérimentales. Par ailleurs, le jury constate que les mobiles autoporteurs donnent le plus souvent lieu à des expériences trop simples, mal exploitées quantitativement et coûteuses en temps, au détriment d'expériences plus en accord avec le niveau attendu à l'agrégation ; une informatisation de ces expériences serait profitable pour éviter des erreurs de mesures et limiter leurs durées.

Bibliographie

✍ *Expériences de physique, Capes de sciences physiques (3e edition ,bleu)*, **Duffait**	⟶	Chute dans le champ de pesanteur
✍ **Physique expérimentale**, *FLTCD*	⟶	Viscosité
✍ *Livre de première année*	⟶	Correspondance PFD-Solide
✍ *BUP 952 : Mise en place d'un TP au Cameroun*	⟶	Pendule simple ou Pendule pesant
✍ *Mécanique 2*, **BFR**	⟶	Gyroscope : précession
✍ *Mécanique*, **Strelkov**	⟶	Gyroscope : notations

Expériences

- Chute d'une règle
- Moment d'inertie d'une tige
- Précession du gyroscope

1 Chute d'un corps dans le référentiel terrestre. . . . 1024
1.1 Chute dans l'air . . . 1024
2 Théorème du moment cinétique . . . 1026
2.1 Influence qualitative du frottement. . . . 1027
3 Influence des frottements : viscosité . . . 1027
4 Solide en rotation . . . 1028
5 Pendule de Foucault ? . . . 1029
6 Questions . . . 1029

Introduction

La dynamique est le domaine de la physique qui s'intéresse aux forces exercées sur les corps matériels et à leurs conséquences sur le mouvement. Pour cela, on s'appuie sur des outils tels que la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie cinétique, ainsi que sur des principes. En particulier, la première loi de Newton ou principe d'inertie, peut s'écrire : "Il existe une famille de référentiels, appelés galiléens ou inertiels, tels que, par rapport à l'un de ces référentiels, tout point matériel pseudo-isolé (qui est soumis à des forces externes dont la somme est nulle) est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme." [1]

En préparation [a],on a lancé un mobile auto-porteur et pointé la trajectoire sur Latispro [b] La trajectoire est bien une ligne droite. On a pris deux mobiles auto-porteurs qui forment un système pseudo isolé et on les a fait collisionner, il y a bien conservation de la quantité de mouvement.

a. Si on a eu le temps, c'est totalement optionnel.
b. Le dispositif de Cachan envoie directement le signal sur l'ordi sur un logiciel spécial.

Dans ce montage, on considérera toujours que le référentiel dans lequel on travaille est galiléen puisque son existence est donnée par le principe d'inertie.

Dans ce cadre de travail, on peut alors déterminer les différentes quantités d'intérêt en utilisant le principe fondamentale de la dynamique en translation et en rotation (ou le théorème du moment cinétique si on préfère). On peut appliquer ce principe en approximant le système par un point ou un solide indéformable ce qui sera le cadre de ce montage.

But de ce montage
Montrer que la mécanique Newtonienne, ça marche plutôt très bien à cette échelle (i.e. vérifier la validité des modèles).

1 Chute d'un corps dans le référentiel terrestre.

1.1 Chute dans l'air

✍ Duffait p.243

Principe
On fait tomber une règle, la seule force qui s'applique sur elle (une fois l'électro-aimant éteint et les frottements négligés) est le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. On fait l'acquisition de sa position en fonction du temps grâce à une alternance de bandes transparentes et noires et des capteurs optiques à infrarouge. Le traitement est décrit dans le Duffait.
Hypothèses

- Pas de frottement
- Traits équidistants
- Règle verticale lors de la chute.

Mise en équation

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} \tag{1.1}$$

En projetant :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \tag{1.2}$$

1. Ce n'est pas l'énoncé originel de Newton, mais un version modernisée écrite sous forme axiomatique, c'est un principe d'existence.

En intégrant, on garde un v_0 et x_0 parce que notre capteur n'est pas exactement au début, et on ne sait pas comment la règle commence à tomber avec l'électro-aimant.

$$z = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + z_0 \tag{1.3}$$

Résultats expérimentaux

Chute d'une règle

✍ Duffait p.242 ⏲

On alimente l'électroaimant, la règle tombe, on fait l'acquisition sur Latis-Pro.

Pour l'exploitation, on suit le protocole donné, (on peut aussi exporter dn et tn dans un fichier texte et faire l'exploitation avec python).
On modélise avec un polynôme d'ordre deux. On retrouve g.
On peut aussi avoir plusieurs capteurs le long de la trajectoire pour pouvoir avoir plus de points (en mettre un vers la fin permet de montrer l'influence des frottements car le polynôme ajusté sur le premier capteur ne correspond pas !

Incertitudes :

- Verticalité de la règle : évaluer l'angle qui donne une incertitude sur l'espacement (on peux avoir filmé pour vérifier). On a α, donc $d \pm d(1 - \cos\alpha)$
- Temps de réponse des capteurs (supposé constant).
- Ajustement par Latis-Pro (dur à évaluer)

On a écrit le PFD en ne faisant intervenir que des forces conservatives. On a donc conservation de l'énergie (en négligeant les frottements évidemment)

↓

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = g \tag{1.4}$$

$$\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}.\frac{d\vec{x}}{dt} \tag{1.5}$$

$$\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dt} = \frac{d\vec{g}.\vec{x}}{dt} \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgz = cte \tag{1.7}$$

On calcule la vitesse, et on peut alors tracer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique. On vérifie la conservation de l'énergie (sur le premier capteur, où la vitesse est faible).
Bien penser à écrire les formules sur Latis-Pro avant.

On a donc bien utilisé le principe fondamental de la dynamique en translation, on va maintenant passer à l'autre grande catégorie de mouvements : la rotation. On va donc illustrer le principe fondamental de la dynamique en rotation, ou théorème du moment cinétique.

2 Théorème du moment cinétique

✍ Duffait p.264 et FLTCD p.479 (que le début), BUP et apparemment, la notice des pendules couplés.

Principe

On part de la même équation, mais cette fois on fait de la mécanique du solide indéformable.

Hypothèses

- Solide indéformable
- Référentiel galiléen

Mise en équation

$\overrightarrow{L_{\Delta tige}} = J_0 \frac{d\theta}{dt}$ puis calcul du moment cinétique de la masse $\overrightarrow{L_{\Delta masse}} = L\overrightarrow{u_r} \wedge ML\frac{d\theta}{dt}$, puis calcul du moment du poids $-MgL\sin\theta$ [2] et TMC au système {tige+masse}. Détermination de J_0 en ajoutant une masse M à une distance L et $\omega_0^2 = \frac{MgL}{J_0 + ML^2}$. **Résultats expérimentaux**

Détermination du moment d'inertie de la tige

✍ Notice ⏲

On prend un des pendules des pendules couplés
Étalonner le capteur potentiomètrique
Equilibrer la tige
On met une masse M, à une distance L du point d'attache. On lance le pendule et on fait une acquisition, TF ou comptage du nombre de périodes.

On trace $\frac{MgL}{\omega_0^2}$ en fonction de L^2 : la pente vaut M et l'ordonnée à l'origine vaut J_0. On compare à la valeur de la notice $2.844 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Cette étude nous a permis de caractériser le moment de la tige. **Incertitudes :**

- Mesure de L pas facile
- Balance pour M
- Mesure de l'angle pour l'étalonnage
- Résolution de la TF ou incertitude sur le Δt mesuré pour T pour la fréquence.

OPTIONNEL : à moduler si il reste trop ou pas assez de temps pour faire le gyroscope.

2. Cela implique de négliger le moment du poids de la tige par rapport à celui de la masse, on peut évaluer l'erreur ou prendre la formule générale, voir BUP

On voit sur nos acquisitions que le frottement n'est pas négligeable. Est-ce que l'on peut savoir quel type de frottement est présent ?

↓

2.1 Influence qualitative du frottement.

✍ Duffait p.265
Deux types de frottements : solide = on laisse une barre appuyer sur le pendule, et frottement fluide : on colle un aimant et on met une barre d'aluminium, on a freinage par courant de Foucault donc proportionnel à la vitesse.

On a vu comment caractériser les moments d'inertie d'un solide par rapport à des axes, on va s'en servir pour caractériser le gyroscope et étudier les effets surprenants des moments d'inertie, caractéristique du solide.

↓

3 Influence des frottements : viscosité

On a mesuré le champ de pesanteur terrestre, et ainsi vérifié le principe fondamental de la dynamique en translation. La conservation de l'énergie montre en première approximation que le système est bien conservatif. Cependant, comme dans beaucoup de problèmes en mécanique newtonienne, on a négligé les frottements, (même si on les a vu un petit peu). Pour montrer leur influence sur un système, on va se placer dans le cas où ils sont prépondérants.

↓

✍ FLTCLD et Duffait p.249

On fait tomber une bille dans de l'huile, cette fois, les frottements sont loin d'être négligeables, c'est même eux qui vont limiter la vitesse de la bille. **Principe** Pour cela on fait tomber des billes de rayon r et masse volumique ρ_b dans une éprouvette cylindrique remplie d'un fluide de masse volumique ρ_f, ici de l'huile Rotitherm. **Hypothèses**

- Régime stationnaire atteint (calcul d'odg)
- Écoulement rampant (Re«1) (le calculer)
- Le fond de l'éprouvette n'a pas d'influence sur l'écoulement

Mise en équation Il faut modéliser la force de frottement qui s'applique à la bille. On prend une force de frottement $\propto v$ car le milieu est visqueux. Dans le cas d'un régime $Re \ll 1$ ona même une expression analytique : Force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes.
$\overrightarrow{F} = -6\pi\eta \dfrac{r}{1-2.1\dfrac{r}{R}}\overrightarrow{v}$, le terme $2.1\dfrac{r}{R}$ permettant de prendre en compte les effets de bords, avec R le rayon de l'éprouvette et η la viscosité dynamique du fluide.
On écrit alors le PFD, les forces sont le poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement.

Quand le régime permanent est atteint, la vitesse de la bille est constante et vaut : $V = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho_b - \rho_f}{\eta} r^2 g(1 - 2.1\dfrac{r}{R})$.

Détermination de la viscosité de l'huile

Viscosimètre à bille

✍ FLTCLD ⏲ 2 min

Matériel : Éprouvette remplie d'huile Rotitherm M220, billes en acier de différents rayons, chronomètre, règle
Mesurer le temps de chute d'une bille entre deux graduations, plusieurs fois (8 fois) pour plusieurs rayons, et remonter à la vitesse.

On réalise un ajustement de la forme $V = f(r) = ar^2 - br^3$ (code python pour l'exploitation) au vu de l'équation précédente. Le coefficient a permet de remonter à la viscosité dynamique de l'huile η_{exp}. **Incertitudes**

- Longueur : mesure à la règle, $\Delta L = \dfrac{0.001}{2\sqrt{3}}$
- Diamètre des billes : mesure au pied à coulisse et données constructeur.
- Masse des billes : dernier digit de la balance et données constructeur.
- Temps de mesure : écart-type sur la série de N(=8) mesures et erreur systématique due au temps de réaction de l'expérimentateur de 0,1s ; $\Delta(\Delta t) = \sqrt{(\dfrac{ecart-type}{\sqrt{N}})^2 + \sigma_{syst}^2}$

Les valeurs de η correspondent, c'est donc que notre expression de la force de frottement est bien correcte (ou du moins que tout est cohérent).

4 Solide en rotation

✍ BFR p.145, Strelkov p.246

Principe La dynamique d'un solide en rotation est fortement déterminée par la valeur de ses moments d'inertie. On a ici une toupie symétrique donc $A = B \neq C$ [3]. En préparation, on les a mesurés en ajoutant une masse et en mesurant la période d'oscillation de rotation propre (notation ✍ Strelkov p.246 : autour de AA', on place la masse dans le disque) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{C + m_1 a_1^2}{m_1 g a_1}}$, puis dans un deuxième temps la période de nutation (autour de BB', on fixe la masse sur le cercle ABA'B' qui entoure le disque) $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{A + m_2 a_2^2}{m_2 g a_2}}$. On est ainsi remonté aux moments d'inertie du solide.
Sinon la notice devrait fournir $C \simeq 5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$ et $A \simeq 3.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$. On va alors lancer le gyroscope, et poser une masse pour le déséquilibrer. Raisonner sur le moment de la masse et le moment cinétique ainsi que le théorème du moment cinétique. On s'attend bien à un mouvement de précession. **Hypothèses**

- Approximation gyroscopique
- θ varie peu autour d'une valeur moyenne

Mise en équation ✍ TP, la démonstration pour la toupie est dans le BFR p.145
θ est l'angle de nutation, $\dot{\phi}_0$ est la vitesse de rotation propre, Ψ est l'angle de précession.

$$\ddot{\theta} + (\frac{C\dot{\phi}_0}{A})^2\theta \mp \frac{mga}{A}\sin\theta = -\frac{C\dot{\phi}_0}{A}\theta K \tag{1.8}$$

$$\dot{\Psi}\sin\theta = \frac{C\dot{\phi}_0}{A}\theta + K \tag{1.9}$$

En appliquant les hypothèses, on obtient une précession à vitesse constante :

$$\dot{\Psi} = \frac{mga}{C\dot{\phi}_0} \tag{1.10}$$

☕ **Résultats expérimentaux**

3. En fait ici on n'a pas égalité entre les deux tenseurs d'inertie car il y a les cadres.

Précession du gyroscope

✍ BFR p.145 ⏲

On lance le gyroscope équilibré, on ajoute une masse m connue, la précession commence. On chronomètre une période de précession et on mesure la vitesse de rotation propre avec un tachymètre. Faire des incertitude statistiques sur les vitesses.

On peut alors vérifier l'égalité des deux expressions.

Incertitudes :

- Au chrono
- Le tachymètre
- le moment d'inertie C

Vérification des hypothèses et discussion du modèle

- Pas de mouvement de nutation.
- OdG de l'approximation gyroscopique

Là encore, si on a le temps, on peut lancer le gyroscope équilibré et mesurer la décroissance de $\dot{\phi_0}$ en fonction du temps. A priori la décroissance est linéaire car frottements solides.

5 Pendule de Foucault ?

On pense que c'est possible, en le lançant au début de la préparation, c'est à tester.

Conclusion

On a mis en application les grands théorèmes de la dynamique (PFD, TMC, TEC) autant sur de la dynamique de points que de mouvements propres aux solides (gyroscopes). La mécanique dite newtonienne est certes de la "vieille" physique, mais elle reste au coeur de nos vies, elle gouverne le mouvement des véhicules du vélo (plus on va vite, plus c'est stable...) à l'avion ou au sous-marins qui utilisent des gyroscopes (peut être optiques ou électroniques maintenant ?). Cette dynamique est aussi celle qui peut expliquer le mouvement des planètes ou les forces de marées. Cependant, dans tous ces domaines elle possède ces restrictions,il faut faire attention lorsque l'on fait de la mécanique dans des référentiels non-galiléens, il faut avoir recours à la relativité restreinte à des vitesses proches de celle de la lumière, à la relativité générale près des trous noirs et à la mécanique quantique pour les électrons dans une molécule.

6 Questions

Comment quantifier l'erreur sur la parallaxe et le frottement ?

Comment savoir que le mouvement est rectiligne uniforme ?

D'où peut provenir la perte d'énergie après le choc ? (rotation des mobiles...)

ODG du coeff de restitution sur d'autres surfaces ?

Sur la chute de la bille : comment s'assurer que le RP est atteint ?

ODG pour quantifier l'influence des bords ?

Comment marche le capteur du pendule ? Potentiomètre.

Comment Regressi calcule la dérivée ?

Loi des aires : - d'où vient le programme ? - Pouvez-vous retracer la courbe pour les premiers points sur python ? - je suis un élève et je me demande pourquoi on se complique alors que le mouvement est circulaire et uniforme. Que me répondez vous ?

Viscosimetre : - la poussée d'archimède est vraie pour la statique des fluides mais la on est en dynamique pourquoi l'expression de la vitesse est vraie quand même ? - quelle température fait il dans la pièce ? Comment ça influe sur la viscosité ? et sur la valeur théorique de votre loi ?

Pourquoi lors de la vérification de la 1ère loi de Newton le mobile n'a-t-il pas la trajectoire rectiligne à laquelle on s'attend ? Pourquoi la vitesse diminue dans cette expérience ? L'horizontalité imparfaite de la table (j'avais fait de mon mieux à ce niveau là mais elle penchait toujours un peu). Frottements air-mobile.

Peut-on caractériser le jet d'air sous le mobile ? On peut connaître la pression à partir de la mesure de la masse et de la surface du mobile car le jet compense le poids.

Pour calculer l'accélération j'avais supposé que la dérivée était égale au taux d'accroissement et pour les points xn-1, xn et xn+1 je les avais choisis distants de 3 points les uns des autres, ils m'ont demandé de justifier mon choix plus on les prend éloignés plus on gagne sur l'incertitude relative des mesures mais moins l'hypothèse est vérifiée.

Pour le pendule simple est-ce que j'ai pris en compte le système d'attache ? (réponse non). Si j'en avais tenu compte quelle grandeur serait intervenue ?

Quelle erreur fait-on lorsque l'on assimile la masse ajoutée sur le pendule pesant à une masse ponctuelle ? La manip marche très bien, l'erreur est inférieure au %.

Tu cherches à vérifier que le référentiel du laboratoire est galiléen, un référentiel est-il galiléen dans l'absolu ? Est-ce seulement une question d'échelle de temps ? Il faut vérifier que les forces d'inertie sont négligeables. Donc le caractère galiléen d'un référentiel dépend aussi de la vitesse de l'objet.

Mobile autoporteur : est-ce grave si le mobile tourne sur lui-même ? Est-ce que l'utilisation d'un système optique (appareil photo) pour l'analyse de la trajectoire peut poser un problème ? Non car on imprime le mouvement du centre de masse. Il faut être dans les conditions de Gauss ce qui n'est pas le cas si l'appareil photo est proche de la feuille, il peut aussi y avoir des problèmes de parallaxe.

Sur ImageJ, tu as dit vouloir que l'image soit en 8 bits, à quoi cela correspond ? Codage des niveaux de gris.

Comment le logiciel détermine-t-il où sont les points ? Il vaudrait mieux pointer chaque point comme ça ce n'est pas une boîte noire qui choisit les points et on est conscient des incertitudes que cela implique.

Un ODG des frottements sur la table à coussin d'air ? Calcul du nombre de Reynolds (faible).

Chute libre : comment choisir la position du capteur ? On a supposé qu'il n'y a pas de frottements, mais si c'est le cas et que le capteur a été placé trop bas, la règle aurait atteint une vitesse limite. Il serait bien de faire le calcul de l'établissement de cette vitesse limite.

Chute libre : Fonctionnement capteur ?

Pendule pesant : comment s'appelle le phénomène qui fait que la fréquence ne dépend pas des conditions initiales aux petits angles ? Isochronisme.

Montage surprise : Mesurer le champ de pesanteur avec une autre manip que la chute libre ? Pendule simple
Pour améliorer la mesure : plus de période, fil plus long.

MP 2

Surfaces et interfaces

Bibliographie

✍ *Les milieux granulaires*, **Andreotti**	Frottement solide
✍ *Gouttes, bulles, perles et ondes*, **Pierre-Gilles de Gennes**	Capillarité
✍ *Hydrodynamaique physique*, **Guyon, Hulin, Petit**	Capillarité
✍ *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome 1. Mécanique*, **Quaranta**	Manip frottement et capillarité
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD**	Tension superficielle
✍ *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, **Garing**	Lois de Snell-Descartes

Expériences

- Vérification des lois de Snell-Descartes
- vérification de la loi de Jurin
- Contact Solide-Solide, mesure d'un coef de frottement
- Stalagmométrie

1 Interface solide-solide : mesure d'un coefficient de frottement statique 1032
2 Interface gaz/liquide/solide 1032
2.1 Mesure d'une tension de surface par arrachement 1033
2.2 Loi de Jurin 1034
2.3 Stalagmométrie 1034
3 Snell-Descartes dans le Plexiglas 1035

Introduction

Définir les termes : surface, interface

Préciser les domaines physique de chaque XP

fil rouge ?

Le but de ce montage est d'illustrer des phénomènes d'interface tant sur des solides que des liquides. Ces phénomènes d'interface sont d'un intérêt fondamental en physique et en ingénierie, car ce sont eux qui permettent, par exemple, le transport d'information par fibre optique.

1 Interface solide-solide : mesure d'un coefficient de frottement statique

✍ Andreotti p20 **Principe** On commence par le plus intuitif mais pas le plus simple conceptuellement.
On expérimente au quotidien les phénomènes de contact entre les solides. On va s'en tenir à une description macroscopique et phénoménologique des lois de frottement d'Amontons-Coulomb. On va se servir de cette loi et calculer le coefficient de frottement entre deux solides.
Pour cela on va poser le solide sur la plaque et augmenter l'angle jusqu'à ce qu'il y ait rupture.

Mise en équation Loi d'Amontons-Coulomb : $|R_T| \leq \mu_s |R_N|$.
On a $P = -mg\cos\alpha\overrightarrow{ez} + mg\sin\alpha\overrightarrow{e_x}$ donc à la rupture $R_T = -mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$ et donc $\mu_s = \tan\alpha$. On peut interpréter ce résultat en termes de cône de stabilité. **Résultats expérimentaux**

Mesure d'un coefficient de frottement

✍ Quaranta 1 p150

On utilise une plaque qui dispose d'un rapporteur, ou on utilise un inclinomètre pour mesurer l'angle. On monte doucement l'angle jusqu'à que ça lâche à l'aide de support boy.

On a alors une estimation du coefficient de frottement.

Incertitudes :

- Elles vont être grandes, il faut absolument faire un traitement statistique, toujours poser le solide de la même façon, etc. L'erreur systématique sera probablement négligeable devant l'écart type.

Vérification des hypothèses et discussion du modèle

- On obtient de grosses variations, c'est normal, il n'y a de toute façon pas de valeurs tabulées précisément, on peut tout au plus donner un encadrement.
- Même fondamentalement, ce coefficient dépend tellement de l'état de surface, de l'historique du contact (comment il a été formé, depuis combien de temps), humidité, température.

Après avoir posé des solides sur des solides, on va poser des liquides sur des solides (ou des solides sur des liquides)(et c'est valable aussi pour des liquides sur des liquides).

2 Interface gaz/liquide/solide

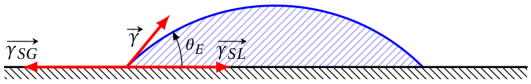
Bulle carrée

✍ ⏲

Matériel : Liquide à bulles, support cubique à bulles.

Montrer l'existence d'une interface

Lorsque les interfaces étudiées impliquent des fluides, les molécules proches de cette interface sont dans un environnement défavorable puisqu'elles sont entourées de moins de voisines. La formation de l'interface est donc couteuse énergétiquement, ce qui se traduit thermodynamiquement par la tension de surface. On exploite dans cette partie le phénomène de mouillage d'un liquide sur un solide. Les trois interfaces mises en jeu impliquent un solide, un liquide et l'air, et sont liées par un angle de mouillage noté θ dans la suite. Les expériences proposées font intervenir des fluides communs (eau et éthanol), qui sont considérés comme on va le voir comme très mouillant, c'est à dire à angle de contact quasi-nul.



2.1 Mesure d'une tension de surface par arrachement

✍ FLTCD, GHP p62

Pour un corps (et surtout pour les liquides), il y a une différence d'interaction entre les molécules dans le volume et les molécules situées à la surface. Les molécules à la surface possèdent un déficit d'énergie, former une interface coûte de l'énergie. C'est pour ça que les gouttes sont sphériques (Sans frottement de l'air pour la pluie ou autre).

Principe L'anneau qui trempe dans l'eau, on a deux interfaces liquide-vapeur par unité de longueur de l'anneau. Ces interactions liquide-vapeur sont caractérisées par un coefficient γ, qu'on appelle tension superficielle et qui peut être interprété comme une force par unité de longueur qui tend à diminuer l'aire de l'interface. On a donc $2F_\gamma$ par unité de longueur. On va s'intéresser à une mesure de ce coefficient de tension superficielle par la méthode de la balance par arrachement. (voir FLTCD p466).

Mise en équation FLTCD p466, GHP **Résultats expérimentaux**

Mesure de la tension de surface

✍ FLTCD p466 ⏲

On suspend l'anneau au dessus d'une boite de pétri bien propre remplie d'eau distillée juste avant. (Si on faire les choses extrêmement bien, l'anneau est rincé à l'acétone/éthanol, passé dans l'acide chlorhydrique et légèrement brûlé, mais l'étape éthanol peut suffire). On place une balance de précision sous la boîte de pétri (c'est une bonne alternative au dynamomètre pas très précis). La potence sur laquelle est attachée l'anneau est sur un support boy [a], on fait doucement monter l'anneau et on regarde le maximum de la force (minimum de poids) auquel on retranche le poids de départ (boite de pétri+eau seule) (tarer la balance au début). Cette différence vaut alors $F_\gamma = 2 \times 2\pi R$. [b]. Ne pas oublier de réétallonner tout ce que l'on utilise.

a. Bien le choisir et ça marche nickel

b. Apparemment Cachan a un système de capteur piézo qui peut remplacer avantageusement le dynamomètre, on peut éventuellement faire balance + piézo pour deux mesures comparatives

Incertitudes :

- Là encore, faire une statistique, c'est important.
- selon qu'on utilise la balance ou le dynamomètre les incertitudes ne sont pas les mêmes, penser à vérifier l'étalonnage.

- il faut que l'anneau soit bien horizontal.

Vérification des hypothèses et discussion du modèle

- On compare à la valeur tabulée (cf FLTCD), normalement on est plutôt bon, si on est en-dessous c'est les impuretés, si on au-dessus, c'est qu'on a mal fait un truc.
- En préparation, on fait cette mesure pour différentes concentrations de surfactant (SDS de 0 à $2.5\,\mathrm{g\,L^{-1}}$). On constate une diminution drastique de la tension superficielle jusqu'à la Concentration Micellaire Critique, où on voit un plateau (saturation en surfactant). Voir PGDG p177, GHP p62.

2.2 Loi de Jurin

Lorsqu'un tube capillaire est plongé dans un liquide mouillant, on observe la montée du fluide à l'intérieur du tube, résultant d'une compétition entre énergie de surface et énergie potentielle de pesanteur. Par un raisonnement énergétique (ou en raisonnant en termes de pression), on peut montrer que la hauteur h du fluide dans le tube est :

$$h = \frac{2(\gamma_{SG} - \gamma_{SL})}{\rho g r} = \frac{2\gamma \cos\theta_E}{\rho g r}$$

γ_{SG} désigne la tension de surface de l'interface solide-gaz, SL celle de l'interface solide-liquide et γ tout seul celle de l'interface liquide- gaz, r désigne le rayon des tubes capillaires. Cette relation est nommée loi de Jurin. On va vérifier cette relation pour plusieurs tubes de diamètres différents.

Loi de Jurin

✍ ⏲

Matériel : Tubes capillaires P105.16, éthanol, colorant soluble à l'éthanol.

But : Remonter à la valeur de $\gamma \cos\theta_E$, et à celle de γ si on suppose $\theta_E = 0$.

Valeur tabulée : 22,5 mN/m **@20 degres**

Pour la mesure, bien nettoyer avant mesure, et faire une mesure en redescente avec une poire à pipetter.

Les erreurs peuvent venir de plein de facteurs, notamment de la température.

Remarque : La dynamique de l'ascension capillaire est régie par la loi de Washburn et est très rapide : on ne peut pas l'étudier avec le matériel dont nous disposons.

2.3 Stalagmométrie

✍ [PGDG], p.60, [Quaranta I] à « Capillarité »

On observe expérimentalement que la masse des gouttes créées par un compte-goutte est toujours identique, et proportion- nelle au rayon du compte goutte et à la tension superficielle du liquide (loi de Tate). La goutte se détache lorsque son poids excède la force capillaire, c'est à dire :

$$2\pi R\gamma = \rho g V_g$$

On a donc

$$m_g = \frac{2\pi R\gamma}{g}$$

Cependant en pratique seule une proportion α du liquide se détache, et on connait pas R. Ce rapport αR dépend peu du liquide considéré, donc en pratique on peut étalonner avec un liquide de γ connu pour trouver un γ inconnu !

Loi de Tate

✍ ⏲

On met une burette au dessus d'une balance, on compte les goûtes qui tombent, et magie !!

Étape 1, trouver le rapport αR avec de l'éthanol, en prenant γ tabulé.

Étape 2, trouver γ en connaissant αR pour de l'eau, par exemple.

Compter une 50aine de gouttes pour faire des incertitudes sympas.

Ca peut s'automatiser avec la fourche optique P96.27 et le compteur p96.26, mais c'est capricieux...

Incertitudes : On évalue l'incertitude de la balance, celle sur le nombre de gouttes ratées, et on divise par le nombre de gouttes.

Une interface n'est pas seulement qu'une inter-phase, c'est une discontinuité d'un paramètre. On va donc regarder l'effet d'une discontinuité d'indice, c'est un dioptre,

↓

3 Snell-Descartes dans le Plexiglas

Il n'y a probablement pas besoin d'une référence pour cette expérience inratable qui nous met bien en confiance.

Bon, Plexiglass c'est une marque déposée, en vérité il s'agit du PMMA (Polyméthacrylate de méthyle). Mais si j'ai déjà lu "PMMA", je n'ai jamais entendu quelqu'un le prononcer donc ne soyons pas trop fantaisistes et parlons de plexiglass.

On va simplement vérifier les lois de Snell-Descartes en réflexion et en réfraction. En passant à travers un dioptre séparant deux milieux homogènes d'indice de réfraction différents, la lumière est déviée. Si on nomme i l'angle incident, fait par un rayon avec la normale à une interface séparant un milieu d'indice n0 d'un milieu d'indice n_1, r l'angle du rayon réfléchi et t l'angle du rayon transmis, on a :

$$n_0 \sin(i) = n_1 \sin(t) \qquad \text{et} \qquad i = -r$$

Vérification de Snell-Descartes

✍ ⏲ 4 min

Matériel :

- un laser
- un semi-disque avec le disque gradué P4.4

- un écran ou une feuille blanche pour mesurer l'angle

On fait rentrer le rayon du laser dans le plexi par la face semi-circulaire : de cette façon l'angle incident à cette interface est toujours nul et on étudie les angles à la sortie du plexi : on passe du milieu plus réfringeant au milieu moins réfringeant, on peut donc explorer une plus large gamme d'angles et surtout mettre en évidene la notion d'angle limite pour la réfraction.

Pour faire varier l'angle incident, on pourrait garder le demi-disque fixe et faire tourner le laser, de cette façon on aurait une mesure directe des trois angles. C'est long et fastidieux, sans oublier qu'on n'aurait pas l'assurance de frapper le dioptre toujours au centre du cercle. On préfère donc fixer le laser et faire tourner le demi-disque, comme le matériel le prévoit. On peut encore mesurer directement l'angle incident, mais l'angle réfléchi et transmis se déduisent en retirant l'angle incident à l'angle mesuré, ce qui a pour effet immédiat d'augmenter nos incertitudes à 1 au lieu de la simple incertitude de lecture $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (simple formule de propagation des incertitudes). Il faut en avoir conscience, mais ce n'est pas très grave, c'est bien la bonne façon de procéder.

On mesure donc nos angles pour différents angles incidents, par régression linéaire sur Régressi (attention à bien définir $\sin(i)$ et $\sin(t)$) on retrouve les lois de Snell-Descartes. On s'autorise à prendre 1 pour l'indice de l'air, et plus encore on s'interdit de prendre une valeur plus précise : la précision de nos mesures ne nous permet pas d'aller au 4e chiffre significatif dans l'expression des indices...

Les indices des plastiques varient entre 1,3 et 1,65, pour du plexiglass on doit trouver quelque chose de l'ordre de 1,50 à 20°C pour un angle incident limite en réfraction correspondant d'environ 41,5°.

Pour commenter les valeurs obtenues, il semble intéressant de parler de dispersion de la lumière : l'indice du plexi va varier avec la longueur d'onde. D'après les valeurs tabulées, on aurait un indice de 1,483 à la limite de l'IR et de 1,514 aux portes de l'UV. On a donc une grande variation dans le domaine du visible et la couleur du laser utilisé va avoir une influence.

Il est important aussi d'expliquer le phénomène. Si on se demande "Pourquoi la lumière change de direction comme ça ?", on peut toujours sortir des équations de Maxwell et faire des calculs, il y a toujours quelqu'un qui aime faire ça.

Sinon, on peut reprendre la définition de l'indice optique comme le rapport entre la vitesse de la lumière dans le milieu et dans le vide, et énoncer le principe de Fermat : le chemin optique est stationnaire, qu'on peut très grossièrement exprimer comme "la lumière emprunte la trajectoire la plus rapide". Mais c'est épineux puisqu'énoncé simplement comme ça, sans expliciter, on donne l'impression de le faire *a posteriori*, en connaissant déjà l'angle de transmission et en vérifiant qu'on relie bien deux points par la trajectoire la plus rapide (voir LP31 pour comprendre que ce n'est pas le cas).

Notons que la stationnarité équivaut à une longueur de trajectoire maximale et non minimale dans le cas de la réflexion. Finalement, on peut aussi se servir du principe de Huygens et dire que tous les points du dioptre touchés par le rayon lumineux agissent comme des sous-sources éclairant dans toutes les directions, et qu'il ne subsiste que la direction qui leur permet d'être cohérents.

MP 3

Dynamique des fluides

Expériences

- Poiseuille
- Viscosimètre
- Coefficient de traînée (soufflerie)
- Principe du tube de pitot
- Couette bi-cylindre

1 Viscosimètre à bille 1038
2 Écoulement de Poiseuille 1040
2.1 Théorie 1040
2.2 Expérience et résultats 1041
3 Tube de Pitot (soufflerie) 1042
4 Frottements fluides (soufflerie) 1043

Introduction

La mécanique des fluides, c'est N.S.

$$\rho \frac{\mathrm{D}\overrightarrow{v}}{\mathrm{D}t} = \rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}\right) = -\overrightarrow{\nabla} P + \eta \Delta \overrightarrow{v} + \overrightarrow{f_{\text{autres}}} \tag{3.1}$$

Expliciter le sens des termes, et parler de η

☕

Expérience de Stokes

✍ ⏲

✍ GHP p.425

On fait tourner lentement d'abord, rapidement ensuite. On est content.

La dépendance en Re est importante. On va montrer des expériences à Re croissant.

1 Viscosimètre à bille

On commence par un très bas Reynolds

On considère une bille sphérique de rayon r (son volume vaut donc $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) et de masse m en chute dans un fluide visqueux de viscosité η. L'application du principe fondamental de la dynamique donne alors :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = (\rho_b - \rho_{gl})V^v bg - 6\pi\eta r\overrightarrow{v}$$

Transitoire, de longueur 3τ avec $\tau = \frac{2\rho_b}{9\eta}r^2$

Principe

Pour cela on fait tomber des billes de rayon r et masse volumique $\rho_b = 7832 kg/m^3$ dans une éprouvette cylindrique remplie d'un fluide de masse volumique ρ_f, ici de l'huile Rotitherm.

Hypothèse

- Régime stationnaire atteint
- Ecoulement rampant (Re«1)
- Le fond de l'éprouvette n'a pas d'influence sur l'écoulement

Mise en équation Force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes à bas nombre de Reynolds :

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\eta \frac{r}{1 - 2.1\frac{r}{R}}\overrightarrow{v}$$

le terme $2.1\frac{r}{R}$ permettant de prendre en compte les effets de bords, avec R le rayon de l'éprouvette et η la viscosité dynamique du fluide.

Principe fondamental de la dynamique sur une bille de masse m :

$$m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{\Pi} + \overrightarrow{F}$$

Régime stationnaire et projection sur z :

$$0 = -\frac{4}{3}\pi r^3\rho_b g + \frac{4}{3}\pi r^3\rho_f g + 6\pi\eta\frac{r}{1-2.1\frac{r}{R}}v$$

d'où $6\pi\eta\frac{r}{1-2.1\frac{r}{R}}v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_b - \rho_f)$,

$$v = \frac{2}{9}\frac{\rho_b - \rho_f}{\eta}r^2 g(1-2.1\frac{r}{R})$$

Quand le régime permanent est atteint, la vitesse de la bille est constante et vaut : $V = \frac{2}{9}\frac{\rho_b - \rho_f}{\eta}r^2 g(1-2.1\frac{r}{R})$.

Nous allons vérifier cette loi et déterminer la viscosité de l'huile. **Détermination de la viscosité de l'huile**

Viscosimètre à bille

✍ FLTCLD ⏲ 2 min

Matériel : Eprouvette remplie d'huille Rotitherm M220, billes en acier de différents rayons, chronomètre, règle

Mesurer le temps de chute d'une bille entre deux graduations, plusieurs fois (8 fois) pour plusieurs rayons, et remonter à la vitesse.

Il est nécessaire de connaître la température et la masse volumique du fluide. En effet la température a un influence sur la température de la forme $\eta(T) = \eta_0 e^{E/T}$ où η_0 et E sont deux constantes.

On réalise un ajustement de la forme

$$V = f(r) = ar^2 - br^3$$

au vu de l'équation précédente. Le coefficient a permet de remonter à la viscosité dynamique de l'huile η_{exp} à comparer avec la viscosité tabulée à la même température $\nu = 1000mm^2/s$ avec $\rho = 1,00g/cm^3$, donc $\eta_{constructeur} = 0,97\ Pa.s$ (cf notice).

Huile Rotitherm M220 : On aurait pû utiliser du glycérol mais il s'hydrate au contact de l'air humide, contrairement à l'huile silicone (s'hydrate très peu), donc l'huile silicone conserve ses propriétés (viscosité). En pratique, il est possible que des micro-gouttes d'eau soient présentes, il faut donc attendre et laisser reposer le fluide pour qu'elles se trouvent en bas de l'éprouvette.

Discussion des incertitudes

- Longueur : mesure à la règle, $\Delta L = \frac{0.001}{2\sqrt{3}}$
- Diamètre des billes : mesure au pied à coulisse et données constructeur.
- Masse des billes : dernier digit de la balance et données constructeur.
- Temps de mesure : écart-type sur la série de N(=8) mesures et erreur systématique due au temps de réaction de l'expérimentateur de 0,1s ; $\Delta(\Delta t) = \sqrt{(\frac{ecart-type}{\sqrt{N}})^2 + \sigma_{syst}^2}$

Discussion des hypothèses
Effet des parois Le rapport b/a permet de vérifier le modèle et de justifier qu'on s'arrête à un DL2, il faut avoir $\frac{b}{a} = \frac{2.1}{R}$ et le terme suivant dans le DL est $2.089\left(\frac{r}{R}\right)^3$, négligeable.

Régime permanent Temps caractéristique d'établissement du régime permanent : $\tau \simeq \frac{2}{9}\frac{\rho_b}{\eta}r^2$ ce qui correspond à une distance $d \simeq \tau.V \simeq 5\ cm$ + Il faut vérifier expérimentalement que le régime permanent est atteint (film et pointage, ou alors en faisant plusieurs intervalles de même distance et en vérifiant que la même durée est nécessaire pour parcourir chaque intervalle).

Ecoulement rampant Calcul du nombre de Reynolds

Effet du fond négligé La force corrigée est $\overrightarrow{F} = -6\pi\eta r(1 + \frac{r}{h})\overrightarrow{v}$ et on peut voir que le dernier terme est négligeable.

2 Écoulement de Poiseuille

2.1 Théorie

On considère un écoulement **laminaire, parallèle, stationnaire, incompressible**. Cet écoulement a lieu dans un capillaire de diamètre D et de longueur L.

Le profil de vitesse est $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{e_x}$ en coordonnées cylindriques, si bien que Navier-Stokes donne

$$\overrightarrow{0} = -\overrightarrow{\nabla} P + \eta\Delta\overrightarrow{v}$$

Le gradient de pression est donc le moteur de l'écoulement. On peut facilement résoudre l'équation en disant que chaque termes dépend de variables différentes et donc sont égaux à une constante :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = A = \eta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

On trouve le profil de vitesse et on l'intègre sur la section du capillaire pour obtenir la loi de Hagen-Poiseuille :

$$D_m = \frac{\pi}{128\nu}\frac{\Delta P}{L}D^4$$

En utilisant un vase de Mariotte et en considérant la ligne de courant allant de l'extrémité du bouchon à l'entrée du capillaire, on obtient

$$\Delta P = \rho_{\text{eau}}gh - \frac{1}{2}\rho_{\text{eau}}U^2$$

où U est la vitesse du fluide à l'entrée du capillaire et h est la hauteur entre l'extrémité basse du tube enfoncé dans le bouchon du vase de Mariotte et l'entrée du capillaire.

Principe d'un vase de Mariotte Quand le tube est complétement rempli d'air, on impose la pression atmosphérique à l'endroit où les bulles se forment et alors on impose une pression en bas du vase contrôlée par l'hydrostatique qui est constante tant que le niveau de l'eau est au-dessus du tube..

Dans l'hypothèse où $U^2 \ll gh$, la loi de Poiseuille se réécrit simplement

$$D_m = \frac{\pi}{128\nu}\frac{\rho_{\text{eau}}gh}{L}D^4$$

C'est cette loi qu'on va vérifier.

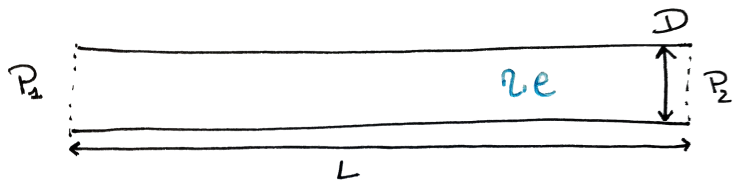


FIGURE 3.1 – Ecoulement de Poiseuille cylindrique.

Longueur d'établissement Gouvernée par le nombre de Reynolds. Quand le fluide entre dans le tube, l'écoulement n'a pas directement un profil parabolique, il faut qu'il parcourt une certaine longueur pour se mettre en place, c'est la longueur d'établissement. Cette longueur correspond à la distance nécessaire pour que la couche limite soit égale au rayon du tube, et alors la section complète du tube est affectée par la viscosité. On peut alors estimer la longueur d'établissement : $l \simeq \frac{\rho U R^2}{\eta} = \frac{\rho Q_V}{\pi \eta} \simeq 3\ cm.$

2.2 Expérience et résultats

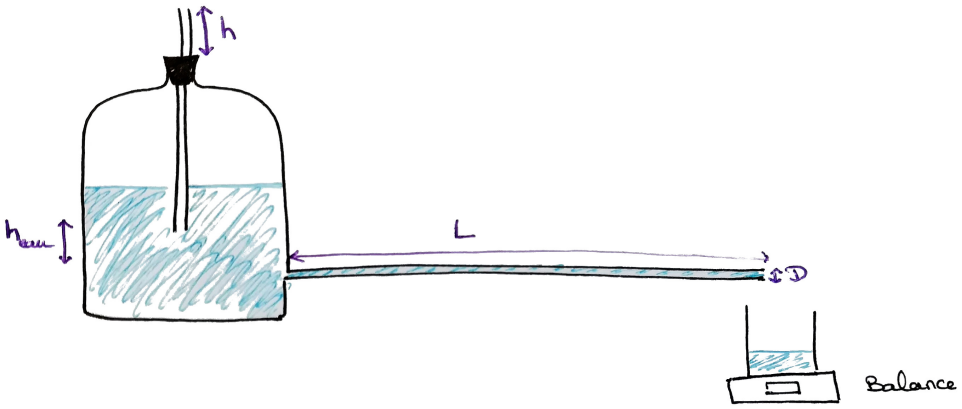


FIGURE 3.2 – Dispositif expérimental pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique.

Ecoulement de Poiseuille

✍ FLTCLD ⏲ 5 min

Matériel : Vase de Mariotte, long tube en verre, cristallisoir, balance, thermomètre, chronomètre, mètre

Mesure du débit ($Q_V = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t}$) pour différents gradients de pression.

Précautions à prendre : On peut déposer de la suie ou du téflon à l'extrémité libre du tube. Bien vérifier que le tube est horizontal (niveau à bulle). Mesurer la température de l'eau. Attendre assez longtemps pour être en régime stationnaire.

On trace $Q_V = f(h) = a * h + b$, on obtient une droite affine et on remonte à la viscosité de l'eau :

$a = \pm$ et $b = \pm$ donc $\eta_{eau} = \frac{\pi D^4 \rho g}{128 a L} = (7,8 \pm 0,4).10^{-4}\ Pa.s$

À la température de la pièce $\eta_{eau}^{tab} = 1,081.10^{-3}\ Pa.s$ (17°C), avec $\rho_{eau} = 998,86\ kg/m^3$. On ne retrouve pas la valeur tabulée ce qui qui peut être dû à la présence d'impuretés dans l'eau, mais on retrouve un ordre de grandeur satisfaisant.

Discussion des incertitudes

- Masse : défilement rapide quand le goutte tombe, on estime qu'on est précis à 0,5g.
- Durée : écart-type sur la série de (5) mesures et erreur systématique due au temps de réaction de l'observateur de 0,1 s.
- Hauteur du tube (pression) : mesure à la règle, $\Delta h = \frac{0.001}{2\sqrt{3}}$
- Diamètre du tube : mesure au pied à coulisse, $\Delta D = \frac{0.000001}{2\sqrt{3}}$
- Longueur du tube : mesure au mètre, $\Delta L = \frac{0.001}{2\sqrt{3}}$

Propagation des incertitudes : $\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{(\frac{\Delta a}{a})^2 + (\frac{\Delta h}{h})^2 + (4\frac{\Delta D}{D})^2}$

Discussion des hypothèses

- Stationnaire : il faut attendre que le tube réglant la pression dans le vase de Mariotte soit rempli d'air, et que le profil parabolique de l'écoulement s'établisse.
- Evaluation du nombre de Reynolds : $Re = \frac{4Q_V\rho}{\pi\eta D} \simeq 5.10^{-2}$

Applications Ecoulement du sang dans des vaisseaux micrométriques, écoulement de sève dans les plantes Microfluide (écoulements à l'échelle micro et nanométrique, tests sanguins, réactions chimiques encapsulées).

Qu'en est-il des écoulements très turbulents ? Pour évaluer des portances, on utilise une soufflerie.

3 Tube de Pitot (soufflerie)

Le tube de pitot est l'outil premier de la mesure de vitesse de gaz. Il se base sur le principe suivant :

On considère l'air comme un fluide parfait (sans viscosité) en écoulement stationnaire. Le long d'une ligne de courant, on a conservation de (Bernoulli) :

$$P + \frac{1}{2}\rho_{air}v^2 + \rho_{air}gz$$

On a alors $\Delta P = \frac{1}{2}\rho_{air}v^2$, et $\Delta P = \rho_{liq}g\Delta z$

En étalonant avec un anémomètre à fil chaud, on peut lire la vitesse !

$$v^2 = \frac{2\rho_{liq}gh}{\rho_{air}}$$

Et on va vérifier cette relation tout de suite.

Tube de pitot

✍ Quaranta I p. 364 et FLTCLD p. 454 ⏲ 10mn

Matériel : une soufflerie munie d'une sonde Pitot et un anémomètre à fil chaud

1. On actionne la soufflerie et pour différentes vitesses d'écoulement mesurées à l'anémomètre à fil chaud, on mesure la pression de la sonde Pitot à l'aide du manomètre à eau.

2. On doit vérifier que le niveau du liquide est bien à 0 dans le manomètre à eau. Si ce n'est pas le cas, il faut penser à remettre un peu d'alcool si on veut faire une mesure absolue de vitesse.

3. De plus, on fera attention à bien placer la sonde de l'anémomètre orthogonalement à l'écoulement.

4. Enfin, on pensera à mesurer la pression quand l'anémomètre à fil chaud n'est pas dans la soufflerie pour perturber le moins possible l'écoulement.

5. On trace alors v^2 en fonction h.

Choses à faire : Comparer avec le handbook, bilan des incertitudes (résolution = 3% de la mesure, fluctuations de l'anémomètre, résolution, ménisque).

On va maintenant appliquer cela à la mesure d'un coefficient de traînée en soufflerie.

4 Frottements fluides (soufflerie)

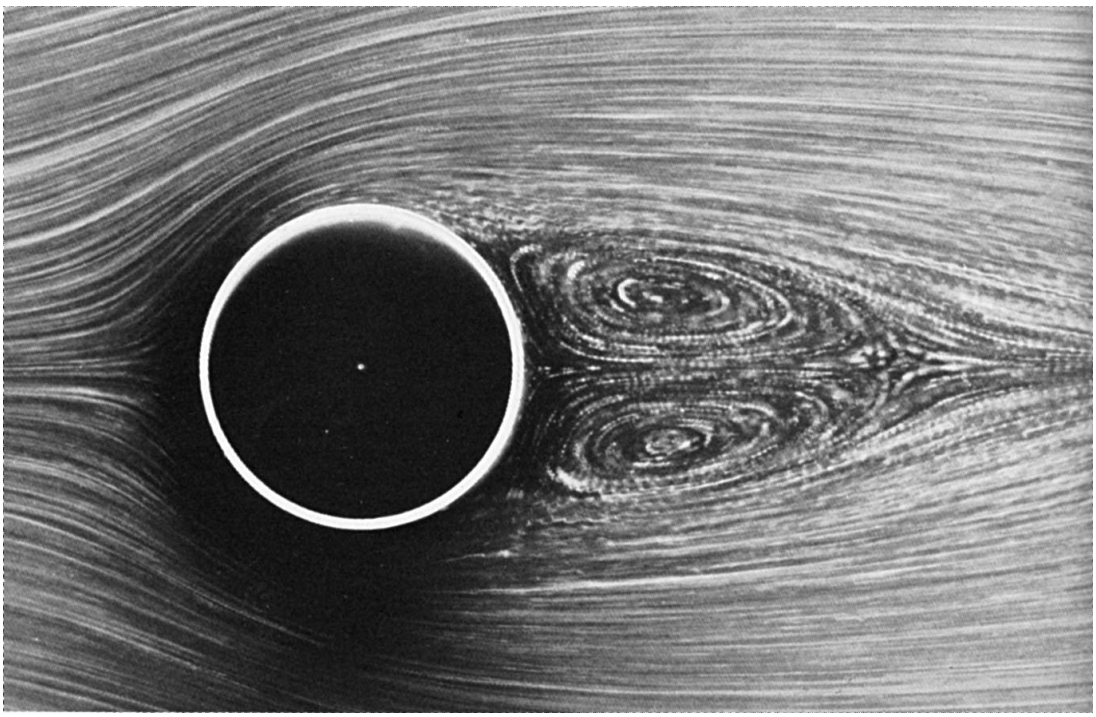


FIGURE 3.3 – Tiré de *An album of fluid motions*, Van Dyke

Lorsqu'un fluide rencontre un objet, sa vitesse au voisinage proche de la surface de l'objet va être modifiée par viscosité : la vitesse du fluide à l'interface est égale à la vitesse de l'objet. Si l'objet est immobile, alors le fluide à sa surface le sera également. Ces changements de vitesses vont induire un changement de pression et vont faire apparaître une force s'opposant au mouvement du fluide.

On veut connaître la relation entre la force appliquée sur l'objet et la vitesse du fluide par rapport à l'objet. Pour mesurer cette vitesse, on utilise un tube de Pitot (donc le principe repose sur Bernoulli, cf partie précédente).

On ne va s'intéresser qu'à la force de traînée qui est l'opposition du fluide au mouvement de l'objet, il faut donc la rendre la plus petite possible : plus elle est élevée, plus il faut fournir d'énergie pour maintenir sa vitesse. Dans les écoulements à haut nombre de Reynolds, la force de frottement est alors proportionnelle à la vitesse au carré, et non plus seulement à v comme à bas nombre de Reynolds.

Mise en équation Expression de la force de traînée trouvée par analyse dimensionnelle sachant qu'elle dépend du C_x, coefficient ayant une dépendance en Re différente selon si on est à haut où bas Reynolds.

$$F = \frac{1}{2}\rho_{fluide} S C_x v^2$$

On voit apparaître un coefficient sans dimension C_x qu'on appelle le coefficient de traînée et qui est indépendant de la taille de l'objet, il ne dépend que de la géométrie et du nombre de Reynolds. L'idée sous-jacente est que certaines formes seront plus appropriées que d'autres pour évoluer dans un écoulement.

Nous allons alors déterminer le C_x d'une sphère pour comprendre comment elle s'oppose à l'écoulement. On utilise pour cela la soufflerie, le tube de Pitot ayant été étalonné au préalable avec un anémomètre à fil chaud, en vérifiant le respect du théorème de Bernoulli.

Force de traînée

✍ Jolidon p454 ⏲ 5 min

On utilise la soufflerie et on mesure la vitesse du fluide avec le tube de Pitot (physique plus riche que c'est du fil chaud et perturbe moins l'écoulement). Il faut bien penser à mesurer la vitesse après avoir retiré l'objet d'étude dans la soufflerie (sa présence change pas mal l'écoulement, et le tube de Pitot est placé en aval de l'objet). En préparation on a mesuré la force pour plusieurs vitesses, on fait un autre point en live. On remonte au coefficient de traînée C_x.

MP 4

Capteurs de grandeurs mécaniques

Bibliographie

- ✍ *Les capteurs en instrumentation industrielle*, **Asch** ⟶ Tout ce que tu as rêvé de savoir sur les capteurs
- ✍ *BUP 820* ⟶ Accéléromètre
- ✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Tube de Pitot

Expériences

- La table des matières

1	**Accéléromètre**	**1046**
2	**Détecteur de niveau d'eau**	**1047**
3	**Tube de Pitot**	**1049**
4	**Jauge de contrainte**	**1050**
5	**Capteur de proximité**	**1052**
6	**Capteur d'angle**	**1052**

Introduction

Tout comme en philosophie commençons par définir quelques termes importants de ce montage. La grandeur physique objet de la mesure se nomme le **mesurande** que l'on note m et l'ensemble des opérations qui permettent de connaître la valeur de ce mesurande se nomme le **mesurage** ou la **mesure**. Le capteur est le dispositif qui soumis à l'action d'un mesurande présente une réponse de nature électrique (charge, tension, courant ou impédance) notée s.

Dans ce montage on ne s'intéressera qu'à des **mesurandes de nature mécanique**.

On a la relation

$$s = F(m)$$

L'application F relie la réponse s du capteur à l'excitation m est spécifique à chaque capteur. Il faut absolument la connaître pour accéder au mesurande. Pour cela, on réalise un **étalonnage** du capteur en prenant un ensemble de m connus et en mesurant les valeurs de s associées pour tracer la courbe d'étalonnage.

Pour des raisons pratiques, on cherche à faire des capteurs linéaires, *i.e.* tels que $\Delta s S \Delta m$ avec S la **sensibilité** du capteur.

On distingue deux types de capteurs : les **actifs** et les **passifs**. La distinction se fait dans la nature de s : si s est une tension ou un courant, le capteur est dit actif. Si s est une résistance, une impédance, ou une inductance, le capteur est dit passif.

Les capteurs doivent donc répondre à un certain cahier des charges à savoir obtenir une valeur de mesurande la plus proche possible de la réalité. Pour cela on définit plusieurs propriétés que nous tenterons de vérifier si possible au cours de ce montage :

1. Justesse : Détermine à quelle point le mesurande obtenu est proche de la réalité.
2. Fidélité : Si l'on répète plusieurs fois la mesure on obtient une valeur moyenne qui ne possède pas une dispersion trop importante.
3. Précision : On dit qu'un capteur est précis si il combine justesse et fidélité.
4. Temps de réponse : Temps moyen mis au capteur pour donner une valeur stable de s.
5. Linéarité : L'application F varie de manière linéaire en m.
6. Sensibilité : $S = \dfrac{\partial s}{\partial m}$, valeur donnée par le constructeur.

Voici les principales caractéristiques des capteurs que nous allons étudier.

1 Accéléromètre

✍ BUP 820 **Principe** Mesure de l'accélération. Plusieurs méthodes possibles. Ici,accéléromètre à peigne capacitif 3-axes, pour plus d'informations voir le BUP

Etalonnage Pas besoin ici mais on pourrait l'étalonner avec l'accéléromètre de référence.

☕

Réponse en fréquence

✍ ⏲

Passe-bande sur 50 Hz-800 Hz.
GBF
Pot vibrant P99.13/7
Ampli P47.7/1
Accéléromètre de référence P74.35 avec boîtier P96.62

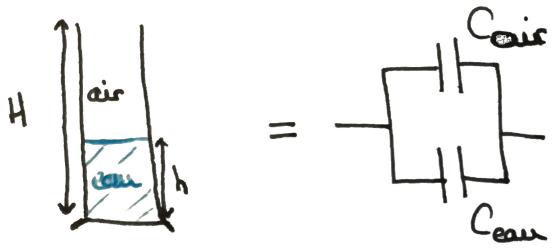
Accéléromètre à étudier P96.76/2 avec module Hameg
Oscilloscope, multimètres

Application Etude de la vibration d'une poutre ou d'une lame de scie (pas le temps de le faire en live mais permet de parler de la finesse/discrétion du capteur)

2 Détecteur de niveau d'eau

✍ Asch pp365-366

Permet de montrer le conditionnement, le choix des composants, leur influence sur les différentes caractéristiques du capteur. **Principe** On a ajouté de l'aluminium sur les paroi de l'éprouvette, on a donc un condensateur. **Hypothèses** Condensateur idéal = Plans infinis et résistance de fuite infini (isolant parfait, pas de transfert de charge à travers l'isolant). **Mise en équation** Un condensateur est caractérisé par sa capacité, notée C, qui dit quelle est la charge que le condensateur peut stocker sur ses armatures. Les relations en électromagnétisme nous donne : $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$.



Capacité : $C = C_{eau} + C_{air} = \frac{\epsilon_0 S}{e}(\epsilon_{eau} - \epsilon_{air})h + \frac{\epsilon_0 S}{e}\epsilon_{air} H$: relation affine entre la hauteur et la capacité

Grâce à ce dispositif, on peut transformer une position de l'interface entre l'eau et l'air en une capacité et donc on peut l'intégrer dans un circuit électrique pour relier la position de l'interface à une tension. C'est là que se pose le problème du *conditionnement*.
On réalise le circuit suivant : le condensateur fait partie d'un filtre passe-haut, alimenté par une tension sinusoïdale, puis suiveur (revoir ce que fait un suiveur), puis détecteur de crête (voir l'effet sur le signal).

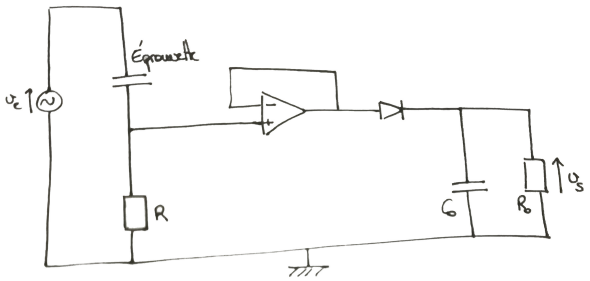


FIGURE 4.1 – Conditionnement du capteur à niveau d'eau

Justification choix des composants

- Pour les valeurs de R et de ω, un compromis est à trouver : il faut avoir $RC\omega \ll 1$ pour assurer la linéarité du conditionnement, mais $RC\omega$ doit être suffisant pour obtenir un signal d'amplitude significatif. On choisira R = 200kΩ, f = 1 kHz.

- On doit avoir $R_0C_0 >> T_{signal}$. Par contre, ce temps conditionne également le temps de réponse de l'ensemble de la chaîne. On prendra $R_0 = 100\text{k}\Omega$, $C_0 = 1\,\mu\text{F}$

Dans ces conditions, le signal de sortie sera une tension constante qui vaut :

$$V_s = RC\omega V_e \tag{4.1}$$

où V_e est l'amplitude du signal d'entrée.

Étalonnage du capteur de niveau d'eau

Boîte à décade pour R_0
Potentiomètre pour R
Alimenter avec une tension sinusoïdale v_e : 20V, 1kHz.
On mesure la capacité pour différentes hauteurs.

ATTENTION : Les problèmes les plus fréquents sont des faux contacts entre les fils de connexion et le papier aluminium.

Incertitudes

- Hauteur
- Tension

Linéarité On trace la capacité en fonction de la hauteur d'eau, et on obtient une droite.

On peut montrer que la linéarité dépend de la valeur de R.

Mettre un R grand mais pas trop : montrer le remplissage en mode Défilement sur l'oscilloscope, la montée est linéaire.

Mettre un R très grand : montrer le remplissage en mode Défilement sur l'oscilloscope, la montée est pas linéaire.

Remarque : On peut nous embêter avec le fait qu'on remplit pas avec un débit constant, il faudrait en effet verser avec un vase de Mariotte pour être plus rigoureux.

Sensibilité C'est la pente de la droite d'étalonnage.

Temps de réponse

Temps de réponse

Prendre un très grand R (on perd la linéarité mais on peut voir le démarrage plus facilement).

Prendre un petit C_0 : on observe le remplissage en mode Défilement, temps de réponse faible. Puis décharger en mettant une $R_0 = 1\,\Omega$.

Remettre R_0 à sa valeur initiale. Prendre un très grand $C_0 = 1.000 \times 10^3\,\mu\text{F}$

: on observe le remplissage en mode Défilement, temps de réponse élevé.

Domaine d'utilisation On est limité par la hauteur de l'éprouvette.

Application Diode qui s'allume/s'éteint quand on dépasse un certain niveau.
On compare la sortie du filtre avec un tension continue bien choisie, si l'amplitude de la sortie du filtre est en-dessous de la tension continue, la diode est éteinte, si elle la dépasse, la diode s'allume. Ajouter de l'eau dans l'éprouvette modifie sa capacité, et donc la fréquence de coupure du filtre, ainsi lorsqu'on dépasse un certain niveau, la diode s'allume.

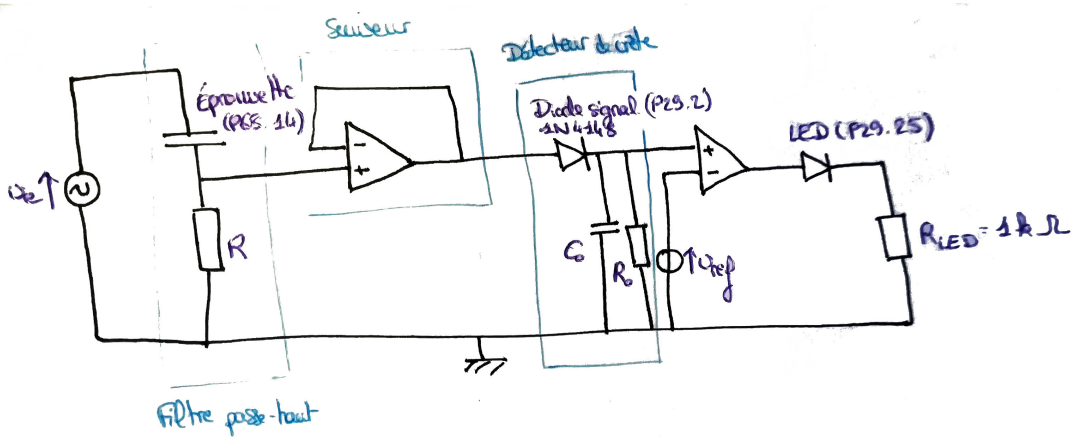


FIGURE 4.2 – Montage du détecteur à niveau d'eau

Détecteur de niveau d'eau
$v_{ref} = 500mV$

On a étudié une position qui est principalement statique. Cependant, en mécanique, on étudie souvent des objets en mouvement et notamment en déterminant leur vitesse. Nous allons voir comment mesurer les vitesse.

3 Tube de Pitot

Le tube de Pitot est l'outil premier de la mesure de vitesse de gaz. Il se base sur le principe suivant :

On considère l'air comme un fluide parfait (sans viscosité) en écoulement stationnaire. Le long d'une ligne de courant, on a conservation de (Bernoulli) :

$$P + \frac{1}{2}\rho_{air}v^2 + \rho_{air}gz$$

On a alors $\Delta P = \frac{1}{2}\rho_{air}v^2$, et $\Delta P = \rho_{liq}g\Delta z$

En étalonnant avec un anémomètre à fil chaud, on peut lire la vitesse !

$$v^2 = \frac{2\rho_{liq}gh}{\rho_{air}}$$

Et on va vérifier cette relation tout de suite.

☕

Tube de pitot

✍ Quaranta I p. 364 et FLTCLD p. 454 ⏲ 10mn

Matériel : une soufflerie munie d'une sonde Pitot et un anémomètre à fil chaud

1. On actionne la soufflerie et pour différentes vitesses d'écoulement mesurées à l'anémomètre à fil chaud, on mesure la pression de la sonde Pitot à l'aide du manomètre à eau.

2. On doit vérifier que le niveau du liquide est bien à 0 dans le manomètre à eau. Si ce n'est pas le cas, il faut penser à remettre un peu d'alcool si on veut faire une mesure absolue de vitesse.

3. De plus, on fera attention à bien placer la sonde de l'anémomètre orthogonalement à l'écoulement.

4. Enfin, on pensera à mesurer la pression quand l'anémomètre à fil chaud n'est pas dans la soufflerie pour perturber le moins possible l'écoulement.

5. On trace alors v^2 en fonction h.

Choses à faire : Comparer avec le handbook, bilan des incertitudes (résolution = 3% de la mesure, fluctuations de l'anémomètre, résolution, ménisque).

Linéarité On trace $\Delta P = \rho_{eau} g \Delta z$ en fonction de $v^2/2$. On obtient une droite de pente ρ_{air}.

Incertitudes :

- Vitesse : voir notice anémomètre
- Différence de pression : Ménisque et oscillations.

Sensibilité Avec la pente de la droite.

Domaine d'utilisation Limité par les graduations

Justesse

- Suivant l'inclinaison du tube contenant l'éthanol. Le capteur peut ne pas être très juste si mauvaise inclinaison.
- Ménisque : où doit se lire la mesure ?
- Ok si on mesure la vitesse d'un écoulement dans le référentiel du laboratoire par exemple, mais le tube de Pitot ne permet de mesurer que des vitesses relatives (voir comment c'est corrigé en vrai)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Tube_de_Pitot#D%C3%A9fauts_intrins%C3%A8ques pour discuter des sources d'erreur.

Temps de réponse On ne peut pas l'étudier ici car la turbine a aussi un temps de réponse.

Application Détermination de la vitesse des avions et des sous-marins.

4 Jauge de contrainte

Principe

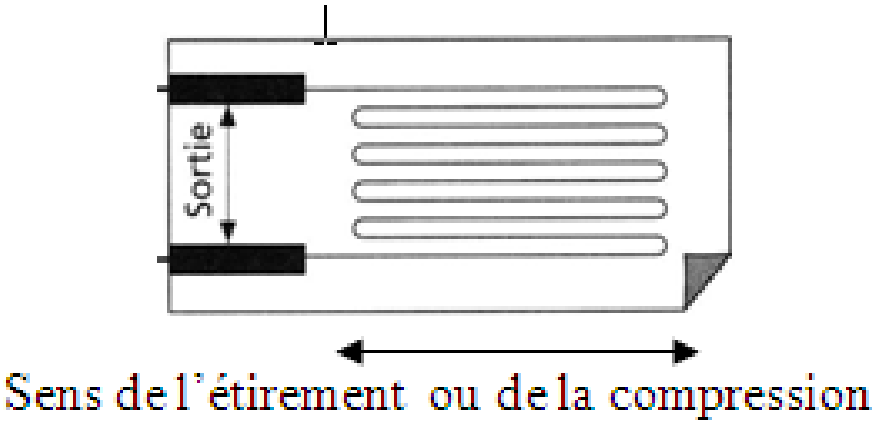


FIGURE 4.3 – Jauge de contrainte

Principe de fonctionnement de la jauge de contrainte ✍ Duffait

Il s'agit en fait de deux jauges de contraintes : un fil de cuivre qui fait plusieurs aller-retours et que l'on colle de chaque coté de la lame de scie. Lorsque celle ci est en flexion, chaque fil est allongé ou contracté.

Avec un pont de Wheatstone on peut alors mesurer la variation de leur résistance électrique, et donc en déduire l'allongement de la lame de scie. On a au labo deux boitiers déjà cablés avec le pont de Wheatstone et l'amplification nécessaire qui donnent directement la flèche en mm.

La formule liant la flèche d'une barre de dimensions L, l, h à la force exercée fait intervenir le module d'Young (cf. Landau ou la notice du boitier) :

$$e = \frac{mgL^3}{3EI}$$

avec $I = \frac{h^3 l}{12}$ le moment d'inertie. On obtient donc :

$$E = \frac{4gL^3}{h^3 l}\frac{m}{e}$$

Mesure d'un module d'Young avec une jauge de contrainte

✍ ⏲

Normalement, la jauge de contrainte sert à déterminer la contrainte, connaissant le module d'Young du matériau sur lequel elle est fixée. Ici, on va fixer la contrainte, et en déduire le module d'Young.

Mesurer la flèche e pour différentes masses m et effectuer la régression linéaire.

Discussion

La valeur annoncée sur la lame est de 200 GPa et on en est très loin. Ceci peut-être dû au fait que la lame a été déformé non élastiquement par les masses que nous avons mises (même si cela semble peu probable, puisque les points semblent bien être alignés). Peut-être que cette même lame a été déformée entre le moment de la mesure et l'expérience d'aujourd'hui.

5 Capteur de proximité

On souhaite mesurer la distance entre un obstacle métallique et le capteur. On réalise ce que l'on appelle un capteur de proximité. Ici on va s'intéresser à un capteur inductif donc encore un capteur passif. Il fonctionne via les courants de Foucault, et pour simplifier on peut voir le fonctionnement comme ceci :

On a d'un coté le capteur qui peut être comparé au primaire d'un transformateur et de l'autre coté le secondaire qui est la plaque métallique dont on veut connaître la distance au capteur. La théorie nous dit que l'on a une résistance équivalente et une inductance équivalente qui dépend du coefficient d'inductance mutuelle lui même dépendant de la distance. En mesurant la tension à l'une des deux bornes on obtient une tension qui dépend de la distance. Il ne reste plus qu'à étalonner le capteur.

6 Capteur d'angle

On va parler de potentiomètre. Un potar c'est une résistance variable, qui se règle en tournant un bouton. Chaque angle donne une valeur de résistance différente.

On a dans la collection deux pendules couplés, dont on mesure l'angle par potentiométrie.

Étalonnage d'un potentiomètre

Prendre les pendules couplés, et étalonner les potentiomètre qui les composent.

On obtient un rapport $R = k\theta$, où k est la sensibilité du capteur.

Linéarité On vérifie que c'est linéaire

Incertitudes Données par la régression, et la mesure d'angle, car la mesure de résistance est super précise.

justesse

Il suffit de la vérifier. Pour cela on trace les mouvements du pendule sur un oscilloscope, et on compare à la théorie.

Les erreurs peuvent venir du rapporteur d'étallonage, de la largeur du socle, et d'une mauvaise linéarité du potar.

Il est aussi possible (si on trouve un mauvais potar) d'avoir une hystéresys.

Temps de réponse

On peut essayer de le déterminer, mais le temps de réponse est suffisant pour tracer l'évolution d'un pendule, et c'est ce que l'on veut.

Domaine

On est modulo 2π, et la jonction du potentiomètre peut être problématique. Une façon de se débarasser de cela est de faire des engrenages pour décupler le mouvement.

MP 5

Mesures de température

Commentaires du jury

- **2017 :** Les caméras infrarouges entrent parfaitement dans le cadre de ce montage. Certains candidats font uneerreur sur la mesure de la résistance par la méthode 4 fils à cause d'une copie non réfléchie de certains ouvrages. La question de la référence de température dans un thermomètre à thermocouple commercial ne doit pas surprendre les candidats.
- **2014-2016 :** De nombreux candidats utilisent à bon escient les échelles secondaires de température (résistance de platine) et ont compris que la notion de point fixe est essentielle pour l'établissement d'une échelle thermométrique. En revanche, certains ignorent encore les mécanismes physiques mis en jeux dans les différents capteurs qu'ils utilisent et ne réfléchissent pas suffisamment à la précision requise lors de l'utilisation d'un thermomètre « de référence ».

Bibliographie

✍ *Asch*, **Les capteurs** ⟶ fonctionnement interne
✍ *BFR*, **Thermo** ⟶ ch2 p45-53
✍ *Quaranta II*, ⟶ Trop détaillé
✍ *Perez*, **Thermo**, + *BUP 827* ⟶ pyrometre p392
✍ *FLTCID*, ⟶ Kunt

Expériences

- tube de Kundt
- sonde à résistance de platine
- thermocouple/thermorésistance
- pyromètre optique

1 Les références de température . . . 1054
2 Le tube de Kundt . . . 1054
2.1 Principe . . . 1055
2.2 Expérience . . . 1055
3 Thermomètres secondaires . . . 1056
3.1 Sonde à résistance de platine . . . 1056
3.2 Thermistance et thermocouple . . . 1057
4 Pyromètre optique . . . 1058
5 Caméra infrarouge (qualitatif) . . . 1059

Introduction

La mesure de température est primordiale en physique car elle permet d'évaluer le sens dans lequel les échanges thermiques se font. Dans la vie de tous les jours elle est aussi un bon indicateur pour la santé d'un individu, ou l'état d'une machine comme un moteur.

Les thermomètres les plus simples sont les thermomètres à dilatation, au mercure ou plus récemment au galinstan, un alliage de gallium, indium et d'étain, ou à l'alcool coloré, mais il en existe toute une zoologie !

Définitions :

- On nomme thermomètre primaire un thermomètre qui se base directement sur une loi physique pour faire une mesure absolue de température.
- On nomme thermomètre secondaire un thermomètre qui doit être étalonné et mesure une température relative.

Commençons par parler de référence de température :

1 Les références de température

Pour obtenir des références absolues de température, on utilise généralement des températures de changement d'état, car on sait qu'elles arrivent, pour les composés purs, à une température fixée (à pression bien définie). Ainsi on définit le degrés centigrade à partir des températures de fusion et d'ébullition de l'eau à pression ambiante au niveau de la mer.

L'idée reste bien sûr de prendre des expériences reproductibles afin que l'échelle soit utilisable et définie proprement. L'anti-exemple d'une échelle bien définie est le Fahrenheit, basé sur "0 c'est la température la plus froide de l'hiver 1708-1709 dans la ville de Dantzig, et 100 c'est la température dans la bouche d'un homme en bonne santé (ou du sang d'un cheval, ça marche aussi)".

☕

Bain eau-glace

✍ 🕘 1mn

Matériel : Glace, eau, cristallisoir, 3-4 thermomètres à alcool.

Montrer un bain d'eau et de glace, avec dedans plusieurs thermomètres.

Eau-Glace à l'ambiante, c'est 0C par définition.

Les thermomètres doivent tous indiquer 0 à peu près, ce qui permet de dire que les thermomètre qui sont là sont relatifs, et ont été étalonnés il y a fort fort longtemps.

Passons à une mesure absolue de température

2 Le tube de Kundt

✍ FLTCLD

Correction 2017C'est un thermomètre primaire effectivement utilisé pour la définition de l'échelle de température et il est basé sur un principe physique simple. Son défaut est qu'il ne permet pas d'illustrer la notion de point fixe. Le but ici est donc plutôt de montrer comment un principe physique peut permettre une mesure de température

sans étalonnage. Il aurait alors été préférable de réaliser plusieurs mesures de célérité du son en préparation et de représenter $c^2 = f(T)$ afin de montrer la validité du modèle. Préférez utiliser des valeurs de M et de γ tirées d'un Handbook.

2.1 Principe

Le tube de Kundt est un exemple de *thermomètre primaire* car il se base sur une loi physique pour obtenir une température. Pour cela, il suffit de considérer l'air dans le tube de Kundt comme un GP et de supposer qu'on a des transformations isentropiques pour écrire

$$T = \frac{M}{\gamma R} c^2$$

Pour l'air, $M = 29$ g/mol et $\gamma = 1.4$ à 20°C.

2.2 Expérience

On veut mesurer c. Pour cela, on utilise le fait qu'on crée des ondes stationnaires dans le tube de Kundt. L'idée est donc de mesurer c en déterminant la longueur d'onde de l'onde stationnaire via le comptage des distances entre noeuds et ventres de pression.

Tube de Kundt

✍ Jolidon p258 ⏲

Matériel :

- tube de Kundt
- GBF (+ ampli ?)
- microphone
- oscilloscope
- thermocouple
- bain thermostaté
- casques anti-bruit

Thermaliser le tube de Kundt en préparation. On se place à une fréquence non encore explorée, et on place la tige de manière à repérer un maximum. Ensuite on joue sur la molette du GBF pour trouver l'amplitude maximale, ce qui signifie qu'on a trouvé une fréquence de résonance. Ensuite, se déplacer entre des maxima (c'est mieux qu'entre des minima pour la précision, à cause que nos ondes ne sont pas tout à fait planes), compter le nombre de DEMI-longueurs d'onde ainsi parcourues, mesurer la longueur parcourue sur la tige grâce aux petits traits de crayon préalablement tracés, et voilà. Tracer f en fonction de $\frac{1}{\lambda}$, la pente donne c la célérité du son, qui permet de remonter à T via la formule.

Remarque : le tube de Kundt agit comme un guide d'onde : il faut choisir une fréquence inférieure à 4 kHz environ pour avoir propagation. Il est préférable de repérer le maximum de noeuds et de ventres pour minimiser l'incertitude sur la mesure de la longueur d'onde : il faut alors choisir une petite longueur d'onde donc une grande fréquence.

Résultats expérimentaux : On trace la fréquence en fonction de l'inverse de la longueur d'onde, on obtient une droite de pente c. On détermine alors la température grâce à la première relation.

Incertitudes :

- Fréquence : 1 kHz ?
- Longueur d'onde : règle et imprécision sur la position de l'ordre de 1 cm

$$\left(\frac{u(T)}{T}\right)^2 = 4\left(\frac{u(c)}{c}\right)^2$$

Incertitudes très importantes. Thermocouple dans le tube qui donne la température dans le tube.

Pas besoin d'étalonnage, ce qui est pas mal mais peu pratique à mettre en place (on va pas s'amuser à faire propager une onde sonore et à la détecter quand on veut connaître la température du bain). Les thermomètres primaires permettent néanmoins de déterminer la température thermodynamique de points fixes, qui sont ensuite utiliser dans l'EIT-90. Une fois la température des points fixes connue, on peut alors étalonner les thermomètres secondaires tel que la sonde à résistance de platine.

3 Thermomètres secondaires

Comme déjà dit, un thermomètre secondaire ça s'étalonne, et c'est exactement ce que l'on va faire !

3.1 Sonde à résistance de platine

La sonde à résistance de platine fonctionne sur le principe de la variation de résistance du matériaux platine en fonction de la température. Pour l'étalonner on va utiliser des points fixes connus, à savoir la fusion de l'étain et du Gallium, la vaporisation et solidification de l'eau, et l'ébullition du diazote, le tout à l'ambiante.

La théorie

On se base sur le modèle de Drude Sommerfeld, et on modélise empiriquement la température par un modèle quadratique, $R = R_0(1 + bT + cT^2)$.

On a donc 3 paramètres à fixer, ce qui nécessite au minimum trois mesures pour étalonner.

Étalonnage de la résistance de platine

Matériel : Fluke en montage à 4 fils, résistance de platine, azote liquide (195.79°C), eau, bouilloire, alliages spécifiques, étain (231.9°C), chalumeau, creuset.

Mode opératoire :

Étalonner en préparation avec l'eau glacée et l'azote, et faire le point de l'étain devant le jury (ou permuter, osef).

Modéliser par un quadratique.

Mesurer la température de l'eau bouillante à l'aide de la modélisation.

Discussion sur les incertitudes et les détails de montage

- **4 fils :** La résistance des appareils de mesure n'est pas négligeable. La résistance de ce capteur est de l'ordre de la centaine d'ohms. Afin de ne pas parasiter la mesure de résistance, nous utiliserons donc un montage 4 fils qui permet de s'affranchir de la résistance de l'appareil de mesure : on imposera un courant par une première voie et on mesurera la tension au borne du capteur par la seconde voie. Ce montage est également appelé montage courte-dérivation. On se débarrasse aussi de la résistance des soudures.

- **Problèmes de mesures :** Le montage fait chauffer la résistance, donc on fausse un peu la mesure. Il faut se placer à très faible intensité, genre 10mA.

- **Incertitudes :** Horribles. On a une bonne précision sur la mesure de résistance, par contre on a une précision archinulle sur les points de fusion du métal (surfusion) et d'ébullition de l'eau (homogénéité).

Le thermomètre à résistance de platine est bien sympa, mais il coûte quand même assez cher (c'est du platine). On va donc le comparer à des thermomètres d'usage plus courant, comme les thermistances ou les thermocouples.

3.2 Thermistance et thermocouple

✍ Duffait p109, Thermomètre secondaire

Thermistance : sa résistance électrique dépend de la température. Par exemple, la thermistance CTN (coefficient de température négatif) est un oxyde métallique semi-conducteur dont la bande de conduction se peuple quand on augmente la température, il faut donc s'attendre à ce que la résistance diminue quand on chauffe, ce qui est effectivement le cas. En pratique, on cherche une régression de la forme :

$$R(T) = A \exp \frac{B}{T}$$

Thermocouple : constitué de deux soudure de deux types de métaux (par exemple le type T avec du cuivre et du constantan (=cuivre+nickel) ou le type K avec du nickel et du chrome) à des températures différentes, ce qui induit une ddp entre les deux soudures par effet Seebeck :

$$\mathrm{d}U = -\epsilon \mathrm{d}T$$

avec ϵ le coefficient Seebeck ou *pouvoir thermoélectrique* qui peut être positif ou négatif et est de l'ordre du μV/K.

On mesure la température par rapport à une température connue, comme par exemple un bain d'eau glacée. On a alors une réponse affine

$$U = (\epsilon_{\text{métal 1}} - \epsilon_{\text{métal 2}})(T - T_0) = aT + b$$

La température mesurée dépend donc de la nature des 2 conducteurs et de la température des jonctions. La jonction soumise à la température inconnue est appelée soudure chaude, celle maintenue à la température connue (souvent 0°C) est nommée soudure froide.

Remarque

On pourrait discuter leur réponse temporelle et la comparer à celle du thermomètre à dilatation, mais on ne va probablement pas le faire (on a essayé, et ce n'est pas simple, leur temps de réponse est beaucoup trop court par rapport au thermomètre à dilatation ou à la Pt100). C'est possible qualitativement, mais comme ça ne vaut rien, on ne va pas s'embêter à le faire.

Dans ce montage, on s'intéresse en revanche à leur sensibilité (ou leur coefficient de température) définie comme suit :

$$\alpha = \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial T}$$

Elle exprime, en $^\circ C^{-1}$ ou K^{-1}, les variations relatives de la grandeur mesurée (tension U pour le thermocouple, résistance R pour la thermistance) lorsqu'on change la température. On constate qu'à température ambiante elles sont comparables, mais qu'à de plus hautes températures la thermistance est la plus sensible.

Étalonnage de thermocouples de type T (préparation)

✍ Duffait p109 ⏲

Utiliser deux thermocouples de type T pour réaliser l'expérience présentée en figure 6.5 du Duffait. Dans ce cas, le métal 1 est du constantan (alliage de cuivre et de nickel). On utilisera le dispositif P102.12M. Mettre une des sondes dans un mélange eau-glace. Remplir d'eau un bécher, le disposer sur un agitateur chauffant P101.16. Y placer un barreau aimanté, la deuxième sonde, ainsi que le thermomètre à résistance de platine. Pour plusieurs températures entre 0°C et 60°C mesurées au moyen de la Pt100 P102.12 (et du ohmmètre 4-fils Fluke 8846A P69.35), mesurer la tension U correspondante au multimètre.

Tracer $U = f(T)$ et en déduire la sensibilité $s = \frac{\partial U}{\partial T}$ du thermocouple.

Incertitudes : • pour la température, cf notice de la sonde à résistance de platine ou les incertitudes obtenues précédemment • pour la tension, cf la notice du multimètre

Temps de réponse

✍ ⏲

On place à t=0 la sonde de platine et le thermocouple dans l'eau bouillante en partant de l'eau gelée. On fait l'acquisition sur Latis-Pro, on modélise par $U(t) = U_\infty(1 - exp(-\frac{t}{\tau}))$. On obtient les τ pour les deux capteurs et on voit que le thermocouple est plus rapide.

On peut faire cette manip à différentes températures en préparation et montrer que le temps de réponse dépend peu de la température.

4 Pyromètre optique

C'est un thermomètre primaire, puisqu'il mesure la densité spectrale du flux lumineux incident et en déduit la température. Nous pouvons l'utiliser pour vérifier la loi de Stefan : $\mathcal{P} = \sigma T^4$. On utilise pour cela une lampe Quartz-Iode dont on fait varier la puissance (on mesure ladite puissance $\mathcal{P} = UI$ avec un wattmètre), et on mesure la température avec le pyromètre. Évidemment, une fois que l'alignement est fait il faut fixer tout le montage pour éviter que le flux incident varie autrement que par variation de la puissance électrique en entrée. On trace en échelle log et on vérifie que la puissance varie comme $\mathcal{P}\alpha T^4$.

Vérification de la loi de puissance du pyromètre

✍ ⏲

Matériel : QI que l'on puisse mesurer avec un Wattmetre, pyromètre.

Fixer les deux appareil, et tracer P en fonction de T.

Pro tip : tracer en log.

Remarques Utiles

- **Ce que l'on vérifie :** On vérifie que la mesure est correcte et qu'on retrouve la loi de Stefan $\mathcal{P}\alpha T^4$, mais on ne vérifie pas la loi de Stefan, car c'est la base de la mesure.
- **Constante de Stefan :** On ne peut pas la mesurer ainsi, car on ne sait pas quelle quantité de flux arrive sur le pyromètre.
- **Choix de la QI :** Certaines lampes Quartz-Iode ont un support avec une molette pour faire varier l'intensité lumineuse. Il semblerait qu'il vaille mieux éviter de s'en servir et prendre un générateur de puissance qu'on branche directement sur la lampe. Cette astuce présente un double avantage : d'une part, on évite de faire claquer l'alimentation à l'intérieur du support (je dis ça au hasard, ça ne nous est évidemment pas arrivé) ; d'autre part, on peut fixer la QI à une potence, ce qui est infiniment plus pratique que de la laisser sur son socle.

5 Caméra infrarouge (qualitatif)

Le principe de la caméra IR repose sur le modèle du rayonnement de corps noir. Elle mesure le flux d'infrarouges émis par un corps et à l'aide de la loi de Stefan permet de remonter à la température de ce corps.

Caméra IR :

Comparer au pyromètre optique, mesurer des températures.

MP 6

Transitions de phase

- 2015, 2016 : Ce montage doit être quantitatif et il ne faut donc pas se limiter à une série d'expériences qualitatives mettant en évidence des transitions de phases dans différents systèmes. Il faut, lors des mesures, avoir bien réfléchi aux conditions permettant d'atteindre l'équilibre thermodynamique. Dans ce domaine, les mesures « à la volée » sont souvent très imprécises. Une grande attention doit être apportée à la rigueur des protocoles employés.

Bibliographie

✍ *Physique des transitions de phase*, **Papon, Leblond et Meijer**	Théorie (La LP15 devrait suffire pour résumer)
✍ *Dictionnaire de Physique expérimentale, Tome 2*, **Donnini et Quaranta**	Manips
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD**	Manips

http://ressources.agreg.phys.ens.fr/static/TP/serie3/TransitionsDePhase.pdf

Expériences

☕ La table des matières

1 Suivi calorimétrique de la fonte de la glace (transition d'ordre 1) . . . 1063
2 Vaporisation de l'azote (ordre 1) . . . 1064
2.1 Chaleur latente (QUANTITATIF ET FACILE) . . . 1064
2.2 Loi de Dulong et Petit . . . 1065
2.3 discussion . . . 1065
3 Isothermes du SF6 (transition d'ordre 1) et opalescence critique (transition d'ordre 2) 1066
3.1 Isothermes du SF6 . . . 1066
3.2 Opalescence critique . . . 1068
4 Température critique de la transition métal-supra (second ordre) . . . 1068
5 Transition allotropique du fer (Ordre 2) . . . 1069

Introduction

Les transition de phase sont partout, surtout dans ton... mais aujourd'hui on va en regarder quelques unes en particulier. Les transitions de phases on voit souvent ça comme un changement d'état, par exemple solide-liquide, mais ça peut être aussi des transitions d'une phase solide à une autre, comme ici...

Manip du clou

✍ 2mn

Matériel : p102.32/1.

Fixer la flamme d'un chalumeau sur un clou et l'observer dépasser sa température de curie. Transition ferro para à 770°C.

Phase : C'est un domaine de l'espace homogène d'un système. Dans une même phase, les paramètres thermo (P, T, V , et.c.) sont continus.

Transition de phase : passage macroscopique d'une phase à une autre induite par la variation d'un paramètre de contrôle (T, p).

Les transitions de phase les plus classiques sont les transitions liquide-vapeur et liquide-solide, mais il en existe aussi entre les formes allotropiques de la glace ou du fer, ainsi que des transitions nématique-isotrope pour les cristaux liquides.

Avec la diversité des transitions de phase (ferro-para, normal-supra, liquide-superfluide), des classifications ont été développées : La classification d'Ehrenfest (basée sur la continuité des fonctions d'états) et la classification de Landau (basée sur les paramètres d'ordre et sa continuité).

On distingue deux types de transition :

- Les transitions du premier ordre : (Ehrenfest) Les dérivées des potentiels thermodynamique sont discontinues (S,$H = \frac{\partial G/T}{\partial 1/T}$,$V = \frac{\partial G}{\partial P}$), on a une enthalpie de changement d'état L. (Landau) On a discontinuité du paramètre d'ordre (ρ par exemple). Exemple : Solidification, liquéfaction.

- Le transitions du second ordre : (Ehrenfest) Les dérivées premières sont continues, les dérivées secondes sont discontinues (C_p par exemple). (Landau) Le paramètre d'ordre est continu à la transition.

But de ce montage : Illustrer les transitions de phase
Montrer comment on trouve les grandeurs thermodynamiques

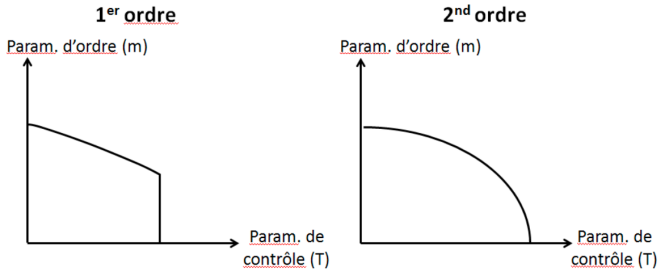


FIGURE 6.1 – Illustration rapide de l'ordre d'une transition de phase.

1 Suivi calorimétrique de la fonte de la glace (transition d'ordre 1)

Calcul de l'enthalpie de fusion

Mesure de la masse équivalente en eau

✍ ⏲

Matériel :

- vase Dewar P103.47
- de l'eau
- une bouilloire P101.28
- thermocouple de type K P102.12L avec son boitier P102.31
- thermocouple à un seul brin
- oscilloscope

Remplir un vase Dewar avec une masse m d'eau pesée précisément (prendre environ 300 g). Relever la température T_1 de l'eau avec un thermocouple de type K.

Faire chauffer de l'eau dans une bouilloir puis en verser une masse m_2 pesée précisément dans un bécher (environ 300 g). Relever sa température T_2 puis l'introduire dans le calorimètre et fermer ce dernier.

Suivre l'évolution de la température avec un thermocouple à un seul brin sur un oscilloscope en mode défilement et attendre que la température se stabilise. Relever la température finale T_f.

On a alors $0 = (m_1 + m_{eq,calorimetre})c_{H_2O}(T_f - T_1) + m_2 c_{H_2O}(T_f - T_2)$ donc

$$m_{eq,calorimetre} = \frac{m_2(T_2 - T_f) - m_1(T_1 - T_f)}{T_f - T_1}$$

Mesure de L_{f,H_2O} par calorimétrie

✍ Quaranta tome 2 p49 ⏲ 15-20 min

on utilise la méthode des mélanges pour mesurer l'enthalpie de fusion de l'eau :

- Dans un calorimètre de masse équivalente en eau $m_{eq,calorimetre}$ mesurée en préparation, on place une masse m_1 d'eau qu'on a préalablement pesée (environ 300 g).
- Après thermalisation, noter la température θ_1 de l'eau.
- Ajouter une masse m_g de glaçons secs à T_g =0°C (en équilibre avec de l'eau liquide par exemple).
- Suivre l'évolution de la température avec un oscilloscope pour savoir qualitativement quand elle est stabilisée.
- Mesurer la température finale T_f

On a $0 = (m_1 + m_{eq,calorimetre})c_{H_2O}(T_f - T_1) + m_g L_{f,H_2O} + m_g c_{H_2O}(T_f - T_2)$ donc

$$L_{f,H_2O} = c_{H_2O}\left(T_g - T_f + \frac{m_1 + m_{eq,calorimetre}}{m_g}(T_1 - T_f)\right)$$

On attend $L_{f,H_2O} = 334$ kJ/kg

Incertitude : on utilise la formule de propagation des incertitudes

$$u(L_f) = c_{H_2O}\sqrt{[u(m_1)^2 + u(m_{calo})^2]\left(\frac{T_1 - T_f}{m_g}\right)^2 + u(m_g)^2\left(\frac{T_g - T_f}{m_g}\right)^2\left(\frac{m_1 + m_{calo}}{m_g}\right)^2 + u(T)^2\left(1 + 2\left(\frac{m_1 + m_{calo}}{m_g}\right)^2\right)}$$

Remarques

- La principale source d'incertitude est la précision des relevés de température, on essaiera donc de réduire au maximum le rapport $\frac{m_1 + m_{calo}}{m_g}$, tout en gardant à l'esprit que cela ralentit l'obtention de l'équilibre thermique, et qu'il ne faut pas trop mettre de glace au risque d'obtenir un équilibre biphasé !
- Idéalement, il faudrait modéliser les pertes thermiques pendant cette expérience et pendant la mesure de m_{calo}, néanmoins on n'a pas forcément le temps. On pourra regarder à ce propos le Quaranta II à Calorimétrie.
- La valeur tabulée est rarement dans les barres d'erreur, surtout si on ne prend pas en compte les pertes thermiques. **On s'attend donc à sous-estimer L_f.**

2 Vaporisation de l'azote (ordre 1)

2.1 Chaleur latente (QUANTITATIF ET FACILE)

Données sur l'Azote liquide : 77,36 K (-195,79 °C), $L_v = 198.38kJ/kg$

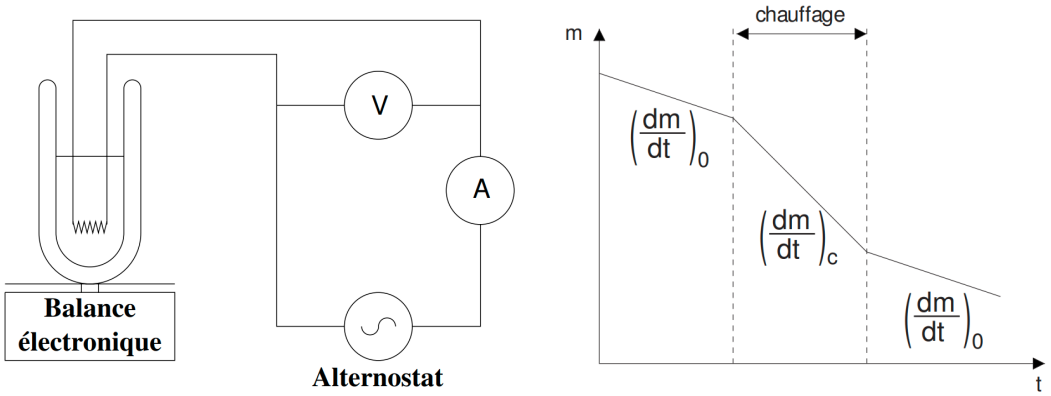


FIGURE 6.2 – Montage pour la chaleur latente de vaporisation de l'azote, et courbe de masse.

On mesure la variation de masse du vase en fonction du temps, ce qui permet de remonter à l'enthalpie de vaporisation. On fait une première mesure sans chauffe et une deuxième avec chauffe, pour comparer l'écart de pente.

$$P_F = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_0 L_v = \delta_0 L_v \qquad UI + P_F = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}|_{chauffe} L_v = \delta_1 Lv \tag{6.1}$$

Ainsi on remonte à L_v via

$$L_v = \frac{-UI}{\delta_1 - \delta_0} \tag{6.2}$$

Remonter à la chaleur latente

✍ ⏲

Matériel : Azote liquide, vase de Dwer, fil de résistance adapté, générateur, balance.

Expérience :

Plonger la résistance, faire le tare de la balance, et pointer la masse en fonction du temps.

On remonte aux deux pentes et on fait ce que l'on a à faire.

$$\Delta L_v = L_v \sqrt{(\Delta U/U)^2 + (\Delta I/I)^2 + (2\Delta\delta/(\delta_1+\delta_2))^2} \tag{6.3}$$

Et $\Delta\delta$ est donné par la régression.

2.2 Loi de Dulong et Petit

Retrouver la loi de Dulong et Petit

✍ ⏲

Matériel : Vase de Dwer, azote liquide, petite masse de **plomb**, balance.

Mettre une masse de plomb connue dans le vase et déterminer sa capacité calorifique. On doit trouver $C_p = 3R$ (molaire).

Pour se faire on calcule la masse d'azote évaporée Δm pour passer de l'ambiante à l'azote en ébullition, et le temps entre les deux prises de mesure Δt.

$$(\Delta m - \delta_0 \delta t) L_v = 3 \frac{m_{Pb}}{M_{Pb}} R$$

On peut en déduire une valeur de R. Attention, elle risque d'être sous-estimée, car Dulong et Petit...

L'incertitude est donnée par

$$\Delta R = R \sqrt{(\Delta m_{Pb}/m_{Pb})^2 + (\Delta L_v/L_v)^2 + \left(\frac{2\Delta m_{Pb} + \delta_0 \Delta t \sqrt{(\Delta\delta_0/\delta_0)^2 + (2\Delta t/\delta t)^2}}{\Delta m - \delta_0 \delta t} \right)^2} \tag{6.4}$$

2.3 discussion

La puissance de résistance peut varier car les fils résistent aussi. Les variations de pente dues à l'atmosphère sont prises en compte. On peut avoir une incertitude de masse.

Là où on va merder c'est que Dulong et Petit est mal vérifiée à basse température. D'ailleurs on ne l'applique plus du tout en dessous de la température de Debye, qui est de 105K pour le Plomb (mais de 470K pour le fer). Le plomb est vraiment super bas sur les échelles de températures de Debye.

3 Isothermes du SF6 (transition d'ordre 1) et opalescence critique (transition d'ordre 2)

3.1 Isothermes du SF6

3.1.1 Montage expérimental

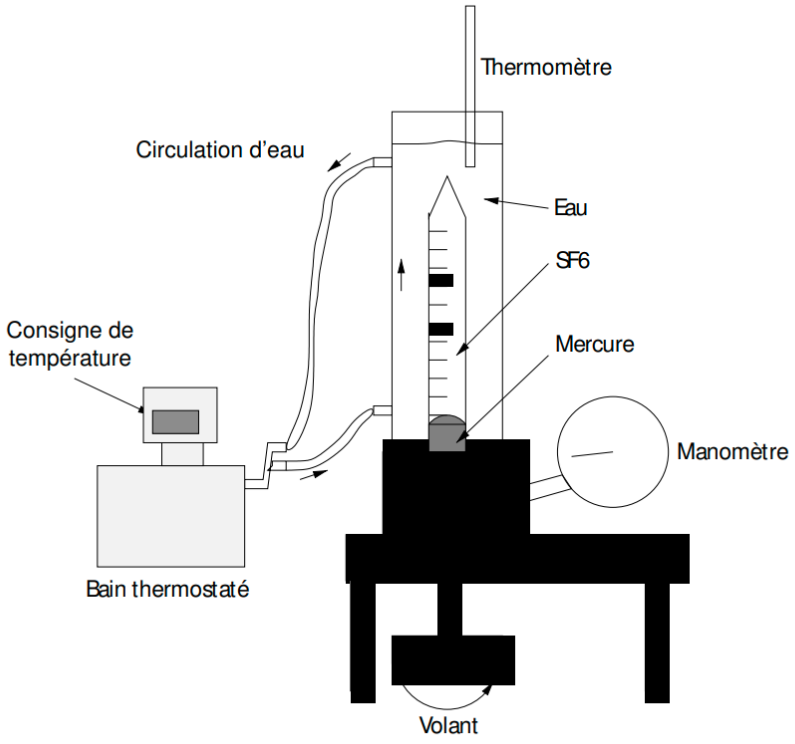


Figure 6.3 – Dispositf expérimental

On mesure le volume de SF6 en relevant la position du ménisque du mercure sous le SF6, par rapport aux graduations en mL de l'éprouvette.

La pression imposée est lue en bar sur un manomètre incorporé. La pression maximale à ne pas dépasser est de 50 bars. L'éprouvette est elle-même contenue dans une contre-cuve en plexiglas, à travers laquelle on fait passer une circulation d'eau provenant d'un bain thermostaté. Par mesure de sécurité, il est indispensable, lorsqu'on comprime le SF6, que l'éprouvette soit entièrement recouverte d'eau.

On impose la température par le bain thermostaté, dont la pompe permet de faire circuler l'eau à la température désirée dans la contre-cuve (consulter la notice). Il faut néanmoins un certain temps pour que l'éprouvette soit à la température de l'eau. La température est lue en degrés Celsius sur le bain thermostaté et est contrôlée sur un thermomètre au sommet de la contre-cuve. On fixe une température de consigne au bain thermostaté, puis on fait varier progressivement la pression et on relève le volume de SF6.

La mise à l'équilibre est assez lente, compter environ 1 minute par degré d'écart. Essayer de faire des variations de faible amplitude et progressives.

À partir d'une pression assez élevée, on observe la formation d'une interface liquide-vapeur, qui correspond à un palier de pression, c'est-à-dire une variation de volume à pression constante, par modification des proportions respectives de liquide et de gaz. On réitère l'opération pour plusieurs températures comprises entre la température ambiante et 50°C.

On peut ainsi tracer les isothermes $P = f(V)$ du SF6 dans le diagramme de Clapeyron et caractériser une transition de phase du premier ordre. Les courbes de rosée et d'ébullition peuvent aussi être tracées.

En utilisant la formule de Clapeyron, on peut déduire la chaleur latente de vaporisation du SF6. Dans la zone gazeuse, on peut montrer l'écart au gaz parfait, en traçant PV en fonction de $1/V$. Enfin, pour des températures au-dessus de 4°C, on se trouve dans la zone de fluide supercritique et on peut essayer de contourner le point critique.

L'observation du point critique semble par contre plus aisée dans la cellule scellée, à la densité critique (voir partie suivante).

3.1.2 Expérience

Tracé d'isothermes du SF6

✍ FLTCD p370 ⏲

TRAVAILLER EN DIMINUANT LE VOLUME.

On prépare au moins 2 isothermes, par exemple à 23°C et à 27°C. Fixer une température avec le bain thermostaté. Relever la pression et le volume. A l'aide du volant, diminuer le volume et mesurer la pression. Refaire l'opération pour tracer point par point l'isotherme, en prenant soin de prendre des points avant et après le changement d'état.

Raisonnablement, on prend une quinzaine de point jusqu'à 0.3 ou 0.2 mL.

Tracé d'une isotherme du SF6

✍ FLTCD p370 ⏲

Faire la même chose qu'en prépartion pour l'isotherme à 25°C.

3.1.3 Détermination de la chaleur latente du SF6

• **Calcul de la quantité de matière n de SF6**

Le développement du Viriel donne

$$PV = nRT\left(1 + B_2(T)\frac{n}{V} + B_3(T)\frac{n^2}{V^2} + \cdots\right)$$

Tracer $PV = f(1/V)$ en utilisant une isotherme (par exemple celle à 25°C). Le développement du Viriel à l'ordre 1 indique qu'on doit obtenir une droite.

L'ordonnée à l'origine vaut n. On attend $n = 1.74$ mmol.

• **Chaleur latente de vaporisation** On connaît n, on peut obtenir $L(T)$. La relation de Clapeyron donne

$$\frac{\mathrm{d}P_{sat}}{\mathrm{d}T} = \frac{L(T)}{T[v_g(T) - v_l(T)]}$$

avec $v_g(T) = \dfrac{V_g(T)}{n}$ où $V_g(T)$ est le volume pour lequel on observe la première goutte de liquide, et $v_l(T) = \dfrac{V_l(T)}{n}$ où $V_l(T)$ est le volume pour lequel on observe la dernière bulle de gaz disparaît.

On approxime la dérivée par :

$$\frac{\mathrm{d}P_{sat}}{\mathrm{d}T}(25°C) = \frac{P_sat(27°C) - P_sat(23°C)}{27°C - 23°C} = \frac{\Delta P}{\Delta T}$$

Alors

$$L(25°C) = 25°C\,(v_g(25°C) - v_l(25°C))\,\frac{\Delta P}{\Delta T}$$

On en déduit $L(25°C$. On attend $L_{tab}(25°C) = 8.99$ kJ/mol.

Incertitudes :

• Beaucoup, partout mais ce n'est pas forcément la plus grosse source d'erreur.

• Sinon, pour P et V c'est des lectures d'indicateurs, Pour T : placer un thermomètre et ne pas suivre l'indicateur.

Vérification des hypothèses et discussion du modèle :

• On peut ne pas avoir de palier net, dû à la présence d'impuretés dans le SF6, ce qui augmente la variance de 1 (mélange binaire). Cela peut être du mercure ou de l'air.

• On le fait toujours dans le même sens pour éviter les problèmes d'hystéresis

3.2 Opalescence critique

Le point critique du SF6 est obtenu pour $T_c = 45$°C et $P_c = 38$ bars.

On appelle *opalescence critique* le phénomène qui arrive lorsque le fluide passe à l'état super-critique. La compressibilité diverge alors, ce qui permet aux variations d'indice n d'être très grandes, et donc à la lumière d'être beaucoup plus diffusé. Sa diffusion de la lumière, proportionelle à $1/\lambda^4$, et un éclairage de la cellule en lumière blanche donne en sortie une lumière jaunâtre.

C'est d'ordre 2 car on se place pile au niveau du point critique.

Opalescence critique

✍ ⏲

Matériel : Lentille, sèche cheveux, lampe blanche

Faire l'image de la lampe, passer par chauffage au régime super-critique, et observer la lumière devenir jaune.

À la redescente de température, un brouillard se forme, la lumière va devenir gris-marron. C'est l'absorption du brouillard, donc pas de l'opalescence critique, mais c'est joli.

4 Température critique de la transition métal-supra (second ordre)

✍ Quaranta II **Principe**

Les matériaux supraconducteurs subissent une transition de phase à basse température où leur résistance tombe à zéro, et on a l'effet Meissner.

On montre l'effet Meissner avec un autre supraconducteur.

Résultats expérimentaux

Mesure de la température de transition

✍ Quaranta II p83 ⏲

On ne fait pas exactement comme décrit. Il y a une plaque faite. Pour mesurer la résistance du supra, on l'alimente en intensité et on mesure la ddp de ce dernier via un montage 4 fils. Pour le thermocouple il suffit de mesurer sa ddp et d'utiliser l'étalonnage fournit pour remonter à T. On envoie tout sur Latis pro. Remarque : utiliser deux nanomultimètres Keithley 2182A si possible.

Le premier signal nous permet de voir l'instant où la résistance ne vaut plus zéro. Le deuxième nous permet de remonter à la température. ($T_{th} =$ K)

Incertitudes :

- Attention au thermocouple, on peut être à des températures où son étalonnage n'est plus valable.
- Signaux faible donc amplification donc amplification du bruit aussi !

Ici le paramètre d'ordre est la fonction d'onde $\Psi(r)$, il est à noter que l'on a un supra "haute température", le processus n'est pas simplement la création de paires de Cooper.
On a vu une transition du second ordre, l'opalescence critique en est une autre (plus simple à comprendre en Ehrenfest). Il y a aussi la transition ferro-para où le paramètre d'ordre est l'aimantation M.

5 Transition allotropique du fer (Ordre 2)

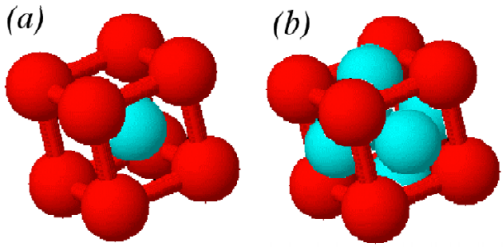


FIGURE 6.4 – Alotropik.

Montage avec le fil de fer que l'on chauffe et qui à la remontée change de phase allotropique.

MP 7

Instruments d'optique

Commentaires du jury

- 2015, 2016, 2017 : Les candidats doivent connaître et comprendre les conditions d'obtention d'images de bonne qualité. L'étude des limitations et de défauts des instruments présentés est attendue. Les candidats doivent comprendre quelles sont les conditions pour que la mesure du grossissement puisse se ramener à la mesure d'un grandissement lorsqu'ils présentent des dispositifs afocaux. Enfin, dans certains cas, les candidats peuvent envisager l'utilisation de lunette de visée afin d'améliorer leurs mesures [2017 : de distance].
- 2013, 2014 : Les candidats doivent connaître et comprendre les conditions d'obtention d'images de bonne qualité. L'étude des limitations et de défauts des instruments présentés est attendue. De bons exposés ont été observés sur ce sujet.
  Jusqu'en 2013, le titre était : Instrument(s) d'optique.
- 2012 : Les candidats doivent connaître et comprendre les conditions d'obtention d'images de bonne qualité. Il ne faut pas appliquer sans discernement un protocole trouvé dans un livre. Les conditions de stigmatisme (approché ou rigoureux), les conditions de Gauss, les aberrations géométriques et les aberrations chromatiques ... doivent être connues. Les manipulations proposées doivent illustrer réellement le fonctionnement de l'instrument choisi.
- 2011, 2010 : Les candidats doivent connaître et comprendre les conditions d'obtention d'images de bonne qualité. Il n'est pas suffisant d'appliquer aveuglément un protocole trouvé dans un livre.
  Jusqu'en 2010, le titre était : Instruments d'optique.
- 2009 : Les candidats doivent connaître et comprendre les conditions d'obtention d'images de bonne qualité. Il n'est pas suffisant d'appliquer aveuglément un protocole trouvé dans un livre
- 1997 : Il est intéressant d'illustrer l'effet du verre de champ d'un instrument d'optique en expliquant son intérêt. On peut aussi souligner comment les qualités du récepteur jouent sur la résolution spatiale d'un instrument objectif.

Bibliographie

- ✍ *Optique*, **Houard** — Théorie et critère de Rayleigh
- ✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD** — Manips
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** — Manips
- ✍ *Expériences de physique au CAPES*, **Duffait** — Manips
- ✍ *Les instruments d'optique* **Detwiller**

Expériences

- La table des matières

1 La lentille 1073
1.1 Auto-collimation 1073
1.2 Méthode de Bessel 1074
1.3 Aberrations 1075
1.4 Limite de résolution en diffraction d'une lentille convergente 1075
2 L'appareil photo du paparazzi 1077
2.1 Influence du nombre d'ouverture sur l'intensité lumineuse 1077
2.2 Influence sur la profondeur de champ 1078
3 La lunette astronomique 1079
3.1 Principe 1079
3.2 Grossissement 1079
3.3 Diaphragmes de champ et d'ouverture 1080
4 Microscope 1081
4.1 Principe 1081
4.2 Puissance du microscope 1082

Optique donc on ferme les fenêtres

Introduction

Des lunettes de vues aux caméras les plus sophistiquées, on parle d'instrument d'optique. Ces instruments sont utiles en laboratoire, et nous allons aujourd'hui décrire deux (trois ?) systèmes optiques.

But du montage : Montrer comment les instruments sont pensées pour accomplir leur objectif.

1 La lentille

Commençons par définir ce qu'est une lentille, base de l'optique.

La lentille obéit, dans l'approximation paraxiale, aux lois de l'optique géométrique. Nous allons dans ce montage déterminer la focale d'une lentille convergente.

Ce que l'on appelle *focale*, c'est la distance entre le point ou des rayons venant de l'infini se croisent et le centre optique de la lentille (*centre optique* = point de non déviation).

1.1 Auto-collimation

On exploite ici le principe de retour inverse de la lumière. Si on a une image nette d'un objet sur lui même, c'est que la distance est la bonne !

Mesurer la focale d'une lentille par autocollimation

✍ FLTCD p76 ⏲ 2mn

Matériel : : Lampe QI + Filtre Anti calorique + dépoli (pour éclairement homogène) + lentille de focale courte (15cm ?)

L'objet sera une lettre, on pourra ainsi discuter d'aberrations, et de diaphragme. (attention, vérifier que la taille de l'image ne bouge pas avec la distance du miroir...)

Plage de netteté into mesure à couleurs différentes ?

Ca donne un ordre de granceur pour la méthode de bessel, où on veut un banc au moins 4 fois plus grand que la focale. (Silbermann si L=4f')

1.2 Méthode de Bessel

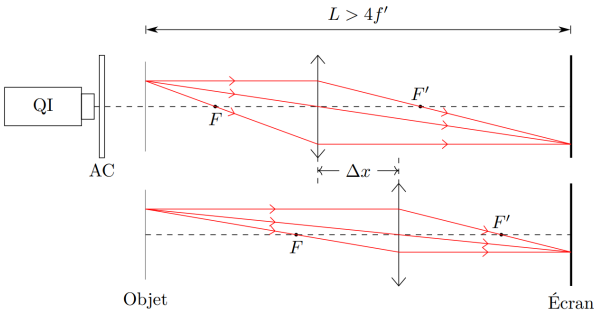


FIGURE 7.1 – La méthode de Bessel.

La méthode de Bessel est plus précise, elle se base sur le fait qu'une lentille a deux points nets quand on fait une image finie d'un objet fini.

On nomme L la distance entre l'objet et l'écran. On intercalle une lentille de courte focale f et on nomme x la distance lentille-objet. On a alors deux x qui assurent la netteté de l'image.

On sait que

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} \text{ (algébrique)} \tag{7.1}$$

Ici cela devient :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L-x} \tag{7.2}$$

Et on obtient une équation de degrés 2 en x qui donne deux positions :

$$x^2 - Lx + f'L = 0 \tag{7.3}$$

Et finalement

$$f' = \frac{L^2 - (\Delta x)^2}{4L} \tag{7.4}$$

Méthode de Bessel pour mesurer une focale

✍ Ma tête ⏲ 3mn

Tu sais quoi faire.

Incertitudes :

Une mesure de longueur : au mm. Sans compter que le centre optique est dur à repérer, donc pluôt aux 3mm.

La méthode de Bessel : formule simplifiée (incertitude sur-évaluée)

$$\Delta f' = f'\sqrt{5}\left(\frac{\Delta L}{\sqrt{L^2 - \Delta x^2}}\right)$$

1.3 Aberrations

Les aberrations chromatiques :

Du fait de la dépendance en λ de l'indice de réfraction, il y a une dépendance en λ de la focale, et dans la limite du domaine visible, on peut l'interpoler par une droite.

On a $f' = ((n-1)(2/R))^{-1}$, donc grosso modo

$$\Delta n = (n-1)\frac{\Delta f'}{f'}$$

Focale (λ)

✍ Ma tête ⏲ 5mn

Tracer la droite et évaluer la dispersion du verre

évaluer la dispersion du verre.

Les aberrations géométriques :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Aberration_géométrique

1.4 Limite de résolution en diffraction d'une lentille convergente

✍ Houard chap 7, Sextant p135, Duffait p109

Nous proposons ici de visualiser la limite de résolution d'une lentille due à la diffraction.

On peut qualitativement comprendre qu'un point a pour image à travers une lentille convergente une petite tâche. Si deux objets sont trop proches l'un de l'autre, leurs images respectives risquent de se chevaucher. Si elles se chevauchent trop, on ne voit qu'une seule image et non deux : on n'arrive plus à résoudre les deux objets.

Rappelons-nous le **critère de Rayleigh** : deux points points sont discernables s'ils sont vus sous une différence d'angle supérieure à $1.22\frac{\lambda}{D}$ avec λ la longueur d'onde du faisceau lumineux (monochromatique) et D le diamètre de l'ouverture circulaire du système optique.

Afin de mettre en lumière la limite de résolution en diffraction d'une lentille mince, nous allons observer l'image de bifentes d'Young à travers une lentille convergente.

Ensuite, nous montrons à l'aide d'un diaphragme, que nous fermons petit à petit, que la résolution des bifentes est de moins en moins bien marquée. Il arrive un moment où les bifentes ne sont plus discernables : nous avons atteint la limite de résolution en diffraction de la lentille pour ce jeu de fentes.

Limite de résolution en diffraction d'une lentille convergente (qualitatif)

✍ ⏲

Matériel :

- Un banc d'optique
- QI avec une alimentation à intensité variable (P6.9) + AC

• Trois bifentes (B46) avec leur porte-diapo

• Diaphragme à bords propres (P114/7)

• Lentille achromatique $f' = 100$ mm (P111.1/3) (l'achromat très épaisse)

• Caliens avec ses deux filtres (P17.10/1)

• Oscilloscope 4 voies avec deux câbles BNC pour Caliens

• Des pieds pour banc, avec un pied réglable sur deux dimensions pour Caliens

Expérience :

Le but de la manipulation est ici d'arriver à résoudre les fentes sur l'ordre d'un pixel de Caliens afin de montrer ensuite la limite de résolution en diffraction de la lentille mince. Pour cela, on réalise le montage précédent.

Quelques remarques d'ordre pratique pour mettre en oeuvre cette expérience :

• Tout d'abord, il faut une grande distance entre les bifentes et la lentille : environ 10 fois la distance entre la lentille et Caliens. Ainsi, nous aurons un grandissement de l'ordre de 0.1, ce qui donnera un écart entre les fentes de l'ordre de quelques pixels !

• Pourquoi avoir choisi cette diapo particulièrement ? Parce qu'elle est composée de trois bifentes particulières. Celles du milieu et d'un côté sont de même écartement mais de largeurs différentes, alors que celles du milieu et de l'autre côté sont de même largeur mais d'écartement différent ! Cela permet de montrer par la suite la différence d'intensité sur Caliens et la limite de résolution plus fine pour les fentes avec le plus grand écartement.

• Autre point important : ne pas brancher Caliens à un ordinateur mais directement sur un oscilloscope. Il faut alors mettre le trigger sur celui de Caliens. Là encore petite subtilité, il faut que le trigger fonctionne une fois sur deux... Il faut pour cela utiliser l'option de trigger *Neme front rafale* et mettre une inaction d'au moins 8 ms (supérieur au temps d'acquisition d'une image). Cette option n'est pas présente sur les vieux oscillo, d'où l'utilisation d'un 4 voies. Autre avantage : vous pouvez projeter l'oscilloscope afin que tout le monde puisse voir ce qu'il se passe sans être collé à l'oscillo !

Exploitation :

Une fois que le montage est bien réglé, on peut montrer que l'on arrive à voir les pixels de Caliens. Les fentes ne sont larges que de quelques pixels, voire d'un seul.

Retrouvons au passage l'ordre de grandeur de la taille p d'un pixel. On compte le nombre N de pixels séparant deux fentes et en lisant sur la diapo l'écartement d des fentes, on en déduit : $Np = \gamma d$ avec γ le grandissement ici considéré (de l'ordre de 0.1).

Ainsi, en connaissant d on retrouve l'ordre de grandeur p d'un pixel ! On peut la comparer à la valeur donnée dans la doc de Caliens : $p = 15$ μm.

On introduit maintenant un diaphragme entièrement ouvert avant la lentille. On le ferme peu à peu ce qui diminue forcément l'intensité lumineuse.

Pour quand même avoir un signal avec Caliens, on augmente en même temps l'intensité de la lampe (d'où l'alimentation à intensité variable). On joue à ce petit jeu jusqu'à ce que le contraste de résolution des bifentes commence à diminuer.

A partir d'une certaine taille d'ouverture du diaphragme, les deux premiers couples de fentes ne sont plus résolus alors que le troisième l'est toujours. C'est le critère de Rayleigh au niveau des pixels. Le troisième couple étant d'un écartement plus large que les deux premiers, il faut continuer à fermer le diaphragme pour ne plus le résoudre.

2 L'appareil photo du paparazzi

✍ Sextant p34

Un appareil photo est une combinaison intelligente de diaphragmes et de lentilles qui font une image dont le compromis netteté-luminosité doit être optimal.

On peut l'assimiler à un lentille convergente de focale 13.5cm, munie d'un diaphragme d'ouverture de diamètre d contrôlable. Dans la vraie vie on utilise le terme de *nombre d'ouverture* $N = f/d$, qui diminue avec l'ouverture du diaphragme.

Matériel : QI parallèle dépolie, objet quelconque (la tête de Fourier ?) à distance p de l'objectif, Objectif d'appareil photo en plus plat plus près.

2.1 Influence du nombre d'ouverture sur l'intensité lumineuse

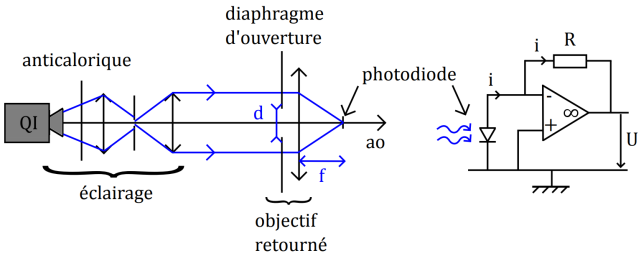


FIGURE 7.2 – Montage pour l'influence de N sur l'intensité ("retourné"=plus plat plus près).

On a $I \propto S \propto d^2 \propto N^{-2}$

Influence de N sur I

✍ 🕒 10mn

Matériel

Pour réaliser ces mesures de luminosité, on va placer une photodiode en A'. Cette photodiode relie la masse à la branche + d'un A.O. Elle est passante de l'A.O. vers la masse. La branche + de l'A.O. est elle directement reliée à la masse. Une résistance R de l'ordre de 1 MΩ constitue la rétroaction négative. Ainsi, la tension aux bornes de la photodiode est toujours nulle, ce qui implique qu'elle est traversée par un courant négatif -i relativement faible, mais dont la valeur absolue i croît avec le flux lumineux reçu. Ce même courant traverse la résistance R et on a donc une tension positive $U = V_- - V_S = Ri$ proportionnelle au flux lumineux reçu, donc à la grandeur recherchée I. On doit donc trouver une loi en $U \propto 1/N^2$.

• Pour diminuer au maximum le bruit sur cette mesure, on peut envelopper le faisceau lumineux sortant de l'objectif d'un tube noir, jusqu'à la photodiode ;

• On prend les valeurs de U, au voltmètre, pour les différentes valeurs de N possibles pour l'objectif étudié (il y en a un nombre fini réglables) ;

• on trace U en fonction de $1/N^2$.

2.2 Influence sur la profondeur de champ

✍ Sextant p35

On voit que si on prend des points autour de A, ils vont faire des images toutes flous toutes moches autour !

Définition : En photographie on nomme *profondeur de champs* la distance Δ de part et d'autre du sujet telle qu'un objet ponctuel fasse une image de $\epsilon = 30\mu$m sur l'écran. Pourquoi 30 ? parce que c'est le grain d'un argentique. On prendra 10 fois cette valeur parce que c'est compliqué à mesurer...

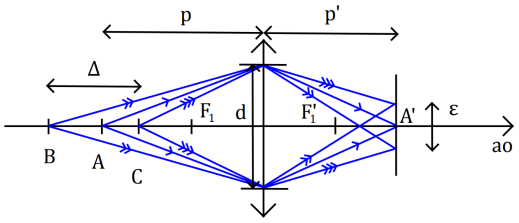


FIGURE 7.3 – Définition de la profondeur de champ pour l'objectif photographique.

Qualitativement, on voit bien que si le nombre d'ouverture N est plus grand (donc le diamètre d du diagramme d'ouverture plus petit), les points B et C créeront des faisceaux strictement inclus dans le cercle de diamètre ϵ. Ceci signifie qu'on aura de nouveaux points B' et C' plus éloignés de A et correspondant à un diamètre ϵ sur l'écran, et donc que Δ a augmenté. Conclusion : on s'attend à ce que Δ croisse avec N

$$\Delta = \frac{2p}{\frac{fp'}{N\epsilon p} - \frac{N\epsilon p}{fp'}} \tag{7.5}$$

Ainsi en travaillant à p et p' fixés, et en choisissant ϵ, la profondeur de champs ne dépend que de N. Avec nos ordres de grandeur, *i.e.* f=135mm, p=10cm, p'=1m, N<10 et ϵ=100μm on a $\frac{fp'}{n\epsilon p} \gg 1$, d'où

$$\Delta = \frac{2N\epsilon p^2}{fp'} \tag{7.6}$$

On cherche une jolie droite !!

Influence de N sur Δ

✍ Sextant ⏲ 10mn

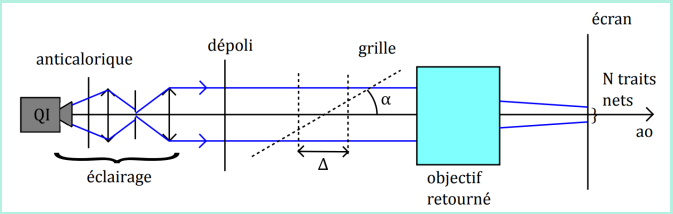


FIGURE 7.4 – Montage.

Pour mettre en évidence la croissance de Δ avec N et, pourquoi pas, mesurer quelques valeurs de Δ, on utilise comme objet une grille à 2 traits/mm. Il est important d'éclairer la grille en lumière parallèle et de plus forte intensité possible avec la QI, car on place devant la grille un dépoli, pour assurer que chaque trait de la grille envoie

des rayons incohérents entre eux dans tout l'objectif.

- Au début, la grille est normale à l'axe optique, qu'elle coupe en un point A dont on fait l'image sur l'écran par l'objectif retourné ;
- Maintenant, on fait pivoter la grille autour de ce point A, de sorte qu'une partie de la grille se trouve hors de la profondeur de champ. L'image de la grille sur l'écran apparaît donc comme une grille nette pour un certain nombre de traits horizontaux (ceux suffisamment proches de l'axe optique pour que l'inclinaison les maintienne dans la profondeur de champ) entourés en haut et en bas par des traits horizontaux plus flous (que l'inclinaison a poussé hors de la profondeur de champ) ;
- En faisant augmenter N, on réduit le diaphragme donc la luminosité, mais on peut voir que le nombre de traits vus nettement augmente ; les zones floues en haut et en bas de l'image régressent ;
- En comptant pour un N donné le nombre n de traits vus nettement, on peut remonter à la profondeur de champ Δ, à condition de connaître l'inclinaison α que fait la grille par rapport à l'axe optique, et le nombre linéique a de traits de la grille. En effet, on a que $\Delta = N \cos \dfrac{\alpha}{a}$.
- Le critère « traits vus nettement » détermine notre critère de sélection ϵ. On considère qu'un trait n'est plus vu net à partir du moment où son image sur l'écran se retrouve réduite d'environ un quart. Sachant que l'image sur l'écran d'un trait fait environ 1 mm d'épaisseur, on peut donc considérer que notre critère de sélection correspond à $\epsilon = 0.25$ mm.
- On peut donc calculer Δ par la formule 7.6 et comparer à la valeur mesurée en comptant les traits nets. On doit obtenir sensiblement les mêmes valeurs.

3 La lunette astronomique

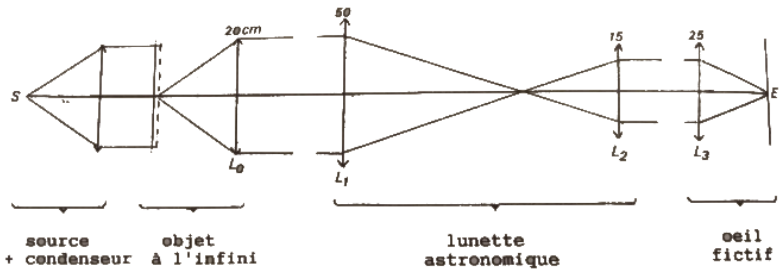


FIGURE 7.5 – Le montage de la lunette astronomique.

3.1 Principe

La lunette est un système afocal, *i.e.* qu'elle fait une image à l'infini d'un objet à l'infini. Elle est composé de 2 lentilles : la première est *l'objectif* et la seconde est *l'oculaire*.

L'image intermédiaire d'un objet à l'infini se forme dans le plan focal image de la première lentille, qui est confondu avec le plan focal objet de la seconde lentille.

C'est pratique parce que ça évite à l'utilisateur d'accommoder donc de se fatiguer l'oeil.

3.2 Grossissement

Quand on pointe une lunette astronomique sur la Lune, on la voit plus grosse qu'elle apparaît à l'oeil nu. En effet, la lunette grossit les objets observés par rapport à leur taille apparente à l'oeil nu.

On définit alors son *grossissement* par :

$$G_{th} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$$

☕

Calcul de G_{th}

✍ ⏲

On peut le faire en préparation ou pendant le montage. Mesurer les focales f_1 et f_2 par autocollimation ou par la méthode de Bessel (cf Sanz, p303).

On rappelle la formule pour la méthode de Bessel : $L^2 - (\Delta x)^2 = 4f'L$

☕

Montage de la lunette

✍ Bellier ⏲

On monte la lunette (en live ou en préparation, au choix suivant les autres choix indiqués, son aisance etc... de toute manière il faut monter soit la lunette soit le microscope devant le jury). Donc sur le banc :

• Objet à l'infini : QI (avec alim' réglable c'est top car pas besoin de mettre un dépoli contre l'objet (on peut vite se retrouver avec des images très lumineuses)) + AC + achromat $f_1 = 300$ mm, on met l'objet au foyer par autocollimation.

• Oeil : avec un achromat $f_{oeil} = 300$ mm et un écran (le tout sur banc) : on fait l'image nette sur l'écran (celui ci est alors au foyer de L_{oeil}).

• Lunette : on place l'objectif, achromat $f_{obj} = 300$ mm et l'oculaire, achromat $f_{oc} = 100$ mm de manière à retrouver une image nette sur l'écran (mais agrandie)

☕

Mesure du grossissement G_{exp}

✍ Bellier ⏲

On mesure la taille de l'image $A'B'$ de l'objet sur l'écran avec et sans lunette, puis on fait le rapport avec sa taille réelle AB pour trouver $G_{exp} = \dfrac{A'B'}{AB}$.

Justifier les incertitudes et comparer à G_{th}

Incertitudes

$$u(G) = G\sqrt{\left(\frac{u(A'B')}{A'B'}\right)^2 + \left(\frac{u(AB)}{AB}\right)^2}$$

Autre manip : Faire varier f_2 et mesurer à chaque fois G. Tracer $G = f(1/f_2)$ et vérifier que c'est une droite de pente f_1

3.3 Diaphragmes de champ et d'ouverture

Le **diaphragme d'ouverture** est le diaphragme qui limite la luminosité de l'image. Pour la lunette, c'est la monture de l'objectif.

Lorsqu'on s'intéresse à une lunette, on remarque que les rayons émergeant de l'oculaire convergent puis divergent. On appelle **cercle oculaire** l'endroit où la section du faisceau lumineux est la plus petite, la plus brillante et la plus nette. Ce cercle oculaire est en fait l'image de la monture de l'objectif par l'oculaire. On place l'oeil au cercle oculaire pour avoir une observation optimale de l'image.

Le **diaphragme de champ** est le diaphragme qui limite le champ de vision de l'image. Pour la lunette, c'est la monture de l'oculaire

Il donc faut prendre en compte les diamètres des lentilles lorsqu'on veut construire une lunette car leur rôle est très loin d'être secondaire.

Diaphragmes de champ et d'ouverture

✍ Bellier

On place un diaphragme juste après l'objectif : c'est le **diaphragme d'ouverture** car en le fermant, la luminosité de l'image diminue mais pas sa taille.

On place un diaphragme juste avant l'oculaire, c'est le **diaphragme de champ** car en le fermant on diminue la portion d'objet que l'on peut voir sans toutefois changer la luminosité de l'image. On observe un brouillage sur les bords, c'est le champ de contour. En positionnant le diaphragme dans le plan de l'image intermédiaire, on ne brouille plus les bords.

Si on place une troisième lentille entre l'objectif et l'oculaire, on voit qu'on augmente le champ de vision de la lunette. La lentille est alors appelée **verre de champ**.

Verre de champ

✍ Bellier

On replace le diaphragme de champ contre l'oculaire et on met une lentille convergente au niveau de l'image intermédiaire : le champ observable augmente !

On a vu comment voir des objets petits parce qu'il sont loins. On va maintenant voir comment voir des objets petits mais qui sont proches.

4 Microscope

4.1 Principe

Comme pour la lunette, on modélise un microscope par l'utilisation de deux lentilles convergentes. Cependant ce n'est pas un système afocal. La seul condition à respecter est de faire en sorte que l'image de l'objet par l'objectif soit dans le plan focal objet de l'oculaire (pour avoir une image finale à l'infini et donc éviter l'accomodation).

On note Δ la *longueur optique* qui correspond à la distance entre le poitn focal image de l'objectif F_1' et le point focal objet de l'oculaire F_2

Contrairement à la lunette, l'objet n'est plus observé à l'infini mais à une distance proche du foyer objet F_1 de l'objectif. L'objectif donne alors une image A_1B_1 de l'objet AB. On a dit que cette image devait être dans le plan focal objet de l'oculaire donc $A_1 = F_2$. L'image finale $A'B'$ est à l'infini.

4.2 Puissance du microscope

La *puissance* d'un microscope est le rapport de l'angle sous lequel on voit l'objet en sortie de microscope et de la taille AB de l'objet :

$$\mathcal{P} = \frac{\alpha}{AB} = \frac{\alpha}{A_1B_1}\frac{A_1B_1}{AB} = \mathcal{P}_{oculaire}\gamma_{objectif}$$

où $\mathcal{P}_{oculaire}$ est la puissance de l'oculaire et $\gamma_{objectif}$ est le grandissement de l'objectif.

On a $\gamma_{objectif} = \dfrac{\Delta}{f_1'}$ et $\mathcal{P} = \dfrac{\gamma_{obj}}{f_2'}$ donc

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta}{f_1'f_2'}$$

Mesure de la puissance

✍ Bellier

Matériel :

- Un banc d'optique (on va faire des mesures)
- QI + AC
- Un objet F modifié avec du papier noir afin de ne pas avoir une image énorme
- Lentille achromatique $f' = 100$ mm (P111.1/3) (l'achromat très épaisse)
- Deux autres lentilles de focales de 200 et 300 mm avec des diamètres assez gros (et achromats si possible)
- Une tige, deux noix, une lentille de focale 300 mm avec un écran
- Des pieds pour banc

Le but est ici de vérifier expérimentalement ces trois relations.

Eclairer l'objet et placer la lentille achromatique de focale $f_1' = 300$ mm de telle sorte à ce que l'objet soit dans le plan focal objet de la lentille (par autocollimation).

Placer la lentille/oeil de focale $f_3' = 300$ mm de telle sorte à prendre toute la lumière (cercle oculaire) et placer l'écran afin d'avoir une image nette. Fixer avec une tige et deux noix la lentille/oeil et l'écran afin de ne plus pouvoir les bouger. Ainsi, l'oeil est réglé à l'infini.

Reculer un petit peu la lentille achromatique sur le banc (l'éloigner de l'objet) afin de se placer dans les conditions d'un microscope, elle devient alors l'objectif du microscope. Placer alors la lentille/oculaire de focale $f_2' = 200$ mm entre L_3 et L_1 et chercher la position qui donne une image nette à travers l'oeil sur l'écran.

On peut mesurer la taille de l'image de l'écran $A'B'$.

Placer un écran sur le banc et chercher la position de l'image intermédiaire et mesurer sa taille A_1B_1 et relever sa position O_1A_1.

Mesurer également O_1A et grâce aux relations précédemment citées et à des mesures en préparation pour différentes longueurs O_1A, tracer $\mathcal{P} = f(\Delta)$ et $\gamma_{obj} = g(\Delta)$ et vérifier qu'on obtient bien des droites de pente $p = \dfrac{1}{f_1'f_2'}$ et $p' = \dfrac{1}{f_1'}$

MP 8

Interférences lumineuses

Commentaires du jury

- **2015-2016 :** Il n'est pas raisonnable d'envisager d'apprendre à régler un interféromètre de Michelson devant le jury. Par ailleurs, les connaissances théoriques sur les cohérences spatiale et temporelle doivent être reliées aux observations expérimentales. Enfin, il est judicieux de réaliser des expériences simples avant de se lancer dans des expériences sur les notions de cohérence.
- **2013-2014 :** Certains candidats ne font pas le rapport entre leurs connaissances théoriques sur les cohérences spatiale et temporelle, et leurs observations expérimentales. Il en résulte alors des montages mal réglés ou mal utilisés. Pourtant ce montage peut fournir des résultats quantitatifs précis. Il est en particulier intéressant de se placer dans des cas limites où la cohérence spatiale ou la cohérence temporelle peuvent être étudiées indépendamment.
- **1994 :** Trop de candidats ne maîtrisent pas les notions de localisation ou de non-localisation des interférences lumineuses. Quant à la définition correcte de la cohérence spatiale et de l'échelle ou de l'aire de cohérence, aucun candidat ayant pourtant choisi un sujet s'y rapportant (interférences, diffraction, laser) n'a pu la donner. Certains connaissent pourtant la définition des fonctions de corrélation et le théorème de Wiener-Kintchine. Dans tous les cas, le jury attend des approches quantitatives sur la mesure de la cohérence temporelle et de la cohérence spatiale d'une vibration lumineuse.

Bibliographie

✍ **FLTCLD**
✍ **Sextant**
✍ *Expériences d'optique*, **Duffait** Fentes d'Young

1 Division du front d'onde : les fentes d'Young 1084
1.1 Cohérence temporelle 1084
1.2 Cohérence spatiale 1085
2 Division d'amplitude 1085
2.1 Réglage de l'interféromètre de Michelson 1086
2.2 Cohérence spatiale et localisation des interférences 1086
2.3 Polarisation (accordéon) 1086
2.4 Doublet du sodium 1086
2.5 Mesure d'une lame de verre 1087
3 Ondes multiples 1087
3.1 Réseau 1087
3.2 Fabry Pérot 1088

Introduction

Que se passe-t-il lorsqu'on croise deux faisceaux de lumière ? Lorsqu'on fait l'expérience avec deux lampes de poche par exemples, on voit qu'il ne se passe rien à part l'addition des intensités lumineuses, donc on peut avoir envie de dire que ce sera la cas tout le temps. Pourtant, même si c'est vrai dans la pluaprt des cas, il existe des conditions spécifiques dans lesquelles on n'a pas addition des intensités mais quelque chose de plus complexe : les interférences.

Pour observer des interférences, les conditions particulières sont les suivantes : les ondes lumineuses doivent parvenir du même point source, être de la même longueur d'onde et ne doivent pas être polarisées orthogonalement les unes par rapport aux autres.

Mise en évidence du phénomène

✍ Imagination débordante ⏲ 1mn

Fentes d'Young, ou iridescence d'une bulle.

Dans ce montage, il est important à chaque fois de dire pourquoi on a des interférences en parlant de la cohérence, du champ d'interférence, de la localisation des franges.

1 Division du front d'onde : les fentes d'Young

Le premier dispositif étudié sera les fentes d'Young, préférées au trous d'Young car le montage sera plus lumineux.

Il fut réalisé pour la première fois en 1801 par Thomas Young et permis de mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière. Il se présente sous la forme suivante : une fente source de taille réglable éclairée par une source lumineuse (lampe QI, lampe spectrale, ...) éclaire deux fentes fines et proches (préciser la largeur et l'écart entre les deux fentes). On observe alors la figure d'interférences sur un écran, ici le dispositif Caliens.

QI+antical $\longrightarrow$ Fente source $\longrightarrow$ Bifentes d'Young $\longrightarrow$ Filtre interférentiel $\longrightarrow$ Caliens

On observe des interférences car les 2 ondes qui interfèrent sont chacune issues d'une des fentes d'Young et sont donc toutes les deux issues de la même source, ce qui fait qu'elles sont **cohérente**. La figure d'interférence est localisée à l'infini.

1.1 Cohérence temporelle

✍ Duffait

La lumière blanche est une source ayant un spectre étendu décomposable en raies élémentaires quasi-monochromatiques et incohérentes entre elles. Chaque longueur d'onde donne sa propre figure d'interférence, qui consiste en une série de franges rectilignes (c'est un sinus multiplié par un sinus cardinal).

En lumière monochromatique, l'interfrange vaut $i = \dfrac{\lambda D}{a}$ où D est la distance entre les fentes et l'écran et a est la distance entre les 2 fentes.

Mesure de l'interfrange fonction de λ

✍ Duffait p55, Houard p197-198 ⏲

Matériel :

- une lampe QI munie d'un filtre anticalorique
- un filtre interférentiel
- une fente réglable proche de la lampe (P115.1/3)
- une bifente disposée à environ 15 cm de la fente source (P116.1/2)

On observe la figure d'interférence avec le dispositif Caliens.

On veut vérifier la formule de l'interfrange. Pour cela, on la mesure pour différentes valeurs de λ grâce au filtre interférentiel.

On trace i en fonction de λ pour obtenir la pente $p = \frac{D}{a}$. On en déduit $a = \frac{D}{p}$

Incertitudes :

On utilise la formule de propagation des incertitudes : $u(a) = a\sqrt{\left(\frac{p}{p}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2}$

1.2 Cohérence spatiale

On veut maintenant s'intéresser à la cohérence spatiale. On se place donc à une longueur d'onde fixée grâce au filtre interférentiel (on prend le filtre qui laisse passer le maximum de lumière, le rouge fonctionne bien). On remarque que lorsqu'on augmente la largeur de la fente source, le contraste diminue pour s'annuler et enfin réaugmenter.

Première annulation de contraste

✍ Houard p209-210 ⏲ 5 min

Elargir progressivement la fente source et observer la diminution du contraste.

Pour différentes largeur b de la fente source, déterminer le contraste $\mathcal{C} = \frac{Imax - Imin}{Imax + Imin}$. tracer $\mathcal{C} = f(l)$.

Remarque

Cette manip permet de montrer que la fente source n'est pas là en tant qu'objet diffractant mais en tant que diaphragme pour faire une source de petite dimension à partir de la QI. Si on avait utilisé des trous d'Young, il aurait fallu utiliser un trou-source. Ici, on a des fents donc on peut se permettre d'étendre la source dans la direction des fentes (cf le livre de J.M. Brebet).

2 Division d'amplitude

Ne PAS prendre le Michelson 3!!

Dans un dispositif à division d'amplitude, l'étendue spatiale de la source localise les figures d'interférences. Présenter le montage de Michelson. Le régler avant de le présenter.

On observe des interférences parce qu'on divise l'onde en deux ondes via un miroir semi réfléchissant, qui se réflechissent et se re-rencontrent avec une différence de chemin optique. Ainsi la phase de l'un a plus tourné que l'autre. C'est la même source, donc c'est **cohérent**, et on observe les interférences là où les deux ondes se croisent.

2.1 Réglage de l'interféromètre de Michelson

Régler un Michelson

✍ ⏲ ∞

Voir le poly du lycée Bart.

C'est peut-être à faire en live, au moins la dernière étape.

Réglage du Michelson

✍ Sextant ⏲ 5mn

Montrer les anneaux observés avec une lampe spectrale. Recentrer la figure d'interférences et faire diverger les anneaux (chariottage) jusqu'à la teinte plate de la lampe. Passer en lumière blanche (filtre AC et condenseur pour faire converger sur les miroirs). En chariottant un tout petit peu devraient apparaître les teintes de Newton, synonymes d'un réglage au contact optique.

Les anneaux sont à l'infini !

2.2 Cohérence spatiale et localisation des interférences

Localisation des franges et cohérence spatiale

✍ ⏲ 3mn

La source est pour l'instant de lumière blanche, étendue. On place l'écran à environ 1 m du Michelson. On place une lentille de projection entre le Michelson et l'écran. On fait bouger la lentille de projection pour montrer que les franges sont localisées. Ceci est dû au fait que la source n'est pas cohérente spatialement. Ajouter un diaphragme après le condenseur pour créer une source ponctuelle. Déplacer l'écran : les interférences ne sont plus localisées. On voit donc qu'un interféromètre à division d'amplitude permet de s'affranchir du problème de cohérence spatiale, avec pour inconvénient la localisation des interférences.

2.3 Polarisation (accordéon)

Polarisation des deux bras

✍ ⏲

Si on polarise différemment les deux bras, on observe une disparition de la figure d'interférences.

2.4 Doublet du sodium

Si on allonge un peu trop une branche du Michelson, on fait face à la cohérence temporelle de la source. C'est ce que l'on va voir avec le doublet du sodium.

Mesure de l'écart du doublet du sodium

✍ Houard p230 ⏲ 5mn

Matériel : Lampe à Sodium, antical, michelson motorisé (le 2 ?), lentille de focale 1m, filtre interférentiel (optionnel ?), photodiode (thorlabs), acquisition latis.

Deux raies très proches, $\Delta\lambda = \frac{{\lambda_0}^2}{L_c}$ où L_c est la longueur entre deux brouillages.

d'un brouillage à l'autre, la longueur d'onde λ_1 la plus courte du doublet a subi une variation de différence de marche égale à $(p+1)\lambda_1$ alors que la longueur d'onde λ_2 la plus grande a subi une variation de différence de marche de $p\lambda_2$. Sur le trajet optique du Michelson cela correspond à $2\Delta x$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\Delta x_1}$$

Où Δx_1 est le chariotage entre deux minima de contraste.

On peut préparer le chariotage motorisé avant et l'exploité pendant l'oral.

Doublet du sodium live

✍ ⏲

On le fait à la main, et on trouve deux minimas de contraste, on mesure et on a une idée grossière de $\Delta\lambda$

Valeur tabulée : 589,5924 et 588,9950 nm, soit ∼0,401nm.

2.5 Mesure d'une lame de verre

Mesure par interféromètre MAIS NON INTERFEROMETRIQUE

✍ ⏲

Intercaller une lame de verre au contact optique et charioter pour retrouver les franges. La distance chariotée correspond à l'épaisseur de la lame.

Version interférométrique : ajouter un laser HeNe de λ connu, et compter les franges qui passent (300 environ), LA on est interférométrique.

3 Ondes multiples

3.1 Réseau

Have fun

3.2 Fabry Pérot

Irridescence et interféromètre de Fabry Pérot (ondes multiples)

On peut observer des iridescences dans une bulle... Compliqué d'en faire quelque chose de propre. Peut-être à tester ?

Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons mis en évidence les différentes conditions d'obtention des interférences à l'aide de deux dispositifs interférentiels.

Pour les fentes, la cohérence spatiale imposait un compromis entre la luminosité et le contraste mais cela a pu être résolu par l'utilisation d'interféromètre à division d'amplitude.

MP 9

Diffraction des ondes lumineuses

Commentaires du jury

- **2010-2017 :** . Une condition nécessaire est de connaître la différence entre diffraction de Fraunhofer et diffraction de Fresnel, et on doit s'assurer que les conditions de Fraunhofer sont remplies si l'on utilise les formules associées.
- **2014-2017 :** La détermination de la taille d'un fil ou d'un cheveu est d'autant plus intéressante que la valeur mesurée peut être comparée à une valeur tabulée ou mesurée par une technique complémentaire.
- **2017 :** Le jury voit trop souvent des expériences de diffraction par des fentes, généralement mal calibrées, servir à mesurer des longueurs d'ondes de lasers !
- **2014-2016 :** Attention aux expériences de filtrage spatial qui sont souvent mal comprises.
- **2010-2013 :** Rappelons que les phénomènes de diffraction peuvent s'observer avec d'autres sources lumineuses que des lasers, dont le « speckle » peut parfois nuire à la précision des mesures.
- **2008 :** Dans toute expérience d'optique, les figures sont de bien meilleure qualité quand les appareils sont convenablement alignés.
- **2000 :** La diffraction est certes un phénomène gênant, mais pas uniquement : le principe de fonctionnement d'instruments comme les réseaux optiques repose sur son existence. L'optique diffractive prend de plus en plus d'importance industrielle.

Bibliographie

✍ **FLTCLD**
✍ **Sextant** En complément

Expériences

☕ La table des matières

1 Le phénomène de diffraction 1090
1.1 Première approche 1090
1.2 Vérification théorique 1090
1.3 Application 1091
2 Les régimes de diffraction : fresnel et Fraunhofer 1091
2.1 Mise en évidence 1091
2.2 Nombre de Fresnel 1092
2.3 Zones de Fresnel 1092
3 Optique de Fourier 1093
3.1 Transformée de Fourier 1093
3.2 Filtrage 1094

Introduction

En optique géométrique, la lumière va en ligne droite, et le rayon lumineux est assimilé à un pinceau de lumière de largeur infiniment fine devant tous les obstacles qu'il rencontre. Cependant, la théorie ondulatoire de la lumière met en évidence une limite de cette approche, qui se manifeste lorsque qu'une onde lumineuse rencontre des obstacles de dimension de l'ordre de grandeur de sa longueur d'onde. Il se passe alors un phénomène particulier que l'on connaît bien maintenant, la diffraction

1 Le phénomène de diffraction

La première mise en évidence du phénomène de diffraction c'est celle de la fente.

1.1 Première approche

Mise en évidence du phénomène

✍ FLTCLD ⏲ 2mn

Un laser, une fente réglable, et c'est partiii ! wiiiiii !

HeNe : $\lambda = 632.8$nm

Il existe un lien quantitatif que nous allons vérifier tout de suite !

1.2 Vérification théorique

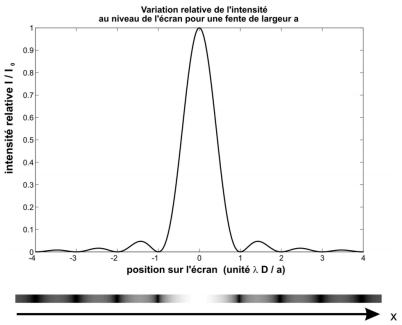


FIGURE 9.1 – Forme de l'intensité sur l'écran.

Par le calcul on a $I \propto \text{sinc}^2 \frac{\pi a x}{\lambda D}$. a=largeur, D=longueur écran-fente, x sur l'écran. On peut remonter vérifier cette valeur, si on connaît la largeur de la fente. Tous les $\frac{\lambda D}{a}$ le sinc s'annule, donc on a la largeur de la tâche centrale qui vaut $2\frac{\lambda D}{a}$ et les autres qui valent $\frac{\lambda D}{a} = \Delta x$.

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{a}$$

Mesure de largeurs de fentes

✍ FLTCLD ⏲ 5mn

Même matériel, fentes de largeur connue, on mesure autant d'annulations que possible, et on trace Δx en fonction de $1/a$. Droite de pente λD.

Incertitudes : $\Delta\Delta x$ = digit de la règle divisé par le nombre de mesures, ou sigma de la distribution, au choix.

1.3 Application

On sait que le phénomène est identique si on met un obstacle plutôt qu'une fente. On va donc utiliser l'étalonage précédent pour mesurer la largeur d'un cheveux !

Largeur du cheveu

✍ Mon imagination folle ⏲ 2mn

Remplacer la fente par un cheveu, mesurer Δx et remonter à l'épaisseur.

$$a = \frac{\lambda D}{\Delta x}$$

Incertitudes : $\Delta a = a\sqrt{(\Delta\Delta x/x)^2 + (\Delta\lambda D/\lambda D)^2}$, avec $\Delta\lambda D$ donné par la régression.

En réalité, bien que les mesures fonctionnent bien, montrant la cohérence de la théorie ondulatoire de la lumière, lorsque l'on rapproche l'écran on voit l'éclairement se modifier : on n'a pas la même forme que ce que l'équation précédente indiquait. Il existe en réalité plusieurs régimes de diffraction, dont nous allons parler tout de suite.

2 Les régimes de diffraction : fresnel et Fraunhofer

2.1 Mise en évidence

pour mieux faire la différence entre les deux régimes, on va changer d'objet diffractant et on va utiliser des lentilles pour élargir la figure.

Mise en évidence des deux régimes

✍ Sextant p141 ⏲ 5 min

Matériel :

- Laser rouge $\lambda = 632.8$ nm P5.3/2 sur support horizontal P108.8, pied fixe 0.531 ;
- Objectif de microscope x10 ;

- lentille de focale grande (environ 30 cm) ;
- Trou P113.3 ou diapositive B169 -trou de largeur 0.8 mm) sur un statif

Si les figures de diffraction observées sont trop petites, on peut ajouter une lentille de projection. Pour cela, conjuguer une fente et l'écran avec une lentille de 10 cm et une QI, de sorte à avoir la plus grand image possible. Solidariser la lentille et l'écran avec une barre et retirer la fente et la QI : on peut utiliser alors ce dispositif pour observer les deux régimes.

Commençons par former une source quasi-ponctuelle. Pour cela, faire converger le laser avec un objectif de microscope (ou une lentille de courte focale) puis, à l'aide de la seconde lentille de grande focale, faire l'image du point source sur l'écran.

Placer ensuite le trou derrière la lentille de grande focale pour obtenir une figure de **diffraction de Fraunhofer** sur l'écran. Si on bouge le trou dans son plan, la figure n'est pas modifiée. On parle aussi de **diffraction en champ lointain**.

Rapprocher l'écran du trou. On voit alors la figure de diffraction dans l'image géométrique. Si on bouge le trou, la figure de diffraction bouge aussi. On parle de **diffraction en champ proche** ou **diffraction de Fresnel**.

Remarque

Dans la première partie du montage avec la fente, on était dans le régime de Fraunhofer, en champs lointain !

On a mis en évidence les deux régimes différents de diffraction pour lesquels l'éclairement est différent. On va mainteannt les caractériser.

2.2 Nombre de Fresnel

On définit le *nombre de Fresnel* de la façon suivante :

$$\mathcal{F} = \frac{\rho^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

avec ρ le rayon du trou, a la distance entre la source et l'objet diffractant et b la distance entre l'objet diffractant et le plan d'observation. Si $\mathcal{F} \gg 1$, on est dans le régime de Fresnel, et si $\mathcal{F} \ll 1$ on est dans le régime de Fraunhofer.

Remarque

Mathématiquement, ce nombre représente l'ordre de grandeur des termes d'ordre 2 dans le développement de la phase dans le principe de Huygens-Fresnel.

Ce nombre est également le nombre le zones de Fresnel, *i.e.* le nombre d'anneaux à l'intérieur de la tâche lumineuse principale. On va détailler ça dans la partie suivante.

2.3 Zones de Fresnel

Zones de Fresnel

✍ FLTCD 🕐 10 min

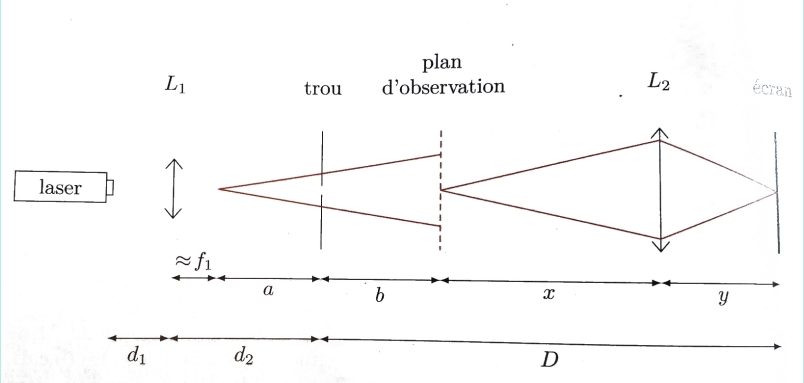


FIGURE 9.2 – Montage expérimental, tiré du Jolidon

Matériel :

- Laser rouge $\lambda = 632.8$ nm P5.3/2 ;
- Objectif de microscope p107.16/3, pied déplaçable horizontalement et verticalement ;
- Diapositive B169, statif, trou de 1.2mm, espacé de 10.5 cm de l'objectif ;
- Lentille d'"exploration" de focale 120mm, P111.2/1, pied horizontal vertical

Les lentilles sont choisies telles que sur toute la longueur du banc on soit en régime de Fresnel. On va vérifier la formule donnant le nombre de zones de Fresnel en fonction de $1/b$.

En pratique, on fixe toutes les longueurs sauf la position y de la lentille d'exploration que l'on fait varier. On part avec la lentille éloignée de l'objet, puis on rapproche la lentille en observant bien le centre de la figure.

Quand le centre passe de noir à brillant ou inversemment, on compte le nombre de zones de Fresnel $\mathcal{F}$ (donc d'anneaux, en comptant le centre) et on note la valeur de y.

On obtient b grâce à la relation de conjugaison $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{D-y-b}$ qui donne $b = \dfrac{D-y-fy}{y-f}$.

On trace ensuite F en fonction de $1/b$. La pente $\dfrac{\rho^2}{\lambda}$ permet de remonter au rayon du trou, et l'ordonnée à l'origine à la distance source-objet diffractant a.

Il y a une discussion dans le Jolidon sur le terme $1/a$ dans le nombre de Fresnel qui est en fait affecté par la courbure du faisceau laser.

3 Optique de Fourier

3.1 Transformée de Fourier

Image de Fraunhofer = transformée de Fourier de d'image, donc on peut faire joujou !

Transformée de fourier d'une grille

✍ La caverne qui me sert de tête ⏲ 2mn

Faire un double sinc avec une grille

3.2 Filtrage

On va faire l'image de frau dans un coin, la modifier, et la retransformer en image normale, ça fera du filtrage !

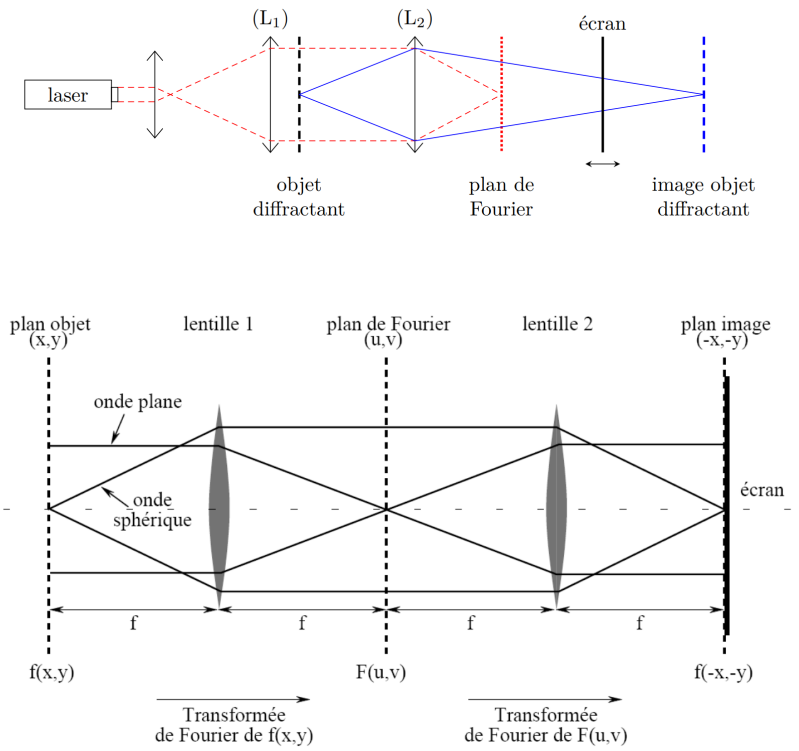


FIGURE 9.3 – Le laser et les deux premières lentilles servent seulement à générer un joli faisceau.

Filtrage de Fourier

✍ ⏲ 5mn

Matériel : Lentilles (deux de même focales, une autre pour le laser), laser, objectif de microscope, empreinte digitale sur du scotch, image diapo de la tête de Fourier, tête d'épingle sur un scotch

Montage : Faire attention au montage 4f, faire bien correspondre les foyers.

Faire la manip que tu veux entre détramer ce bon vieux Fourier, faire apparaître une empreinte digitale, ou filtrer un laser pour épurer un faisceau. On met l'objet dans le faisceau entre L1 et L2, on en fait l'image ponctuelle dans le plan de Fourier, où l'on met le filtre, puis on fait l'image.

Passe bas = diaphragme. Passe haut = diapo tête d'épingle

MP 10

Spectrométrie optique

Commentaires du jury

- **2014-2016 :** Quel que soit l'appareil de mesure utilisé, notamment le spectromètre à entrée fibrée interfacé avec l'ordinateur, son principe de fonctionnement et ses caractéristiques d'utilisation, en particulier son pouvoir de résolution, doivent être connus. Dans le cas où un candidat souhaite utiliser un spectromètre qu'il a réalisé lui-même, il est rappelé que la mesure des angles au goniomètre est bien plus précise que le simple pointé avec une règle sur un écran ; en outre, s'il souhaite utiliser un réseau en incidence normale, le candidat doit s'assurer de la réalisation expérimentale correcte de cette incidence particulière.
- **2010-2013 :** Le prisme à vision directe doit être réservé aux observations qualitatives. Enfin, le pouvoir de résolution des appareils doit être connu et leurs limitations discutées.
- **2008 :** La spectrométrie par transformée de Fourier, souvent réalisée de façon semi-quantitative sur les raies du mercure ou du sodium, se prêtre à un enregistrement numérique, qui sans être indispensable, est bien plus démonstratif et permet des mesures sensiblement plus précises. Si le coeur du sujet est la mesure de longueurs d'onde, les phénomènes qui affectent la résolution des spectromètres ne doivent pas être ignorés.
- **2005 :** La notion de résolution est importante et doit être abordée. Il en est de même de l'influence de la largeur de la fente d'entrée. L'usage des spectromètres informatisés à fibre ne doit pas être exclusif.
- **1998 :** Dans les cas usuels d'utilisation des spectromètres, la largeur de la fente d'entrée, celle de la fente de sortie ainsi que la diffraction par l'élément dispersif ont une grande importance dans le pouvoir de résolution apparent ; un des objectifs du montage est de montrer le rôle respectif de ces paramètres.

Bibliographie

✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Manips et exploitation
✍ *Expériences d'optique à l'agrégation*, **Duffait** ⟶ Compléments sur les manips
✍ **FLTCLD** ⟶ Rydberg, biréfringence, Michelson
✍ *Tout-en-un physique PC, Dunod*, **Sanz** ⟶ Théorie pour les réseaux, sodium

1 Introduction historique . . . 1096
1.1 Newton . . . 1096
1.2 Réseaux . . . 1096
2 Mesure de la longueur d'onde moyenne du doublet du sodium . . . 1097
2.1 Réglage du Goniomètre, étalonnage . . . 1097
2.2 Utilisation . . . 1098
3 Mesure de l'écart du doublet du sodium avec un Michelson . . . 1098
3.1 Réglage du Michelson . . . 1098
3.2 Position des brouillages . . . 1099
3.3 Tracé de l'intensité au centre en fonction de e . . . 1099
4 Mesure de la biréfringence d'une lame (tampon) . . . 1100

Introduction

La spectroscopie signifie l'étude des spectres dans la répartition de l'énergie selon chaque fréquence. Ici on s'intéresse uniquement au domaine du visible (optique).

1 Introduction historique

Usuellement, la première expérience de spectroscopie est sans nul doute celle de Newton avec son prisme. Le principe est simple : effectuer une décomposition de la lumière par une diffusion qui dépend de la longueur d'onde.

1.1 Newton

☕

Expérience de Newton

✍ ⏲ 1mn

Matériel : Un prisme (de grand indice), une source lumineuse blanche à l'infini (lentilles).

Tu sais quoi faire non ?

Ce principe de décomposition est généralisable, et est le fondement de toutes les expériences de spectrométrie.

Une autre façon de décomposer est d'utiliser un réseau

1.2 Réseaux

On peut également illustrer qualitativement le fonctionnement des réseaux ici, en lumière blanche et avec une lampe spectrale à vapeur de sodium (spectre continu vs discontinu). Présenter les trois formules importantes des réseaux

$$\sin\theta - \sin\theta_0 = \frac{m\lambda}{a} \tag{10.1}$$

$$2\sin\frac{D_m}{2} = \frac{m\lambda}{a} \tag{10.2}$$

$$p = mN \tag{10.3}$$

Avec : θ l'angle avec la normale au réseau, θ_0 l'angle du faisceau incident avec la normale, D_m le minimum de déviation, a le pas du réseau, λ la longueur d'onde, m l'ordre, N le nombre de fente éclairées.

remarque : linéaire en $\sin\theta$ c'est linéaire en θ aux petits angles, *wink wink*.

☕

Vérification de la loi des réseau

✍ ⏲ 5mn

Matériel : réseau 100 et 200 traits, lampe à mercure, filtre à UV, fente, lentille 12cm, dépoli millimétré.

Faire l'image de la fente sur le dépoli sans le réseau, placer le réseau 100 traits, en incidence normale.

Mesurer les angles de la manière qui vous sied, mais sans gonio, c'est ici un exemple pédagogique.

Vérifier que $sin\theta = \frac{1\lambda}{a}$ (1=ordre), et faire une petite régression linéaire pour remonter à la valeur de a et donner une incertitude. (on connaît bien les λ, c'est une lampe à mercure.

Faire pareil avec le 200 traits, et remarquer que son ordre 1 est là où se cachait l'ordre 2 du 100 traits.

Boooouh la mauvaise mesure d'angle, on va faire mieux avec un goniomètre ! Et on va montrer le pouvoir de la spectroscopie parce qu'on va remonter à la valeur du doublet du sodium !

2 Mesure de la longueur d'onde moyenne du doublet du sodium

L'expérience que l'on vient de faire utilisait un réseau de petit joueur, nous allons passer à un réseau de 1200 traits/mm !! *La foule est en délire.* Et pour mesurer les angles, on va utiliser un Goniomètre !! *Des t-shirts et des sous-vêtements pleuvent sur l'expérimentateurice.*

2.1 Réglage du Goniomètre, étalonnage

http://web.cortial.net/gonio/reg_gonio.html

En gros : largeur de la fente, lunette et collimateur à l'infini, horizontalité.

Tracé d'une droite d'étalonnage

Prendre le spectre de la lampe à mercure et faire une régression sur $\lambda = 2a\sin(D_m/2)$. On mesure D_m et on connaît λ, on remonte à a.

L'incertitude sur D_m est de 2 minutes d'arc.

Garder 2 points à faire devant le jury.

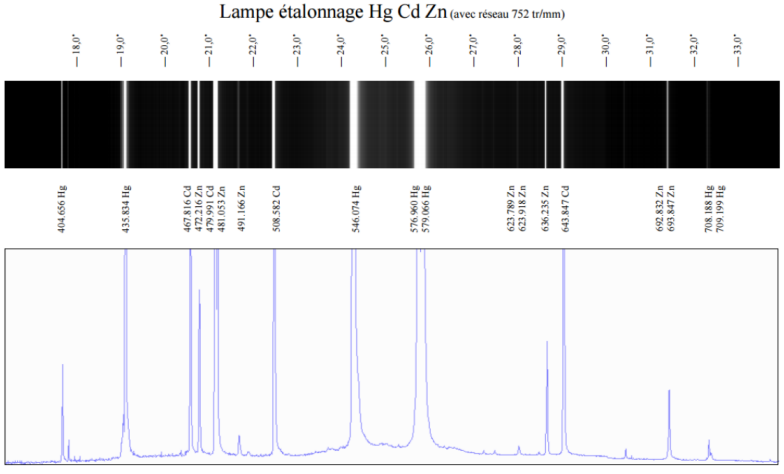


FIGURE 10.1 – Spectre d'étalonnage

2.2 Utilisation

Déterminer la longueur d'onde du doublet

✍ ⏲ 3mn

Matériel : le gonio, la lampe à sodium.

Allumer la lampe (temps de chauffe...), la mettre à la place de la mercure, et c'est parti !

$$\lambda = 2a \sin \frac{D_m}{2} = (598 \pm 1 \text{ ou } 2) \text{ nm} \tag{10.4}$$

$$\Delta\lambda = \lambda\sqrt{(\Delta D_m/D_m)^2 + (\Delta a/a)^2} \tag{10.5}$$

La résolution du Gonio : Normalement la limite de résolution est celle de la fente, dont la largeur empêche d'avoir une précision infinie. Cependant il existe une formule théorique pour la résolution d'un gonio qui dépend de son réseau.

On est content on a le doublet ! Mais on ne voit pas que c'est un doublet, en effet la résolution du gonio n'est pas assez bonne. Il va falloir ruser et faire de la spectroscopie de détail, avec un Interféromètre !

3 Mesure de l'écart du doublet du sodium avec un Michelson

Expliquer le principe du Michelson, vite fait quoi, et détailler pourquoi c'est pratique ici : parce que deux figures d'interférences vont se superposer, et vont donner un magnifique brouillage !

3.1 Réglage du Michelson

Réglage du Michelson

✍ ⏲

Matériel :

- Michelson avec moteur (le n°1 est le meilleur)
- laser + lampe torche
- optionnel : photodiode+montage de charge pour acquérir l'intensité lumineuse

On veut régler le Michelson en **lame d'air**. Pour cela, on commence par régler la compensatrice avec le laser en le faisant passer en incidence normale à travers la séparatrice et la compensatrice puis sur un écran et en réglant les vis de la compensatrices pour minimiser le nombre de points sur l'écran (idéalement avoir un seul point).

On place ensuite le laser en entrée du Michelson en prenant soin de la faire arriver au milieu des miroirs. On règle le réglage grossier des miroirs pour de nouveau réduire le nombre de points image. On élargit ensuite le faisceau laser avec un objectif de microscope pour obtenir des anneaux.

Charioter pour diminuer le nombre d'anneaux tout en touchant les vis de réglages pour garder les anneaux au centre. noter les positions pour lesquels on a qu'un anneau, c'est un intervalle dans lequel il y a le contact optique.

Passer en coin d'air avec la vis grossière d'inclinaison et conjugue les miroirs et un écran avec une lentille. On peut explorer avec la lampe torche l'intervalle autour du contact optique jusqu'à trouver les teintes de Newton. **NOTER LA POSITION DU CONTACT OPTIQUE.**

Repasser en lame d'air et projeter les anneaux à l'infini sur un écran dans le plan focal image d'une lentille.

3.2 Position des brouillages

Lorsqu'on éclaire avec une lampe à vapeur de sodium (et un condenseur) on observe régulièrement des brouillages dus à la superposition des figures d'interférence issue de chaque raie (un brouillage tous les 0.30 mm environ).

Mesure du doublet du sodium

✍ ⏲

Noter les positions x_n successives de chaque brouillage n avec une incertitude assez importante (0.05 mm ou 0.10 mm) puis tracer la droite $x_n = an + b$. On retrouve alors a et on en déduit $\delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{a}$

Incertitudes :

$$u(\delta\lambda) = \delta\lambda\sqrt{2\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

3.3 Tracé de l'intensité au centre en fonction de e

L'intensité au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur e de la lame d'air pour une source monochromatique de longueur d'onde λ est :

$$I = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda}\right)\right]$$

Si on ajoute une seconde source de longueur d'onde $\lambda + \delta\lambda$, on a

$$I = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{e\delta\lambda}{\lambda^2}\right)\cos\left(2\pi\frac{2e}{\lambda}\right)\right]$$

De plus ces raies ont une largeur qui provoque un brouillage permanent à partir d'une certaine épaisseur de lame d'air (problème de cohérence temporelle). Elles ont un profil Gaussien (lampe basse-pression) ou Lorentzien (lampe haut-pression) caractérisé par une largeur à mi-hauteur dλ.

Pour simplifier, on considère des profils en porte de largeur dλ. Le profil d'intensité devient alors :

$$I = I_0\left[1 + \mathrm{sinc}\left(2\pi\frac{e\mathrm{d}\lambda}{\lambda^2}\right)\cos\left(2\pi\frac{e\delta\lambda}{\lambda^2}\right)\cos\left(2\pi\frac{2e}{\lambda}\right)\right]$$

On va donc faire défiler les anneaux en fonction du temps pour retrouver 3 échelles de temps caractéristiques qu'on pourra relier à des échelles de longueur d'onde.

Le graphe temporel obtenu est similaire a celui présenté sur la figure si la vitesse de chariotage est constante et le capteur linéaire en intensité.

Il faut charioter sur une très grande distance, le moteur tournant à environ 1 tour en 15 min, il faudra prévoir environ 1h30 pour observer le brouillage total à partir du contact optique.

On peut remonter aux échelles de temps en traçant la transformée de Fourier de cette longue acquisition.

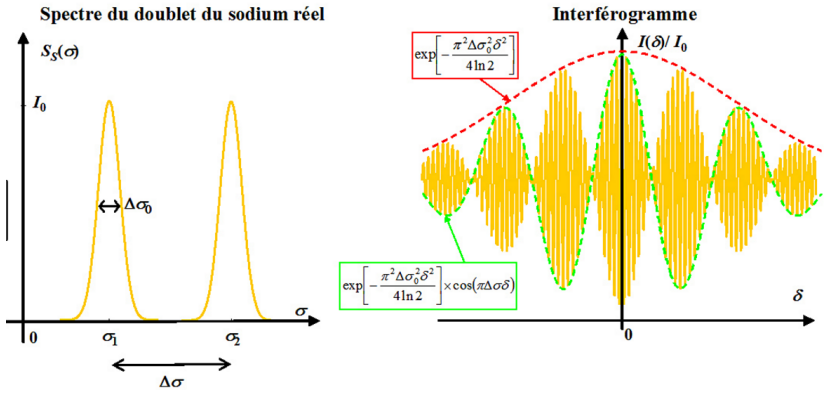


FIGURE 10.2 – Figure d'interférence pour un profil lorentzien.

Important

Il est en réalité assez complexe d'obtenir un tel graphe car la vitesse du moteur n'est pas vraiment constante et que l'intensité mesurée n'est pas réellement celle qu'on souhaiterait (réponse non linéaire ? léger déplacement du centre de la figure ? autre ?). **Cette version de la manip est longue, périlleuse, difficile à réaliser, ne vous permet pas de manipuler devant le jury et n'apporte finalement que peu de chose...**

On peut déterminer la vitesse du moteur plus précisément en regardant la première fréquence de la transformée de fourrier f_1 :

$$v = \frac{\lambda}{2f_1}$$

On en déduit $\delta\lambda$ et $\mathrm{d}\lambda$ avec les deux autres fréquences :

$$\delta\lambda = \frac{f_2\lambda^2}{v} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\lambda = \frac{f_3 v}{\lambda^2}$$

Incertitudes :

$$u(v) = v\sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(f_1)}{f_1}\right)^2}$$

$$u(\delta\lambda) = \delta\lambda\sqrt{2\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{f_2}\right)^2 + \left(\frac{u(v)}{v}\right)^2}$$

$$u(\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}\lambda\sqrt{2\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(f_3)}{f_3}\right)^2 + \left(\frac{u(v)}{v}\right)^2}$$

4 Mesure de la biréfringence d'une lame (tampon)

Si la spectromètrie permet dans un premier de temps de déterminer des longueurs d'onde et d'étudier le spectre de différentes sources lumineuses, on peut ensuite s'en servir pour mesurer certains paramètres physiques, on va ici s'intéresser à la biréfringence d'une lame d'une épaisseur donnée.

Analyse du spectre cannelé

✍ ⏲

Matériel :

- Différentes lames biréfringentes sur leur support (boîte en bois). Notamment une lame de quartz parallèle $e = 1.53$ mm
- Deux polariseurs
- Un diaphragme
- Lampe Quartz-Iode
- spectromètre

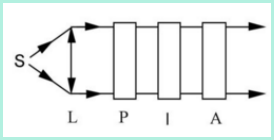


FIGURE 10.3 – Montage de la mesure de biréfringence

On place successivement la lampe Quartz-Iode, le diaphragme, un polariseur à 45, la lame de quartz, l'analyseur croisé avec le polariseur puis une lentille pour focaliser le faisceau sur l'entrée de la fibre optique du spectromètre.

On observe alors sur le spectromètre avec un temps d'acquisition de 100ms et un moyennage sur 5 acquisitions un spectre cannelé. On observe N cannelures entre λ_1 et λ_2 en déduit :

$$n_e - n_o = \frac{N}{e}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Incertitudes :

$$u(\Delta n) = \Delta n\sqrt{\left(\frac{u(\lambda_1)}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{u(\lambda_2)}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda}\right)^2}$$

MP 11

Emission et absorption de la lumière

Commentaires du jury

- 2014 à 2017 : Ce montage ne devrait pas être confondu avec le montage « Spectrométrie optique ». Des expériences quantitatives sur l'absorption sont attendues. En outre, les propriétés d'émission du laser ne sont pas hors sujet. Jusqu'en 2013, le titre était : Émission et absorption dans le domaine optique.
- 2013 : Il est regrettable que les expériences d'absorption restent qualitatives.
- 2012 : Les deux aspects de l'intitulé doivent être abordés. Rappelons que la qualité des mesures dans ce montage est souvent liée à une bonne connaissance des spectromètres utilisés.
- 2011 : Si ce montage se distingue plus du montage no 9 cette année, les deux aspects de l'intitulé doivent être abordés. Rappelons que la qualité des mesures dans ce montage est souvent liée à une bonne connaissance des spectromètres utilisés.
- 2010 : Les remarques des années précédentes s'appliquent toujours. Ce montage est à différencier du montage no 9 : Spectrométrie optique. Cela ne dispense pas de l'étalonnage des spectromètres, dont on doit connaître en particulier la résolution.
- 2009 : L'émission du corps noir n'est pas stricto sensu une émission spontanée. Les ordres de grandeurs des largeurs de raies et leur origine devraient être connus des candidats.
- 2008 : L'utilisation des récents spectromètres à fibre optique interfacés USB nécessite la connaissance de son mode de fonctionnement et doit s'accompagner d'une analyse critique des résultats, notamment en termes de résolution et de justesse.

Bibliographie

✍ **Duffait d'optique**
✍ **Sextant**
✍ **FLTCD**

1 Émission de lumière 1104
1.1 Émission spontanée - Constante de Rydberg 1104
1.2 Tampon : Émission stimulée 1106
2 Absorption de la lumière 1107
2.1 Théorie 1107
2.2 Dépendance en concentration 1107
2.3 Dépendance en longueur de cuve 1108
3 la fluorescence 1108

Introduction

Fil directeur possible : **La couleur**.

Intro possible : "la lumière y'en a partout, et les phénomènes d'absorption et d'émission sont monnaie courante en physique. On va voir certains phénomènes et comment on s'en sert en physique et en chimie."

☕

Manip d'intro : spectre d'émission d'une lampe mercure. Waaaa y'a des raies!!

1 Émission de lumière

1.1 Émission spontanée - Constante de Rydberg

1.1.1 Théorie

✍ Duffait p134

Lorsqu'on s'intéresse aux hydrogénoïdes, on trouve que leurs niveaux d'énergie sont donnés par

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\mathcal{E}}{n^2} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \tag{11.1}$$

Lorsque l'atome se désexcite et passe d'un niveau à un autre autre de plus faible énergie, il émet un photon dont l'énergie correspond à la différence d'énergie entre les deux niveaux :

$$\frac{hc}{\lambda} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{11.2}$$

On obtient alors la formule de RITZ :

$$\frac{1}{\lambda_{(n,m)}} = R_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{11.3}$$

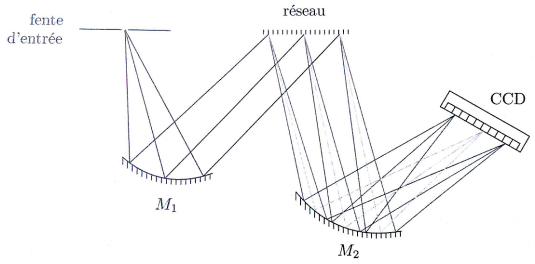
où R_H est la **constante de Rydberg**, dont l'expression est $R_H = \dfrac{R_\infty}{1 + \dfrac{m_e}{m_H}}$ avec $R_\infty = 109\ 737\ \text{cm}^{-1}$

Les transitions correspondant à une longueur d'onde dans le visible sont les transitions de type $m \longrightarrow n$ avec $n = 2$ et $m = 3$, 4 et 5. Puisqu'on a $n = 2$, on a affaire à la **série de Balmer** [1]. Si on détermine les longueurs d'onde correspondant à ces transitions, on peut alors remonter à la constante de Rydberg R_H.

1.1.2 Principe et étalonnage du spectromètre à réseau

Le principe est simple : la lumière entre par une fente, est envoyée sur un réseau sur lequel elle se réfléchit et ensuite elle est envoyée sur des capteurs (barrette CCD par exemple). Le réseau sépare les longueurs d'onde qui, dans le cas le plus courant de réseau de réflexion, sont réfléchies dans des directions différentes. Deux longueurs d'onde sont alors résolues si elles sont détectées par deux pixels différents. Le but de l'étalonnage est d'attribuer à chaque pixel la bonne longueur d'onde.

1. De $n = 1$ à 6, ce sont les séries de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett, Pfund et Humphreys.



Étalonnage du spectromètre

✍ ⏲

Si on utilise le spectro Ulyce, le logiciel associé est SpidHR. Si on utilise le spectro plus récent de chez Ocean Optics, le logiciel associé est SpectraSuite.

On utilise pour étalonner le spectro une lampe à mercure car son spectre possède des raies entre 435 nm et 570 nm, intervalle qui contient les raies de l'hydrogène que l'on va mesurer. Ainsi, relever pour chaque longueur d'onde connue le pixel correspondant pour obtenir une relation pixel-λ.

La notice du spectro peut aider.

1.1.3 Mesure de la constante de Rydberg

On s'intéresse à la série de Balmer, à savoir

$$\frac{1}{\lambda_{(2,m)}} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{11.4}$$

Mesure de la constante de Rydberg

✍ Duffait p134 ⏲ 10 min

Si on utilise le spectro Ulyce, le logiciel associé est SpidHR. Si on utilise le spectro plus récent de chez Ocean Optics, le logiciel associé est SpectraSuite.

On utilise une lampe à vapeur d'eau "lourde" (D_2O), en face de laquelle on place l'entrée de la fibre optique qui mène au spectromètre. Avec une lentille, on fait l'image de l'ampoule, qui est suffisamment fine pour se passer de fente, sur la fibre. On règle l'inclinaison de la fibre pour obtenir le maximum de signal en sortie du spectromètre.

On observe le spectre de raies d'émission du deutérium, soit quelques pics. L'ampoule contient du deuterium, et non de l'hydrogène, ce qui a théoriquement un effet sur la mesure, puisque la constante de Rydberg est différente de $R_{\text{hydrogène}}$, mais qui n'est pas mesurable ici compte tenu des incertitudes. L'avantage du deuterium est qu'il est plus lourd, ce qui limite la diffusion à travers les parois de l'ampoule et prolonge la durée de vie de l'ampoule.

Mesurer $\lambda_{(2,m)}$ pour $m = 3$, 4 et 5. Tracer $\frac{1}{\lambda_{(2,m)}} = f\left(\frac{1}{m^2}\right)$ pour remonter à $R_{\text{deutérium}}$.

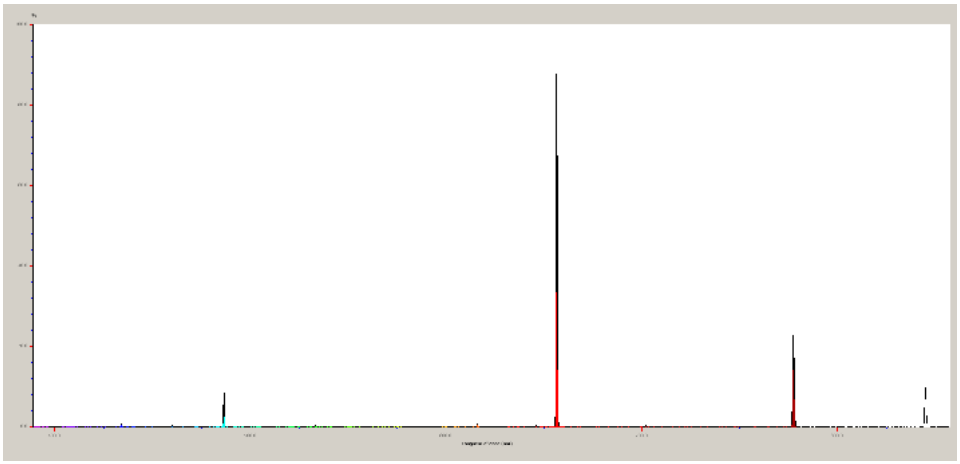
Les valeurs tabulées sont

$$R_{\text{hydrogène}} = 109\ 677\ \text{cm}^{-1}$$
$$R_{\text{deutérium}} = 109\ 707\ \text{cm}^{-1}$$

La constante de Rydberg fait en effet intervenir la masse du noyau de l'hydrogénoïde. Or le noyau du deuterium

contient un neutron de plus que celui de l'hydrogène, ce qui conduit à un décalage entre les deux constantes, non mesurable ici.

On doit obtenir un spectre de cette forme :



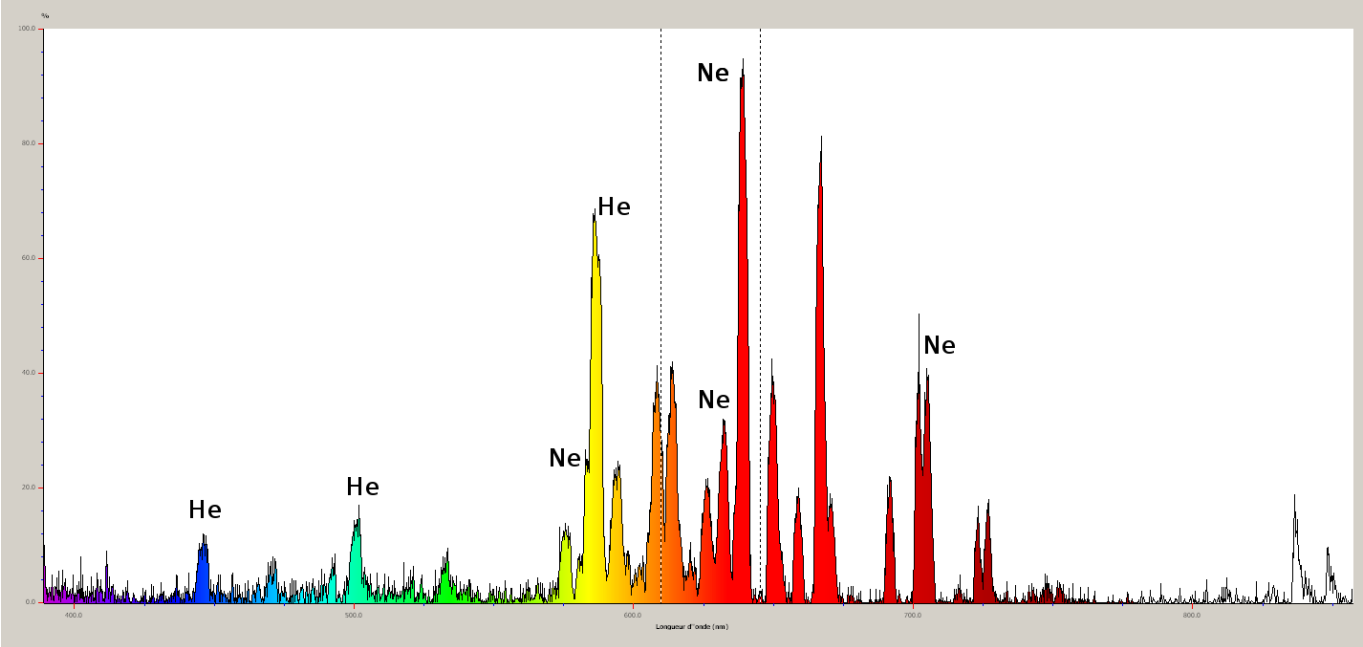
1.2 Tampon : Émission stimulée

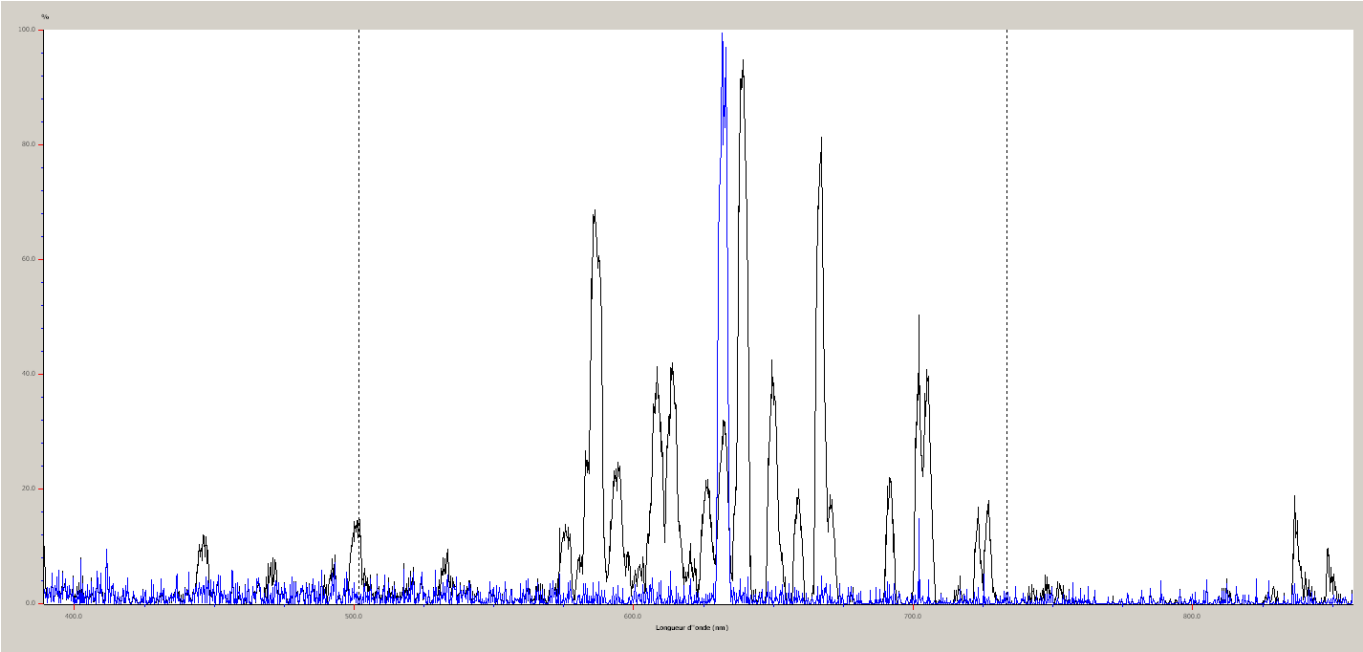
Un autre cas très connu d'émission est l'émission stimulée, phénomène au coeur du fonctionnement d'un laser (light amplification by *stimulated emission* radiation).

On s'intéresse ici à un laser He-Ne de classe 3 (**donc à manipuler avec précaution**). Comme son nom l'indique, il y a un gaz He+Ne dans la cavité du laser qui, une fois excité, se comporte comme une lampe spectrale.

En utilisant un laser He-Ne donc la cavité est transparente, on peut alors récupérer ce spectre "de côté" pour constater qu'il est très proche d'un spectre de raies qui est la superposition du spectre de raies de He et de Ne.

En sortie du laser, on n'a cependant qu'une seule raie qui a été sélectionnée par la cavité Fabry-Pérot du laser. On peut remarquer que cette raie ne correspond pas forcément à la raie la plus intense du spectre "de côté", ce qui est un choix du constructeur, modifiable avec la longueur de la cavité. La largeur réelle de cette raie, très fine, ne peut pas être visualisée avec notre spectro dont la résolution est de 1.5 nm.





On reprend la lampe à mercure et on intercale une solution de KMnO4. Waaaa ça absorbe.

2 Absorption de la lumière

2.1 Théorie

La loi de Beer-Lambert est très utilisée en chimie pour mesurer la concentration d'une espèce colorée en solution. Elle énonce que dans la limite des faibles concentrations (A<2) l'absorbance d'une solution est proportionnelle à la fois à la concentration de l'espèce étudiée, et à la longueur de solution traversée par la lumière. On a l'équation suivante où $\varepsilon(\lambda)$ est le coefficient d'atténuation molaire (en $\mathrm{Lmol^{-1}\,m^{-1}}$), ℓ la longueur traversée par la lumière, et c la concentration en espèce absorbante.

$$A = \log \frac{I_0}{I} = \varepsilon(\lambda)\ell c \tag{11.5}$$

Il est à noter que la formule complète fait intervenir une superposition des absorbances de toutes les espèces absorbantes du milieu. On se place ici dans l'approximation qu'une seule espèce a une absorbance non nulle à la longueur d'onde considérée.

2.2 Dépendance en concentration

Pour étudier l'absorbance d'une solution, la première étape consiste à repérer la longueur d'onde d'absorbance maximale de l'espèce étudiée. Cela permet de mesurer des concentration plus faibles, parce que cela permet de diminuer le rapport incertitude/valeur mesurée (incertitude relative). Pour cela, on réalise le spectre d'absorption de la solution. Pour le permanganate de potassium, la longueur d'onde d'absorbance maximale est tabulée à 525nm.

Vérification et limites de la loi de Beer Lambert en concentration

✍ 🕒 10mn

Tout d'abord, déterminer la longueur d'onde d'absorbance maximale. En profiter pour faire une analyse qualitative sur la couleur de la solution.

Préparer des solutions de permanganate de potassium KMnO4 de concentration échelonnées entre 10^{-4}M et 10^{-3}M. (On va saturer autour de 5×10^{-4} normalement.) [a].

Par régression linéaire, remonter à ε. Valeur tabulée : 2250L mol^{-1} m^{-1} à 525nm.

Mesurer la longueur de la cuve au Palmer en disant que c'est aussi un facteur que l'on peut faire jouer. D'ailleurs en fonction du temps, on peut le faire jouer!!

Discuter des incertitudes.

a. https://fr.wikipedia.org/wiki/Permanganate_de_potassium

2.3 Dépendance en longueur de cuve

Utiliser une éprouvette graduée pour moduler la hauteur d'eau. C'est expérimental, à tester.

☕

Tampon : Dépendance en longueur

✍ 🕒 5mn

Cette expérience est un peu moins classique, mais elle correspond aux appréciations des Jurys, en ce qu'on vérifie toutes les dépendances de la loi, on l'exploite "à fond". La manip n'est pas très compliquée à monter, attention à bien diluer la solution pour rester dans le domaine de validité de Beer-Lambert (typiquement pour le permanganate, on perd la linéarité à partir de 10 $^{-3}$ mol . L $^{-1}$).

Le principe de la mesure est exactement le même que précédemment : on va mesurer l'absorbance pour différentes longueurs de "cuve", puis déterminer la pente de la droite ainsi trouvée et en déduire une seconde estimation du coefficient d'extinction molaire des ions MnO4-.

remarque : Aux grands volumes, on observe le même type de saturation qu'aux grandes concentration. Pas d'explication plus précise que "c'est parce que la saturation s'exprime sur le nombre de particules "vues" par la lumière incidente".

> *On reprend la lampe à Mercure avec le PVD, et cette fois on utilise une feuille blanche pour voir les raies dans le domaine ultra-violet : le papier contient des agents azurants qui absorbent dans l'UV et ré-émettent dans le bleu (visible) : c'est de la fluorescence.*

↓

3 la fluorescence

✍ Sextant p225

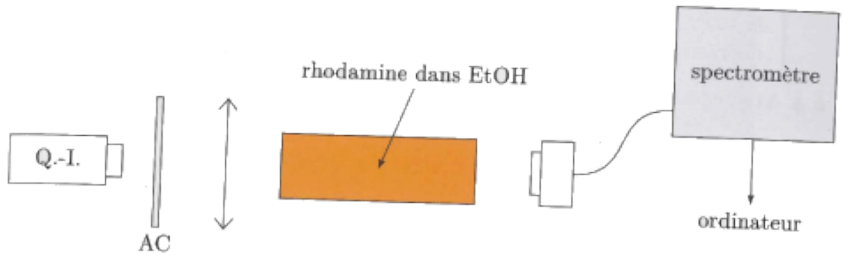
La règle de Stokes stipule que la longueur d'onde de l'émission fluorescente est toujours supérieure ou égale à la longueur d'onde d'absorption. Ceci s'explique par le fait qu'avant de réémettre le rayonnement qu'elles ont absorbé, les particules fluorophores subissent des transitions non-radiatives, c'est-à-dire des désexcitations (causées par les collisions) vers des niveaux vibrationnels inférieurs, avant de revenir à l'état fondamental en émettant un photon.

C'est la variété de ces transitions vibrationnelles qui rend le spectre de fluorescence continu, même lorsqu'on excite le fluorophore avec une lumière monochromatique (à condition que la longueur d'onde d'excitation soit contenue dans la bande d'absorption du fluorophore). Un fluorophore donné possède donc deux longueurs d'ondes caractéristiques : une longueur d'onde d'absorption maximale et une longueur d'onde d'émission maximale (a priori supérieure à la première). On se propose ici de déterminer ces deux longueurs d'onde dans le cas de la rhodamine.

Fluorescence de la Rhodamine

✍ Sextant p.225 ⏲

On éclaire une cuve contenant une solution diluée de rhodamine à l'aide d'une lampe quartz-iode. En plaçant un écran après la cuve, on voit une tache rouge car la rhodamine absorbe dans le vert. En focalisant le faisceau au niveau de la cuve et en regardant depuis le côté, on voit une traînée jaune dans la solution : la rhodamine est fluorescente, et sa longueur d'onde d'émission se situe dans le jaune (supérieure à la longueur d'onde verte d'absorption). En remplaçant l'écran par l'entrée de la fibre d'un spectromètre, on peut mesurer précisément ces deux longueurs d'onde. Attention à suffisamment diluer la solution, car si elle est trop concentrée, la lumière incidente est vite absorbée en entrée de la cuve et on ne voit pas la traînée jaune sur toute sa longueur.



Valeurs tabulées : $\lambda_{abs} = 529.8nm$, $\lambda_{fluo} = 556.4nm$.

Conclusion

Ce montage nous a permis de mettre en évidence les spectres d'émission et d'absorption de quelques éléments, mais aussi d'en constater la variété : du spectre de raies d'émission discret de l'hydrogène au spectre d'absorption continu du permanganate en passant par le spectre d'émission continu de la rhodamine. On aurait tout aussi bien pu évoquer :

- Le rayonnement du corps noir, dont le spectre d'émission suit les lois de Planck et Stefan.
- L'émission stimulée dans les lasers.
- La fluorescence dans le vivant.

Remarques intéressantes

Culture générale : la fluorescence en biologie

Vu que la conclusion parle des applications de la fluorescence en biologie, quelques mots sur différents principes :

- on peut utiliser des anticorps avec des fluorochromes (molécules fluo) pour marquer spécifiquement des protéines et ainsi observer leur présence et leur emplacement dans une coupe de tissu cellulaire (notamment pour le microscope confocal, dans lequel on excite les fluorophores par un laser et on recueille la lumière réémise pour former une image. La particularité du confocal est que le détecteur balaie sur des zones très focalisées et peut reconstituer une image 3D de l'objet étudié : voir la page wikipedia pour plus d'explications)

- lors de la création d'un OGM, on veut être sûr que la séquence ADN a bien été insérée dans les cellules. Pour cela, on rajoute une séquence codant pour un fluorophore : les cellules modifiées seront fluorescentes, donc facilement repérables. (exemple de fluorophore facile à retenir : la GFP (Green Fluorescent Protein))

Les questions auxquelles il faut savoir répondre

- Largeur des raies dans le spectro ?
- Émission stimulée VS spontanée

Mettre des lunettes pour la lampe à mercure ?

MP 12

Photorécepteurs

Rapports de jury

2017 : Il ne faut pas perdre de vue les aspects de métrologie dans ce montage. Il faut aussi connaître les principes physiques des photodétecteurs utilisés et pouvoir justifier les liens entre ces principes et les caractéristiques métrologiques. Il faut également, lorsqu'on cherche à effectuer une étude spectrale, faire attention à la réponse spectrale de tous les éléments du montage, y compris celle des éventuels polariseurs et analyseurs.

2014, 2015, 2016 : Dans ce montage, les questions classiques de métrologie peuvent être abordées : sensibilité, bande passante et temps de réponse. Il importe de distinguer les détecteurs photoniques et thermiques, notamment du point de vue de leur réponse spectrale. Plus généralement, il faut connaître les principes physiques des photodétecteurs utilisés et pouvoir justifier les liens entre ces principes et les caractéristiques métrologiques. Il faut également, lorsqu'on cherche à effectuer une étude spectrale, faire attention à la réponse spectrale de tous les éléments du montage, y compris celle des éventuels polariseurs et analyseurs. Remarquons pour finir que la notion de point de fonctionnement peut être utile pour bien expliquer et justifier un montage avec photodiode.

2013 : Il importe de distinguer les détecteurs photoniques et thermiques, notamment du point de vue de leur réponse spectrale. La notion de point de fonctionnement peut être utile pour bien expliquer et justifier un montage avec photodiode.

2012 : Ce montage se prête à l'utilisation à la fois des composants fondamentaux et de matériel grand public (photodiode, cellule solaire, capteur CCD, bolomètre...). Il importe de distinguer les détecteurs photoniques et les détecteurs thermiques, notamment du point de vue de leur réponse spectrale et du temps de réponse. Trop de candidats utilisent une photodiode sans en connaître suffisamment les propriétés. La notion de point de fonctionnement peut être utile pour bien expliquer et justifier un montage avec photodiode. Ne pas confondre une photodiode nue avec un bloc formé d'une photodiode et d'un circuit de polarisation.

1 Photodiode 1112
1.1 Tracé des caractéristiques 1113
1.2 Conditionnement de la diode 1114
1.3 Linéarité de la photodiode 1114
1.4 Temps de réponse de la photodiode 1115
2 Temps de réponse d'une photorésistance 1116
3 CCD 1117

Introduction

"Un photorécepteur peut être défini comme étant un transducteur convertissant l'énergie lumineuse en un signal électrique exploitable par une chaîne de mesure ou de traitement de signal. On appelle grandeur photosensible s la grandeur électrique (courant ou tension le plus souvent) dont la mesure donne accès au flux lumineux."

On trouve deux types de photorécepteurs : **thermiques** (absorbent le rayonnement thermique, conduisant à une élévation de la température du capteur, ce qui modifie ses propriétés, par exemple la thermopile ou le bolomètre) et **photoniques** (reposent sur le processus d'absorption d'un photon par un semi-conducteur, ce qui créer une paire électron/trou dans le matériau, par exemple les photorécepteurs étudiés dans ce montage).

Un photorécepteur possède 3 caractéristiques intéressantes :

- la sensibilité $\Gamma = \dfrac{\partial s}{\partial \Phi}$, que l'on veut indépendante du flux lumineux Φ
- le temps de réponse
- la réponse spectrale $S = \int s(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

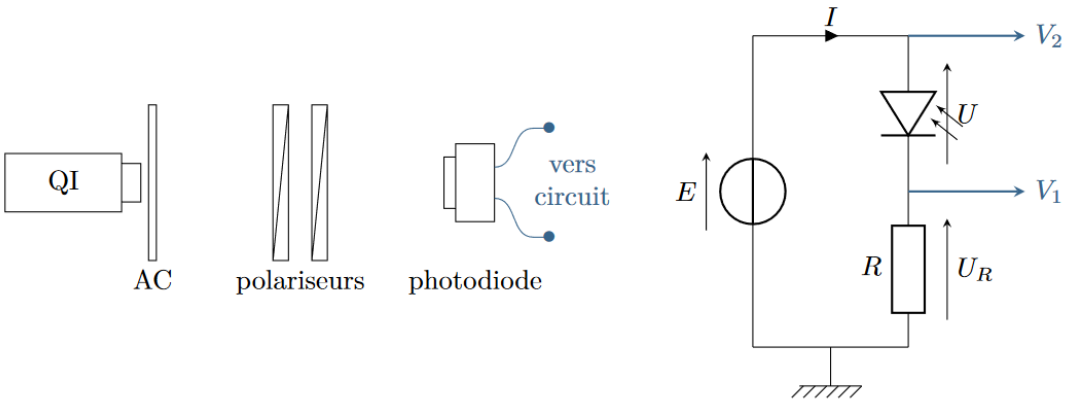
Dans ce montage, on va étudier les caractéristiques de 3 photorécepteurs différents.

1 Photodiode

Principe

Une photodiode est une jonction PN de semi-conducteurs dopés. Lorsqu'un photon arrive dans la zone de dépletion, une paire d'électron-trou est créée. Ce deux particules sont séparée sous l'effet du champ électrique présent dans la zone de dépletion et donc on observe l'apparition d'un photocourant. La caractéristique courant-tension de la diode est alors shiftée vers le bas, la diode présente donc un courant négatif même en régime bloqué (U < 0).

On monte la photodiode dans un circuit à résistance de charge. On lit les valeurs de V_1 et V_2 sur des voltmètres pour connaître la polarisation de la diode.

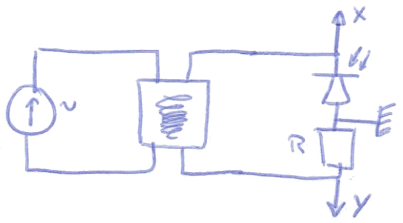


Remarque

On peut également conjuguer un trou devant la QI avec une lentille.

1.1 Tracé des caractéristiques

Cependant, on peut d'abord tracer le réseaux de caractéristiques de la photodiode à l'oscilloscope en réalisant un autre montage électrique qui nécessite un transformateur d'isolement (ou garde le montage optique) :



On se place en mode XY sur l'oscilloscope pour tracer la caractéristique de la photodiode à un flux Φ donné (on peut vérifier qu'on translate verticalement la courbe en changeant Φ). Le point de fonctionnement du circuit sera l'intersection entre cette caractéristique et la droite $I = \dfrac{E-U}{R}$, on a alors

$$I_{\text{diode}}(u, \Phi) = I = \frac{E-U}{R}$$

Tracé du réseaux de caractéristiques

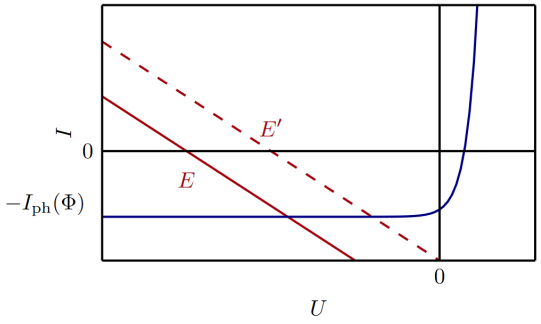
✍ FLTCD p132 ⏲

Matériel :

- GBF (sinusoïde 50 Hz pour pas trop voir les 50 Hz des néons. Tension de sorte que E = 10 V)
- Transformateur d'isolement
- Photodiode
- Boite à décade (10 kΩ)
- Oscilloscope
- Lampe QI
- Diaphragme + lentille si on fait pour l'image du trou sur la photodiode
- 2 polariseurs

Réaliser le montage avec transformateur d'isolement en prenant E sinusoïdal (pour parcourir la caractéristique, on pourrait le faire aussi point par point avec une alimentation continue).

Il faut que la période de variation de E soit grande devant le temps de réponse du montage pour avoir une caractéristique quasi-statique. Une fréquence de quelques hertz convient (à justifier dans la partie sur le temps de réponse).



On peut distinguer trois régimes de fonctionnement différents :

- $U < 0$ et $I < 0$: capteur,
- $U > 0$ et $I < 0$: générateur (photovoltaïque),
- $U > 0$ et $I > 0$: luminescent (DEL).

On comprend ainsi que le point de fonctionnement doit se situer dans la zone ($I < 0$;$U < 0$) afin que le courant corresponde au photocourant uniquement.

1.2 Conditionnement de la diode

On doit choisir R en respectant le compromis suivant :

- d'un côté, on veut R grand pour que la mesure de $U_R = RI$ soit la plus significative possible
- de l'autre côté, si il faut que R soit assez petit pour rester dans la zone $U < 0$ car la résistance fait varier la pente de la droite et on fait rester sur la zone plate de la caractéristique afin de maximiser la sensibilité.

Détermination du point de fonctionnement

On fixe $E = 10$ V. On choisit une résistance de charge de l'ordre de 10 kΩ.

Pour s'assurer d'être dans le bon quadrant de la caractéristique, faire varier rapidement la valeur R de la résistance de charge. Sa valeur convient tant que U_R demeure proportionnelle à R (*i.e.* tant qu'on est sur le plateau).

Choisir la résistance de charge la plus élevée possible parmi les valeurs permises, ce qui assure la meilleure sensibilité.

Une fois R fixée, on la mesure à l'ohmmètre et on n'y touche plus !!

1.3 Linéarité de la photodiode

on veut vérifier

$$I = \Gamma\Phi + I_0 \tag{12.1}$$

On ne connaît pas Φ directement mais on le connaît via la loi de Malus $\Phi \propto \cos^2\theta$ avec θ l'angle entre le polariseur et l'analyseur. On a donc

$$I = \Gamma' \cos^2\theta + I_0 \tag{12.2}$$

Linéarité de la photodiode

✍ FLTCD p 145 ⏲ 10 min

Matériel : Même matos qu'avant, juste penser à un ohmmètre pour mesurer R et on peut remplacer l'oscilloscope par un voltmètre pour mesurer U_R. Dans l'univers des possibles, on peut aussi utiliser LatisPro.

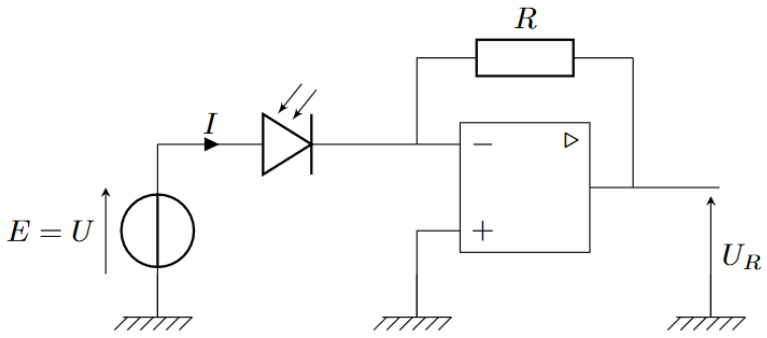
Mesurer R à l'ohmmètre pour la connaître précisément. On a alors accès à $I = \dfrac{U_R}{R}$. Relever U_R pour chaque angle θ ET $-\theta$ afin d'éviter une erreur systématique sur la détermination de l'origine des angles. On obtient alors

$$\widetilde{U}_R = \frac{U_R(\theta) + U_R(-\theta)}{2}$$

Faire alors la régression linéaire $I = \dfrac{\widetilde{U}_R}{R} = f(\cos^2\theta)$ pour valider la linéarité de la photodiode.

Remarques

- on fait un fit affine et non pas linéaire car il ne fait jamais totalement noir et la photodiode a un courant de fuite (faible) vers l'oscilloscope
- on ne peut pas *a priori* remonter directement à la sensibilité Γ, on n'a que Γ'
- On utilise plutôt un montage à résistance de charge plutôt qu'un montage à amplificateur opérationnel (cf. schéma) car il est plus simple d'exploiter le réseau de caractéristique avec le premier...
  Cependant l'avantage du deuxième repose dans le fait que comme les courantsde polarisation de l'amplificateur opérationnel sont négligeables devant le photocourant, le convertisseur courant–tension a une impédance d'entrée nulle, et ce montage permet de s'affranchir de l'impédance d'entrée de l'appareil mesurant U_R (ici le Voltmètre). Disons que le montage à ampli-op est plus facile à réaliser mais est moins pédagogique et son utilisation nuirait à la compréhension du propos.



1.4 Temps de réponse de la photodiode

On s'intéresse enfin à la réponse dynamique de la photodiode, *i.e.* sa capacité à suivre des variations rapides d'éclairement reçu. Pour cela, on mesure le temps de réponse.

On va étudier ça en soumettant la photodiode à des sauts brusques d'éclairement et en mesurant le temps que met sa grandeur photosensible, l'intensité, pour atteindre un fraction définie de sa valeur asymptotique. Par convention, on prend cette fraction égale à 90%. Pour générer ces sauts d'éclairements, on va utiliser une diode laser commandée en signal TTL venant d'un GBF. On ne connaît pas le temps de réponse de cette diode mais on sait qu'il est dans les nanosecondes, ce qui est bien meilleur que le temps de réponse de la photodiode, comme on va le vérifier.

Remarque

On pourrait aussi choisir un hacheur optique qui module le flux lumineux d'un laser ou bien un stroboscope.

Temps de réponse de la photodiode

✍ FLTCD p172

Matériel :

- Module Hameg tension continue
- GBF (signal TTL)
- Oscilloscope
- Diode laser
- Photodiode
- Boite à décade

Bien régler la fréquence de la tension de commande TTL pour une bonne visibilité du signal sur l'oscillo : une fréquence de 10 kHz convient.

Brancher la photodiode dans un montage à résistance de charge avec R compris entre 5 à 40 kΩ.

Prendre $E_0 = -10$ V pour polariser la diode en inverse et regarder la tension U à l'oscillo (regarder U et I c'est pareil pour le temps de réponse car R c'est une impédance réelle). On trouve des temps de l'ordre de la dizaine de μs donc largement grand devant la nanoseconde du LASER

Tracer τ_m et τ_d les temps de montée et de descente en fonction de R et modéliser pour obtenir une droite de pente α_i homogène à une capacité (la somme des capacités de la photodiode $\simeq$ 100 pF, du coax $\simeq$ 110 pF et de l'oscillo = 12 pF), le temps de réponse est donc un temps de réponse global du système. Le Jolidon trouve α_m = 443 pF et α_d = 462 pF.

Diminuer R améliore donc la rapidité du récepteur mais il faut pas que ça soit au détriment d'autres caractéristiques... (cf la partie sur le conditionnement).

remarque : le montage a AO aurait été moins bien ici à cause de son Slew rate (pente maximale de la sortie).

On peut également comparer ces temps de réponse à la période d'oscillation (entre 0.1 et 1 s) de E quand on a tracé le réseau de caractéristiques et qui devait être bien plus grande.

2 Temps de réponse d'une photorésistance

✍ Jolidon p.176

Tout ce qu'on a fait avec la photodiode, on peut le faire avec la photorésistance. On ne va comparer que les temps de réponse.

On s'attend à ce que la dynamique lors d'un passage obscurité/lumière ou lumière/obscurité soit différente pour une photorésistance. Pour faire simple, lors d'un passage obscurité/lumière le temps de réponse est principalement dicté par le processus de conversion d'un photon en pair électron/trou ; alors que lors du passage lumière/obscurité principalement dicté par le processus de recombinaison. C'est ce que l'on va montrer.

Mesure du temps de réponse de la photorésistance

✍ Jolidon p 176 ⏲ 3mn

Matériel : Diode TTL, hacheur rotatif, photorésistance, le montage précédent en fait.

On trace les temps de montée et de descente de la photorésistance, en mesurant simplement i en fonction du temps à U fixé. On les compare à ceux de la photodiode, et on voit qu'ils sont nettement plus grand. C'est lent une photorésistance.

À quoi ça sert ?

Le montage est facile, on s'en sert pour faire des détecteurs d'intrusion. C'est pas spécialement moins cher qu'une photodiode, c'est juste deux techniques équivalentes dans les conditions considérées.

Un autre photorécepteur qui est en fait fondamentalement un agencement de photodiodes est le capteur CCD.

3 CCD

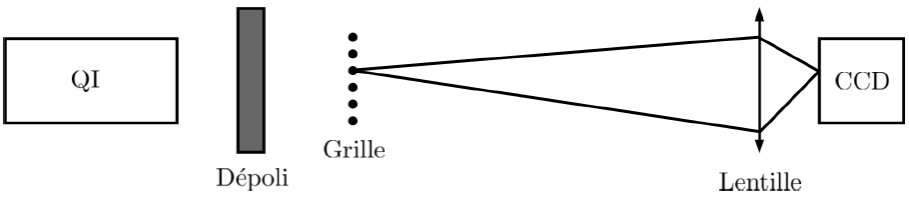
Un capeur CCD est une matrice de photodiodes, qui sert à réacliser des prises d'image. C'est aujourd'hui le remplacement des pellicules photos des appareils argentiques.

Cependant les appareils photos argentiques avaient un parametre qui et le grain de la pellicule. Il s'agit de la réslution chimique d'une pellicule. Le capteur CCD a aussi une résolution, qui est donnée par la taille de sa matrice, et la taille d'un pixel.

Le but de cette manip est de caractériser la taille d'un pixel de capteur CCD.

Fonctionnement du CCD

Les CCD (Coupled charge device = dispositif à transfert de charges) ont été inventés en 1970 par Boyle et Smith. Lorsque la zone photosensible d'un pixel est éclairée, il crée une pair électron/trou. Le trou migre vers la zone dopée p (une fois de plus !) et l'électron est piégé sous un isolant grâce à un puits de potentiel appliqué par un électron de l'autre côté de l'isolant. Les électrons s'accumulent pendant toute la durée d'acquisition. Pour la lecture, les électrons sont transférés de proche en proche (méthode des 3 phases) et sont lus à l'extrémité de la barrette vers une diode qui fait la conversion charge/tension.



Idée : Le CCD envoie un signal qui est en fait un ballayage de la ligne de pixel. À $t_i = i\delta_p t$ la ccd envoie le signal du pixel $i \mod N$ où N est le nombre total de pixels et $\delta_p t$ le temps passé sur chaque pixel.

- On éclaire la ccd par une fente ou un demi-plan. On trace à l'oscilloscope le signal de la CCD, et on y repère le temps sur lequel on a périodicité du signal. Ce temps correspond à $N\delta_p t$. On connait N grâce au manuel d'utilisateur (ou grâce à la lecture des propriétés du capteur via Caliens, ici c'est 2048 normalement). On mesure alors $\delta_p t$

- On fait maintenant l'image d'une grille sur la CCD, avec une lentille de focale bien connue (déterminée par Bessel, en notant d la distance entre les deux positions de conjugaison).

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D} \tag{12.3}$$

Incertitude (borne sup approximative) : $\Delta f' = f'\sqrt{5}\dfrac{\Delta D}{\sqrt{D^2 - d^2}}$.

Incertitude exacte : $\Delta f' = f'\sqrt{\left(2\dfrac{D\Delta D + d\Delta d}{D^2 - d^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta D}{D}\right)^2}$

$$A'B' = AB\frac{f'}{OA - f'}$$

- On note le temps de parcours d'une période de l'image du réseau $\delta_r t$, et on nomme n le nombre de pixels dans une période de l'image. On nomme aussi $\delta_r x$ la taille d'une période du réseau (c'est AB dans la formule au dessus), $\delta_r x'$ la taille d'une période dans l'image du réseau, et $\delta_p x$ la taille d'un pixel.

$$n = \frac{\delta_r t}{\delta_p t} = \frac{\delta_r x'}{\delta_p x} \tag{12.4}$$

Ainsi on a la formule magique suivante :

$$\delta_p x = \frac{\delta_p t}{\delta_r t} \times \delta_r x \frac{f'}{OA - f'} \tag{12.5}$$

Incertitude :

$$\frac{\Delta\delta_p x}{\delta_p x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\delta_r x}{\delta_r x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f'}{f'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta OA + \Delta f'}{OA - f'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\delta_p t}{\delta_p t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\delta_r t}{\delta_r t}\right)^2} \tag{12.6}$$

En gris, on y a pas accès. En noir, elles sont négligeables devant les rouges.

Il est bon de noter que $\Delta\delta_p t = \Delta t/N$ ou Δt est l'incertitude absolue de la mesure de période de l'oscilo ; et que $\Delta\delta_r t = \Delta t/M$ où M est le nombre de période que l'on mesure sur l'écran.

☕

Mesure de la résolution de la CCD

✍ ⏲ 10mn

Matériel : - QI à INTENSITÉ VARIABLE - Support diapo + diapo de réseau de trait (11 traits / cm c'est bien) - Diaphragme - Lentille 10 cm - Caliens (sur un support maniable, placée à 1 m de la diapo environ) - Oscilloscope.

Faire l'image de l'objet sur la barrette CCD du capteur grâce à la lentille. Suivant la taille de l'objet, ajustez les distances grille - lentille - capteur pour avoir un grandissement plus ou moins grand (le but étant que l'image rentre sur le capteur, mais prenne un maximum de place pour minimiser les incertitudes).

Mesurer successivement $\delta_p t$, f' et $\delta_r t$, puis en déduire $\delta_p x$.

Remarque : Si on peut compter visuellement le nombre de pixels dans une période, c'est bien aussi !

Pourquoi une grille plutôt qu'une fente ? Parce que les bords sont mieux définis.
Il faut élargir au maximum le faisceau de manière à éclairer le plus homogénement le dépoli, pour ne pas former l'image du dépoli éclairé. Le but est de diffuser au maximum pour perdre en luminosité.
Il ne faut pas que le capteur sature d'où la QI à intensité variable.
On doit pourvoir voir environ 7 traits. Compter le nombre de pixel et le nombre de traits.

Valeurs tabulées : 14μm d'après la notice, et une fréquence de ballayage de 1MHz pour 2048 pixels.

VOIR CCD.ods

MP 13

Pouvoir rotatoire, biréfringence

Commentaires du jury

Les questions :

- *Il y a des matériaux avec plus qu'un rayon ordinaire et un extraordinaire ?* Oui, les matériaux biaxes, dont la constante diélectrique dépend de tous les axes.
- *Est-ce que Babinet c'est vraiment des interférences ?* C'est un système de différence de marche entre les rayons ordinaires et extraordinaires, et l'analyseur recombine les deux composantes, permettant de faire interagir les deux rayons.
- *De quand date la loi de Biot ?* Début du 19eme.
- *Quels sont les types de glucose qui existent ?* Le D-glucose et le L-glucose, mais ici on a 94% de D environ. C'est du sucre commercial.

Conseils et remarques.

- Il faut bien tronquer ses incertitudes.
- gestion du temps assez aléatoire, il ne faut pas hésiter à couper la variation en λ.
- Il faut préparer les mesures et ne faire que quelques points pendant le montage.
- Il faut faire une jolie conclusion :)
- C'est bien de décrire le matériel et d'expliquer ce qu'il fait. Sur une manip pas classique, il faut décrire en détail.

Niveau : L2

Bibliographie

✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Presque tout
✍ *Expériences d'optique*, **Duffait** ⟶ Expérience de Babinet

Expériences

➢ Biréfringence d'un cristal de spath
➢ Mesure d'épaisseur d'une lame de quartz avec le compensateur de Babinet
➢ Pouvoir rotatoire du saccharose
➢ Dépendance du pouvoir rotatoire en longueur d'onde

1 Biréfringence linéaire 1121
1.1 Mise en évidence du phénomène 1121
1.2 Différence d'indice optique pour une lame épaisse de quartz. PAS LE TEMPS 1122
1.3 Mesure de l'épaisseur d'une lame mince de quartz 1123
2 Polarisation rotatoire 1124
2.1 Loi de Biot 1124
2.2 Dépendance en Longueur d'Onde 1126

La biréfringence est une propriété optique de certains matériaux à posséder des indices optiques différents selon la direction dans laquelle on les traverse. Les exemples typiques sont les cristaux non cubiques, comme les spath et les quartz.

1 Biréfringence linéaire

Il s'agit de jouer avec des polarisations linéaires, la théorie derrière pouvant se réécrire de manière matricielle.

1.1 Mise en évidence du phénomène

QUALITATIF - Biréfringence d'un cristal de spath

matériel : rhomboèdre de spath taillé parallèle à l'AO, QI + anticalorique, polariseurs x2, diaphragme, dépoli, lentille de 20cm.

Protocole :

- Vérifier les polariseurs
- Monter : QI - antica - (dépoli) - trou - rhombo - lentille - écran
- Voir deux images, qui tournent, et qui sont polarisées, et définir ordinaire et extraordinaire.

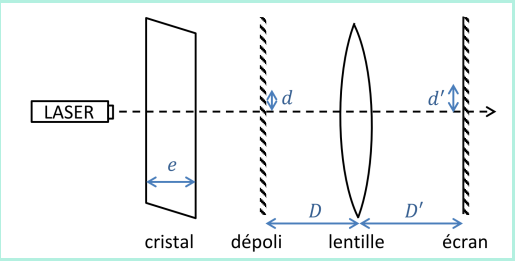
On met en évidence l'existence de deux rayons, avec deux indices différents, que l'on va essayer de caractériser.

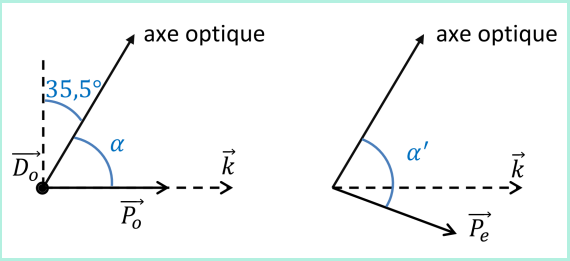
Calcul des indices du spath (calcite)

✍ Sextant - p. 281 ⏲ n minutes

On va prendre un laser, de préférence non polarisé ou polarisé à 45°de l'axe optique du spath, en incidence parallèle, et le faire passer au travers du spath. Cela va donner deux taches écartées de d. On fait ensuite l'image de ces taches sur un dépoli, puis sur un écran par lentille, et cela donne une distance mesurable d', qui nous permet de remonter à l'écart d'indice.

Il est à noter que la géométrie du cristal de spath donne un angle entre la face d'entrée et l'axe optique de 35,5°.





Théorie :

$$\varepsilon_e \tan(\alpha') = \varepsilon_o \tan(\alpha) \tag{13.1}$$

Protocole :

- Faire l'image des deux points du dépoli sur un écran
- Mesurer d' sur l'écran
- Donner $\gamma = \dfrac{D'}{D}$ et en déduire $d = d'/\gamma$.
- La déviation entre les 2 rayons est $\tan(\theta) = d/e$, avec e l'épaisseur du cristal.
- $\theta = \alpha - \alpha'$, avec $\alpha = 54,5°$, on en déduit α'.
- (13.1) donne $n_o/n_e = \sqrt{\tan\alpha'/\tan\alpha}$

Pour déterminer les deux indices, il faut maintenant utiliser les valeurs tabulées, trouvable dans des livres spécialisés ou sur internet.

Spath : $n_o = 1{,}658$ et $n_e = 1{,}486$

Quartz : $n_o = 1{,}54425$ et $n_e = 1{,}55338$ @590nm

Analyser la cohérence du résultat.

1.2 Différence d'indice optique pour une lame épaisse de quartz. PAS LE TEMPS

Duffait p150 On parle de lame épaisse lorsque les rayons ordinaires et extraordinaires ont une séparation spatiale qui n'est plus négligeable. Dans ces conditions, on peut alors observer des spectres cannelés.

Lignes neutres d'une lame épaisse de quartz

✍ Sextant - p. 283 ; Duffait p.152 ⏲ 4 minutes

Matériel : QI+AC, lentille CV 10 cm, lame épaisse, écran, 2 polariseurs
Conjuguer la lame et l'écran avec la lentille. Ajouter les polariseurs croisés. Tourner la lame pour rétablir l'extinction (2 positions).

Interférences en lumière polarisée et spectre cannelé de biréfringence

✍ Sextant p.290 ; Duffait p.152 ⏲ 5 minutes

Matériel : cf expérience précédente, prisme à vision directe, Spectro Spid HR
Placer le prisme à vision directe après A. Tourner la lame de sorte à ce que les lignes neutres fassent une angle de 45°avec P et A. Tourner ensuite de nouveau la lame pour observer le spectre cannelé.
Remplacer le prisme à vision directe par le spectromètre Spid HR. On doit repérer sur le spectre deux longueurs d'onde éteintes λ_1 et λ_2. Calculer le nombre p d'extinctions (cannelures) entre ces deux longueurs d'onde. On remarque que $e\Delta n = K\lambda_1 = (K+p)\lambda_2$ donc $K = \mathrm{p}\dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$On obtient alors

$$\Delta n = \frac{\mathrm{p}}{e}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

1.3 Mesure de l'épaisseur d'une lame mince de quartz

✍ Duffait p150

Le compensateur de Babinet et composé de 2 prismes ayant pour base un triangle rectangle et coulissant l'un sur l'autre selon leur hypothénuse. L'axe optique du premier prisme est vertical, l'axe optique (a.o.) du second est horizontale. L'idée est d'envoyer un onde polarisée à 45° par rapport à ces axes optiques. Cette onde peut être décomposée en 2 ondes : la première onde polarisée verticalement qui arrive parallèle à l'a.o. du premier prisme et qui verra l'indice n_e et ensuite perpendiculaire à l'a.o. du second prisme et qui verra n_o. La seconde onde, polarisée horizontalement, verra d'abord n_o puis n_e. On a alors une différence de marche entre les deux ondes. Si on les reprojette sur une même polarisation avec un analyseur, elles vont interférer.

Etalonnage du compensateur de Babinet

✍ Duffait - p. 150 ⏲ 6 minutes

Matériel : Laser+objectif de microscope, compensateur de Babinet, lentille conv de 10 cm, 2 polariseurs, filtre interférentiel, écran.

Dans un premier temps, placer P (polariseur) puis A (analyseur) et les croiser. Il ne faut alors plus toucher les orientations de P et A

Ensuite, retirer A et placer le Babinet. Avec la lentille, faire l'image du réticule du Babinet sur l'écran. Replacer derrière la lentille l'analyseur A et un filtre interférentiel λ_0 (le laser n'est pas parfaitement monochromatique). Le but de l'analyseur est de projeter les 2 ondes sur la même direction de polarisation (car deux ondes de polarisation différente ne peuvent interférer). On voit apparaître des franges.

Placer une frange claire entre les réticules, lire la valeur du vernier d_0. Déplacer 3 franges, noter la nouvelle valeur du vernier d_3. On obtient alors $\mathrm{d}_0 = \dfrac{\mathrm{d}_2 - \mathrm{d}_1}{3}$ qui est la distance entre deux franges claires consécutives.

Cette distance correspond à une différence de marche de λ_0, le compensateur est alors étalonné.

Mesure de l'épaisseur d'une lame mince de quartz

✍ Duffait - p150 ⏲ 6 minutes

On utilise cette fois une lampe QI avec un anticalorique. On voit alors apparaître des franges irisées. Placer la frange sombre centrale entre les réticules du compensateur. Noter la valeur $\mathrm{d}_{\mathrm{ref}}$ du vernier.

Placer la lame mince de quartz (la lame de 60 μm taillée parallèlement à l'axe optique marche bien pour l'expérience). La faire tourner pour obtenir un contraste de franges maximal (lorsque les lignes neutres de la lame sont à 45°par rapport à P et A). Replacer la frange noire entre les réticules et noter la nouvelle valeur $\mathrm{d}_{\mathrm{mes}}$. On a déplacé le vernier d'une distance d qui correspond à une différence de marche $\delta = \Delta\mathrm{n} \cdot \mathrm{e}$. On obtient δ grâce à l'étalonnage effectué au préalable :

$$\delta = \lambda_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_0}$$

On connaît Δn grâce à la partie précédente, on en déduit l'épaisseur e de la lame.

Incertitude :

$$u(\delta) = \delta \sqrt{\left(\frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{u(\mathrm{d})}{\mathrm{d}}\right)^2 + \left(\frac{u(\mathrm{d}_0)}{\mathrm{d}_0}\right)^2}$$

2 Polarisation rotatoire

Lorsqu'une lumière polarisée entre dans un milieu avec un pouvoir rotatoire, sa polarisation change. Elle va tourner, au fur et à mesure de sa progression dans le milieu. Ce phénomène peut s'observer facilement en polarisant de la lumière à l'aide d'un polariseur, et en l'analysant en sortie avec un analyseur. C'est le principe de la lumière polarisée analysée dans les microscopes.

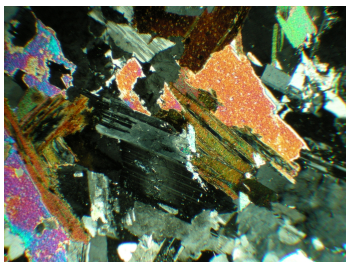


FIGURE 13.1 – Lame de quartz en lumière polarisée analysée au microscope

Mise en évidence par le quartz, *Sextant - p. 318*
Possibilité 1 :

Lumière polarisée analysée sur une lame de Quartz (très joli). On remarque des extinctions de certaines zones, preuve de la biréfringence et du pouvoir rotatoire du quartz.

Possibilité 2 :

Montage : Lumière - polariseur - quartz - analyseur - écran/capteur d'intensité.

On remarque que les polariseurs sont décalés pour un max et un min d'intensité.

Cette capacité qu'on certains matériaux à tourner la lumière est fort utile pour déterminer des concentrations ou des proportions en Chimie.

2.1 Loi de Biot

Dans cette section nous allons tacher d'utiliser a loi de Biot pour mesurer un pouvoir rotatoire, et remonter à une concentration.

$$\alpha = [\alpha]_s(\mathrm{T}, \lambda) \times \ell \times c \tag{13.2}$$

α : angle de rotation observé [°]

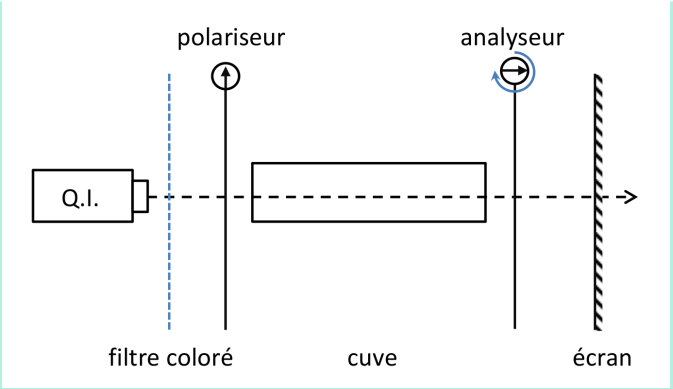
$[\alpha]_s$: pouvoir rotatoire spécifique (à T et λ donnés) [mL g/dm]

ℓ : longueur de la cuve [dm]

c : concentration [$\mathrm{g\,L^{-1}}$]

Concentration en Glucose

✍ Sextant - p. 318 ⏲ n minutes



Matériel : Q.I., filtre anti-calorique, filtre interférenciel, diaphragme, 2 polariseurs, lentille CV, 4 cuves P10.47, sucre en poudre, balance, écran.

Remarque : La solubilité du sucre dans l'eau étant énorme ($2\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ à 25°C), la seule chose qui limite vraiment les concentrations des cuves et le temps nécessaire à la dissolution.

Protocole :

- 4 cuves (P10.47, contenance d'environ 35 mL) de concentrations massiques en sucre différentes ($0/200/400/6.00 \times 10^2\,\mathrm{g\,L^{-1}}$ Pour cela diluer 60 g de sucre dans 100 mL d'eau, agiter un certain temps avec un agitateur magnétique puis effectuer les dilutions correspondantes.
- Polariser le faisceau en sortie de la QI.
- Mettre un analyseur orthogonal pour éteindre la lumière et intercaler la cuve.
- Mettre en évidence le pouvoir rotatoire, et la dépendance en λ (apparition de couleurs lorsqu'on est proche de l'extinction de lumière).
- Quantifier à l'aide d'un détecteur lumineux sensible.
- tracer $\alpha(c)$. On a un étalon

On peut maintenant remonter à la concentration en sucre de mon thé de ce matin ! En supposant qu'il n'y a que le glucose qui est optiquement actif, on a :

- Mettre le thé, trouver c.

Mais mon thé est chaud, et il y a potentiellement une dépendance en température. Il faut donc faire attention.

L'autre dépendance que l'on peut mettre en avant est la dépendance en longueur d'onde.

2.2 Dépendance en Longueur d'Onde

☕

Dépendance en lambda

✍ Ma pensée ⏲ n minutes

Reprendre la cuve de $6.00 \times 10^2\,\mathrm{g\,L^{-1}}$. On utilise des filtres interférentiels pour faire la dépendance en longueur d'onde.

On ne s'attend à rien en particulier, mais ça permet d'étalonner.

Conclusion

Phénomène de biréfringence into matériaux biaxes into traitement matriciel des rayonnements. Pouvoir rotatoire into caractérisation chimique de solutions.

MP 14

Polarisation des ondes électromagnétiques

Commentaires du jury

- **2017 :** L'analyse d'une lumière polarisée quelconque par utilisation d'une lame quart d'onde dans un cas quelconque, sans comparaison avec rien de connu présente peu d'intérêt.
- **2014-2016 :** Ce montage permet d'explorer les ondes électromagnétiques au-delà de la gamme spectrale de l'optique. Le jury constate que la loi de Malus est souvent mal réalisée et mal exploitée ; les candidats gagneraient à réfléchir au choix de la source : spectrale, blanche avec filtre, laser polarisé ou non polarisé. Enfin, il faut connaitre le principe des polariseurs utilisés, que ce soit des polariseurs dichroïques ou de simples grilles dans le cas des ondes centimétriques.
- **2010-2013 :** Il s'agit ici d'étudier les propriétés des ondes lumineuses. Il est indispensable de différencier, si possible par des expériences, polarisation partielle et polarisation elliptique, même remarque pour la lumière naturelle et polarisation circulaire. La loi de Malus est souvent mal réalisée et mal exploitée : réfléchir au choix de la source : spectrale, blanche avec filtre, laser polarisé ou non polarisé. Il faut connaître le principe de fonctionnement du détecteur utilisé (photodiode, luxmètre).
- **2009 :** La confusion entre polarisation partielle et polarisation elliptique n'est pas acceptable.
- **1999 :** Il est intéressant d'analyser la lumière produite dans des conditions non artificielles réflexion sur un miroir métallique, sur un dioptre en incidence quelconque ...

Bibliographie

✍ *Notice des émetteurs/récepteurs Nova WEC910 P89.25*	Ondes centimétriques
✍ *Tout-en-un PC-PC**, **Sanz**	Caractérisation polarisation
✍ **Sextant**	Réflexion sur un conducteur
✍ **FLTCLD**	Interférences et biréfringence

1 Polariseurs 1128
1.1 Loi de Malus pour des ondes centimétriques 1128
1.2 Caractérisation d'un couple de polariseurs dichroïques 1129
2 Réflexion vitreuse 1130
2.1 Étude de la lumière réfléchie 1130
2.2 Étude de la lumière transmise 1132
3 Réflexion métallique 1133

Introduction

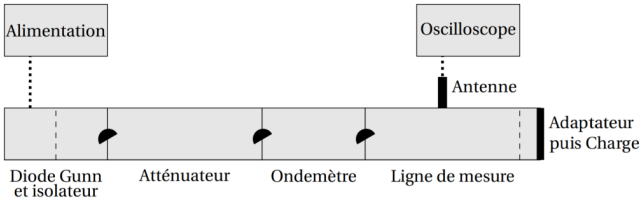
la polarisation est par définition la direction du vecteur champ électrique dans l'espace. Elle est une caractéristique fondamentale des champs électro magnétiques et permet de comprendre de nombreux phénomènes de la physique des ondes. Cependant, son étude est compliqué car l'homme ne peut pas percevoir la polarisation des ondes, contrairement à certaines espèces comme les abeilles. Le but de ce montage est de regarder comment il est possible de caractériser ces différentes polarisations. Tout d'abord, nous allons étudier la création de polarisation à l'aide de polariseurs.

1 Polariseurs

Un polariseur ça transforme une lumière quelconque en lumière projetée sur une polarisation.

1.1 Loi de Malus pour des ondes centimétriques

Dans cette première partie, nous nous intéressons aux ondes centimétriques de fréquence caractéristique de l'ordre du GHz. Ces ondes sont omniprésentes dans notre vie de tous les jours puisqu'elles correspondent au réseau Wi-fi de nos téléphones portables. Pour étudier leur polarisation, nous utiliserons un banc hyperfréquence



Détail des composants

- La diode Gunn est une antenne qui envoie des ondes électromagnétiques en entrée du banc. Celui-ci se comporte comme une cavité rectangulaire ou guide d'ondes ne laissant passer qu'une certaine gamme de fréquences en fonctions de ses contraintes géométriques. La pulsation de coupure correspondant à un mode (n,m) incident est alors :

$$\omega_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2$$

  où a et b correspondent respectivement à la longueur et la largeur du banc. Ici, a = 2,3 cm et b = 1 cm : le seul mode pouvant se propager dans le guide d'ondes est donc le mode (1,0) pour lequel la fréquence de coupure ($\omega_{1,0}$ = 6.5 GHz) est plus petite que les fréquences de travail de la diode (entre 8,5 GHz et 9,5 GHz). La fréquence initiale de la diode se contrôle à l'aide d'une vis micrométrique.
- Pour éviter que la diode ne soit perturbée par les ondes réfléchies, on place un isolateur en sortie de la diode pour fermer la cavité.
- L'atténuateur aura un rôle particulier expliqué juste après.
- L'ondemètre ou fréquencemètre est un résonateur d'Helmholtz [a]. Lorsque l'on regarde l'intensité de l'onde stationnaire dans la cavité à l'aide de l'oscilloscope, l'intensité reçue diminue si le résonateur d'Helmholtz a une fréquence de résonance égale à la fréquence initiale. En utilisant une autre vis micrométrique pour changer la fréquence de résonance du résonateur d'Helmholtz, on peut déterminer précisément la fréquence initiale de l'onde.

a. https://fr.wikipedia.org/wiki/Résonance_de_Helmholtz

Comme expliqué précédemment, une seule onde peut se propager dans le banc hyperfréquences. C'est une onde de polarisation rectiligne, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde : elle doit donc vérifier la loi de Malus. Pour s'en convaincre, on place en sortie du banc un cornet faisant office d'émetteur. En face de lui (à au moins une vingtaine de centimètres pour exclure les effets de diffraction), on place un second cornet faisant office de récepteur que l'on peut tourner d'un angle θ. L'onde arrivant au récepteur a donc une intensité de la forme :

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

La principale difficulté provient de la mesure de la tension : en effet, la conversion intensité reçue-tension par le récepteur n'est pas linéaire. Pour pallier ce problème, on va utiliser l'atténuateur présent sur le banc hyperfréquence. On va mesurer de combien on doit atténuer (algébriquement) l'onde pour que le détecteur mesure tout le temps la même intensité. L'intérêt de faire ça c'est que les courbes d'atténuation on les connaît !

protocole en 2 secondes : Je me place à angle nul. J'ai U=Uref, je met un angle α non nul, j'ai un autre U plus faible. Je diminue la valeur d'atténuation jusqu'à retrouver Uref. Alors je sais que la différence d'atténuation vaut $\Delta A = 10 \log \frac{I_\alpha}{I_0}$

Loi de Malus au banc Hyperfréquences

✍ ⏲

Monter le banc avec une lecture d'angle possible. Régler à 9GHz (on a une atténuation tabulée), mettre 25cm entre emeteur et recepteur, trouver le $\alpha = 0$, et vérifier la loi de malus.

$I = I_{ref} 10^{\Delta A/10}$

Ne pas oublier les $\pm\alpha$ pour avoir une incertitude d'ordre 2.

Polariseurs

Faire joujou avec la grille, et faire la parallèle avec le pola dichroïque : polymère étirés.

1.2 Caractérisation d'un couple de polariseurs dichroïques

Dichroısme : propriété qu'ont certains matériaux anisotropes d'absorber différemment une composante vectorielle du champ électrique.

Ici ce sont des polymères allongés qui par Joules absorbent le champs. Ces polariseurs sont caractérisés par des facteurs de transmission H0 (quand deux polariseurs sont en configuration parallèles) et H90 (quand les deux polariseurs sont en configuration croisés).

Caractérisation de la sélectivité d'un couple de polariseurs

✍ ⏲

On peut caractériser un couple de polariseurs à l'aide des rapports d'intensité des spectres. Il nous faut alors : une QI jamais sans son AC, un couple de polariseurs, loin de la QI pour avoir des rayons peu inclinés par rapports aux polariseurs, spectroscope (grosse boite blanche) avec spid HR ; sensibilité à 10ms, décocher le "gérer automatiquement" pour garder la même baseline pour les trois spectres ; moyenne - une dizaine de spectres.

Faire 1 spectre de référence pour le signal de la QI I ref , un pour les polariseurs config. parallèles I para, et un

pour la config. croisée I croise. Exporter ses spectres un par un en fichier texte pour les lire sur Latis pro.

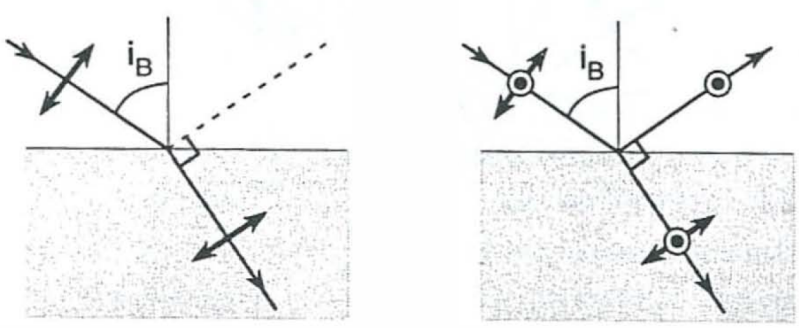
On observe un coefficient H 0 ~ 0.30 et un coefficient H 90 $\sim 10^{-4}$ comme donné dans la référence. Ces coefficients sont valables dans la gamme du visible mais plus en IR ; En effet les polariseurs n'ont pas une bonne réponse en IR, les molécules ne répondant plus à des excitations à ces longueurs d'onde.

2 Réflexion vitreuse

2.1 Étude de la lumière réfléchie

Lorsqu'un onde arrive sur la surface d'un milieu diélectrique, elle est partiellement réfléchie. Les ondes refractée et réfléchie sont partiellement polarisées (on peut le montrer avec un polariseur dichroïque).

Cependant, il existe un angle d'incidence précis pour lequel l'onde réfléchie est complètement polarisée perpendiculairement au plan d'incidence (donc parallèlement à la surface). Cet angle est appelé **angle de Brewster** i_B. Ainsi, une polarisée dans le plan d'incidence ne sera pas réfléchie à l'angle de Brewster.



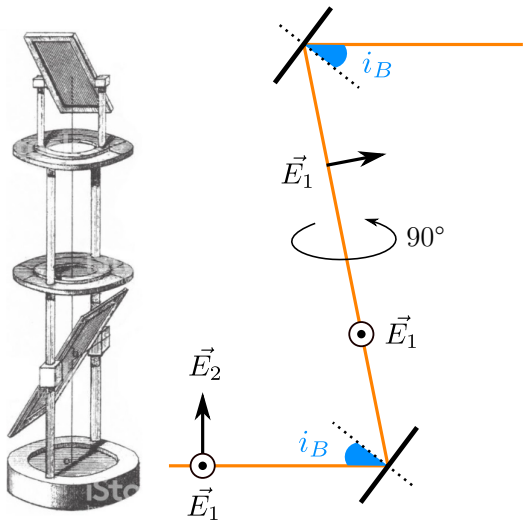
Notons t_B l'angle du rayon transmis et r_B l'angle du rayon réfléchi. On a d'office $i_B = r_B$. De plus, à l'angle de Brewster, le rayon réfracté a une direction orthogonale à celle du rayon réfléchi donc $t_B = \frac{\pi}{2} - r_B = \frac{\pi}{2} - i_B$. En partant de Snell-Descartes, on a :

$$n_1 \sin i_B = n_2 \sin t_B = n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_B\right) = n_2 \cos i_B \tag{14.1}$$

On obtient donc finalement l'expression de i_B :

$$i_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{14.2}$$

On va mesurer cet angle pour du verre avec l'appareil de Nörremberg.



Le premier miroir polarise l'onde incidente à l'angle de Brewster i_{B1} : seule la composante perpendiculaire à l'interface est réfléchie. A l'arrivée du deuxième miroir, la lumière est complètement éteinte à l'angle de Brewster i_{B2} car l'onde précédemment perpendiculaire à l'interface est maintenant contenue dans le plan de l'interface à cause de l'angle de 90°entre les deux miroirs. On mesure donc deux fois l'angle de Brewster d'une interface air/verre, en supposant que le verre des miroirs est le même.

Mesure de l'angle de Brewster avec l'appareil de Nörremberg

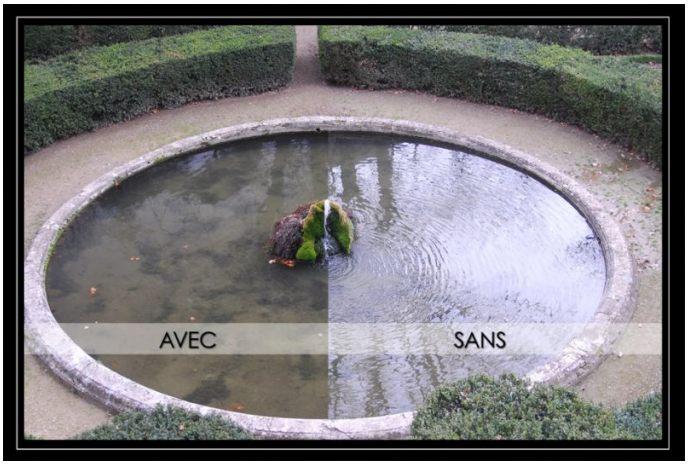
✍ ⏲

Éclairer le premier miroir et montrer à l'aide d'un polariseur en sortie que la lumière n'est pas polarisée (pas d'extinction). Chercher l'angle pour lequel la lumière s'éteint complètement en modifiant l'inclinaison du miroir : la lumière a alors bien été polarisée à l'interface et on peut lire une première mesure de $_B$.

Enlever maintenant le polariseur en sortie du système et réitérer l'opération avec le deuxième miroir jusqu'à ce que la lumière s'éteigne complètement : on a notre deuxième valeur de i_B.

Note : cette expérience peut être rendue plus quantitative en répétant plusieurs fois la mesure des deux angles, réduisant ainsi l'incertitude de type A.

Ce phénomène est très utilisé en photographie par exemple car il permet d'éliminer les réflexions parasites avec un polariseur. C'est également le principe des lunettes de soleil polarisées.

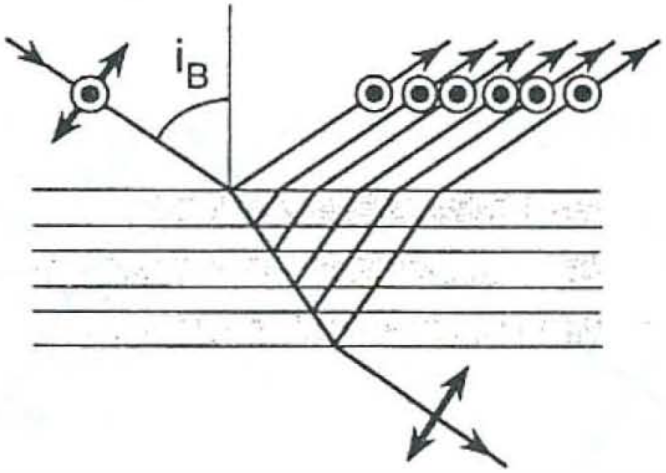


2.2 Étude de la lumière transmise

✍ Sextant p271

Le rayon transmis se polarise lui aussi partiellement à l'angle de Brewster. Ainsi, le rayon transmis (rayon n°2) arrive de nouveau sur une interface air/verre avec un angle d'incidence i_B et sera alors de nouveau séparée en un rayon réfléchi totalement polarisé et un rayon n°3 transmis un peu plus polarisée que le rayon n°2, car un partie de l'onde polarisée perpendiculairement au plan d'incidence est passée dans l'onde réfléchie.

Ainsi, si on rajoute $2N$ interfaces (*i.e.* N lames de verre), on se retrouve avec une onde transmise quasi-totalement polarisée dans le plan d'incidence.



À chaque interface, le coefficient de transmission vaut $T = 1 - R = 1 - \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^2$ en prenant $n_{\text{air}} = 1$ et avec n l'indice du verre. Pour $n \simeq 1.5$, on trouve $T \simeq 1 - 0.11 = 0.89$.

Pour quantifier à quel point une onde est polarisée, on définit le **taux de polarisation rectiligne** η par :

$$\eta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \tag{14.3}$$

avec $I_{\max}$ et $I_{\min}$ les intensités maximale et minimale obtenue en faisant tourner un analyseur en sortie.

Pour une lumière totalement polarisée, $I_{\min} = 0$ donc $\eta = 1$ tandis que pour une lumière non polarisée *rectilignement* on a $I_{\max} = I_{\min}$ et donc $\eta = 0$.

On peut montrer que ce taux de polarisation est relié au coefficient de transmission T (et donc à R par :

$$\eta = \frac{1-T^{2N}}{1+T^{2N}} = \frac{1-(1-R)^{2N}}{1+(1-R)^{2N}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1-\eta}{1+\eta} = 2N\ln(1-R) \tag{14.4}$$

☕

Vérification de l'expression 14.4

✍ Sextant p271 ⏲ 10 min

Matériel : Photodiode + Multimètre + Laser polarisé + Deux polariseurs + Plaque tournant munie d'un rapporteur + Lames de verre et support en bois

Il est nécessaire d'utiliser un faisceau incident polarisé, d'intensité stable et bien collimaté : en pratique, prendre un laser polarisé dont on place la direction de polarisation à 45° du plan d'incidence. Envoyer le faisceau sur une pile de lames sous incidence de Brewster.

Analyser le faisceau transmis à l'aide d'un polaroïd ; grâce à une photodiode, mesurer les signaux $I_{\parallel}$ et $I_{\perp}$ correspondant aux positions du polaroïd dans le plan d'incidence et perpendiculairement à celui-ci.

On en déduit $\eta = \dfrac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\parallel} + I_{\perp}}$. La mesure de η peut se faire directement à partir des tensions $U_{\max}$ et $U_{\min}$ si on vérifie que la tension délivrée est bien linéaire au flux de photons (étalonnage avec Malus ?).

Tracer $\ln\dfrac{1-\eta}{1+\eta} = f(N)$ pour vérifier la loi et remonter à R. On attend $R \simeq 0.15$.

3 Réflexion métallique

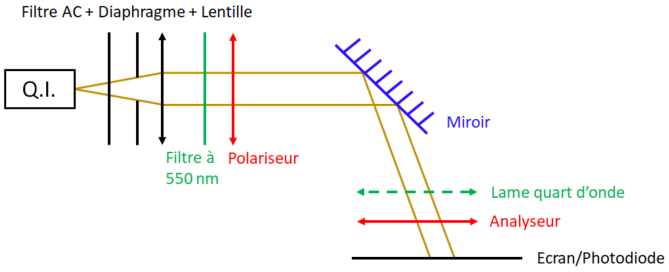
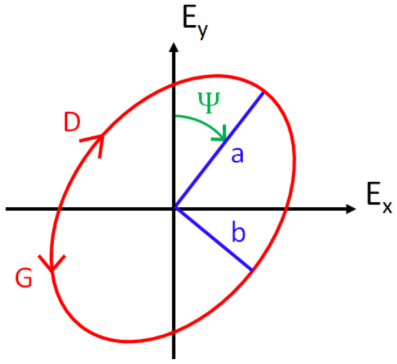


FIGURE 14.1 – Schéma du montage pour l'étude de la polarisation par réflexion sur un métal. L'onde incidente est polarisée rectilignement à l'aide du polariseur et analysée après réflexion à l'aide de l'analyseur et de la lame quart d'onde.

On s'intéresse au montage Figure 14.1. On considère une onde incidente non polarisée en incidence infini (lentille de focale f' = 10 cm) que l'on polarise rectilignement avec un polariseur et on regarde l'onde réfléchie par la réflexion sur une surface de métal à l'aide d'un analyseur. Si le métal est parfait, on s'attend à ce que l'onde en sortie soit également polarisée rectilignement (voir le cours d'Electromag de Jérémy pour plus de précisions sur les calculs (début du chapitre 7 sur les guides d'ondes)) et donc avoir une exctinction complète de l'onde pour un angle particulier de l'analyseur. Pour autant, l'onde en sortie ne présente pas de minimum nul : on est donc face à une onde polarisée elliptiquement. En omettant les lumières non polarisées, c'est le cas le plus général de polarisation que l'on peut avoir (les polarisation circulaire et rectiligne n'étant que des cas particuliers).



Pour caractériser cette polarisation, quatre critères sont nécessaires.

- Les demi-grand axe a et demi-petit axe b. On utilise pour cela une photodiode en sortie pour mesurer les intensités maximale I max et minimale I min tel que :

$$\epsilon = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{I_{max}}{I_{min}}}$$

- L'angle ψ de rotation par rapport à l'axe y du polariseur. On le trouve directement en regardant la différence d'angle relative entre le polariseur et l'analyseur lorsque l'on est à un maximum (**ATTENTION :** ψ doit être inférieur à 90°, il faut donc faire attention au signe de ψ !).

- Le sens de parcours de la polarisation (gauche ou droit). Pour le déterminer, on va avoir besoin de mettre une lame $\lambda/4$ avant l'analyseur qui permet de transformer la polarisation elliptique en polarisation rectiligne pour une longueur d'onde précise (d'où le filtre interférentiel mis en amont du polariseur) et lorsque l'un des axes neutres de la lame quart d'onde se confond avec celui de l'un des axes de l'ellipse. Le minimum sera alors rigoureusement nul.

ATTENTION : on touche ici le point sensible de ce montage. En effet, on va supposer pour la suite que la languette présente sur la lame quart d'onde correspond à l'axe rapide de la lame (voir le Dunod pour plus de précisions) : cela veut dire que si l'on a besoin de tourner la lame quart d'onde vers la droite pour trouver le minimum nul, la polarisation elliptique de départ avait un sens de parcours droit. Cette hypothèse est complètement arbitraire et ne peut pas être vérifiée sans données constructeurs complémentaires.

☕

Mesure de polarisation elliptique par réflexion métalique

✍ ⏲

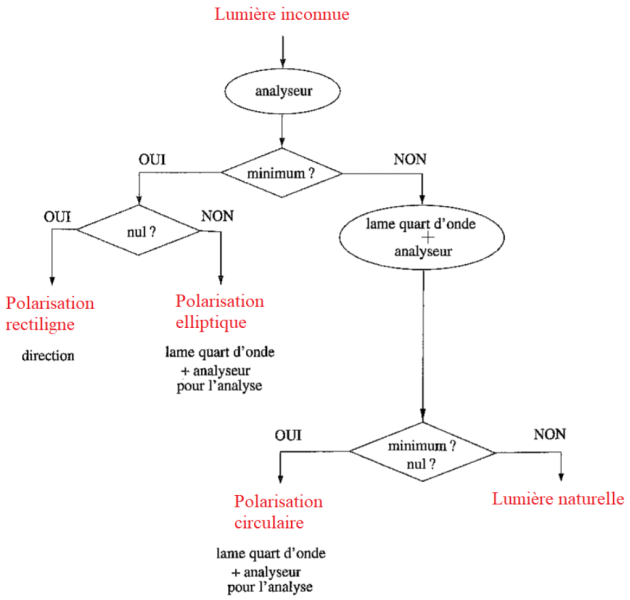
Placer le polariseur en sortie du système (QI + filtre AC + diaphragme + lentille) avec un angle arbitraire QUI NE BOUGERA PAS POUR LE RESTE DE LA MANIP'. Placer alors l'analyseur en sortie et vérifier que la lumière s'éteint lorsque les deux polariseurs sont croisés. Placer également la lame quart d'onde entre les deux et montrer que la lumière s'éteint lorsque la languette de la lame quart d'onde est alignée avec celle du polariseur : on a donc trouvé l'un des axes neutres de la lame quart d'onde et on supposera dans la suite qu'il correspond à l'axe rapide comme discuté précédemment.

Retirer maintenant la lame quart d'onde, et placer le métal entre les deux polariseurs avec un angle d'incidence très élevé sur le métal pour pouvoir effectuer les mesures (un angle d'incidence trop faible ne donne pas de résultats concluants). Montrer qualitativement que la polarisation n'est plus éteinte (le métal n'est donc pas parfait) et mesurer les valeurs d'intensités minimale et maximale reçues à l'aide d'une photodiode. Nous avons ici la valeur d'ϵ. Mesurer la différence d'angle entre le polariseur et l'analyseur pour un maximum d'intensité pour retrouver ψ.

Pour le sens de parcours, placer la lame quart d'onde avant l'analyseur avec la languette confondue avec l'axe du maximum d'intensité de l'ellipse : LA LAME QUART D'ONDE NE DOIT PLUS BOUGER. Tourner l'analyseur pour voir si la polarisation elliptique est gauche ou droite en prenant en compte l'hypothèse discutée précédemment. Un code Python permet alors de tracer directement l'ellipse obtenue après réflexion sur le métal.

Conclusion

On a présenté ici une manière de caractériser une polarisation elliptique. De manière plus générale, le schéma ci-dessous résume les différentes étapes à suivre pour caractériser une polarisation inconnue. C'est un schéma à avoir en tête pour savoir rapidement si une lumière a une polarisation rectiligne, elliptique, circulaire (non présenté dans ce montage) ou si elle n'a tout simplement pas de polarisation comme les lumières naturelles.



Dans ce montage, on a présenté différents types de polarisation qui existent dans la nature pour diverses ondes électromagnétiques. Elles ont toutes leurs particularités et leurs intérêts. La polarisation rectiligne est utilisée pour les télécommunications, la polarisation elliptique peut être utilisée comme précédemment pour remonter aux coefficients de Fresnel d'un métal et les lunettes 3D utilisent la polarisation circulaire pour donner deux images différentes aux yeux et créer cet effet de pronfondeur. La polarisation est donc une donnée cruciale à prendre en compte et à savoir caractériser pour tout montage incluant des ondes électrmoagnétiques.

MP 15

Production et mesure de champ magnétique

Commentaires du jury

- 2017 : La mesure de champs de différents ordres de grandeur peut être intéressante. L'utilisation d'un électroaimant nécessite de savoir justifier le choix des pièces polaires, les non-linéarités champ-courant.
- 2015, 2016 : La sonde à effet Hall est souvent le seul instrument de mesure présenté dans ce montage. D'autre part, les mesures de champs magnétiques ne sont pas limitées à ceux qui règnent dans l'entrefer d'un électroaimant.
- 2013, 2014 : La sonde à effet Hall est souvent le seul instrument de mesure présenté dans ce montage. Trop de candidats ignorent son principe de fonctionnement. D'autre part, les mesures de champs magnétiques ne sont pas limitées à ceux qui règnent dans l'entrefer d'un électro-aimant. L'étalonnage de l'électroaimant permet cependant une étude quantitative.
- 2012 : Cette année encore, l'utilisation de la sonde à effet Hall a été mieux maîtrisée et les expériences présentées plus variées. Les différentes stratégies de production de champ magnétique peuvent être mises en regard des applications éventuelles.
- 2010 : La sonde à effet Hall est souvent le seul instrument de mesure présenté dans ce montage. Trop de candidats ignorent son principe de fonctionnement. D'autre part, les mesures de champs magnétiques ne sont pas limitées à ceux qui règnent dans l'entrefer d'un électro-aimant...
- 2005 : L'ordre de grandeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre être connu. Il en est de même de l'existence d'un décalage systématique du zéro d'une sonde à effet Hall également.

Bibliographie

✍ *Dictionnaire de physique. Tome 4. Électricité et application*, **Donnini et Quaranta** ⟶ Tout.

1 Production de champ permanent 1138
2 Production contrôlée de champ 1138
2.1 Champ créé par une bobine sur son axe 1139
2.2 Électroaimant 1140
3 Mesure de champ 1141
3.1 Fluxmètre 1141
3.2 Effet Hall 1143

Introduction

Le but de ce montage est d'illustrer la production et la mesure de champ magnétique, l'utilisation de champ magnétique en science étant primordial dans la recherche fondamentale. En effet on a par exemple besoin d'énormes champs magnétiques (plusieurs Teslas, qui rappelons le est une grosse unité) dans CMS (Compact Muon Solenoïd) afin d'étudier la structure des noyaux d'atomes.

Il est aussi nécessaire dans la vie de tous les jours, pour faire des bousolles, des disques dur, des magnets en forme de dino sur les frigos. Dans ces trois derniers cas, on parle d'aimants permanents.

1 Production de champ permanent

Les matériaux ferromagnétiques on la propriété de garder un champ magnétique rémanent lorsqu'ils ont été soumis à un champ extérieur.

Montrer un magnet dino, visualiser des lignes de champ sur un aimant néodyme et autres. Alignement des petites bousolles sur les lignes de champ (couple, tout ça tout ça).

ODG de champ :

Matériaux	$B_{rémanent}$ (T)	$H_{cohercitif}$ (kA/m)	remarque	valeur mesurée
Fer	0.01	10	aimants historiques	
Ferrites	0.1	200	moins chers	
Bore/Néodyme	1	1500	Terres Rares	

Vérifions ces ordres de grandeur tout de suite, à l'aide de ce qui est pour le moment une jolie boite noire : un teslamètre.

Mesurer des champs magnétiques

✍ 30s

On fait bien le zéro dans le blindage adapté, et on fait la mesure en montrant que la variation dans l'espace est chelou et difficilement controlable.

Les aimants permanents, on s'en sert dans les petits moteurs, les disques durs et les haut parleurs, mais on ne contrôle pas grand choses. Pour avoir un meilleurs contrôle de la forme des lignes de champ et de leur intensité, on utilise des électroaimants.

2 Production contrôlée de champ

Les équations de Maxwell prévoient qu'un courant créé un champ magnétique.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

Constater l'existence de champ magnétique si on prend une bobine de Helmoltz et que l'on y met quelques ampères. Prendre deux bobines de Helmoltz et montrer que le champ est nettement plus dirigé.

2.1 Champ créé par une bobine sur son axe

C'est la partie qui peut sauter si on a pas le temps, la préparer en dernier

✍ Quaranta 4 p.321

Principe On a une bobine dans laquelle on fait passer un courant constant, on peut alors caluler le champ B avec les symétries et la loi de Biot et Savart. On obtient la distribution :$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}\left(1+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$ **Hypothèses**

- Bobine plate, petite
- Sur l'axe

Mesure du champ créé par une bobine sur son axe

✍ Quaranta 4 p322 ⏲

On utilise le dispositif Jeulin des bobines de Helmotz P77.4 en utilisant une seule et le teslamètre commercial. On trace $B(x) = a\left(1+\frac{(x-b)^2}{R^2}\right)^{-3/2}$.

Le paramètre b permet de rendre de compte d'un mauvais repérage du centre, le paramètre a permet de remonter à μ_0 connaissant N,I et R que l'on mesure expérimentalement.

Incertitudes :

- Mesure du champ
- Mesure du rayon
- Attention au fit non-linéaire
- Il est probable de tomber un peu à coté

> *On obtient un champ, plutôt faible et le champ n'a pas de propriétés particulières. Si on branche les deux bobines en série, en configuration Helmotz, on obtient un champ globalement homogène entre les deux bobines. Si on les excite en inverse (Anti-Helmotz), on obtient un gradient de champ constant. Quoiqu'il arrive, on obtient un champ relativement faible. Mais on voit que le champ est proportionnel à μ, on va donc utiliser un matériau ferromagnétique. Cela a pour autre avantage de nous permettre de canaliser les lignes de champ*

↓

Si on doit présenter cela, la configuration anti-Helmotz est plus intéressante car on forme un gradient constant (et un champ constant on le fait après)

2.2 Électroaimant

Comment on fait pour canaliser et avoir un champ bien vénère ? On fait un électroaimant en canalisant les lignes de champ avec un ferromagnétique.

Le ferromagnétisme

L'utilsation d'un milieu ferro a un but double : amplifier la valeur du champ par μ_r, qui peut monter jusqu'à 5000 pour du fer, et canaliser le flux magnétique créé pour le concentrer dans un entrefer.

Le champ dans l'entrefer vaut (✍ Quaranta IV p.149), avec e la largeur de l'entrefer, l la longueur du matériaux ferro, N le nombre de spires de l'électroaimant, et I l'intensité dedans.

$$B = \frac{\mu_0 NI}{e} \frac{1}{1 + \frac{l}{e\mu_r}} \tag{15.1}$$

Mais en faisant l'hypothèse d'un μ_r grand on a

$$B = \frac{\mu_0 NI}{e} \tag{15.2}$$

Hypothèses

- Entrefer petit (pas de perte de ligne de champ) et pièces plates
- Matériau doux
- loin de la saturation
- entrefer suffisamment grand (énergie dans l'entrefer et pas dans le circuit) : $e \gg \frac{\ell}{\mu_r}$

Champ créé par un électroaimant

✍ Quaranta 4 p.172

On utilise l'électroaimant habituel, on mesure le champ créé au teslamètre [a]. Il y a deux études possibles : B=f(e) et B=f(I)
B=f(I) : indispensable car c'est l'étalonnage de l'électroaimant pour la suite. On fait varier l'intensité, toujours en montant [b] et on mesure le champ créé. On doit obtenir une droite au début puis on voit apparaître l'effet de saturation du ferro doux qui compose les pièces et le circuit magnétique. On fait un fit par un polynôme d'au moins ordre 3. celà sera notre étalonnage pour la suite du montage. Penser à noter l'épaisseur à laquelle on l'a fait si on fait l'étude suivante.
B=f(e) : Moins important, mais reste sympa, à voir si on a le temps de faire les points en préparation. En choisissant bien le point à faire en live, il peut rentrer dans les deux études [c]. Il peut être difficile de mesurer directement l'entrefer donc on met au contact les deux pièces (courant coupé) et on mesure la distance e_0 entre les bobines. On mesure ensuite les distances e' entre les deux bobines et on a $e = e' - e_0$. On trace $B = f(\frac{1}{e})$, le coefficient directeur est $\mu_0 NI$, on peut ainsi remonter à N, qui vaut environ 1300-1400, pas de valeur constructeur.

a. Deux écoles : soit on le fixe et il ne bouge plus jamais (pas très pratique), soit on l'approche à chaque fois et on fait la mesure dans les deux sens pour enlever l'effet des soudures (je préfère celle là perso)
b. #hystérésis
c. Prendre le point à l'intensité à laquelle on a fait l'étude d'épaisseur et à l'épaisseur pour laquelle on a fait l'étude en intensité

Incertitudes :

- Position de la sonde
- Distance mesurée au pied à coulisse
- Intensité à l'ampèremètre

Remarques en tous genres

Approximations : si e trop grand, tout le champ ne passe pas dans l'entrefer. Si e trop petit, on rate l'approximation. Il faut trouver un entredeux.

Aimantation rémanente : modèle affine !

Soudure : on retourne le teslametre. Ou alors on montre que c'est négligeable et CIAO ! !

On sait donc créer des champs magnétiques, depuis le début on a utilisé un teslamètre commercial auquel on fait confiance pour mesurer ces champs magnétique. Il est maintenant temps de voir comment faire la mesure de ces champs. Pour cela, on va utiliser l'électroaimant étalonné et utiliser deux types de sondes.

3 Mesure de champ

3.1 Fluxmètre

✍ Quaranta tome 4 p189, p229 et 215

Une première méthode consiste à exploiter la loi d'induction de Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{15.3}$$

Pour cela, on considère une bobine plate (par exemple la bobine P50.8) constituée de N spires chacune de section S. On appellera abusivement cette bobine *fluxmètre*.

Si on fait passer cette bobine d'une région où $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ à une région où $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{cste}} \neq \overrightarrow{0}$ tel que $\overrightarrow{B} \parallel \overrightarrow{S}$ (donc normal à la surface S), elle subira une variation de flux

$$\Delta\Phi = NSB \tag{15.4}$$

La loi de Faraday nous dit alors qu'une tension e va apparaître aux bornes de la bobine à cause de cette variation de flux, et que cette tension est donnée par :

$$e = -NS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \tag{15.5}$$

On voit ainsi qu'on peut remonter à la valeur de B en intégrant e :

$$B = -\int \frac{e}{NS}\mathrm{d}t \tag{15.6}$$

Remarque

Rigoureusement, l'intégration se fait entre 2 instants t_0 et $t_1 > t_0$ donc on mesure $B(t_1) - B(t_0)$. Cependant, la bobine est initialement dans une région où $B(t_0) = 0$, ce qui permet d'obtenir directement $B(t_1)$.

On n'a donc pas besoin d'étalonnage ! !

Il reste la question de l'intégration de e. Pour cela, plusieurs montages sont possibles :

- intégration mécanique : c'est le fluxmètre à aiguille
- intégration numérique via un ordinateur ou un oscilloscope
- intégration électronique via un AO en montage intégrateur donc la sortie U est proportionnelle à l'intégrale de l'entrée :

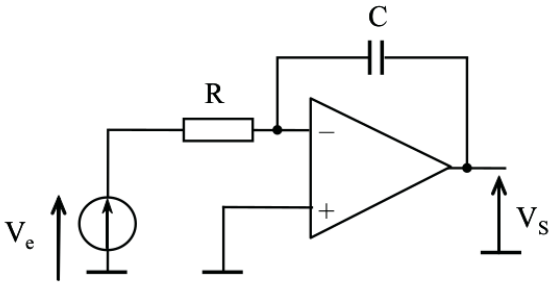
$$U = -\frac{1}{RC}\int e\mathrm{d}t = \frac{NS}{RC}B$$

Si on veut, on peut aussi directement utiliser un boîtier intégrateur.

Fonctionnement de l'intégrateur

5.4.4 Montage intégrateur

La figure 5.16 donne l'exemple d'un intégrateur pur. Le courant d'entrée de l'amplificateur opérationnel étant nul, le courant I qui passe dans la résistance R est le même qui parcourt le condensateur. Il en résulte :



$$\begin{cases} I = \dfrac{V_e(t)}{R} = -C\dfrac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} \\ V_S(t) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_{-\infty}^{\mathrm{t}} V_e(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Figure 5.16 Montage intégrateur.

La tension de sortie est proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée. On dit que le montage est un intégrateur pur. En régime établi, la fonction de transfert devient :

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

Remarque. Ce montage est en boucle ouverte pour le continu et il risque de ne pas fonctionner correctement. Généralement on ajoute une résistance de forte valeur aux bornes du condensateur ($R' = 1\ \mathrm{M\Omega}$ par exemple). Le diagramme de Bode en amplitude devient comme indiquée à la figure 5.18.

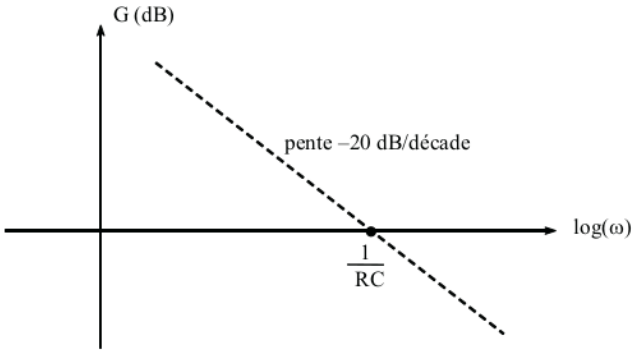


Figure 5.17 Diagramme de Bode en amplitude d'un intégrateur.

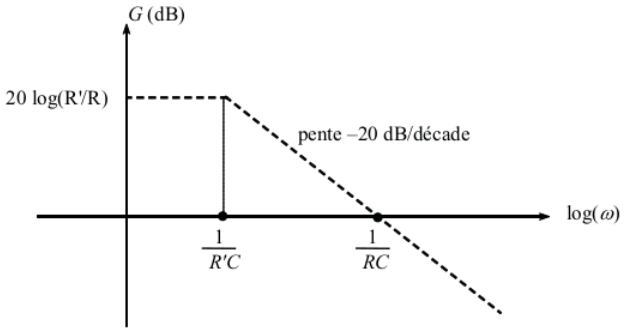


Figure 5.18 Diagramme de Bode d'un pseudo-intégrateur.

Mesure d'un champ magnétique avec un fluxmètre

✍ Quaranta tome 4 ⏲

Matériel :

- bobine plate P50.8 (on a alors $NS = 0.4$ m^2
- électroaimant avec des pièces cylindriques avec son alimentation
- boîtier intégrateur P42.45 relié sur $R_{\text{int}} = 100$ kΩ avec son fidèle destrier le boîtier d'alimentation P42.39
- voltmètre

Remarque : On prend un boîtier intégrateur au lieu d'un AO avec un RC fait maison afin de minimiser l'intégration de la tension d'offset de l'AO et de son courant de polarisation. ***Penser à décharger le condensateur avant chaque mesure avec le bouton RàZ.***

Choisir un écartement entre les pièces de l'électroaimant, par exemple 2 cm. Ne plus y toucher.

Faire circuler $I = 1$ A dans l'électroaimant. Éloigner la bobine de l'électroaimant, appuyer sur la bouton RàZ de l'intégrateur puis amener la bobine dans l'entrefer. *On pourra bricoler un système avec des potences par exemple pour s'assurer que la bobine reste normale aux pièces de l'électroaimant.*

Noter la valeur U mesurée au voltmètre en sortie de l'intégrateur.

Répéter l'opération pour des I croissantes (évite l'hystérésis) allant de 1 à 8 A. Tracer $b = f(I)$ pour retrouver la relation linéaire qu'on avait déjà avec le teslamètre.

Remarque

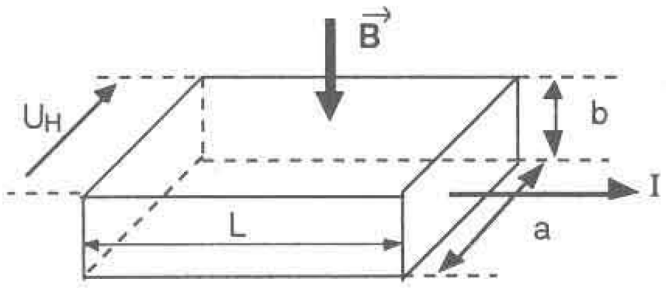
Le fluxmètre ne mesure qu'une moyenne spatiale et n'est donc utile que pour des champs uniformes.

3.2 Effet Hall

✍ Quaranta tome 4, p133 (voir également tome 3)

Il est possible de mesurer un champ magnétique autrement qu'avec un fluxmètre. Ainsi, le teslamètre utilisé précédemment utilise un autre phénomène physique que l'induction de Faraday : l'effet Hall.

Lorsque l'on soumet un matériau parcouru par un courant I_{sc} (de densité $\vec{j}$ à un champ $\vec{B}$, on observe en régime permanent l'apparition d'une ddp U_H perpendiculaire à la fois à $\vec{j}$ et $\vec{B}$. En gros, $\vec{j}$ indique le déplacement des électrons qui subissent une force de Laplace volumique $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ et qui vont donc tous être déviés vers la même face du matériau. On a alors une accumulation de charges négatives d'un côté et de charges positives de l'autre donc paf ça fait des chocapics (et une ddp par la même occasion).



Cette tension dite de Hall est donnée par :

$$U_H = \frac{I_{sc} B}{neb} \tag{15.7}$$

avec e la charge élémentaire et n la densité électronique.

Les sondes à effet Hall sont ainsi plutôt composées de semi-conducteurs ($n \simeq 10^{21}$ m^{-3}) que de métaux (($n \simeq 10^{29}$ m^{-3}).

Sonde à effet Hall

✍ Quaranta tome 4 p133 ⏲ 10 min

Matériel : Comme d'hab + plaquette P64.30 alimentée en 12 V par le générateur P64.37.

On refait la manip du fluxmètre mais avec la sonde à effet Hall. On fait confiance à l'étalonnage de l'électroaimant qui donne B pour une valeur donnée du courant le parcourant.

On mesure U_H et on trace $U_H = f(B)$. On peut alors remonter à n.

Le fait de réutiliser l'étalonnage de l'électroaimant peut poser problème si on a changé de courant envoyé car on a de l'hystérésis. On peut pallier à ce problème en mesurant de nouveau B avec un teslamètre à chaque fois mais c'est difficile de tout faire tenir dans l'entrefer. De plus c'est un peu bête d'étudier une sonde à effet Hall avec une autre sonde à effet Hall mais le but c'est de vérifier $U_H = f(B)$ et de voir si on trouve un bon OdG pour n.

Remarque

Puisque cette sonde nécessite un étalonnage, on l'étalonne plutôt avec un fluxmètre qui nous donne B sans étalonnage.

Une solution serait donc de mesurer (pour des I croissants par exemple) le champ B au fluxmètre en fonction du courant I afin d'avoir une courbe d'étalonnage. Ensuite on démagnétise l'électroaimant (faire des allers-retours ! Pas juste ramener I à 0...) et pour les mesures en live, on refait bien avec I croissant. On mesure I et on remonte à B grâce à la courbe précédemment établie.

Conclusion

On a maintenant un dispositif sympa pour produire de manière contrôlée un champ magnétique. Cependant on voit que la production de champs intenses s'accompagne de grosses intensités électriques et/ou nécessite de fortement localisé les lignes de champ. Cependant dans CMS on met 5T dans une cavité de plusieurs mètres [1]. Il faut donc trouver des moyens de générer de tels champs, via la supraconductivité !

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Compact_Muon_Solenoid

MP 16

Milieux Magnétiques

Bibliographie

- ✍ *Dictionnaire d'expériences IV*, **Quaranta** ⟶ $FeCL_3$
- ✍ *TP d'électromagnétisme*, **Jérémy Ferrand** ⟶ poly de TP, chapitre 2

Questions

- Expliquer le choix des pièces cylindriques ou de pièces tronconiques pour l'électroaimant. *Une pièce cylindrique donne un champ uniforme et une pièce tronconique donne un champ plus fort (canalise les lignes de champs mais avec conservation du flux magnétique car div($\overrightarrow{B}$)=0) mais moins uniforme.*
- Qu'est-ce qui limite l'intensité dans un électroaimant ? *Effet Joule qui peut endommager l'électroaimant.*
- Comment peut-on justifier la non linéarité de B en fonction de I quand on étalonne l'électroaimant ? *Saturation de l'aimantation lorsque tous les moments magnétiques sont alignés. Cependant, H continue d'augmenter avec I et donc B continue d'augmenter. C'est $\overrightarrow{M}$ que l'on sature.*
- En plus des pertes fer et cuivre, quelle autre type de perte rencontre-t-on ? *On peut avoir des pertes par courants de Foucault si on a un champ $\overrightarrow{B}$ qui n'est pas uniforme. Pour limiter ces courants, on utilise des matériaux feuilletés.*
- Sur la courbe d'étalonnage, on voit un chi2 de 3,02. C'est bien ou pas bien ? *C'est pas le top mais c'est bien, on veut viser 1. Se référer au cours sur les incertitudes. Il faut minimiser le nombre de degrés de libertés car on peut tout modéliser avec suffisamment de nombre de degrés de libertés.*
- Pourquoi l'électroaimant est encore aimanté même quand on a fait redescendre à zéro l'intensité le parcourant ? *A cause du cycle d'hystérésis, il reste un champ rémanant B_r.*
- Quelle est la taille caractéristique d'un domaine dans lequel les moments sont globalement alignés ? *Les domaines de Weiss ont une taille caractéristique d'un micromètre. Ils font tourner la polarisation de la lumière par effet Faraday. Quand on impose un champ, certains de ces domaines se rétrécissent ou d'autres grandissent. L'énergie perdue via le cycle d'hystérésis a été utilisée pour faire bouger les parois. Expérience pour le mettre en évidence : effet Barkhausen (déformation mécanique qui a un effet acoustique).*
- Comment retrouver χ_{FeCl_3} à partir de χ_{sol} ? *On le fait grâce à l'additivité des moments magnétiques volumiques. Cf le calcul fait dans ce rapport.*
- Quelle est l'OdG élémentaire de l'aimantation ? *C'est le magnéton de Bohr, qui vaut environ 10^{28} m^{-3}.*
- Comment faire la différence entre les pertes fer et par courants de Foucault ? *Les pertes par courant de Foucault sont en f^2 (f=fréquence) tandis que les pertes fer sont en f (dépendent du nombre de cycles parcourus par seconde).*
- Pourquoi utiliser un rhéostat ? *Dans le primaire on a de grosses intensités. Dans le secondaire, l'impédance de l'intégrateur est grande donc l'intensité est faible et donc on peut utiliser des composants normaux.*

Commentaires

- Attention à ne pas confondre l'erreur de lecture d'un appareil (nombre de digits) à son erreur systématique. Dans le cas de l'oscilloscope, l'erreur systématique est de 3 % environ et est supérieure à l'erreur de lecture.
- Un récipient en verre avec de l'azote liquide peut **(et va)** casser.
- Bien maîtriser l'électronique.
- Faire un peu gaffe à l'azote liquide près de l'électronique, prévoir une pince en plastique ou en bois pour manipuler les aimants.

Expériences

➢ Mise en évidence du paramagnétisme de l'aluminium et du diamagnétisme du bismuth. *(Qualitatif)*

➢ Mise en évidence du paramagnétisme de O_2. *(Qualitatif)*

➢ Ascension d'un fluide paramagnétique ($FeCL_3$), mesure de χ_M.

➢ Étallonage de l'électroaimant. *(Hors champs)*

➢ Mesure de la température de transition ferro-para du fer. *(semi-Qualitatif)*

➢ Aimantation et cycle d'hystéresys d'un ferromagnétique, mesure des pertes fer et de propriétés du cycle.

1 Comparaison qualitative des différents magnétismes 1147
1.1 Barreau métalliques 1147
1.2 Liquides magnétiques 1148
2 Mesure de Susceptibilité paramagnétique 1149
2.1 Théorie 1149
2.2 Expérience 1150
3 Cycle d'aimantation des ferromagnétiques 1151

Introduction

Le magnétisme est un phénomène naturel qui désigne la propriété des matériaux à s'aimanter lorsqu'on leur applique un champs magnétique extérieur. Un matériaux magnétique présente donc une aimantation $\overrightarrow{M}$ lorsqu'on on lui applique $\overrightarrow{B}$. On note alors $\mu = \mu_0\mu_r$ (perméabilité et perméabilité relative) et on a

$$\overrightarrow{B} = \mu(\overrightarrow{H})\overrightarrow{H} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M})$$

On définit également $\mu_r = 1 + \chi_m$, de sorte que

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}$$

$\overrightarrow{M}$ l'aimantation est un champs qui traduit la réponse macroscopique du matériaux au champs magnétique. La force s'exerçant sur un matériaux magnétique s'exprime comme suit :

$$\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{M}.\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{B})$$

Dans ce montage, nous allons étudier trois types de milieux magnétiques :

- les milieux diamagnétiques qui ne comportent que des atomes non magnétiques, ce magnétisme trouve son origine dans la modification du mouvement orbital des électrons sous l'effet de l'excitation magnétique : $\chi_d < 0$ (loi de Lenz) et $\chi_d \sim -10^{-5}$
- les milieux paramagnétiques possèdent de atomes portant des moments magnétiques permanents qui n'interagissent que très peu entre eux : $\chi_p > 0$ et $\chi_p \sim 10^{-4}$ à température ambiante
- les milieux ferromagnétiques possèdent des atomes portant des moments magnétiques permanents qui interagissent fortement entre eux : $\chi_f > 0$ et $\chi_f \gg \chi_p$.

On approxime $\mu = \mu_0$ du fait des faibles valeurs de χ.

$$\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{M}.\overrightarrow{\nabla})(\overrightarrow{B}) \simeq \frac{\chi_m}{2\mu_0}\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{B}^2)$$

1 Comparaison qualitative des différents magnétismes

Nous allons commencer par mettre en évidence de manière qualitative l'existence de ces trois comportements, additifs en théories mais disjoints en pratique du fait de leur différence d'échelle.

Pour un matériau paramagnétique ($\chi_m > 0$), la force est dirigée suivant le gradient du champ. À l'inverse, pour un matériau diamagnétique ($\chi_m < 0$), la force est dirigée dans le sens opposé au gradient.

1.1 Barreau métalliques

Pour générer un gradient de champ magnétique, nous allons utiliser les pièces tronconiques de l'entrefer d'un électroaimant.

Expérience des barreaux métaliques dans l'entrefer d'un électroaimant

✍ ⏲

Matériel :

- Électroaimant P66.29 avec pièces tronconiques
- Générateur de tension continue P53.13
- barreaux P63.3
- Ampèremêtre
- trombone
- Flexcam

Protocole :

Tu suspends les barreaux d'alu (para) et de bismuth (dia), il faut que le fil ait une torsion super faible. Tu allumes le jus et paf ça s'alligne ou s'antialligne, et t'es content !

Ne jamais éteindre brutalement le générateur de l'électroaimant : l'inductance des bobines étant importante, une variation brutale d'intensité provoque une surtension qui risque de l'endommager.

L'électroaimant génère un champ magnétique non-uniforme dans l'entrefer, dont le gradient (radial) est dirigé vers son centre. L'aluminium est un matériau paramagnétique, il subit une force dans le sens du gradient, qui tend à ramener ses extrémités sur l'axe de l'entrefer. Le bismuth est un matériau diamagnétique, il subit une force de sens opposé au gradient, qui tend à placer ses extrémités perpendiculairement à l'axe de l'entrefer.

Montrer que si on prend un barreau ferromagnétique comme un trombone, on colle le trombone à l'aimant, ce qui met en évidence le ferromagnétisme.

1.2 Liquides magnétiques

Les liquides aussi ont des comportements magnétiques, comme par exemple le dioxygène et le diazote. Le dioxygène est paramagnétique du fait de sa configuration électronique, comme nous allons le montrer.

O2 et N2 liquides dans l'électroaimant

Matériel :

- Électroaimant P66.29 avec pièces tronconiques
- Générateur de tension continue P53.13
- N2 liquide
- Ampèremetre
- Tubes à essai
- Flexcam

Protocole : resserrer l'entrefer ! ! ! ! !

$T_e(N2) = 77,36K$

$T_e(O2) = 90,19K$

On prépare du O2 liquide en le faisant condenser grâce au N2. Pour se faire, on met du N2 dans un thermos adapté, et on met à tremper dedans des tubes à essai vides. Ils vont se remplir d'O2 liquide.

Tu verses à champs nul du N2 et du O2, rien ne se passe. Tu fais pareil à champs fort, et paf, O2 se coince.

On a mis en évidence les différents comportement, nous allons maintenant mesurer suscpetibilité magnétique d'un liquide ferromagnétique.

2 Mesure de Susceptibilité paramagnétique

Dans cette partie, on s'intéresse particulièrement au paramagnétisme. Dans ces conditions, les moments magnétiques des atomes s'orientent selon le champ magnétique appliqué. L'observation de cet effet dépend de la température et nécessite d'utiliser des atomes dont les sous-couches électroniques ne sont pas toutes remplies.

Ici, on se propose de mettre en évidence cet effet en utilisant une solution de $FeCl_3$ dans un tube en U.

2.1 Théorie

On notera z_1 et z_2 les altitudes définies positives par rapport à l'altitude de l'électroaimant du fluides dans chacun des tubes. Lorsque l'on applique un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au fluide, il subit une force volumique qu'il faut ajouter quand on écrit l'équilibre hydrostatique :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\nabla}(-P - \rho_{sol} g z + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0}\overrightarrow{B}^2) \tag{16.1}$$

Ainsi, on retrouve le théorème de Bernoulli duquel on peut déduire l'expression de la variation d'altitude du fluide en fonction du champ $\overrightarrow{B}$ appliqué :

$$\delta h = z_1 + z_2 = \frac{\chi_{sol}}{2\rho_{sol} g \mu_0}\overrightarrow{B}^2 \tag{16.2}$$

Or par conservation du volume, $z_1 S_1 = z_2 S_2$. Finalement, on obtient :

$$z_2 = \frac{\chi_{sol}}{2\rho_{sol} g \mu_0 \left(1 + \dfrac{S_2}{S_1}\right)}\overrightarrow{B}^2 \tag{16.3}$$

$$\alpha = \frac{\chi_{sol}}{2\rho_{sol} g \mu_0 \left(1 + \dfrac{S_2}{S_1}\right)}$$

On obtient ainsi χ_{sol} via $z_2 = \alpha \overrightarrow{B}^2$, on a

$$\frac{\chi_{sol}}{\rho_{sol}} = 2g\mu_0 \left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right)\alpha$$

Cependant, on cherche à déterminer χ_{FeCl_3}. Il faut donc l'exprimer en fonction de χ_{sol}. Pour cela, on utilise l'intensivité de l'aimantation $V_{sol} M_{sol} = \sum_i V_i M_i$ et on introduit le titre massique $t_m = \dfrac{m_{FeCl_3}}{m_{sol}}$. Ainsi,

$$\frac{\chi_{sol}}{\rho_{sol}} = t_m \frac{\chi_{FeCl_3}}{\rho_{FeCl_3}} + (1 - t_m)\frac{\chi_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}$$

On obtient alors

$$\chi_{FeCl_3} = \frac{\rho_{FeCl_3}}{t_m}\left(\frac{\chi_{sol}}{\rho_{sol}} + (t_m - 1)\frac{\chi_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}\right) \tag{16.4}$$

Ainsi, on peut connaître l'expression de χ_{FeCl_3} après avoir mesuré le coefficient de proportionnalité α entre z_2 et B^2 :

$$\chi_{FeCl_3} = \frac{\rho_{FeCl_3}}{t_m}\left(2\alpha\mu_0 g\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) + (t_m - 1)\frac{\chi_{H_2O}}{\rho_{H_2O}}\right) \tag{16.5}$$

On donne $\chi_{H_2O} = -9.051 \cdot 10^{-6}$ (susceptibilité volumique), $\rho_{H_2O} = 1000$ kg/m^3, et $t_m = 0.41$. Ces valeurs seront considérées sans incertitude ou d'incertitude négligeable par rapport à la mesure.

2.2 Expérience

Étalonnage de l'électroaimant

✍ Garing Magnétisme, p.310 ⏲ n min

Matériel :

- électroaimant P66.29 avec pièces tronconiques,
- alimentation P53.13,
- teslamètre P64.34,
- ampèremètre
- Potence pour maintenir la sonde du teslamètre

Pour différentes valeurs d'intensité I (entre 1 et 6 A) parcourant l'électroaimant et mesurée à l'ampèremètre, relever dans l'entrefer la valeur du champ magnétique avec le teslamètre. Afin de compenser les défauts de soudure de la sonde, il faut penser à moyenner chaque mesure du champ magnétique retournant la sonde. Modéliser la courbe obtenue par un polynôme d'ordre 3 ou une droite, à voir.

Mesure de la susceptibilité magnétique d'une solution de $FeCl_3$

✍ Garing Magnétisme, p.310 ⏲ n min

Matériel :

- électroaimant P66.29 avec pièces tronconiques,
- alimentation P53.13
- tube en U P63,
- solution de $FeCl_3$ P75 ($\rho_{sol} \simeq 1.41 \cdot 10^3$ kg/m^3 et $t_m = 41\%$),
- lampe QI + antical + lentille.

Introduire la solution de $FeCl_3$ dans le tube en U. Placer la branche du tube de plus grande section S_1 de sorte à ce que le ménisque du fluide soit au niveau de l'entrefer. Avec la QI, l'antical et la lentille, faire l'image de la seconde

branche du tube de manière à ce qu'on voit clairement sur le mur (ou un écran) les graduations. Pour différentes valeurs de I parcourant l'électroaimant, relever les valeurs de z_2. Puisqu'on a préalablement étalonné l'électroaimant, on connaît B=f(I) et donc on peut tracer z_2 en fonction de B^2. Il faut faire attention à exercer deux ou trois fois une petite pression manuelle sur le tuyau pour s'assurer que l'altitude z_2 mesurée et bien l'altitude à l'équilibre, sans bulles d'air ou autres phénomènes de capillarité. Le coefficient de proportionnalité permet de remonter à la valeur de χ_{FeCl_3}.

Le rapport des surfaces du petit et du grand tube vaut 5.465. Une graduation du petit tube mesure 0.00184 m.

Théoriquement, on attend $\chi_{FeCl_3} = 3.3 \cdot 10^{-3}$. En pratique, on devrait avoir une valeur un peu plus faible car la solution a vécu.

Amélioration de la mesure :

- Le fait d'avoir une surface S_2 plus petite que la surface S_1 implique un déplacement z_2 plus grand et donc plus facile à mesurer.
- Les pièces tronconiques permettent d'avoir un champ $\overrightarrow{B}$ plus grand mais moins homogène qu'avec des pièces cylindriques.
- Au lieu de projeter sur un mur ou un écran, on pourrait prendre des photos du tube en U et analyser les images sur ImageJ pour être plus précis.

3 Cycle d'aimantation des ferromagnétiques

Observation d'un cycle d'hystérésis pour un tore de ferrite

✍ ref ⏲ temps

Matériel :

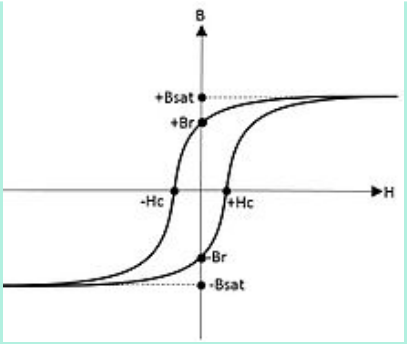
- GBF,
- amplificateur de puissance HSA4005 P47.6 ou 4011 P47.5,
- rhéostat de 33 Ω P61.3,
- intégrateur RC P42.45 alimenté par le boîtier P42.39 (**Fonctionnement décrit dans MP15**)
- tore de ferrite P66.4/4 (tore à base carrée de côté a=12 mm et de diamètre d=52 mm, soit S=a^2 et l=πd, avec N_1=100 et N_2=500 spires),
- oscilloscope

Au primaire : Brancher la sortie du GBF sur l'amplificateur de puissance. L'amplificateur est branché en série avec le primaire du tore de ferrite et le rhéostat de résistance $r = 33\ \Omega$. Choisir un gain de 10 pour l'amplificateur avec une impédance d'entrée $Z_{in} = 600\ \Omega$. Pour le GBF, choisir un signal sinusoïdal de fréquence 1 Hz et d'amplitude entre 0 et 500 mV.

Au secondaire : Brancher le secondaire du tore de ferrite sur l'entrée DC de l'intégrateur. Régler la résistance interne de l'intégrateur sur $R = 10\ \text{k}\Omega$.

Oscilloscope : Afficher la tension u aux bornes du rhéostat sur la voie 1. Afficher la tension V_S en sortie de l'intégrateur sur la voie 2. Utiliser l'oscilloscope en mode XY. Augmenter la tension du GBF jusuqu'à 2 V pour observer la saturation du matériau. Mesurer le champ rémanent B_r et l'excitation coercitive H_c du matériau via les formules :

$$B = V_s \frac{RC}{N_2 a^2} \qquad \text{et} \qquad H = u \frac{N_1}{r\pi d}$$



Pour le tore de ferrite P66.4/4, on a $B_r \simeq 0,15$ T et $H_c \simeq 80$ A/m. Ces valeurs donnent un ordre de grandeur des pertes fer, que nous allons déterminer précisément dans la manip suivante.

Calcul des pertes fer pour un tore de ferrite

✍ ref ⏲ temps

Reprendre le montage précédent mais cette fois réaliser l'acquisition de u et V_S sur Latis-Pro. Le cycle doit être centré autour de 0, pour cela décharger le condensateur avant la mesure et/ou retirer à V_S sa moyenne avec la FEUILLE DE CALCUL. Convertir les tensions à l'aide de la FEUILLE DE CALCUL pour remonter à B et H. Latis-Pro n'ayant pas de fonction prédéfinie permettant de calculer une aire, nous allons utiliser Regressi. Exporter B et H dans un fichier au format txt (Menu FICHIER/EXPORTATION), puis ouvrir le fichier sous Regressi. Dans l'onglet EXPRESSION, calculer les pertes avec la formule : P=aire(B,H).

On est censé avoir $P_v \simeq 50$ J/m^3. L'ordre de grandeur se retrouve facilement en assimilant le cycle à un rectangle de largeur $2H_c$ et de hauteur $2B_r$, *i.e.* d'aire $4B_rH_c$.

On peut comparer à la puissance d'entrée envoyée dans le ture $P_{\text{entrée}} = UI$

Première aimantation et dés-aimantation d'un tore de ferrite :

Montrer comment on désaimante le matériau en parcourant le cycle d'hystérésis dans un sens puis dans un autre plusieurs fois en baissant l'amplitude du signal délivré par le GBF.

On peut également obtenir la courbe de première aimantation du matériau en délivrant une tension continue avec le GBF que l'on augmente progressivement de 0 à 2 V (saturation).

Conclusion

L'étude que nous venons de faire permet de caractériser les milieux magnétiques et d'en déterminer les propriétés, afin de mieux en tirer avantage dans une application industrielle par exemple. La conversion de puissance électrique est une application directe de ce montage.

MP 17

Métaux

Commentaires du jury

- 2013-2017 : Ce montage doit mettre en évidence différentes caractéristiques propres aux métaux. L'étude de caractéristiques mécaniques par exemple nécessite d'être mise en perspective par rapport aux propriétés équivalentes d'autres matériaux. Notons que pour les mesures de résistance, le principe et l'intérêt d'un montage quatre fils doivent être connus. [Ajout 2017] : il subsiste une confusion chez de nombreux candidats entre ce montage à quatre fils et la distinction entre courte et longue dérivation. Un montage à quatre points n'a pas pour but de seulement s'affranchir de la résistance des fils, contrairement à ce que pensent de nombreux candidats.
- **2011 :** Les expériences présentées se réduisent souvent aux conductivités thermiques et électriques.
- **2010 :** L'étude de caractéristiques mécaniques par exemple nécessite d'être mise en perspective par rapport aux propriétés équivalentes d'autres matériaux.
- **2009 :** La mesure de la conductivité thermique d'un métal par sa réponse en température à une excitation alternative a posé problème à de nombreux candidats par suite de l'analyse des mesures à l'aide d'une loi non valide avec les conditions aux limites concernées. Le régime permanent implicitement mis en jeu doit être précisé, de même que son temps d'établissement.

Bibliographie

✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet**	Intro
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD**	
✍ *Optique expérimentale*, **Sextant**	
✍ *Physique de l'état solide*, **Kittel**	Intro et Loi de Wiedemann-Franz
✍ *Electrotechnique, Précis Bréal*, **Brenders**	Cycle d'hystérésis
✍ **Quaranta IV**	Cycle d'hystérésis
✍ *BUP 936*	Module d'Young avec la flèche

1 Propriétés électriques . . . 1154
1.1 Conductivité électrique . . . 1154
1.2 Comparaison avec d'autres métaux . . . 1156
1.3 Loi de Wiedemann-Franz . . . 1156
2 Propriétés thermiques . . . 1157
2.1 Intro qualitative et théorie . . . 1157
2.2 Détermination de la capacité calorifique du cuivre . . . 1157
2.3 Retour sur la loi de Wiedemann-Franz . . . 1159
3 Propriétés mécaniques . . . 1159

Lancer l'expérience sur la conductivité thermique du cuivre en régime permanent le plus tôt possible, le régime permanent met au moins 1 heure pour s'établir.

Introduction

Si on demande à quelqu'un quel objet parmi un bout de bois, un bout de plastique ou un bout de fer est un métal, cette personne répondra le fer (normalement). Cependant, si on lui demande pourquoi, cette personne se mettra sûrement à bégayer.

La définition d'un métal est la suivante : c'est un corps dont la cohésion est assurée par des liaisons covalentes entre orbitales d, et dont la bande de valence n'est pas saturée ce qui permet un passage aisé des électrons vers la bande de conduction. C'est bien beau mais ça nous fait une belle jambe si on veut la mettre en évidence en montage.

Définition plus rapide : solide caractérisé par des liaisons métalliques (délocalisation des électrons dans le solide)

Cependant, cette définition a pour conséquences des propriétés bien plus connues des métaux : ça conduit bien la chaleur et l'électricité et c'est relativement dur (mot clé : "relativement", le mercure n'est pas dur mais liquide, et certains métaux sont plus durs que d'autres).

1 Propriétés électriques

Lorsqu'on s'intéresse à la théorie des bandes, on se rend compte que les métaux sont caractérisés par le fait qu'il est facile pour les électrons de passer de la bande de valence à la bande de conduction. Les métaux sont donc d'excellents conducteurs électriques, à l'image du cuivre qui compose l'immense majorité des fils électriques que l'on puisse trouver.

1.1 Conductivité électrique

✍ FLTCLD p399

Propriété faible car peu caractéristique des métaux. (cf graphite).

La résistivité ρ_{elec} d'un matériau, *i.e.* l'inverse de sa conductivité, est une donnée importante si on veut l'utiliser comme composant électrique. Cependant, elle n'est pas constante et dépend notamment de la température. On se propose d'étudier la dépendence en température de ρ_{elec}.

Pour cela, on va mesurer la résistance R d'un fil de cuivre en fonction de la température T. En supposant que le fil est un fil cylindrique de longueur L et de section S, on peut relier la résistance R à la résistivité par la relation :

$$R = \frac{\rho_{\text{elec}} L}{S}$$

Dans la gamme de température ambiante, ρ_{elec} est une fonction affine de T et donc R l'est également :

$$R(T) = \frac{L}{S}(\alpha T + \rho_{\text{elec},0}) \qquad \textbf{avec la température en °C} \tag{17.1}$$

On va chercher à vérifier cette loi. Cependant, les résistances en jeu sont faibles, si bien qu'on ne peut pas juste brancher un ohmmètre et mesurer R directement. À la place, on va utiliser un **montage à quatre fils**.

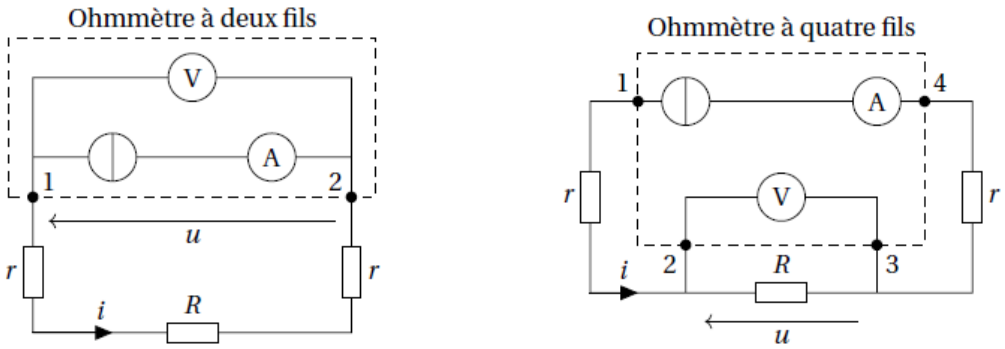


FIGURE 17.1 – Montages de mesure de résistance à deux fils et à quatre fils

Intérêt du montage quatre fils

Dans ce montage, nous utilisons un montage dit "à quatre fils" pour mesurer la résistance de notre fil de cuivre. Voyons les caractéristiques d'un tel montage qui expliquent son utilisation ici.

Le principe d'un ohmmètre commercial est d'imposer un courant i dans le circuit d'une résistance R et de mesurer la tension u à ses bornes. On revient à la valeur de la résistance directement avec la loi d'Ohm. Le problème de cette méthode dite "à deux fils" est que l'on mesure la résistance de toute la branche du circuit contenant le dipole à étudier, la valeur de résistance retournée prend en compte la résistance des fils et des soudures modélisée par une résistance r parasite. On peut estimer la valeur de r à moins de 0.5 mΩ donc négligeable lors de mesure de grandes résistances mais **dont il faut tenir compte pour la mesure de petites valeurs de R.**

Le montage quatre fils fonctionne sur le même principe d'une mesure de u et i mais l'apport de ce montage est de séparer ces deux mesures. Sous la forme d'un quadripôle, l'ohmmètre impose toujours un courant i dans le circuit mais la mesure de la tension u se fait dans une maille différente. On suppose que le voltmètre ne modifie pas la valeur du courant grâce à sa résistance interne très élevée (environ 1 MΩ) et ceci est d'autant plus vrai que l'on s'intéresse à des faibles résistances R... La mesure du courant qui traverse R et de la tension **directement** à ses bornes permet d'avoir directement la valeur de R sans les résistances parasites.

Résistivité électrique du cuivre en fonction de T

✍ FLTCLD ⏲ 5 min

Matériel :

- bobine P56.27 (fil de cuivre de longueur $L = 1710 \pm 5$ cm et de diamètre $d = 0.80 \pm 0.01$ mm
- multimètre quatre fils de précision P69.35
- bécher assez grand pour qu'on puisse immerger la bobine
- agitateur magnétique
- bouilloire
- thermocouple P102.16 branché sur l'appareil P102.27

Brancher le multimètre quatre fils sur la bobine (une extrémité reliée aux deux sorties LOW et l'autre extrémité reliée aux deux sorties HIGH). Immerger la bobine dans un bécher d'eau chaude (garder les jonctions électriques sèches). Lancer l'agitation.

Mesurer la température T du bécher avec le thermocouple est la résistance R du fil avec le mulitmètre quatre fils. relever T régulièrement (par exemple tous les 0.2°C).

Tracer $R = f(T)$ et faire la régression affine $\rho_{\text{elec}} = \alpha T + \rho_{\text{elec},0}$ **avec T en °C.**

Pour le cuivre, les valeurs tabulées sont $\alpha_{\text{tab}} = 6.76 \times 10^{-11}\,\Omega\,\text{m}\,\text{K}^{-1}$ et $\rho_{\text{elec},0,\text{tab}} = 1.543 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$.

Remarques

- On envoie du courant continu dans la bobine donc on n'a pas d'effets inductifs
- La modélisation affine de ρ_{elec} en fonction de T **n'est valable que pour une gamme de température ambiante**. On le voit ici car d'après la modélisation, $\rho_{\text{elec}}(0\ \text{K} < 0$.

Incertitudes :

$$u(\rho_{\text{elec}}) = \rho_{\text{elec}} \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2}$$

Comparaison avec d'autres matériaux non métalliques :

Matériau	ρ_{elec} (Ω·m)
Métal	$10^{-8} - 10^{-9}$
Eau	10^{5}
Verre	10^{17}
Polystyrène	10^{20}

1.2 Comparaison avec d'autres métaux

Quand on fait chuter un aimant dans un tube vertical en PVC, sa chute libre n'est pas ralentie. Par contre, si on refait l'expérience avec un tube métallique, on observe que sa chute est ralentie et sa vitesse limite s'exprime alors comme

$$v_{\text{lim}} \simeq \frac{1024 m g a^4}{45 \mu_0^2 \sigma e \mathcal{M}^2} \tag{17.2}$$

avec $a = \dfrac{R_{\text{ext}} + R_{\text{int}}}{2}$ le rayon moyen du tube, $e = R_{\text{ext}} - R_{\text{int}}$ son épaisseur, m la masse de l'aimant, $\mathcal{M}$ son moment magnétique et σ la conductivité électrique du métal.

On retient donc que v_{lim} diminue quand σ augmente.

☕

Chute libre d'un aimant dans un tube métallique

✍ *Magnétisme*, **Garing** ⏲ 1 min

Faire tomber un aimant dans un tube vertical en cuivre et en aluminium. L'aimant tombe plus vite dans le tube d'aluminium que dans le tube de cuivre, donc $\sigma_{Cu} > \sigma_{Al}$.

1.3 Loi de Wiedemann-Franz

✍ Kittel p147

Propriété forte. Vient du modèle de Sommerfeld.

Dans un métal, on peut écrire la loi de Wiedemann-Franz :

$$\frac{\lambda\rho_{\text{elec}}}{T} = \text{constante} = \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \simeq 2.44 \times 10^{-8}\,\text{W}\,\Omega\,\text{K}^{-2} \tag{17.3}$$

avec λ la conductivité thermique, ρ_{elec} la résistivité électrique, k_B la constante de Boltzmann et e la charge élémentaire.

On peut alors calculer $\frac{\lambda\rho_{\text{elec}}}{T}$ avec la valeur de résistivité électrique trouvée précédemment et celle de conductivité thermique qui sera mesurée un peu plus tard...

Cf fin de la section sur les propriétés thermiques.

2 Propriétés thermiques

Propriété forte. (mais y'a des exceptions comme le diamant.)

Une autre caractéristique des métaux, c'est leur conductivité thermique. Celle-ci est en effet excellente, contrairement à des matériaux de construction comme le bois ou la brique. Ils ne sont cependant pas égaux dans leurs capacité à conduire la chaleur.

2.1 Intro qualitative et théorie

illustration de la grande conductivité des métaux Matériel : conductiscope, eau bouillante.

On met le petit conductiscope (le truc avec des cristaux liquides et des barres de métal) et on voit que la conduction ne va pas à la même vitesse.

Faire en parallèle : mettre une cuillère en bois dans le bécher, et mesurer sa température au bout.

L'équation qui régit le transfert de chaleur dans les matériaux est, dans le cas unidimensionnel (les valeurs données sont pour le cuivre).

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{en } \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}, \text{ la diffusivité ;} \\ \lambda = 401\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \quad \text{la conductivité ;} \\ \rho = 8.96\times10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3} \quad \text{la masse volumique ;} \\ c = 3.85\times10^2\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \quad \text{la capacité calorifique massique.} \end{cases}$$

On voit donc que c'est le facteur de diffusion κ qui détermine la vitesse de transfert de la chaleur. On voit bien qu'il y a une différence de κ entre ces matériaux. Nous allons donc déterminer précisément κ pour le cuivre, et remonter à λ. La méthode donnée serait tout à fait utilisable pour les autres matériaux, et permettrait de remonter à toutes leurs conductivités respectives.

Validité : Faibles écarts de température, et $\delta \ll l$.

2.2 Détermination de la capacité calorifique du cuivre

On utilise l'appareil LM35DZ. Il s'agit d'une barre de cuivre calorifugée de longueur $L = 25$ cm, dans laquelle sont placés 6 capteurs que l'on espère non intrusifs de température. Ces capteurs ont une réponse linéaire en température et sont espacés de 5cm les uns des autres.

On impose un flux thermique en entrée à l'aide d'un module peltier (✍ Quaranta II, p.180), et on se place en régime sinusoïdal forcé, en considérant la barre semi infinie.

$$\text{C.L. :} \qquad -\lambda S\frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = \phi_0 \sin(\omega t)$$

Ainsi la solution est de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-x/\delta}\sin(\omega t - x/\delta) \qquad \text{avec } \delta = \sqrt{2\kappa/\omega} \tag{17.4}$$

On veut que l'onde thermique parcoure toute la barre, par conséquent on choisi omega pour avoir $5\delta \simeq L$. Du coup on est pas vraiment infini, mais ça fera l'affaire.

☕

Mesure de la conductivité du cuivre

✍ ⏲

Mettre en place le dispositif (barre de cuivre P0.73) : brancher les six capteurs sur une carte d'acquisition SYSAM, alimenter les ventilateurs (12 V continu) et les capteurs (15 V continu). Le potentiel de référence pour les signaux issus des capteurs est la masse de l'alimentation de ceux-ci.

ATTENTION : Bien alimenter les ventilateurs avant toute manipulation, pour ne pas griller le module Peltier !

Alimenter le module Peltier par un amplificateur de puissance Kepco P53.9 piloté par un GBF (entrée sur Input, sortie entre Common et Output). Régler le GBF sur Vpp = 3V, sans offset, à une fréquence de 10 mHz.

Vérifier à l'ampèremètre en mode continu (car la période est grande) que le courant ne dépasse jamais 4 A sur une période.

Suivre en temps réel l'évolution de la température sur le dernier capteur à l'oscilloscope. Attendre que le signal se stabilise (environ 30 minutes). Faire l'acquisition des signaux des dfférents capteurs sur Latis-Pro pendant quelques périodes (typiquement 20 minutes).

Grâce à l'outil informatique, nous avons la possibilité d'évaluer δ de deux manières : par la décroissance de l'exponentielle et par la phase prise par le signal.

Tu ajustes chaque signal par un sinus, tu obtient son amplitude et sa phase, et gogo-gadgeto tableur !

On obtient des valeurs de δ et donc de κ. Il est alors possible de remonter à λ en mesurant ρ (facile) et c par calorimétrie. On va ici utiliser des valeurs tabulées à la place, parce que c'est plus rapide.

On s'attend à $\kappa = 1.14 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$, et $\lambda_{\text{tab}} = 3.90 \times 10^2\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Astuce : sur l'amplitude on a les pertes thermiques qui font que λ semble plus faible, sur la phase par contre, on a la bonne valeur normalement. On a une erreur systématique sur le décrément logarithmique et donc sur l'évaluation de la moyenne de δ.

Quelques conductivités thermiques de quelques matériaux classiques :

Matériau	λ (W/(m.K)), @300K
Cuivre	390
Acier	20-50
Pierre	1-3
Bois	0.15
Liège	0.04
Laine de verre	0.03

Ce qui caractérise les métaux ici c'est leur très haute conductivité thermique, c'est la raison pour laquelle on en fait des radiateurs ! (Ça et leurs bonnes propriétés de corps noirs.)

2.3 Retour sur la loi de Wiedemann-Franz

$$\frac{\lambda\rho_{\text{elec}}}{T} = \text{constante} = \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \simeq 2.44 \times 10^{-8}\,\text{W}\,\Omega\,\text{K}^{-2} \tag{17.5}$$

avec λ la conductivité thermique, ρ_{elec} la **résistivité électrique**, k_B la constante de Boltzmann et e la charge élémentaire.

Vérification de la loi

✍ 🕒 10 sec

On a mesuré ρ_{elec}, on vient de mesurer λ, on calcule donc $\frac{\lambda\rho_{\text{elec}}}{T}$ et on compare à $\mathcal{L}$.

3 Propriétés mécaniques

Propriété faible.

https://www.pmmh.espci.fr/~jbico/TP/TP%20Vibration.pdf

On vient de voir que le métal, pour des constructions, c'est aps idéal, parce que ça conduit trop bien la chaleur. Cependant, on construit beaucoup en métal, et ça...

Essayer de tordre en direct une grosse barre de fer

c'est parce que c'est du solide!!

Mais on peut aussi voir (*flexer des fils en cuivre*) que c'est plutôt malléable... Caractérisons cela!

Le module d'Young E intervient là

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{F}{SE}$$

La formule donnée par des calculs présentés dans le BUP936 ou le Duffait donnent, avec e l'épaisseur et L la longueur :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{I}{\rho S}}\frac{1.875^2}{L^2}\sqrt{E} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{12\rho}}\frac{1.875^2}{L^2}\sqrt{E} = \frac{3.515}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{Ee^2}{12\rho}} \tag{17.6}$$

Détermination du module d'young du fer

✍ Duffait 🕒

On prend un micro et on écoute la vibration d'une barre en ferraille quelconque. On en détermine le module d'Young, yay.

Remarques : On compte mesurer la fréquence d'un signal par transformée de Fourier sur un signal numérique, il convient alors de choisir la fréquence d'échantillonnage du signal la plus élevée possible pour avoir l'incertitude la plus petites sur la fréquence. Suivant le temps qu'il reste, on mesure soit pour une longueur et on remonte au module d'Young, soit on le fait sur plusieurs longueurs et on réalise une régression linéaire.

Incertitudes :

- Incertitude sur f : dépend de la fréquence d'échantillonage, u(f) = 1.1Hz. Ca dépend si vous mesurez f0 avec une seule valeur ou en utilisant les différentes harmoniques. Un facteur $\sqrt{N}$ apparaîtra au dénominateur.

- Longueur L de la barre, u(L) = 2mm.

- Du fait de la dépendance en puissance 2 de E vis-à-vis de la régression linéaire et e mesurée au palmer e = 2.0 ± 0.1mm (l'erreur principale vient du fait qu'on ignore si la barre est réellement plate), la principale incertitude de E est due à ces deux facteurs.

Les métaux ont un module d'Young très souvent élevé (de l'ordre du GPa, et un module de Poisson important.

On mesure ce dernier à l'aide de pendules simples couplés entre eux, au niveau de leur axe de rotation, par une tige métallique qui va avoir pour effet d'entraîner ou de ralentir un des pendules par rapport à l'autre. Ce couplage implique l'apparition de deux modes rotation avec deux pulsations : une pour le mode symétrique et une pour le mode antisymétrique.

conclusion

A travers ce montage on a réussi à mettre en évidence quelques propriétés qui caractérisent les métaux : ils sont bons conducteurs thermiques et électriques. Ces deux propriétés sont liées par la loi de Wienmann Franz qui caractérise un métal. Le bois et le plastique ne répondent pas à cette loi, ce ne sont pas des métaux. Néanmoins, l'utilisation massive des métaux par l'homme vient beaucoup du fait de leur propriétés mécaniques, notamment le module d'Young, ainsi que de leur abondance sur Terre.

Il nous resterait à parler de la dernière propriété caractéristique des métaux : leur aspect brillant et leur capacité à réfléchir le champ électromagnétique.

remarques

Effets Peltier et effet Zeebeck ?

Avec une TF sur la manip de détermination de λ, on montre un deuxième pic qui correspond aux pertes par effet joules à 2ω. C'est un terme non linéaire.

MP 18

Matériaux semi-conducteurs

Commentaires du jury

- 2010 à 2017 : La variété des matériaux semi-conducteurs fait qu'il est parfois difficile de savoir quel est le matériau utilisé dans un composant commercial, ou quel est le dopage dans certaines plaquettes. Les candidats mesurent alors des propriétés sans pouvoir les comparer à quoi que ce soit. Il vaut donc mieux utiliser des composants de caractéristiques connues. Par ailleurs, il est essentiel de connaître quelques ordres de grandeur, en particulier celui de l'énergie de gap et de la densité de porteurs.
- 2008 : Il est essentiel de savoir différencier les régimes de conduction intrinsèque et extrinsèque.

Bibliographie

- ✍ *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome 3. Electronique*, **Aubert, Quaranta** ⟶ Manips
- ✍ *Physique du solide*, **Kittel** ⟶ Théorie
- ✍ *Lasers*, **Cagnac** ⟶ Application : Diode Laser
- ✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait** ⟶ Diode Laser
- ✍ *Optique expérimentale*, **Sextant** ⟶ Application : Cellule photovoltaïque.
- ✍ *Physique de l'état du solide*, **Kittel** ⟶ ODG

1 Introduction aux semi-conducteurs : le comportement intrinsèque 1162
2 Semi-conducteur dopé (ou extrinsèque) 1163
2.1 Conductivité électrique en fonction de la température 1163
2.2 Effet Hall 1164
3 Applications 1165
3.1 Diode Laser 1165
3.2 Photorésistance (optionnel) 1165
3.3 Cellule photovoltaïque (optionnel) 1166

Introduction

Dans une séquence précédente, on a étudié les métaux, qui se sont vu caractérisés par leurs grandes conductivités thermique et électrique en comparaison aux isolants. Ces différentes propriétés sont explicables en étudiant la répartition énergétique des électrons. On distingue deux bandes d'énergie : la bande de conduction et la bande de valence. Chez les isolants, la bande de valence est pleine et séparée de la bande de conduction, vide, par un gap d'énergie de l'ordre de 10 eV. Dans les métaux, ces bandes se chevauchent et de nombreux électrons peuplent donc la bande de conduction. Comme son nom l'indique les semi conducteurs sont à la frontière entre ces deux types de matériaux. C'est ce qu'on va étudier au travers de ce montage en commençant par mettre en lumière les propriétés des semi-conducteurs, remonter aux valeurs de l'énergie de gap et du nombre de porteurs. Enfin on étudiera une application : la jonction PN.

But de ce montage Étudier les propriétés des semi-conducteurs et éventuellement regarder une ou deux applications.

1 Introduction aux semi-conducteurs : le comportement intrinsèque

✍ Quaranta 3, Kittel

À la différence des métaux, dont la résistance augmente avec la température (collisions avec les phonons), la résistance d'un semi-conducteur diminue avec la température (plus de k_BT donc plus d'e- dans la bande de conduction) donc résistance diminue. La théorie est faite dans le Kittel p197.

Un SC est dit intrinsèque s'il est pur, on a avec ϵ_g l'énergie de gap

$$n = p \propto T^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{e_g}{2k_BT}\right)$$

et on a pour la conductivité $\sigma = ne(\mu_p + \mu_n)$ donc

$$R = R_0 \exp(\frac{e_g}{2k_B}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}))$$

R_0 désigne une résistance caractéristique : c'est la résistance du semi-conducteur à T_0. Pour vérifier cette loi, on va chauffer une thermistance CTN (coefficient de température négatif) et obtenir l'évolution de la résistance en fonction de la température. On utilise le dispositif P102.5 constitué d'un bloc de cuivre chauffé par une résistance chauffante. Au sein du bloc de cuivre est encastré un thermocouple et la thermistance CTN.

☕

Mesure de la caractéristique de la CTN

✍ ⏲

Incorporer la thermistance CTN P102.5 et un thermocouple P102.16 dans le bloc de cuivre. Brancher le thermocouple sur l'appareil P102.27 (attention à la polarité). À température ambiante, mesurer la résistance de la CTN au multimètre et la température au thermocouple.

Alimenter la résistance chauffante en 5V continu. Le bloc chauffe : relever régulièrement la température T et la résistance R.

Remonter à $\epsilon_g \simeq$0,76 eV et vérifier le comportement non-métallique de ce composé magique.

Une remarque toute bête c'est que cela ressemble pas mal à l'énergie de gap du Germanium : 0.75eV

On a donc vu le comportement qui diffère d'un métal ! Cependant on est pas au bout de nos surprises puisque ce comportement est sans dopage...

↓

2 Semi-conducteur dopé (ou extrinsèque)

Dopage : Insertion dans une matrice faite d'un seul élément un autre élément, généralement proche dans la classification périodique. (✍ Kittel p201, par ex, 1 bore pour 10^5 silicium)

À température ambiante l'énergie de gap est grande devant l'énergie d'excitation thermique. Afin d'avoir des matériaux ayant une conduction plus élevée à température ambiante, on ajoute des impuretés au cristal. Le SC est dit dopé P si l'on ajoute des trous dans la bande de valence, et dopé N si l'on ajoute des électrons à la bande de conduction.

On va donc étudier ces semi-conducteurs dopés. Pour le Silicium, le dopage N est réalisé avec du Phosphore (juste après dans le tableau), le dopage P avec du Bore (colonne d'avant). Pour le Germanium, on utilise plus l'arsenic et le gallium AsGa). On va étudier les différentes caractéristiques d'un tel SC, dit extrinsèque, sur un exemple : Ge dopé N.

2.1 Conductivité électrique en fonction de la température

✍ Quaranta 3, Kittel p197.

Pour un SC dopé, il peut présenter le comportement intrinsèque à haute température mais la résistance est indépendante de la température quand celle-ci est basse.

On refait la même expérience que précédemment mais avec la plaquette au germanium , on chauffe avec le dispositif intégré à la plaquette .

Évolution de la résistance avec la température du Ge dopé N

✍ Quaranta 3, p432 ⏲

Matériel : Voltmètre, plaque de Germanium N, alim alternative 12V.

On impose un courant de quelques mA avec le support, on chauffe la plaque SC jusqu'au alentours de 150 degrés (la notice conseille de ne pas dépasser 170 degrés, ainsi, si vous souhaiter vous aventurer au delà, soyez particulièrement vigilant à toutes fumées ou odeurs suspectes), et on relève en faisant refroidir à l'air la tension à différentes températures.

Faire joujou à l'azote si possible.

Remarque : On peut, en prépa, faire le très chaud et le très froid, et en live faire la température ambiante.

On peut tracer de même $\ln(R) = f(\frac{1}{T})$, et on observe deux régimes :

- le régime précédent à hautes températures (une droite) où on a un comportement intrinsèque (on évalue le gap : $a = \frac{e_g}{2k_B}$ à comparer à 0.67eV (✍ Kittel p183))
- un le comportement d'SC dopé où la résistance ne dépend pas de la température à basse température.

rem : il existe deux autres régimes difficiles à atteindre expérimentalement :$k_BT \gg e_g$ où on retrouve un métal et très basse T où il y a un "gel" des porteurs et la conductivité chute brutalement.

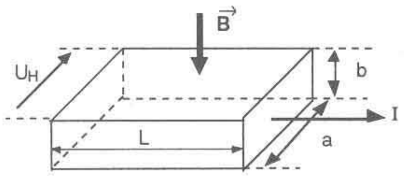
Une autre caractéristique importante des SC est la densité de porteurs de charge, on va essayer de la déterminer.

2.2 Effet Hall

✍ Quaranta tome 4, p133 (voir également tome 3)

Il est possible de mesurer un champ magnétique autrement qu'avec un fluxmètre. Ainsi, le teslamètre utilisé précédemment utilise un autre phénomène physique que l'induction de Faraday : l'effet Hall.

Lorsque l'on soumet un matériau parcouru par un courant I_{sc} (de densité $\vec{j}$ à un champ $\vec{B}$, on observe en régime permanent l'apparition d'une ddp U_H perpendiculaire à la fois à $\vec{j}$ et $\vec{B}$. En gros, $\vec{j}$ indique le déplacement des électrons qui subissent une force de Laplace volumique $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ et qui vont donc tous être déviés vers la même face du matériau. On a alors une accumulation de charges négatives d'un côté et de charges positives de l'autre donc paf ça fait des chocapics (et une ddp par la même occasion).



Cette tension dite de Hall est donnée par :

$$U_H = \frac{I_{sc}B}{neb} \tag{18.1}$$

avec e la charge élémentaire et n la densité électronique.

Les sondes à effet Hall sont ainsi plutôt composées de semi-conducteurs ($n \simeq 10^{21}$ m^{-3}) que de métaux (($n \simeq 10^{29}$ m^{-3}).

Étalonnage de l'électroaimant

✍ ⏲

Avec un teslamètre fixé sur une potence, mesurer le champ B dans l'entrefer d'un électroaimant avec des pièces cylindriques en fonction de l'intensité le parcourant. Pour des raisons d'hystérésis, toujours aller dans le même sens, par exemple aller dans le sens des I croissants.

Sonde à effet Hall

✍ Quaranta tome 4 p133 ⏲ 10 min

Matériel :

- plaquette P64.30 alimentée en 12 V par le générateur P64.37
- électroaimant avec des pièces cylindriques avec son alimentation
- voltmètre

Choisir un écartement entre les pièces de l'électroaimant, par exemple 2 cm. Ne plus y toucher. Placer la plaquette dans l'entrefer.

Noter la valeur U_H mesurée au voltmètre au niveau de la plaquette. Faire de même en retournant la plaquette ou bien en inversant le courant dans l'électroaimant

Répéter l'opération pour des I croissantes (évite l'hystérésis) allant de 1 à 8 A. L'étalonnage fait en préparation permet de connaître B.

Tracer $U_H = f(B)$ et faire une régression affine. En déduire n.

On définit la **mobilité** μ des porteurs de charge par

$$\mu = \frac{\sigma}{ne}$$

avec σ la conductivité électrique du SC mesurée précedemment et n ce qu'on vient de mesurer. On peut donc calculer μ.

Comparer la valeur obtenue à la valeur théorique de 3900 $\mathrm{cm^2V^{-1}s^{-1}}$.

Incertitudes :

$$u(\mu) = \mu\sqrt{\left(\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{u(n)}{n}\right)^2}$$

3 Applications

Selon le temps, on peut en présenter une, deux ou aucune.

3.1 Diode Laser

✍ Cagnac, p268 ; Duffait p64 ;

Diode = jonction PN, ici DEL, peut émettre de la lumière, et on peut réaliser la jonction de sorte à ce qu'elle forme la cavité optique.

On a un seuil, pour le voir il faut tracer la caractéristique courant-intensité. Ensuite on mesure la longueur d'onde au spectro : $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda} = e_g$

2014 : Prix Nobel attribué à Shuji Nakamura, Isamu Akasaki et Hiroshi Amano pour la création de la LED bleue.

Diode Laser

✍ 🕒 5mn

Matériel : Spectro, diode laser, polariseur-analyseur pour éviter la saturation du spectro.

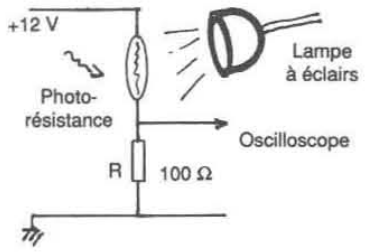
Relever le spectre de la diode laser

On obtient une gaussienne centrée autour de 650 nm , ce qui équivaut donc bien à une énergie de gap de l'ordre de 2 eV.

3.2 Photorésistance (optionnel)

Une photorésistance est un SC dont l'excitation permettant la conduction est lumineuse et non thermique. On envoie donc de la lumière pour créer un courant. Elles sont utilisées pour détecter des variations de flux (pas assez précises pour mesurer des flux), notamment pour déclencher l'allumage des éclairages publics.

Lorsque la lumière s'éteint, le courant ne cesse pas automatiquement : il y a un **temps de recombinaison** pendant lequel les électrons de la bande de conduction se recombinent avec les trous de la bande de valence. On va pouvoir mesurer le temps de recombinaison des porteurs avec un stroboscope.

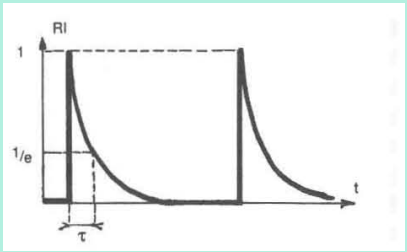


Mesure du temps de recombinaison des porteurs de charge

✍ Quaranta tome 3 p435

Matériel : Photorésistance, Stroboscope, Alimentation 12 V, Résistance, Oscilloscope, GBF.

On effectue le montage de la figure 7. On mesure la tension aux bornes de la résistance pour avoir l'image du courant en sortie de la photorésistance. On l'éclaire avec un stroboscope avec des flashs de fréquence 100Hz (commandé avec un GBF en pulses de faible largeur). A l'oscillo, on voit une décroissance exponentielle du courant.



On estime le temps de recombinaison grâce à l'oscillo en mesurant le temps de décroissance expontentielle du courant. Pour du Silicium, on attend un temps de recombinaison de l'ordre de la milliseconde.

3.3 Cellule photovoltaïque (optionnel)

✍ Sextant p85 On réalise l'étude donnée.

Conclusion

On a vu les caractéristiques des semi-conducteur, qui sont présent dans le quotidien (transistors = ordinateurs, téléphones...) mais aussi en recherche (détection, électronique...) et en physique atomique (accordabilité de la diode LASER). Ces caractéristiques : résistance (candidat pour la thermométrie) et nombre de porteurs de charge (effet hall, mesure de B) les rendent très utiles.

MP 19

Effets capacitifs

Commentaires du jury

- **2017 :** La connaissance du principe d'un RLC mètre est essentielle dans ce montage.
- **2015-2016 :** Le jury constate que l'étude de la propagation d'une impulsion dans un câble coaxial est, à juste titre, souvent proposée dans ce montage, mais que les propriétés physiques de ce phénomène sont souvent mal maîtrisées.
- **2014 :** Il est dommage que les candidats se limitent le plus souvent à l'étude du condensateur d'Aepinus et à celle d'un circuit RC.
- **2006 :** Pour mesurer des capacités de petite valeur, on ne peut pas négliger la capacité d'entrée de l'oscilloscope ou celle des câbles.
- **1999 :** Par ailleurs, il ne suffit pas de choisir une expérience où intervient un condensateur pour en faire une méthode de mesure des capacités électriques : le modèle du multivibrateur astable à circuits logiques qui conduit à la formule T = 2RC ln 3 contient des hypothèses trop grossières et ne permet d'obtenir qu'un ordre de grandeur, ce qui est évidemment d'autant plus regrettable que le montage est déjà sophistiqué. En revanche il peut être utilisé comme principe d'une mesure de comparaison. De même, il est peu satisfaisant de déterminer une capacité à partir de la formule $LC\omega^2 = 1$ en se plaçant à la résonance d'un circuit RLC série et en supposant connues les valeurs de C et de L, la valeur de celle-ci varie avec la fréquence, beaucoup plus en général que celle de la capacité, si bien qu'il est plus convaincant d'utiliser cette expérience pour la détermination de l'inductance d'une bobine. Les candidats peuvent également se demander pourquoi les boîtes de condensateurs de précision comportent trois bornes.

Bibliographie

✍ *Expériences d'électronique à l'agreg*, **Duffait**	Pourquoi
✍ **Manneville**	Jonction PN
✍ *Tome 4, Electromagnétisme*, **Quaranta**	Pourquoi
✍ **Asch**	Pourquoi
✍ *Expérience d'électronique*, **Krob**	Circuits à AO

1 Étude d'un condensateur modèle . . . 1168
1.1 Aepinus . . . 1168
1.2 Circuit RC . . . 1169
2 Mesure de Capacité . . . 1170
2.1 multivibrateur astable . . . 1170
2.2 Capacité linéique d'un câble coaxial . . . 1171
3 Application . . . 1172
3.1 Jonction PN . . . 1172
3.2 Le détecteur de niveau d'eau . . . 1173

Introduction

Lorsque deux conducteurs électriques sont séparés par un milieu isolant, autrement appelé diéléctrique, lorsqu'on applique une différence de potentiel entre les armatures, on assiste à une accumulation de charges par effet électrostatique. C'est **l'effet capacitif**.

La capacité est directement reliée aux charges qui sont stockées sur les armatures et inversement proportionnelle à la différence de potentiel. Ce montage propose d'étudier en premier lieu un modèle de condensateur plan puis de montrer une application classique avec un circuit RC. On s'intéressera ensuite à la mesure de capacité avec un multivibrateur astable qui sera appliquée à un câble coaxial. Finalement, on reverra quelques applications de l'effet capacitif avec un détecteur de niveau d'eau, une jonction PN et un RLC en fonction du temps qu'il reste pour la présentation.

1 Étude d'un condensateur modèle

1.1 Aepinus

Le condensateur d'Aepinus est constitué de 2 armatures conductrices paralèlles en regard et séparées par de l'air qui jouera le rôle du milieu diélectrique. Sa capacité est alors

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e} \tag{19.1}$$

où S est la surface des plaques et e est l'écartement entre les deux plaques, mesurée au vernier. Cette formule n'est valable que si $S \gg e^2$.

Étude du condensateur d'Aepinus

✍ Quaranta tome 4 p188 ⏲ 5 min

On utilise le condensateur d'Aepinus P68.12. Pour minimiser les capacités parasites dûes aux fils, on les fixe avec du scotch en les maintenant le plus loin possible du condensateur. On les relie ensuite à un RLC-mètre, réglé en capacimètre à 1 kHz, on obtient la capacité du condensateur d'Aepinus.

On réalise cette mesure plusieurs fois pour différents écartements e. On trace $C = f(1/e)$ pour vérifier la loi. Connaissant la valeur de $S = 560$ cm^2, on peut également remonter à ε_r.

En théorie, on a $\varepsilon_0 = 8.854\,187 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ et $\varepsilon_r = 1.0005$.

On peut toujours discuter sur la validité des points mesurés ou sur les effets capacitifs parasites. De manière générale, cette manip n'est pas vraiment ultra précise.

Fonctionnement d'un RLC mètre

En gros, on injecte un courant alternatif constant et on mesure la tension aux bornes du composant. On mesure la composante de la tension en phase avec le courant, ce qui permet de calculer la partie résistive, et on mesure la composante de la tension en quadrature (déphasée de +/- 90°) avec le courant, ce qui donne la partie réactive. La mesure se fait simultanément avec une "détection synchrone".

1.2 Circuit RC

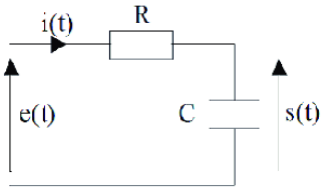


FIGURE 19.1 – Hooooooo.

Une des applications fondamentale des condensateurs et de l'effet capacitif est le filtrage. La formule de la tension aux bornes d'une capacité dans un circuit RC est, en complexes,

$$u_c = \frac{1}{1 + RCj\omega} u_e \tag{19.2}$$

Tracer le bode d'un RC

✍ 🕒 2mn

R=1OOOΩ, C=1μF.

On fait une simulation, puis on fait la mesure propre (en préparation), et on ajoute seulement 3-4 points autour u point d'inflexion en live. On remonte par le tracé des droites limites à la valeur vraie de la capacité (en connaissant la valeur vraie de la résistance.

On explique bien tout ce à quoi on est censé s'attendre (-3dB/dec).

$$C = 1/\omega_0 R$$

$u(R)$ est donnée par un ohmmetre ou la lecture du code couleur, au choix. $u(\omega_0)$ est donné par la lecture sur le graphe, à voir... Lire la phase à $\pi/4$ c'est bien.

$$u(C) = C\sqrt{\left(\frac{u(\omega_0)}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2}$$

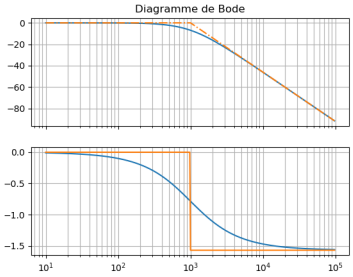


FIGURE 19.2 – Haaaaa.

On peut s'en servir pour filtrer un signal bruité salement !

Débruiter un signal

✍ ⏲ 1mn

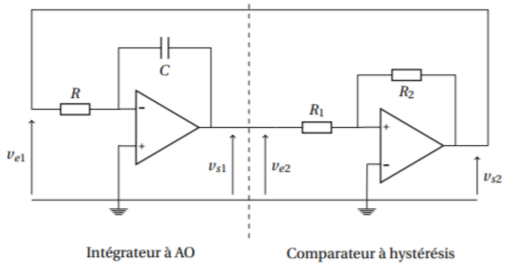
Deux possibilité :

- ajouter un ampli et mettre de la voix en entrée, et montrer que avec on a un son clair, sans on a un son dégueu.
- Faire un créneau et le transformer en sinus.

2 Mesure de Capacité

Bon le RLC mètre c'est bien beau mais on voudrait bien essayer de mesurer des capacités autrement.

2.1 multivibrateur astable



On illustre par cette partie comment un condensateur peut stocker de l'énergie électrique et comment on peut utiliser cette propriété pour déterminer sa capacité. Le multivibrateur astable est un oscillateur à relaxation. Dans ces types d'oscillateurs, l'énergie peut s'accumuler dans un réservoir (ici le condensateur) et se vider. Pour déterminer l'instant de vidange du réservoir il faut imposer un seuil. C'est le rôle du comparateur à hystérésis. Le circuit oscille donc entre des phases de remplissage de la capacité et des phases de vidange. On peut déterminer que la période de ces phénomènes est égale dans les deux cas et qu'elle vaut :

$$T = 4\frac{R_1 RC}{R_2} \tag{19.3}$$

La tension v_{s2} est donc un signal créneau $\pm V_{\text{sat}}$ de période T. À saturation positive $v_{s2} = +V_{\text{sat}}$, l'intégrateur intègre cette tension au cours du temps et donne une sortie décroissant linéairement à la vitesse $-\dfrac{V_{\text{sat}}}{RC}$. Lorsque $v_{s1} = v = e2$ atteint le seuil de l'oscillateur à relaxation $-V_0 = -\dfrac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$, le comparateur bascule à saturation négative $v_{s2} = -V_{\text{sat}}$. La tension en sortie de l'intégrateur croît à la vitesse $+\dfrac{V_{\text{sat}}}{RC}$ jusqu'à atteindre $+V_0$. On a alors de nouveau basculement et c'est reparti pour un tour. Au final, v_{s1} est un signal triangulaire $\pm\dfrac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$ également de période T.

Il est important de prendre $R_1 < R_2$ pour être sûr d'avoir un inverseur. La valeur de T nous donne C.

Remarque

On peut remplacer l'AO intégrateur par un bon vieux RC. Le montage est alors un peu différent et notamment la charge/décharge du condensateur se fait en $\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$. Au final, la nouvelle période d'oscillation s'écrit

$$T = 2RC\ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$$

Étalonnage du multivibrateur astable

✍ Duffait p187 ⏲ 10 min

Matériel :

- $R = 100$ kΩ, $R_1 = 3.3$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, mesurées à l'ohmmètre (lire la notice pour les incertitudes)
- Boîte à décade de capacités
- 2 AO
- Latis-Pro

Réalise le montage ci-dessus, qui est un montage en série d'un intégrateur inverseur avec un comparateur à hystérésis. La tension à la sortie du 1er AO et celle à la sortie du 2ème sont respectivement un signal triangulaire (intégrateur) et un signal créneau (comparateur). C'est un système bouclé et auto-entretenu.

Mesurer la période T à l'oscilloscope pour plusieurs valeurs de C mesurée au RLC mètre.

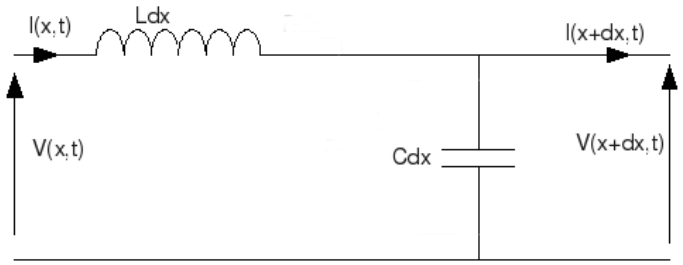
Tracer $T = f(C)$ pour obtenir une droite de pente a. Comparer a à la valeur de $a_{\text{théorique}} = 4\dfrac{R_1 R}{R_2}$.

Incertitudes :

$$u(a_{\text{théorique}}) = a_{\text{théorique}}\sqrt{\left(\frac{u(R_1)}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{u(R_2)}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{u(R)}{R}\right)^2}$$

2.2 Capacité linéique d'un câble coaxial

On va utiliser le multivibrateur astable pour mesurer la capacité linéique Γ d'un câble coaxial. En effet, une portion de câble coaxial peut être modélisée par un circuit LC :



Mesure de la capacité linéique d'un câble coaxial avec un multivibrateur astable

✍ ⏲

Mettre le câble coaxial à la place de la boîte à décade de capacité. Mesurer sa capacité C en mesurant la période des oscillations T à l'oscilloscope :

$$C = \frac{T}{a}$$

Le câble a une longueur $L = 100 \pm 0.1$ m. En déduire $\Gamma = \dfrac{C}{L}$

Incertitudes :

$$u(C) = c\sqrt{\left(\frac{u(T)}{T}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2}$$

$$u(\Gamma) = \Gamma\sqrt{\left(\frac{u(C)}{C}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

Autre façon de mesurer Γ

On relie une entrée du câble à un GBF et un oscilloscope. On envoie un burst sinusoïdal (1 cycle, $f = 5$ MHz car le coax est un passe-haut, amplitude 5 V, 1 ms entre chaque burst). On voit le signal réfléchi sur l'oscilloscope donc on en déduit la vitesse c du signal (on attend $2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$).

Ensuite, on placer une boîte à décade de résistance en sortie du câble et on cherche la résistance qui annule le signal retour sur l'oscilloscope (adaptation d'impédance). On trouve l'impédance Z du câble. On attend 50 Ω.

Or $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda}}$ et $Z = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$. On en déduit Γ et on a même l'inductance linéique Λ.

3 Application

3.1 Jonction PN

✍ Mannevile p.141

On a déjà vu que les effets capacitifs peuvent servir à filtrer des signaux. Cependant dans certains cas les effets capacitifs sont nuisibles, comme par exemple dans le cas de la jonction PN.

Une jonction PN c'est une diode, ou l'inverse, je sais pas. En tout cas si on prend une Zéner 12V (P29), et une résistance de 100kΩ, et lorsqu'on la prend en régime bloqué, elle peut se modéliser comme une capacité C_i.

En effet en fonctionnement inverse, on applique une tension sinusoïdale (shiftée pour être toujours en inverse), et on a alors

$$C_i = S\sqrt{\frac{\epsilon\frac{e}{2}}{\frac{1}{N_A}+\frac{1}{N_B}}\cdot\frac{1}{\sqrt{V_0+V}}} \tag{19.4}$$

où V_0 est la barrière de potentiel, N_A la concentration d'atomes accepteurs du semi-conducteur P, N_D la concentration en atomes donneurs du semi-conducteur N.

☕

Effets capacitifs de la jonction PN

✍ ⏲ 5mn

On a tracé le diagramme de Bode pour une tension $V = 2$V et un offset de 1V. On va donc pouvoir se servir de cette caractérisation pour remonter à la capacité de la diode. On repère la fréquence de coupure en utilisant le critère à -3dB. On utilise des voltmètres pour être plus précis sur la mesure des tensions. Et on repère f sur le GBF.

On trace ensuite $f_c^2 = 1/4\pi R^2C^2 = g(V)$ et on s'attend à une droite.

On peut ici parler de la diode varicap et de son intérêt. https://fr.wikipedia.org/wiki/Diode_varicap

3.2 Le détecteur de niveau d'eau

On peut aussi faire varier les capacités en changeant le diélectriqu présent dans les armatures, comme on l'a vu avec le condensateur d'Aepinius. Il aurait d'ailleurs pu être intéressant de refaire l'expérience avec du plexiglass entre les deux armature.

Ici nous allons détecter, de part la variation de capacité, le niveau d'eau dans un condensateur !

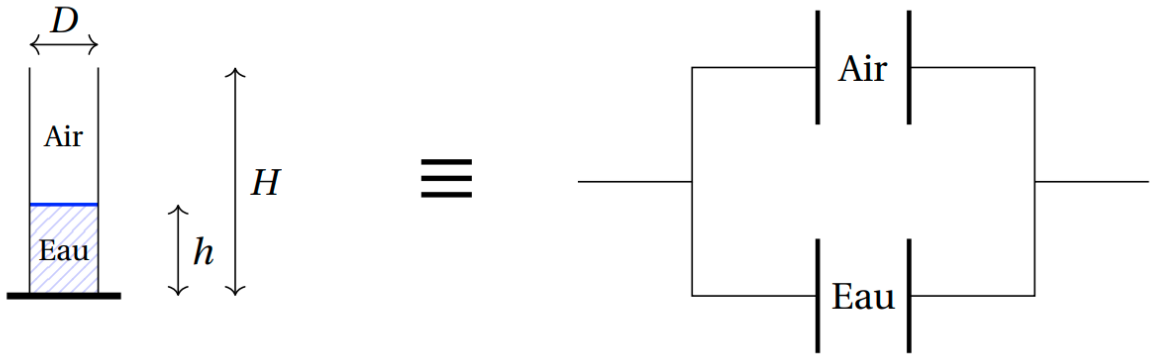


FIGURE 19.3 – Principe du capteur

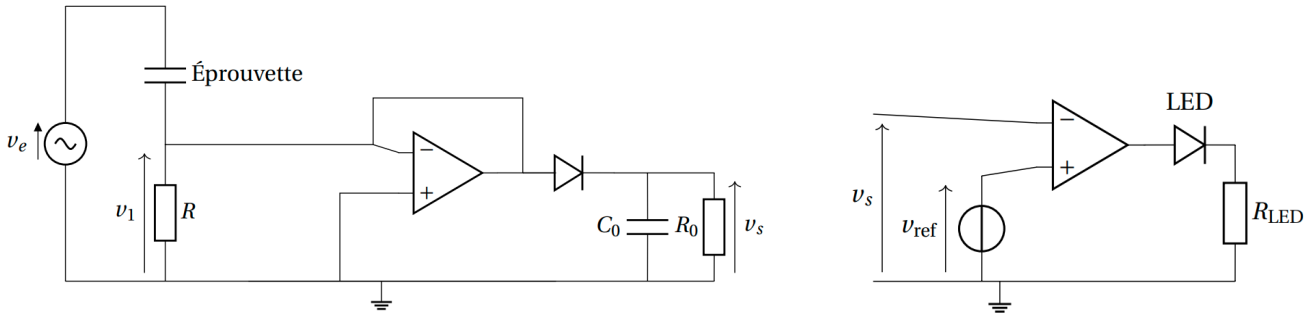


FIGURE 19.4 – Conditionnement du capteur (1ère partie du montage) et détecteur de dépassement.

Premier montage : on place un suiveur, et un détecteur de crête (diode suivi d'une filtre RC parallèle) permet d'obtenir l'amplitude de la tension alternative. Le signal continu est donc proportionnel à la capacité d'entrée, donc à la hauteur d'eau.

Deuxième montage : on fait un comparateur absolu.

$$C = C_{\text{eau}} + C_{\text{air}} \propto \epsilon_{r,\text{eau}} h + \epsilon_{r,\text{air}}(H - h) \tag{19.5}$$

$$v_1 = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} v_e \tag{19.6}$$

$$v_1 = jRC\omega v_e \qquad \text{si } RC\omega \ll 1 \tag{19.7}$$

- Pour les valeurs de R et de ω, un compromis est à trouver : il faut avoir $RC\omega \ll 1$ pour assurer la linéarité du conditionnement, mais $RC\omega$ doit être suffisant pour obtenir un signal d'amplitude significatif. On choisira $R = 200$ kΩ et $f = 1$ kHz.
- Le produit R_0C_0 doit être choisi grand devant la période du signal. Par contre, ce temps conditionne également le temps de réponse de l'ensemble de la chaîne. On prendra $R_0 = 100$ kΩ et $C_0 = 1$ µF.
- On prendra $V_{pp} = 20$V pour v_e

☕

Détecteur de niveau d'eau

✍ 🕘 5mn

- Étalonner le capteur au voltmètre, en traçant $v_s(h)$. On a normalement une belle droite de pente casse pied à déterminer théoriquement.
- Brancher la deuxième partie, en fixant une amplitude (donc une hauteur) limite partir de laquelle la led doit s'éteindre.

Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons illustré plusieurs aspects liés aux effets capacitifs. En particulier, nous avons vu comment fabriquer un condensateur et comment mesurer de différentes manières la capacité d'un composant.

Certains effets capacitifs sont très présents au quotidien comme nous l'avons dit par exemple pour détecter des niveaux dans des réservoirs. On peut également citer les détecteurs de proximité utilisés pour les écrans tactiles ou les interrupteurs à contact et qui sont basés sur le principe de modification des charges lorsque l'utilisateur approche.

C'est également le principe de fonctionnement de la *thérémine*, le plus vieil instrument de musique électronique (1919). Cet instrument "imite" la voix humaine. Il est composé d'un boîtier électronique équipé de deux antennes, et a la particularité de produire de la musique sans être touché par l'instrumentiste. Dans sa version la plus répandue, la main droite commande la hauteur de la note, en faisant varier sa distance à l'antenne verticale. L'antenne horizontale, en forme de boucle, est utilisée pour faire varier le volume selon sa distance à la main gauche. Le son est produit à partir d'un signal électrique engendré par un oscillateur hétérodyne à tubes électroniques. Deux signaux de fréquences élevées (l'un fixe à 170 kHz, l'autre variable entre 168 et 170 kHz) se combinent pour former un battement et fournir un signal audible, entre 20 et 20 000 Hz1. L'effet de capacité apporté par le corps de l'instrumentiste, à proximité des antennes, affecte la fréquence produite, tout comme une personne se déplaçant dans une pièce peut altérer la qualité d'une réception de radio ou de télévision. Cette caractéristique est mise à profit dans le thérémine, et la combinaison des deux mains, l'une commandant le volume et l'autre la hauteur de la note, permet d'obtenir des effets sonores insolites.

https://youtu.be/K6KbEnGnymk

MP 20

Induction, auto-induction

Commentaires du jury

- **2017 :** Les notions d'induction, auto-induction, induction mutuelle sont souvent mal comprises rendant l'interprétation délicate de certains résultats.
- **2014-2016 :** Lors de ce montage, trop de candidats abusent des expériences qualitatives et transforment la séance en une série d'expériences de cours sur l'induction et obtiennent de ce fait une note médiocre.
- **20009-2016 :** La notion d'inductance mutuelle est souvent mal dégagée, en particulier à cause de mauvais choix dans les composants utilisés et dans la fréquence d'excitation.
- **2009 :** L'observation subjective d'un retard à l'allumage d'une lampe ne peut être qu'une introduction qualitative du phénomène d'auto-induction qui doit être illustré par des mesures précises et une confrontation entre la mesure et le modèle décrivant le phénomène. L'étude du rendement du transformateur n'a pas sa place dans ce montage.

Bibliographie

✍ *Dictionnaire de physique expérimentale tome 4*, **Quaranta**

1 Présentation de l'induction 1176
1.1 Loi de Lenz 1176
1.2 Loi de Faraday, version simple 1176
1.3 Loi de Faraday, version chiadée 1178
2 Mesure de coefficients d'inductance 1179
2.1 Inductance propre d'une bobine 1179
2.2 Écart au comportement idéal 1179
2.3 Mesure d'inductance mutuelle 1180
3 Applications 1181
3.1 Freinage par courants de Foucault 1181
3.2 Le transformateur 1182
3.3 Chauffage par induction 1183

Introduction

Les phénomènes d'induction, bien que très présents dans nos vie (chargeurs sans fil, plaques à induction, micro/hautparleur, freinage des poids lourds, redressage de courant, bougies de voiture, allumage des néons...), les phénomènes inductifs sont souvent subtils et un peu à part dans le cursus du physicien.

1 Présentation de l'induction

1.1 Loi de Lenz

Ces phénomènes reposent sur l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation montre un couplage entre les champs magnétique et électrique. Le signe *moins* dans cette expression est la signature de la loi de modération de Lenz, qui stipule :

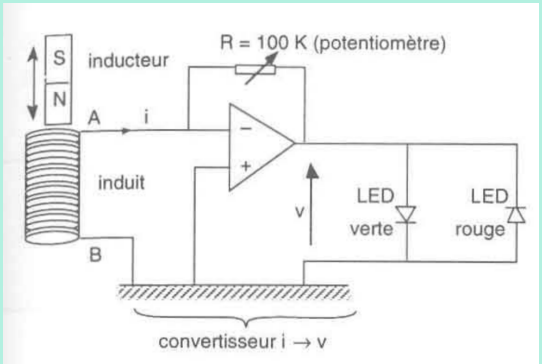
Le courant induit a un sens tel que les variations de flux induit qu'il crée s'opposent aux variations du flux inducteur.

On distingue alors deux types d'induction : **Neumann** (aimant en mouvement, bobine fixe) et **Lorentz** (Bobine en mouvement ou déformation, aimant qui bouge).

Dans les deux cas, il est important de rappeler que dans le cadre de l'induction, on se place en ARQS magnétique, c'est-à-dire dans un régime où l'effet des courants domine celui des charges.

Illustration de la loi de Lenz

Matériel : Bobine 100 spires, AO, boite à decades, leds, aimant plat.



Procédé :

On fait aller et venir l'aimant, on règle l'ampli avec la boîte à décades (100KΩ), et on met deux leds de couleurs différentes.

1.2 Loi de Faraday, version simple

1.2.1 Proportionnalité entre flux et intensité

En faisant passer un courant dans une bobine, on peut voir, avec une sonde à effet Hall, qu'un champ magnétique B apparait. C'est l'effet d'induction propre. Nous nous plaçons ici en induction de Neumann.

Intéressons nous tout d'abord à la relation entre le flux ϕ_B du champ magnétique à travers une bobine et l'intensité i parcourant cette dernière. On cherche à vérifier la relation de proportionnalité

$$\phi_B = Li$$

L est le coefficient d'inductance propre de la bobine, dont nous reparlerons par la suite et que nous chercherons à déterminer précisément.

Pour vérifier cette relation, on admet que la sonde à effet Hall nous donne effectivement le champ B.

Hypothèses :

- Solenoïde infini (proche du centre)
- ARQS magnétique

Proportionnalité entre le flux et l'intensité dans une bobine

✍ 10mn en prépa

Matériel : une bobine alimentée en continu, une sonde à effet Hall, un ampèremètre

Expérience : On impose un courant i dans la bobine et on mesure le champ B induit avec la sonde à effet Hall. On trace B = f (i), et le coefficient directeur est L/(nS), avec n le nombre de spires dans la bobine, et S la surface à l'intérieur.

Les incertitudes sur B et i sont prises sur les notices des appareils. On obtient une droite. On vérifie bien la proportionnalité entre B et i, et donc entre ϕ_B et i. On peut remonter à L, mais déterminer L avec cette méthode ne serait pas très précis, car nous ne connaissons pas bien S, et donc pas bien le flux magnétique. Nous reviendrons sur des mesures d'inductance.

1.2.2 Vérification de la loi de Faraday

La loi importante de l'induction est la loi de Faraday. Toute variation de flux de champs magnétique à travers un circuit se traduit par l'apparition d'un champs électrique vérifiant, avec e la force électromotrice, ϕ le flux au travers le circuit vu dans le référentiel du laboratoire :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{20.1}$$

Pour la vérifier nous allons nous palcer en induction de Lorentz, avec un champs fixe et un circuit mobile.

Loi de Faraday

✍ 20mn en prépa

Matériel : électroaimant alimenté en continu, sonde à effet Hall, sonde du fluxmètre.

Expérience :

- On alimente l'électroaimant en continu ; un champ B est créé dans l'entrefer.
- On mesure la tension e aux bornes des spires. On place d'abord les spires dans le champ (dans l'entrefer, puis on les retire tout en lançant une acquisition sur ordinateur pendant à peu près 3s.
- On intègre la tension obtenue.

- On mesure le champ avec la sonde à effet Hall, et on en déduit le flux magnétique ϕ_B qui passait à travers les spires (connaissant par ailleurs la surface des spires).
- On trace $\phi_B = f(\int e)$, ça fait une droite de pente -1.

1.3 Loi de Faraday, version chiadée

L'autre loi importante de l'induction est la loi de Faraday. Toute variation de flux de champs magnétique à travers un circuit se traduit par l'apparition d'un champs électrique vérifiant, avec e la force électromotrice, ϕ le flux au travers le circuit vu dans le référentiel du laboratoire :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{20.2}$$

Dans cette expérience on se place dans le cadre de l'induction de **Neumann**. L'objectif est de mesurer la fem induite aux bornes d'une bobine, par deux autres bobines placées en configuration Helmoltz (p77.4). Le champ $\vec{B}$ est constant et vaut, avec R le rayon des bobines (et la distance entre elles) et N leur nombre de spires :

$$B(I) = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R} = 1.356 \times 10^{-3} I = \alpha I$$

On applique $I = I_0 \cos(\omega t)$, on met une petite bobine au milieu, et alors on a, avec θ l'angle entre B et $\mathrm{d}S$, n le nombre de spires de la bobine du milieu, et S sa surface :

$$e = -\frac{\partial}{\partial t}(\alpha I_0 n S \cos(\omega t)\cos\theta) = 1.356 \times 10^{-3} I_0 n S \omega \sin(\omega t)\cos\theta \tag{20.3}$$

Vérification de la loi de Faraday

Pour avoir un courant assez fort dans les bobines, on utilise un ampli de puissance (on peut se le permettre - limitation à 5A). On envoie une intensité sinusoïdale dans les bobines (en confi Helmoltz), on vérifie plusieurs dépendances :

- Qualitativement, le signe de la fem, et la quadrature de phase. Attention, la quadrature de phase est entre I dans les bobines de Helmoltz et U dans la bobine au centre, donc il faut bien prendre la tension au bornes d'un rhéostat pour avoir I. On montre alors qu'on a qq chose en sin(ωt). Pour le signe - on est marron pcq il faudrait avoir le sens de l'enroulement de la bobine centrale. Pour le déterminer, on peut le faire en préparation en utilisant... la loi de Faraday.
- Qualitativement OU Quantitativement : en fréquence/pulsation (attention, **il faut être dans l'ARQS**). De plus, aux bornes de la résistance, on a l'intensité dans un circuit RL -> passe-bas (en intensité), donc bien mesurer l'intensité pour avoir la dépendance en fréquence.
- Qualitativement OU quantitativement : en I et donc en B_0 . On prend pour ça une sonde à effet Hall pour mesurer B_0.
- en θ

Pour faire ça on fait varier les paramètres un par un, on trace des droites. Tout cela nous permet de remonter à NS.

remarque : Reprendre le même montage, en intensité CONTINUE, et faire tourner la bobine induite. On observe une intensité variable à ses bornes. C'est du Lorentz !

2 Mesure de coefficients d'inductance

2.1 Inductance propre d'une bobine

Lorsqu'une bobine est parcourue par une intensité I, elle crée un champ magnétique par induction. Cette bobine est donc soumis à deux champs magnétiques : le champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ et le champ magnétique que la bobine elle-même crée, appelé *champ magnétique propre* $\overrightarrow{B}_{\text{propre}}$. La loi de Faraday pour cette bobine s'écrit donc

$$e = -\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{\text{ext}} - \Phi_{\text{propre}}) \tag{20.4}$$

Le flux propre Φ_{propre} est proportionnel au courant I :

$$\Phi_{\text{propre}} = L \times I \tag{20.5}$$

avec L l'inductance de la bobine. On parle également d'inductance propre ou d'auto-inductance.

Pour mesurer L, on se propose d'utiliser un circuit RLC série. Si on s'intéresse à la tension aux bornes de la résistance, la fonction de transfert du circuit s'écrit

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{20.6}$$

Mesure de l'inductance propre d'une bobine

✍ ⏲

Matériel : une résistance $R = 100\ \Omega$, bobine, boîte à décades de capacité (de 100 nF à 1 μF), GBF, oscilloscope, RLC mètre

Réaliser un ciruit RLC série. Envoyer sur la voie 1 de l'oscillo le signal d'entrée et sur la voie 2 la tension aux bornes de la résistance. On a donc affaire à un passe-bande. Passer en mode XY pour voir l'ellipse et trouver la fréquence du GBF pour laquelle l'ellipse est une droite (Lissajous rpz) : c'est la fréquence de résonance.

Répéter l'opération pour plusieurs capacités C pouis tracer $\frac{1}{\omega_0^2} = f(C)$. La pente est exactement L. On peut comparer cette valeur à la valeur mesurée au RLC mètre.

Remarque : On choisit R faible pour avoir Q grand : le pic de résonance est alors plus haut et plus fin.

2.2 Écart au comportement idéal

CASSE GUEULE mais à savoir

Une bobine idéale est caractérisée par une impédance $\underline{Z} = j\omega L$. En pratique, puisqu'une bobine est un long fil enroulée sur lui-même, elle présente aussi un comportement résistif surtout visible aux basses fréquences. En hautes fréquences on peut voir apparaître des effets capacitifs entre les spires formant la bobine.

Diagramme de Bode en amplitude d'une bobine

✍ ⏲

On réalise un circuit RL. La pulsation de coupure de ce passe-bas est $\omega_c = \frac{R}{L}$. On peut tracer le Bode en amplitude

de ce circuit en prenant la tension aux bornes de la résistance.

On distingue alors 3 zones :

- à basses fréquences, l'impédance du système est constante
- entre 50 Hz et 100 kHz environ, on observe le comportement passe-bas d'une bobine idéale
- en très hautes fréquences, on voit un comportement passe-haut dûs à l'apparition d'effets capacitifs.

La pulsation de coupure en BF vaut $\omega_c = \dfrac{R+R_L}{L}$, donc on peut en déduire la résistance interne de la bobine. On peut comparer cette valeur à celle obtenue directement avec un ohmmètre aux bornes de la bobine. On devrait constater une faible différence due à la dépendance fréquentielle de R_L.

2.3 Mesure d'inductance mutuelle

On considère deux bobines l'une à côté de l'autre. Chacune d'entre elles va créer un champ propre auquel l'autre sera soumise, et donc produire un flux non-nul à travers l'autre (en plus du flux propre et du flux extérieur) :

$$\begin{aligned}\Phi_{1\to 2} &= Mi_1 \\ \Phi_{2\to 1} &= Mi_2\end{aligned} \tag{20.7}$$

Ces flux entraîneront alors l'apparition des fem :

$$\begin{aligned}e_{1\to 2} &= -M\frac{\partial i_1}{\partial t} \\ e_{2\to 1} &= -M\frac{\partial i_2}{\partial t}\end{aligned} \tag{20.8}$$

Le coefficient M est l'inductance mutuelle. On peut exprimer $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ en envoyant une tension triangle avec un GBF : $\dfrac{\partial i}{\partial t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$.

Remarque

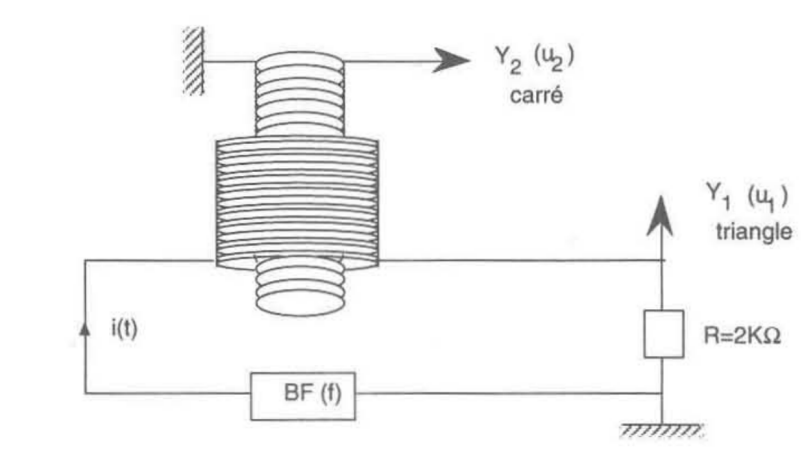
Le fait que l'inductance mutuelle soit la même constitue le théorème de Neumann (démonstration dans le Perez d'électromagnétisme p.275).

Mesure d'inductance mutuelle

✍ Quaranta p277 ⏲ 5 min

Matériel :

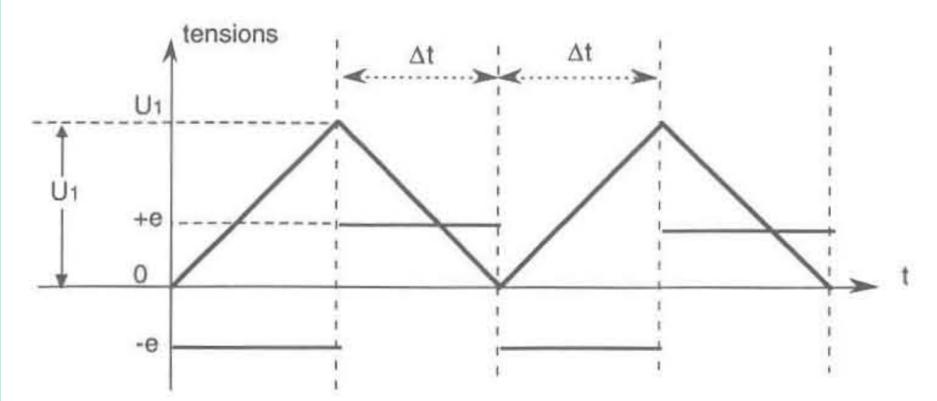
- bobines intriquées P59.4
- boite à décades de résistance
- GBF
- oscilloscope



Réaliser le montage ci-dessus. Envoyer un signal triangulaire avec le GBF et observer en voie 2 la tension aux bornes de la bobine intérieure : on doit voir un signal créneau d'amplitude crête à crête $2e$. Une résistance autour de 2 kΩ

En voie 1, on observe la tension aux bornes de la résistance pour connaître le courant.

Pour différentes fréquences, mesurer la pente du signal triangulaire en mesurant ΔT et U_1 (cf forme du signal ci-dessous).



On en déduit $\dfrac{\partial i}{\partial t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$. On trace alors $e = f(\dfrac{\partial i}{\partial t})$. On doit avoir une droite de pente M.

Inductance mutuelle mesurée autrement

- On couple 2 RLC. On a apparition de 2 modes propres symétrique et antisymétrique à $\omega_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{C(L \pm M)}}$. Il est possible de remonter à M mais c'est compliqué.
- On peut aussi utiliser un pont de Maxwell

3 Applications

3.1 Freinage par courants de Foucault

Freinage par courant de Foucault

✍ ⏲ 2mn

Faire tomber un petit aimant dans les tubes de cuivre et d'aluminium. Souligner le temps de chute relativement long. Pour montrer qu'il n'y a aucune force de type frottement dans le tube qui serait à l'origine de cet effet, on peut faire chuter l'aimant dans un tube en plastique. Cela met en évidence l'existence d'une force de freinage dans les tubes en cuivre et aluminium.

La force supplémentaire de freinage est une force de type visqueux, proportionnelle à la vitesse. L'aimant possède un moment magnétique $\overrightarrow{M}$; il en résulte un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ en chaque point P du tube. Puisque l'aimant est en mouvement, $\overrightarrow{A}(P)$ dépend du temps. Un champ électromoteur de type Neumann apparaît :

$$E_m(t) = -\frac{\partial \overrightarrow{A}(P)}{\partial t} \tag{20.9}$$

Vient alors un courant i dans le tube. La force de Laplace qui en résulte est dirigée selon l'axe du tube, et dans le sens opposé à la chute. C'est une force du type frottement fluide : $\overrightarrow{F} = -\alpha \overrightarrow{v}$, avec α un coefficient indépendant de l'altitude de l'aimant, ne dépendant que de la géométrie du tube, de sa conductivité et du moment magnétique de l'aimant.

3.2 Le transformateur

Une des applications les plus communes de l'induction est le transformateur. Un transformateur est constitué de 2 bobines accolées. Il existe dans la collection tout un tas de transformateurs industriels, que nous n'étudierons pas puisque leurs caractéristiques ne sont pas indiquées. Nous travaillerons donc avec un transformateur maison, constitué de 2 bobines d'inductance propre proches, l'une ayant 500 spires et l'autre... MILLE ! Ces deux bobines sont encastrées dans le support (en fer doux) en U, et l'on referme le carré par le haut. L'intérêt de ce fer est de guider les lignes de champ pour limiter au maximum les fuites. Pour un transformateur idéal, indiçons 1 et 2 les grandeurs associées à chacune des bobines. Ce que nous allons vérifier est que, à vide (absence de charge) :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{20.10}$$

☕

Transformateur maison

✍ ⏲

Matériel : 2 bobines, une 500 une 1000, un gros transfo bleu pour envoyer de la patate [a], 3 multimètres, Support en fer doux (feuilleté ?).

Mettre le transformateur 220V aux bornes d'une des bobines (N1 spires). Intercaler un ampèremètre pour vérifier qu'on détruit pas tout. Mettre un voltmètre aux bornes de cette même bobine pour le bien de la mesure. On y lit U1. Mettre un voltmètre aux bornes de la deuxième bobine (N2 spires). On y lit U2. Pour différentes valeurs de U1 appliquées à l'aide du transfo, on relève U1 et U2 . On vérifie ensuite qu'on a la bonne relation.

a. https://youtu.be/QiqqC_fbP1c

En pratique

En pratique, on obtient légèrement moins qu'attendu : on a tout de même quelques fuites magnétiques. On remarque aussi que pour des tensions en dessous de 60V le rapport est moins bon. Cela s'explique par le fait que plus des lignes de courant sont présentes et plus le noyau de fer se retrouve collé au support en U : il y a donc moins de fuites quand il y a beaucoup de lignes de courant.

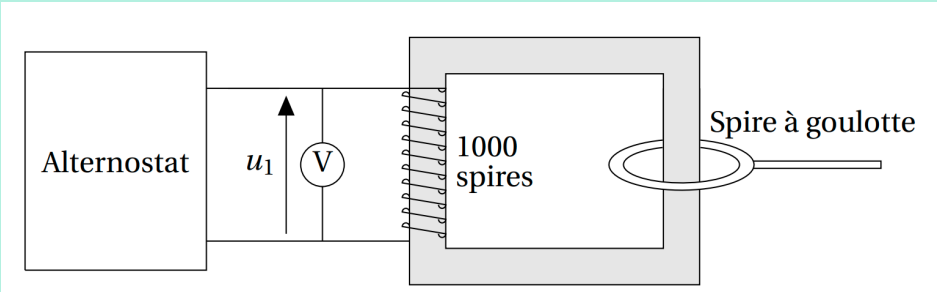
Incertitudes : Les valeurs lues au mutimètre fluctuent pas mal, c'est l'amplitude de ces oscillations qu'on garde (plus importantes que celles intrinsèques au multimètre)

Précautions : On évite de mettre les doigts sur les bobines quand on envoie du 220.

Intérêt : Les transfos peuvent être utilisés pour obtenir de forts courants/faibles tensions (choisir N2 » N1) ou de fortes tensions/faibles courants (l'inverse). C'est notamment le cas des lignes hautes tensions, dans lesquelles on veut de faibles courants pour minimiser les pertes par effet Joule. Dans la collection existe un dispositif destiné à montrer la fusion de l'étain, qui se base là dessus.

3.3 Chauffage par induction

Chauffage par induction



On construit un transformateur très élévateur de courant avec 1000 spires au primaire et une seule spire au secondaire. On peut alors faire fondre de l'étain placé dans la spire à goulotte !

On utilise le chauffage à induction en cuisine, mais on peut aussi l'utiliser pour de la soudure à l'arc, ou bien dans des fours à arc en métallurgie.

Conclusion

L'induction est un des domaines qui a mené la recherche vers l'uniformisation des équations de l'électromagnétisme. C'est en voyant la grande diversité de phénomènes présentés que l'on se rend compte de la puissance et de la beauté du formalisme de Maxwell, qui unifie toutes ces lois.

L'induction est aujourd'hui encore un domaine d'avenir, tant du fait de ce qu'elle permet en technologie qu'en recherche.

MP 21

Production et conversion d'énergie électrique

Commentaires du jury

- **2014-2017 :** Le principe de fonctionnement des dispositifs utilisés (moteurs, tachymètres, variateurs, ...) doivent être connus afin que la présentation illustre pleinement le sujet et ne se limite pas à des mesures de rendement. D'autre part, lors de l'étude de dispositifs de production et de conversion d'énergie électrique, la notion de point de fonctionnement nominal est importante ; en particulier, des mesures de puissance de l'ordre du mW ne sont pas réalistes. Enfin, les modèles utilisés pour décrire ces dispositifs ne doivent pas être trop simplifiés, au risque d'obtenir des écarts excessifs entre les modèles et les systèmes réels.
- **2013 :** Dans ce montage, des mesures de puissance de l'ordre du mW ne sont pas réalistes. Le jury souhaiterait voir de réelles mesures de puissance, pour des convertisseurs utilisés en régime nominal.
- **2008 :** Les candidats ignorent généralement l'origine de la loi sur les courants pour le transformateur idéal ainsi que la notion de courant magnétisant. En outre, la visualisation à l'oscilloscope du cycle d'hystérésis est trop souvent assortie d'erreurs de calibration des axes (H, B), conduisant ainsi à des estimations de pertes par mesure d'aires dénuées de sens.
- **2007 :** Il s'agit de conversion de puissance, non de conversion de signal. Les hacheurs (même sous la forme série, la plus simple) ne sont pas utilisés pour alimenter les moteurs à courant continu.

Bibliographie

✍ *Electronique II*, **HPrépa** ⟶ MCC
✍ **Quaranta IV** ⟶ MCC
✍ *Electrotechnique*, **Palermo** ⟶ MCC
✍ *Electrotechnique, Précis Bréal*, **Brenders** ⟶ Transfo
✍ *Expériences de physique au CAPES*, **Duffait** ⟶ Transfo, Wattmetre

1 Production d'énergie électrique . . . 1186
1.1 Rappels sur la génératrice à courant continu . . . 1186
1.2 Étude à vide . . . 1187
1.3 Étude en charge . . . 1187
1.4 Rendement de la machine . . . 1188
2 Conversion AC-AC : transformateur . . . 1189
2.1 Principe . . . 1189
2.2 Pertes . . . 1190
2.3 Étude en charge et rendement . . . 1192
3 Transport d'électricité (très facultatif) . . . 1192
4 Conversion AC⁄DC : redresseur . . . 1193
5 Convertion DC-DC : Le hacheur . . . 1193

Introduction

L'énergie électrique est omniprésente dans les pays industrialisés : à partir de différentes sources d'énergie, principalement hydraulique, thermique et nucléaire (en France, en 2014 : 82,2% de nucléaire, 13,6% de renouvelable dont 7,9% d'hydraulique, 1,3% de gaz, 1% de fioul et 0,3% autres), l'électricité est un vecteur énergétique employé pour de très nombreux usages domestiques ou industriels. Son transport se fait par des conversions électrique-mécanique ou électrique-électrique.

En France, la plupart des appareils électriques fonctionnent sur du 220 V efficace à 50 Hz.

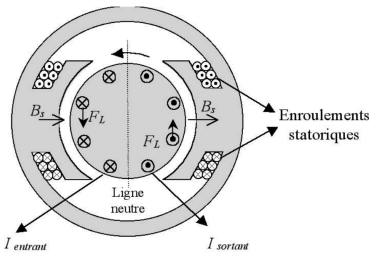
Commençons par voir comment on produit de l'énergie électrique à partir d'un truc qui tourne (énergie mécanique) : **la génératrice à courant continu**.

1 Production d'énergie électrique

https://www.wikimeca.org/index.php/Moteur_à_courant_continu

1.1 Rappels sur la génératrice à courant continu

✍ **Précis Bréal** p121, Quaranta IV p.165



La machine à courant continu est composée de deux partie :

- d'un **inducteur** : c'est la source de champ magnétique. Il peut être réalisé soit à partir d'aimants permanents (cas des machines de faible puissance, qques W), soit à l'aide d'un second bobinage. L'inducteur est souvent fixe et est appelé **stator**.
- d'un **induit** : c'est le circuit électrique soumis au champ magnétique et qui est mobile (**rotor**). Dans le cas du fonctionnement de la machine en moteur, l'induit produit un mouvement de rotation. Dans le cas du fonctionnement en génératrice, l'induit produit un courant électrique.

La machine à courant continu est réversible est peut être utilisée soit en moteur (alimentation électrique de l'induit et de l'inducteur pour récupérer une énergie mécanique), soit en génératrice/dynamo (alimentation électrique de l'inducteur et mécanique de l'axe du rotor de l'induit pour récupérer une énergie électrique).

On utilise ici un ensemble de **deux génératrices**, l'une d'elles est utilisée en **moteur** pour entraîner le rotor de l'autre.

Pour toutes les mesures, il faut utiliser des voltmètres, la précision est meilleure pour le tachymètre et le capteur de couple.

Pour le démarrage de la MCC : Rhéostat de $1.0 \times 10^1\,\Omega$ en série avec l'induit.
En effet, au départ la vitesse de rotation est nulle et l'induit se comporte comme une résistance de très faible valeur (on la déterminera), il existe un risque aigu de surintensité.

Pour arrêter la MCC : il faut toujours couper l'induit en premier et ensuite l'inducteur, sinon risque d'emballement.

But : vérifier les deux relations pour le couple et la tension dans le rotor (✍ Quaranta p164) :

$$U_g = k\Phi\omega - r_g I_g = E - r_g I_g \tag{21.1}$$

$$C = k\Phi I_g + C_r \tag{21.2}$$

Hypothèses pour obtenir ces équations ? **remarque :** en mode moteur on inverse juste les deux signes apparaent, ca donne $+rI$ et $-C_r$.

Les deux équations présentées sont issues d'un modèle. On va vérifier s'il est acceptable.

1.2 Étude à vide

Étude à vide

✍ Quaranta IV ⏲ 5mn

Alimenter les inducteurs du moteur et de la génératrice en parallèle sous la tension nominale $U_e = 110$V . Mesurer l'intensité I_e dans l'inducteur de la génératrice. Démarrer le moteur en alimentant son induit et en utilisant un rhéostat de démarrage, que l'on court-circuite par la suite. Laisser l'induit de la génératrice à vide (sans résistance) et mesurer sa tension U_g .

Pour différentes tensions U_m dans l'induit du moteur (inférieures à 110V), et donc différentes vitesses angulaires ω, mesurer la tension à l'induit de la génératrice U_g . Comme $I_g = 0$ lors de l'étude à vide, tracer U_g en fonction de ω et remonter à $k\Phi$ par régression linéaire, car $U_g = k\Phi\omega$ à vide.

Mesure de vitesse

La génératrice tachymétrique qui sert à mesurer la vitesse est en fait... une machine à courant continu.

On a ainsi pu générer une tension continue avec un mouvement de rotation, et ça c'est cool ! Mais là on a fait l'étude à vide, il se passe quoi en charge ?

1.3 Étude en charge

L'étude en charge s'effectue ici à vitesse de rotation ω constante.

Étude de la machine à courant continu en charge

✍ ⏲ 10mn

Fixer la vitesse de rotation à 10Hz (par exemple). Brancher un rhéostat de 100Ω sur l'induit de la génératrice, et mesurer la tension U_g à ses bornes et l'intensité I_g dans le circuit.

Pour plusieurs valeurs de résistance R, ajuster la tension injectée dans l'induit du moteur de façon à retrouver la fréquence de rotation choisie. Mesurer le couple C (avec le couplemètre Captain Obvious), la tension U_g et les intensités I_g et I_e.

- Tracer $U_g(I_g)$, et remonter à $k\phi$ et r_g via $U_g = k\Phi\omega - r_g I_g$.
- Tracer $C(I_g)$ et re-retrouver $k\phi$, et C_r via $C = k\Phi I_g + C_r$.

remarque : prendre **beaucoup** de point pour faire le rendement ensuite.

Nos résultats sont donc cohérents, mais on voit qu'il faut plus de couple en charge, et qu'on a une chute de tension. La machine en charge, elle galère ! Mais quel est son rendement ?

1.4 Rendement de la machine

On définit le rendement comme le rapport entre l'énergie fournie PAR la machine sur l'énergie fournie À la machine. Ici c'est P_u/P_{tot} puissance utile sur puissance totale.

$$\eta = \frac{P_u}{P_{\text{tot}}} = \frac{U_g I_g}{C\omega + U_e I_e} \tag{21.3}$$

☕

Rendement de la génératrice

✍ ⏲ 5mn

Tracer η fonction de P_u ou I_g.

On obtient une courbe en cloche, dont le maximum correspond au fonctionnement nominal de la génératrice, pour un fonctionnement à $f = 10$Hz.

En déduire le couple nominal C_n, la tension nominale dans l'induit $U_{g,n}$ et l'intensité nominale dans l'induit $I_{g,n}$.

Les pertes

- Joule dans l'induit : $r_g I_g^2$
- Joule dans l'inducteur : $r_e I_e^2$
- Frottement mécanique : $C_r\omega$
- Pertes magnétique (hystérésis magnétique, courants de Foucault, perte de flux).

Avantages et inconvénients de la MCC

✍ Palermo pp111-112

La MCC présente plusieurs avantages : elle est facilement réversible (moteur-génératrice), la vitesse de rotation est contrôlée par la tension de l'induit, et elle s'adapte à différentes charges. Mais la fragilité des balais du collecteur nécessite un entretien régulier. Elles ont été largement utilisées par le passé, en particulier pour la propulsion des locomotives électriques (premiers TGV, métro lyonnais...). On les retrouve aujourd'hui plutôt dans des applications à faible puissance (ventilateur, photocopieuse, essuieglace...) avec des stators composés d'aimants permanents. Les moteurs à fortes puissances sont maintenant constitués de machines à courant alternatif.

Avantages	Inconvénients
Commande simple	Collecteur
Facilement réversible	Coût de fabrication
Stabilisation de vitesse	Coût d'entretien
Stabilisation de puissance	

On sait maintenant générer du courant continu. En pratique dans la vraie vie on utilise des machines synchrones [1] et asynchrones [2], qui génèrent à moindre coût et meilleur rendement du courant alternatif !

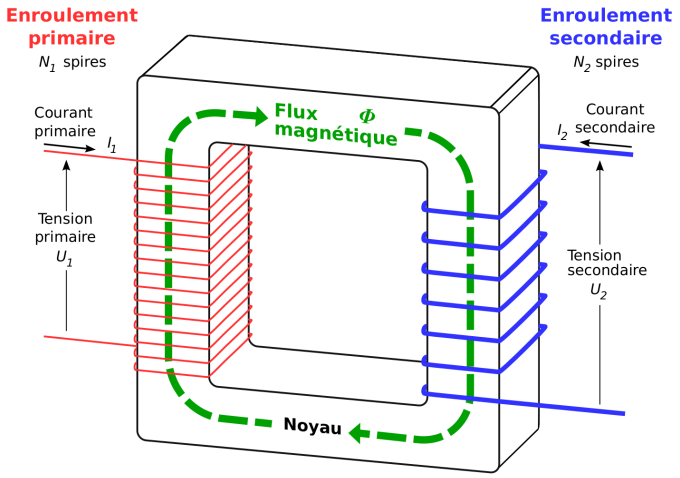
Mais une fois qu'on génère une tension, il faut savoir la convertir de l'un à l'autre, et en ampleur. Voyons voir ce que l'on peut faire.

2 Conversion AC-AC : transformateur

Utilisation de l'alternostat :

- **Avant d'allumer l'alternostat**, tourner la molette à 5%, ne rien brancher à ses bornes puis le mettre en route. Remettre ensuite la molette à 0% et brancher le boîtier prise/cordons de sécurité P57.14. Cela permet d'éviter de créer de fortes surintensités au démarrage qui peuvent faire disjoncter l'alimentation de la salle.
- **Avant d'intervenir sur un circuit alimenté par l'alternostat**, tourner la molette à 0%. Les tensions sont en effet importantes et la limite en courant est élevée.

2.1 Principe



Le but du noyau de fer (souvent du fer doux) est de canaliser les lignes de champ magnétique pour limiter les fuites.

En utilisant la loi de Faraday et la notion d'inductance mutuelle, on peut relier les tensions au primaire et au secondaire avec le **rapport de transformation** m. On peut faire de même avec les intensités en supposant une transmission intégrale de la puissance pour un transformateur idéal. On écrit alors :

$$U_2 = mU_1 \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{m} I_1 \quad \text{avec} \quad m = \frac{N_2}{N_1} \tag{21.4}$$

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_synchrone
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Machine_asynchrone

Rapport de transformation d'un transformation maison

✍ Précis Bréal p6 ⏲ 5 min

On construit un transformateur maison avec une bobine de 500 spires, une autre de 250 spires et un noyau de fer doux. On utilise deux wattmètres, un pour le primaire et un pour le secondaire. Alimenter le transformateur avec un alternostat P57.6. Vérifier la loi des tensions et/ou des intensités en traçant $U_2 = f(U_1)$ et/ou $I_2 = f(I_1)$.

2.2 Pertes

Pour un transformateur idéal, on a une conservation de la puissance : $\mathcal{P}_1 = U_1 I_1 = U_2 I_2 = \mathcal{P}_2$.

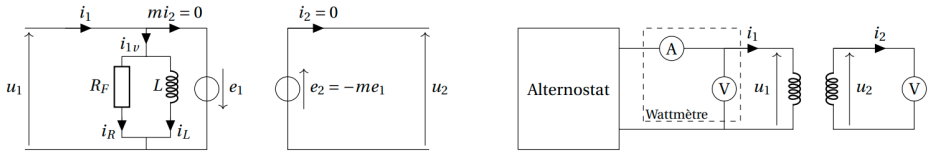
On réalité, il y a des pertes de différents types :

- **les pertes fer :** ce sont des pertes magnétiques et par courants de Foucault dans le noyau ferromagnétique qui dépendent de **la tension au primaire** U_1.
- **les pertes cuivre :** ce sont les pertes par effet Joule dans les bobinages qui dépendent de **l'intensité au primaire** I_1.

Finalement, on a pour un transformateur réel $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{\text{fer}} + \mathcal{P}_{\text{cuivre}}$. Pour étudier ces pertes, on utilise la **méthode des pertes séparées**.

2.2.1 Pertes fer

Pour étudier les pertes fer, on étudie le transformateur à vide. Les courants sont donc faibles et les pertes cuivres sont négligeables.



À gauche de la figure on a le circuit équivalent, à droite on a le circuit réel. L'ampèremètre au secondaire assure que $U_2 = 0$ grâce à sa faible impédance. On note u_1 et i_1 les grandeurs complexes correspondant à U_1 et I_1. En étudiant le circuit, on a :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}\Re(u_1 i_1^*) = \Re\left(\frac{1}{Z_{\text{fer}}}\right) U_1^2 = \frac{1}{R_{\text{fer}}} U_1^2 \tag{21.5}$$

$$I_1 = \left|\frac{1}{Z_{\text{fer}}}\right| U_1 = \sqrt{\frac{1}{R_{\text{fer}}^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}\, U_1 \tag{21.6}$$

Le rapport des tensions est alors modifié :

$$u_2 = m \frac{Z_{\text{fer}}}{Z_{\text{fer}} + Z_1} u_1 \tag{21.7}$$

On sous-estime le rapport de transformation.

Étude à vide et pertes fer

✍ ⏲

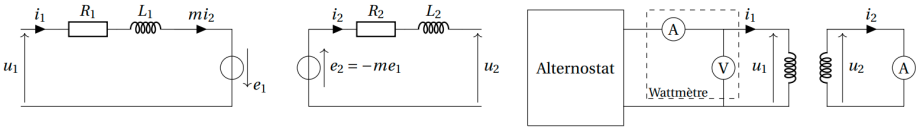
On utilise un transformateur d'étude P66.18 et un alternostat P57.6. Réaliser le montage ci-dessus avec un wattmètre au primaire et un voltmètre au secondaire. Relever U_1, I_1 et $\mathcal{P}_1$ au wattmètre pour différentes tensions d'entrée U_1 entre 0 et 220 V.

Tracer $\mathcal{P}_1 = f(U_1^2)$ pour obtenir R_{fer}. Tracer alors $I_1 = f(U_1)$ pour en déduire L sachant que $\omega = 2\pi \times 50$ Hz.

Ces pertes peuvent être réduites en limitant les courants de Foucault par feuilletage du noyau ou bien en choisissant un matériau ferromagnétique avec un petit cycle d'hystérésis.

2.2.2 Pertes cuivre

Pour étudier les pertes cuivre, on étudie le transformateur en court-cricuit. Les tensions sont donc faibles et les pertes fer sont négligeables.



À gauche de la figure on a le circuit équivalent, à droite on a le circuit réel. Le voltmètre au secondaire assure que $I_2 = 0$ grâce à sa grande impédance. On note u_1 et i_1 les grandeurs complexes correspondant à U_1 et I_1. Quand les courants i_1 et i_2 deviennent grands devant le courant à vide, on utilise le modèle simplifié de Kapp :

$$u_1 = Z_1 i_1 - e_1 = Z_1 i_1 + \frac{e_2}{m} = Z_1 i_1 + \frac{Z_2 i_2}{m} = Z_1 i_1 + \frac{Z_2 i_1}{m^2} \tag{21.8}$$

On a alors :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}\Re(u_1 i_1^*) = \Re\left(Z_1 + \frac{Z_2}{m^2}\right) I_1^2 = \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right) I_1^2 \tag{21.9}$$

$$U_1 = \left|Z_1 + \frac{Z_2}{m^2}\right| I_1 = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right)^2 + \omega^2 \left(L_1 + \frac{L_2}{m^2}\right)^2}\, I_1 \tag{21.10}$$

Le rapport des intensités est alors modifié :

$$i_2 = \frac{1}{m\left(1 + \dfrac{Z_2}{m^2 Z_{\text{fer}}}\right)} i_1 \tag{21.11}$$

On sur-estime le rapport de transformation.

Étude en court-circuit et pertes cuivre

✍ ⏲

On utilise un transformateur d'étude P66.18 et un alternostat P57.6. Réaliser le montage ci-dessus avec un wattmètre au primaire et un ampèremètre au secondaire. Relever U_1, I_1 et $\mathcal{P}_1$ au wattmètre pour différents courants d'entrée I_1 entre 0 et 2 A.

Tracer $\mathcal{P}_1 = f(I_1^2)$ pour obtenir $R_1 + \dfrac{R_2}{m^2}$. Tracer alors $U_1 = f(I_1)$ pour en déduire $L_1 + \dfrac{L_2}{m^2}$ sachant que

$\omega = 2\pi \times 50$ Hz. Mesurer directement à l'ohmmètre les résistances du primaire R_1 et du secondaire R_2. On peut comparer Z_1 à Z_{fer} et vérifier que $Z_1 \ll Z_{\text{fer}}$.

2.3 Étude en charge et rendement

$$\mathcal{P}_{\text{fer}} = \frac{E_1^2}{R_{\text{fer}}} \simeq \frac{U_1^2}{R_{\text{fer}}} \qquad et \qquad \mathcal{P}_{\text{cuivre}} = (R_2 + m^2 R_1) I_2^2 \tag{21.12}$$

Étude en charge et rendement

✍ ⏲

Reprendre le montage utilisé pour l'étude des pertes et mettant au secondaire un wattmètre et une résistance de charge R (rhéostat de 100 Ω). Pour différentes tensions d'entrée U_1, relever U_1, I_1 et $\mathcal{P}_1$ ainsi que U_2, I_2 et $\mathcal{P}_2$.

Tracer $U_2 = f(U_1)$, $I_2 = f(I_1)$ ainsi que $\mathcal{P}_2 = f(\mathcal{P}_1)$ qui nous donne respectivement le rapport des tensions, des intensités et le rendement.

Répéter l'opération pour différentes résistances de charge R entre 5 et 50 Ω. Tracer les rapports des tensions et des intensités ainsi que le rendement en fonction de R. Cela nous permet de trouver les **valeurs nominales de fonctionnement** pour lesquelles on a le meilleur rendement.

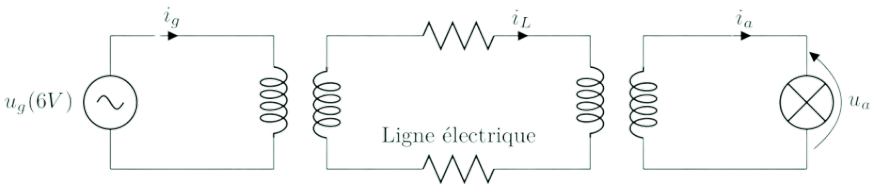
Evaluer les pertes fer et cuivre en fonction de U_1 et I_2. Vérifier que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_{\text{fer}} + \mathcal{P}_{\text{cuivre}}$.

Les relations $U_2 = mU_1$ et $I_2 = \frac{1}{m} I_1$ sont donc des lois limites qui ne sont pas vérifiées en même temps : la loi des courants est mieux vérifiée quand le courant est élevé (donc résistance de charge faible) et donc le courant "utile" est élevé devant le courant à vide, tandis que la loi des tensions est mieux vérifiée quand le courant est faible (résistance de charge élevée) est que Z_{fer} est négligeable devant R.

Dans les conditions nominales, ces deux lois sont plutôt bien vérifiées.

3 Transport d'électricité (très facultatif)

Pour transporter efficacement l'électricité on utilise du courant alternatif dans des lignes hautes tensions.



Ligne Haute Tension

✍ ⏲

- Ligne basse-tension : brancher la ligne électrique simple, la lampe ne s'allume pas ou peu ; calculer le rendement $\eta = u_a/u_g$.
- Ligne haute-tension : brancher la ligne électrique avec les transformateurs, la lampe s'allume correctement ;

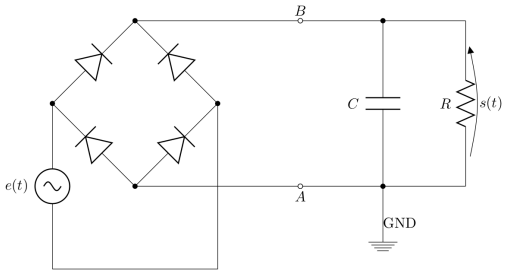
calculer le rendement $\eta = (u_g i_g)/(u_a i_a)$. Commenter avec la puissance dissipée par effet joule dans la ligne et calculer l'ordre de grandeur.

4 Conversion AC⚡DC : redresseur

FIGURE 21.1 – Ceci n'est pas un système de redressement.

Aurélien : ***God dammit Yohann ! !***[3]

Après avoir été transporté, le courant doit encore être converti : d'une part pour abaisser la tension (transformateur), d'autre part pour s'adapter à des usages en courant continu (moteurs, etc). Pour cette étape, une solution simple est d'utiliser un redresseur (ou pont de Graetz) associé à un filtre passe-bas.



Conversion AC⚡DC

✍ ⏲

- Pont de diodes : conserve les alternances positives d'un signal sinusoïdal (visualiser à l'oscilloscope).
- Filtre : lisse la tension en sortie du pont pour avoir une tension continue (visualiser à l'oscilloscope).
- Rendement : regarder la puissance en entrée et en sortie du dispositif (bon rendement). Ne pas hésiter à y aller en mode électronique de puissance ! (Il faut alors une grosse capa).
- Taux d'ondulation : rapport $\delta = s_{eff}/s_{moy}$ (mesurer s_{eff} en AC et s_{moy} en DC).

5 Convertion DC-DC : Le hacheur

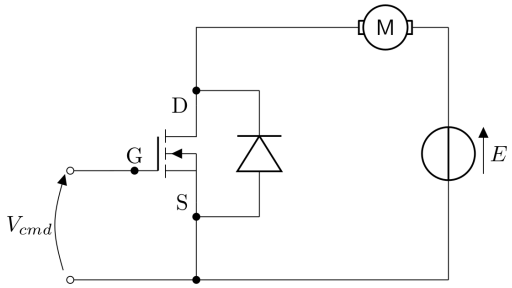
Là on a clairement pas le temps de tout montrer...

3. https://youtu.be/pAgnJDJN4VA

Suivant les spécifications d'un système électrique, notamment ses grandeurs nominales de fonctionnement, la tension continue utilisée pour l'alimenter doit être ajustée. Par exemple, on peut chercher à avoir une tension fixe bien déterminée : une solution simple est alors d'utiliser un diviseur de tension, soit en pratique de mettre une résistance en série avec le dipôle étudié.

Cette solution est peu avantageuse, d'une part parce que son rendement est mauvais (puisque la puissance non consommée par le dipôle est entièrement perdue par effet joule), d'autre part parce que certaines applications nécessitent de faire varier la tension délivrée (par exemple pour faire varier la vitesse d'un moteur à courant continu) ce qui est impossible avec ce système.

Une autre solution est d'utiliser un **hacheur**, avec un transistor commandé en tension. L'idée est de découper la tension en créneaux à une fréquence suffisamment élevée pour ne pas être perçue par le dipôle, qui ne voit qu'une tension moyenne.



☕

Hacheur

✍ ⏲

- Principe : "hachage" de la tension E en utilisant le mosfet en commutation.

- Commande : varier la tension de commande V_{cmd} (crénaux) : la vitesse du moteur change, il perçoit une tension continue qui est la valeur moyenne de E "hachée" à la fréquence V_{cmd}.

Analyse quantitative : Tracer la vitesse du moteur en fonction de la tension, puis la vitesse du moteur en fonction de la vitesse de hachage, et relier les deux.

Conclusion

En conclusion, on a vu (en fonction de la vitesse de présentation) une partie de la chaîne de la production et de la conversion d'énergie électrique : sa production, avec la machine à courant continu, sa conversion alternatif/alternatif, avec le transformateur, son transport sur de longues distances, avec la ligne haute tension, sa conversion alternatif/continu, avec le redresseur, sa conversion continu/continu, avec le hacheur.

D'autres méthodes existent pour produire de l'énergie électrique (centrales solaires par exemple, qui n'utilisent pas une conversion mécanique-électrique, ou machines alternatives) mais aussi d'autres conversions (continu/alternatif par exemple, avec un onduleur, ou des machines synchrones/asynchrones).

MP 22

Amplification de signaux

Commentaires du jury

- **2017 :** L'amplificateur opérationnel (AO) permet l'étude de systèmes d'amplification dans le contexte de l'instrumentation, dont l'étude peut être envisagée dans ce montage. Ce dernier comporte néanmoins de nombreux circuits internes de compensation, résultant en des limitations techniques qu'il faut connaître ; ainsi si l'étude de circuits à AO pour l'amplification de signaux peut être abordée dans ce montage, d'autres circuits simples à bases de transistor(s) peuvent être également envisagés. D'autre part, de nombreux aspects des amplificateurs sont éludés, comme la distorsion, les impédances caractéristiques et le rendement.
- **2009 :** Les notions d'impédance (d'entrée et de sortie) et de rendement sont trop souvent éludées.
- **2008 :** La limite de linéarité de l'amplificateur opérationnel n'a pas pour seule origine la saturation en tension.

Bibliographie

✍ *Répertoire mondial des transistors*, **Lilian, Touret** ⟶ Valeurs de transistors
✍ *Principes d'électroniques*, **Malvino** ⟶ Bases théoriques pour le transistor
✍ *Expériences d'électroniques*, **Duffait** ⟶ manips et théorie

1 Transistor bipolaire . . . 1197
1.1 Rappel du principe . . . 1197
1.2 Tracé des caractéristiques . . . 1197
1.3 Influence de la température sur β (facultatif) . . . 1200
1.4 Amplification réelle ? (À tester) . . . 1201
2 Montage à émetteur commun . . . 1201
2.1 Polarisation du transistor . . . 1201
2.2 Montage résistance d'émetteur découplé et pont de base . . . 1203
3 Montage push-pull . . . 1206
4 Amplification finale . . . 1208
5 Amplificateur Opérationnel ? . . . 1208

Introduction

Dans la chaîne de l'information, les signaux issus des capteurs sont souvent limités en amplitude de tension et en puissance. L'utilisation de ces signaux, pour un asservissement ou un haut-parleur par exemple nécessite en général de les amplifier en amplitude de tension et en puissance.

Micro directement sur haut-parleur

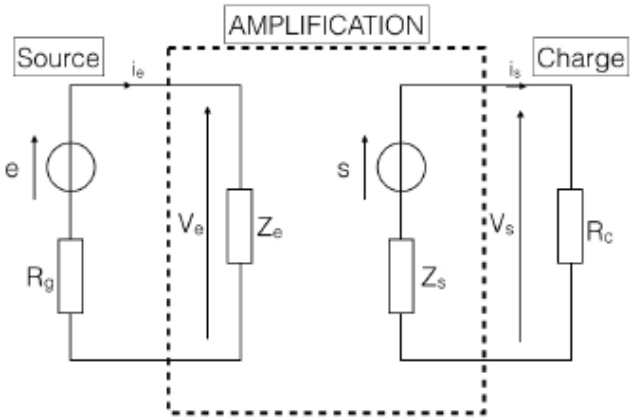
✍ ⏲ Une poignée de secondes

Matériel :

- microphone P74.37
- adaptateur du micro P 74.38
- haut-parleur
- diapason P71.10
- marteau de diapason P71.33
- oscilloscope P36.7 (facultatif)

Connecter le micro au haut-parleur. Mettre le micro dans la caisse du diapason. Donner un coup sur le diapason. constater qu'aucun son ne sort du haut-parleur.

Eventuellement, brancher le micro à l'oscillo seulement. Constater que la sortie du micro ne donne que quelques mV quand on tape sur le diapason. On peut également brancher l'oscillo au micro une fois celui-ci connecté au haut-parleur. Constater que le signal relevé reste un bruit constant quand on tape sur le diapason.



Un amplificateur est un quadripôle transformant un signal d'entrée (V_e, I_e) en un signal de sortie (V_s, I_s). "On prélève l'énergie d'une source continue pour la fournir à notre signal" (✍ Intro Duffait p116).

Un amplificateur a plusieurs caractéristiques intéressantes à déterminer : impédance d'entrée, de sortie, gain en tension. Les grandeurs à déterminer sont alors les amplifications en tension, en courant (complexes donc module et phase dépendent de la fréquence) et en puissance ; impédance de sortie et d'entrée ; rendement énergétique $\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{sortie}}}{\mathcal{P}_{\text{alim}} + \mathcal{P}_{\text{entrée}}} \simeq \frac{\mathcal{P}_{\text{sortie}}}{\mathcal{P}_{\text{alim}}}$

1 Transistor bipolaire

La brique de base de l'amplification, c'est le transistor. En effet un transistor est un amplificateur de courant, basé sur le principe suivant.

1.1 Rappel du principe

Il s'agit d'un semi-conducteur à trois régions dopées différemment. Ici nous parlerons de transistor NPN (dopés successivement N, P puis N), mais il existe aussi des PNP. Pour décrire ces derniers, il suffit de remplacer des électrous par des trons dans la descriptions des NPN.

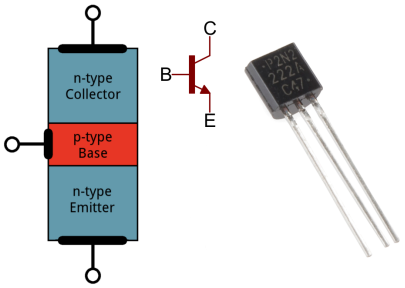


FIGURE 22.1 – Schématisation d'un transistor

La zone du bas est l'émetteur (fortement dopé en électrons), celle du haut le collecteur (moyennement dopé en électron, très large), et celle du milieu est la base (faiblement dopée en trous, très fine).

D'un point de vue qualitatif, la base se comporte comme une valve : la tension V_{BE} commande, en augmentant, l'augmentation de l'intensité I_{CE}. C'est en ce sens que l'on parle d'amplificateur, car une tension même faible entre B et E contrôle une grande variation de courant entre C et E.

1.2 Tracé des caractéristiques

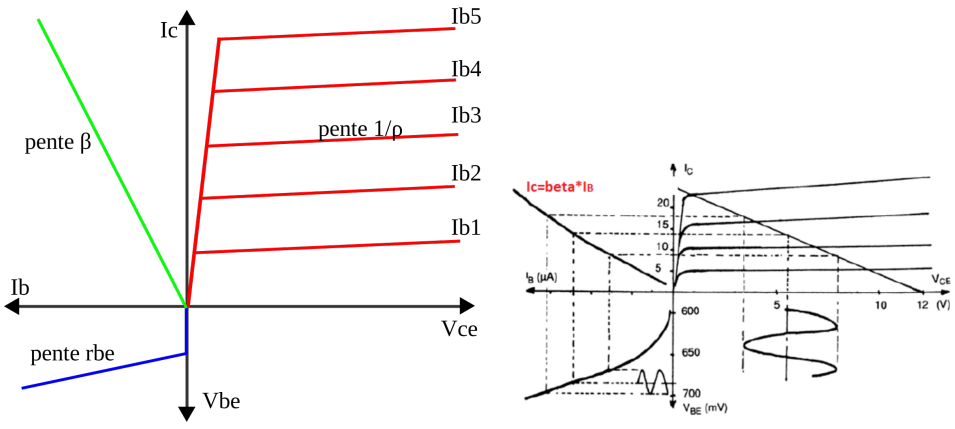
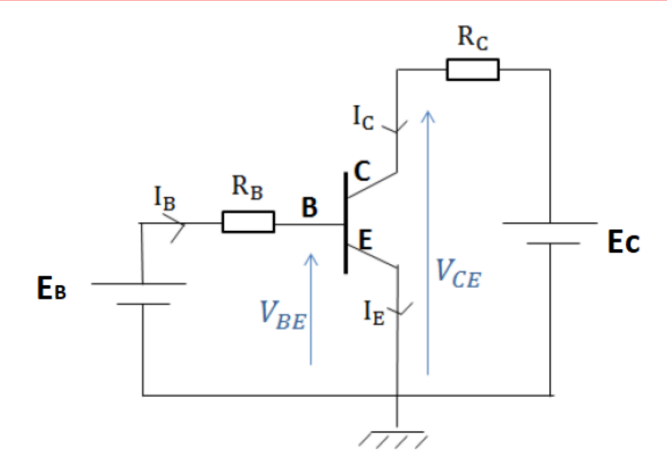


FIGURE 22.2 – Caractéristiques schématiques du transistor, et caractéristiques que l'on veut obtenir.

Montage pour le tracé

✍ ⏲

Matériel : transistor 2N2222, $R_b = 100\text{k}\Omega$ (ou 50), $R_c = 100\Omega$ (ou 620), GBF, Alimentation continue, Latis-pro.



Le transistor 2N2222 a pour caractéristiques :

$V_{cb,max} = 60\text{V}$

$V_{ce,max} = 30\text{V}$

$V_{eb,max} = 6\text{V}$

$i_{c,max} = 0.8\text{A}$

$\text{T(jonction)}_{max} = 175°\text{C}$

$P_{tot} = 500\text{mWF}$ (F : convection naturelle à l'air ambiant à 25°C)

On prend donc R_c tel que la tension i_c soit inférieure à $i_{c,max}$. Pour une tension E_c de quelques volts max, 100Ω est suffisant ($i_{c,sat} = \dfrac{E_c}{R_c}$).

On prend R_b élevé pour diminuer au possible le courant $i_b = \dfrac{V_b - V_{b,e}}{R_b}$

Relations entre les grandeurs :

- $I_E = I_B + I_C$
- $U_{CE} = E_C + R_C I_C$
- $U_{BE} = E_B - R_B I_B$
- $I_B \ll I_C$

1.2.1 $V_{BE} = f(I_B)$

☕

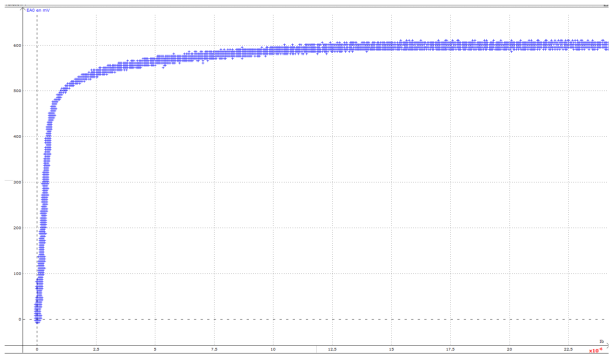
$V_{BE}(I_B)$

On met $E_C = 2$V, E_B=0-3V à 1Hz.

Relever V_{BE} et E_B

Calculer $I_B = \dfrac{E_B - V_{BE}}{R_B}$

Tracer $V_{BE} = f(I_B)$.



On observe que I_B reste quasi-nul tandis que V_{BE} augmente très rapidement jusqu'à ∼0.500V, puis que V_{BE} sature à 0.6V alors que I_B augmente. En fait, pour V_{BE}<0.6V, les électrons de l'émetteur ne peuvent traverser la jonction ni rejoindre la base, et encore moins le collecteur. Le transistor est alors bloqué. Le transistor se comporte en V_{BE} comme une diode.

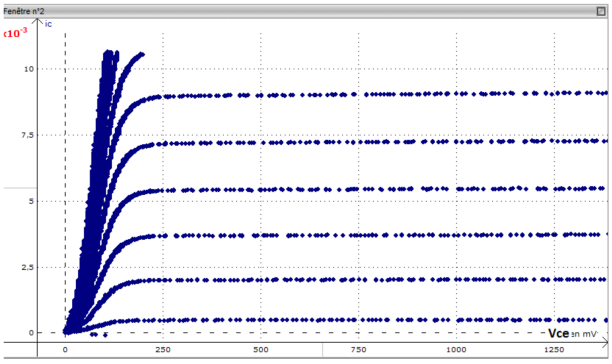
1.2.2 $I_C = f(V_{CE})$

$I_C = f(V_{CE})$

Méthode pour tracer toutes les caractéristiques à différents ib :

- Mettre E_B une sortie de la carte Latis-Pro. Mettre E_C une sortie de Latis-Pro.
- Écrire `"Eb=1+INT(100*rampe(0,10))"` et `"Ec=10*(100*rampe(0,10)-INT(100*rampe(0,10)))"`. **Attention**, pour que cela fonctionne, il faut que la variable Temps soit déjà existante. Pour cela, faire une acquisition dans le vide avant de relever les points.
- Relever avec Latis-Pro la tension Vbe et la tension V_{CE}.

Déterminer $I_B = \dfrac{E_C - V_{CE}}{R_C}$. Tracer $V_{BE} = f(I_B)$.



On observe deux zones. Les plateaux correspondent à la zone active parfois appelée région linéaire. Les électrons de l'émetteur vont dans la base et dans le collecteur. Comme le collecteur récupère la majorité des électrons injectés dans la base, un changement de V_{CE} ne fait pas varier I_C. Par contre, I_C varie avec I_B.

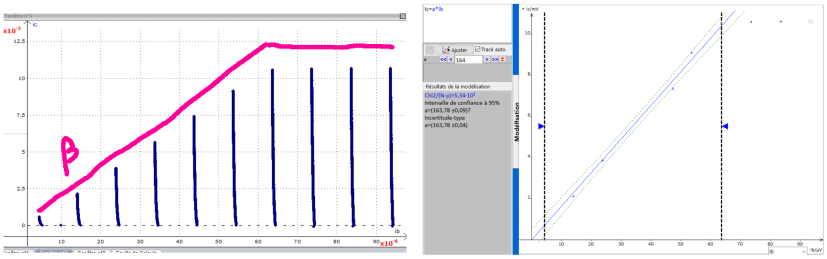
A gauche, on a la zone saturée. Le collecteur n'arrive pas à collecter les électrons injectés dans la base (il sature). Dans ce cas, I_B et plus grand et le gain est plus petit. Si on arrivait à V_{CE} suffisamment grand , on atteindrait la zone de claquage. On va éviter de détruire le matériel, hein.

1.2.3 $I_C = f(I_B)$

$I_C = f(I_B)$

On attend $I_C = \beta I_B$ avec β le gain, environ 160-200. Ainsi $I_E = (\beta + 1) I_B$.

À partir des courbes précédentes on a directement ce que l'on veut : on repère les maximas et on fait une régression dans régressi, avec le pas de latis comme incertitude.



On obtient $\beta = 164 \pm 1$. Les incertitudes ont probablement été sous-estimées ici. Ce n'est pas très gênant, ce qui compte, c'est l'ordre de grandeur de β. Cela peut être plus gênant pour justifier certains calculs par la suite par contre (notamment le gain théorique de la partie II).

On observe d'ailleurs une jolie saturation sur le gain pour les grandes valeurs de I_b, cohérent avec les valeurs physiquement atteignables : $I_{C,max} = \dfrac{V_C}{R_C} \sim 1V/100\Omega \sim 10mA$

1.3 Influence de la température sur β (facultatif)

Influence de la température

✍ ⏲

Etude de l'influence de la température sur β. On pose le doigt sur le transistor ou on utilise un sèche-cheveux. On relève la tension V_{CE} (ou relever directement la tension aux bornes de R_c). On constate que celle-ci diminue. Ce qui signifie que la tension aux bornes de R_c augmente, donc que I_c augmente, donc que β augmente.

Ceci est logique car quand on chauffe, les électrons bougent plus facilement, et donc passent mieux.

Ce montage du transistor présente donc l'inconvénient de proposer une amplification dépendante aux variations de conditions extérieures. Or, quand on veut de l'amplification, on veut que le signal soit stable quelque soient ces variations de conditions. Surtout que le transistor peut chauffer en opérant et donc de lui-même modifier son gain. De plus, on a pour l'instant seulement amplifié en intensité.

Ce montage présente également le souci de n'amplifier que les signaux ayant une tension d'entrée supérieure à 0.6V. Ce problème sera réglé dans la partie III.

1.4 Amplification réelle ? (À tester)

Faire du son avec un transistor

✍ ⏲

Remplacer la résistance R_C par un haut parleur, et mettre E_B à environ 1V, et ajouter en parallèle de E_B un micro. Ça amplifie ? On m'entend ?

2 Montage à émetteur commun

✍ Duffait

Attention : on utilise des condensateurs électrochimiques, donc **le sens de branchement est important** : la borne + doit être du côté des tensions continues les plus élevées (ici du côté du transistor).

2.1 Polarisation du transistor

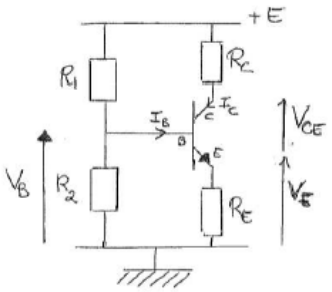
Commençons par polariser le transistor, i.e. chercher un point de fonctionnement convenable pour la suite. Ici, on veut un point de fonctionnement fixe. On a un amplificateur dit de classe A : le point de fonctionnement (Duffait p68), donné par l'intersection entre la droite de charge et la caractéristique du transistor, doit se situe loin du blocage du transistor (qui est à $I_C = 0$) et loin de la saturation (qui est à $I_C = \frac{E}{R_C}$) pour amplifier le signal sans le déformer. On veut également limiter l'effet de la température.

On a vu précédemment que :

- le transistor était bloqué si $V_{BE} < 0.6$ V (tension de seuil), et on a I_B et I_C quasi-nuls
- le transistor est saturé (plateau) lorsque $V_{CE} > 0.25$ V, et I_B vérifie $I_c = \beta I_b = I_{c,max}$
- on est dans la zone de saturation pour $V_{CE} < 0.25$ V

On cherche à atteindre un point de fonctionnement de la zone active (*i.e.* telle que $V_{BE} > 0.6$ V et $V_{CE} > 0.25$ V), tout en ayant $V_{CE} < V_{CE,max}$ pour ne pas détruire le transistor.

On réalise donc le montage de polarisation suivant :



On peut donc écrire :

- $V_B = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$
- $V_E = V_B - V_{BE}$
- $V_C = E - I_C R_C$
- $V_{CE} = V_C - V_E$
- $I_E = \dfrac{V_E}{R_E}$
- $I_C \simeq I_E$

Le choix des résistances n'est donc pas anodin :

- choix de R_1 et R_2 : pour éviter un fonctionnement dans la zone bloquée de la jonction B-E, et avoir $V_{BE} = 0.6$V, il faut avoir $V_B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E > 1V$ (avec $E = 1.0 \times 10^1$ V.
  On choisit $V_B = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E \simeq 1.6V$, donc $R_1 = 1.56\,\text{k}\Omega$ et $R_2 = 8.2\,\text{k}\Omega$.
- choix de R_E : le transistor ne doit pas être bloqué donc $V_{BE} = V_B - V_E = 0.6V$ et $V_E = R_E I_E$ donc $I_E \simeq I_C$ imposé par la valeur de R_E, $I_E = \dfrac{V_B - 0.6}{R_E}$.
  On choisit donc une résistance petite pour avoir un grand courant : $R_E = 2.00 \times 10^2\,\Omega$.
- choix de R_C : on impose la valeur de $V_{CE} = E - (R_C + R_E) I_C \simeq 2.50 \times 10^2$ mV .
  On prend donc $R_C = 8.20 \times 10^2\,\Omega$.

Notons que la résistance R_E s'oppose aux variations de I_B : si V_B augmente, I_B augmente donc I_C augmente, donc I_E augmente, donc V_E augmente, donc V_{BE} diminue, donc I_B diminue.

Les petites valeurs de R_C et R_E permettent d'avoir un grande intensité I_C possible (à hauteur de $\dfrac{E}{R_C + R_E}$ et donc d'éviter la saturation. Attention cependant à ne pas avoir R_C trop petit pour ne pas atteindre $I_{c,max}$ et détruire le transistor. On doit également choisir R_C et R_E de tel sorte à avoir $V_{CE} > 0.25$ V (plage de fonctionnement) par la loi des mailles.

Polarisation du transistor

✍ Duffait p70, Malvino

Matériel : transistor 2N2222, alimentation continue de 10 V, résistances $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 8.2$ kΩ, $R_E = 200$ Ω et $R_C = 820$ Ω, un multimètre

Alimenter le transistor avec une $E = 10$ V. Mesurer avec le voltmètre en DC V_{CE} ainsi que la tension V_{R_C} aux bornes de R_C. En déduire $I_C = \dfrac{V_{R_C}}{R_C}$. Vérifier que l'on est bien sur la droite de charge tracée en préparation.

On peut également mesurer h_{11} qui la pente de la tangente à la courbe $V_{BE} = f(I_B)$, ainsi que h_{22} qui est la pente de la tangente à la courbe $I_C = f(V_{CE})$, pour notre point de fonctionnement.

Il faut bien être au milieu de la droite de charge pour être sur un plateau de la caractéristique $I_C = V_{CE}$ et éviter que le signal soit distordue de façon asymétrique. En effet, on va travailler avec des petites variations autour de ce point de fonctionnement, si on est trop haut dans la droite de charge, on atteint le régime de saturation du transistor ($V_{CE} < 0.25$ V), et si on est trop bas on atteint le régime bloqué. Le point de polarisation est imposé par les valeurs de **résistance** et non pas par le **gain**. **Les variations de gain, et donc les variations de température n'influeront donc pas (ou peu) sur la sortie du circuit.**

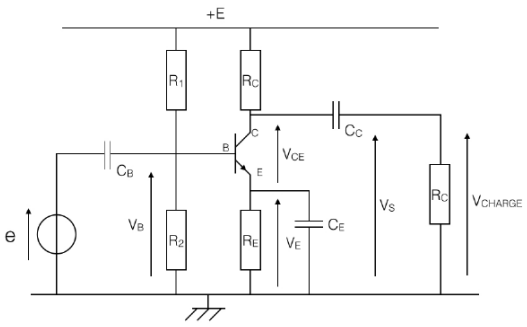
Avec un sèche-cheveu, montrer que la valeur de V_{R_C} ne varie pas en chauffant le transistor.

En ayant ainsi fixé la polarisation, on a fixé le point de fonctionnement. On va alors travailler sur de faibles variations autour de ce point.

2.2 Montage résistance d'émetteur découplé et pont de base

On va alors travailler sur de faibles variations autour du point de fonctionnement car on veut amplifier un signal de faible tension. La polarisation nous permet de travailler dans la zone active du transistor. Sans cela, la tension en B serait tellement faible que le transistor resterait bloqué. En travaillant avec des petits signaux, on va travailler autour du point de fonctionnement fixé par la polarisation, sachant qu'une petite variation autour de V_{BE} entraînera une variation importante de V_{CE}.

On réalise le montage avec e le signal faible à amplifier :



Les condensateurs jouent un rôle important. En effet, on ne veut amplifier que les faibles signaux du signal de départ et non pas la tension continue en B qui polarise le transistor. Il faut donc éliminer cette tension continue.

Le condensateur C_B bloque la composante continue du signal et se comporte comme un court-circuit pour la composante alternative. La composante alternative de e entraînera une variation de la tension V_B et donc une variation

de I_B. Le courant entrant dans la base aura donc une composante continue par la polarisation et une composante alternative par le petit signal e.

Cette composante alternative de I_B sera amplifiée et fournira une composante alternative de I_C importante qui entraînera une tension aux bornes de R_C importante. On aura alors une tension de sortie V_s avec une composante alternative importante.

On déduit alors que V_s diminuera d'autant plus que e augmente (e augmente, donc I_B augmente, donc I_C augmente, donc V_{R_C} augmente, donc $V_s = E - V_{R_C}$ diminue). On aura une opposition de phase de la sortie par rapport à l'entrée. La composante continue de V_s causée par la polarisation du transistor sera elle éliminée par le condensateur C_C. **On a donc un montage qui fait un gain en tension !**

Le condensateur C_E sert lui à découpler l'émetteur. Pour la composante continue, il sert de coupe-circuit et ne touche pas à la polarisation, avec notamment R_E qui s'oppose aux variations de la composante continue de I_B. Par contre, pour la composante alternative, il fait court-circuit : il crée donc une **masse alternative**, c'est-à-dire qu'il met le point E à la masse pour la composante alternative. Le point E est donc fixe et n'agit pas en tant que contre-réaction des variations de I_B.

Il faut que les impédances des condensateurs aux fréquences des petits signaux soient telles que leurs réactances capacitives $R = \dfrac{1}{jC\omega}$ soient beaucoup plus petites que les résistances auxquelles ils sont liés. D'où les valeurs élevées des condensateurs (un facteur 10 est en général pris).

2.2.1 Gain

Étude du gain

✍ Duffait p121

Matériel : même matos que pour la polarisation du transistor, condensateurs $C_B = C_C = 10$ μF et $C_E = 1$ mF, GBF, oscilloscope

Mettre comme source de tension e un sinus fourni par le GBF d'amplitude 20 mV. L'amplitude doit être faible pour ne pas saturer la sortie. On veut mesurer le gain en tension du montage, qui *a posteriori* dépend de la fréquence de e.

Mesurer à l'oscilloscope V_E et V_s en fonction de la fréquence f du signal e. On ne le fait pas au multimètre car V_E ne serait pas mesurable au multimètre à hautes fréquences. On devrait avoir V_E et V_s en opposition de phase.

Tracer le gain $G = 20 \log\left(\dfrac{V_s}{V_E}\right)$ en fonction de f. On est censé avoir un passe-bande. Lire alors les fréquences de coupure à -3 dB et mesurer le gain maximal.

La valeur théorique du gain maximal est $\dfrac{R_c \beta}{h_{11}}$.

2.2.2 Distorsion

On constate une distorsion du signal de sortie.

Mise en évidence de la distorsion

✍ Duffait p123 ⏲

Fournir avec le GBF une tension sinusoïdale V_E d'amplitude 10 mV, avec une fréquence dans la bande passante du montage (par exemple 10 kHz).

Augmenter l'amplitude de V_E pour observer une distorsion de V_s. On peut mieux voir cette distorsion en faisant la FFT de V_s en voyant apparaître des harmoniques quand l'amplitude de V_E augmente.

Cette distorsion est compréhensible. En effet, la pente h_{11} de la courbe $V_{BE} = f(I_b)$, varie fortement selon avec V_{be}. Or le gain en tension dépend de h_{11}. Les variations de V_{BE} causées par celles petits signaux font donc varier le gain en tension du montage. D'où une déformation des signaux.

On observe que la sinusoïde du signal de sortie est plus pointue en bas qu'en haut. C'est normal : si V_{BE} augmente, h_{11} diminue, donc le gain augmente donc la sortie, qui est inversée, a des valeurs négatives plus importantes (raisonner sur le graphe avec les caractéristiques du transistor).

2.2.3 Rendement

Calcul du rendement

✍ Duffait ⏲

Mesurer le courant I_A à la sortie de l'alimentation E. La puissance d'alimentation vaut alors $\mathcal{P}_{\text{alim}} = EI_A$.

En sortie, se mettre à puissance maximal en visualisant la tension aux bornes de la charge. Augmenter V_E jusqu'à atteindre la limite de l'écrêtage de la sortie. Mesurer V_s et I_s, et en déduire $\mathcal{P}_s$.

Calculer le rendement $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_{\text{alim}}}$.

En toute rigueur, il faudrait aussi prendre en compte dans les puissances fournies celle du petit signal que l'on cherche à amplifier, mais celle-ci est négligeable devant celle fournie par l'alimentation.

Ce rendement est faible. C'est normal pour un amplificateur de classe A. En effet, le transistor opère toujours dans la zone active. Or, pour que cela soit possible, des résistances ont été introduites et, en dehors de celle de charge,dissipent inutilement de l'énergie. Il y a donc de grandes pertes d'énergies inhérentes à ce montage.

2.2.4 Impédances d'entrée et de sortie

Un bon amplificateur a la plus grande impédance d'entrée possible, afin que la tension à son entrée corresponde à celle du générateur de signal. En effet, un générateur non idéal possède une résistance interne. Par diviseur de tension, on a

$$V_{\text{entrée}} = V_{\text{générateur}} \frac{Z_{\text{entrée}}}{Z_{\text{entrée}} + R_{\text{interne}}}$$

De même, un bon amplificateur a une impédance de sortie correspondant à celle de la charge, pour que l'on ait un maximum de puissance fournie. Les charges ont en général des petites résistances (quelques Ω pour un haut-parleur par exemple), donc on veut une impédance de sortie faible.

Mesure des impédances d'entrée et de sortie

✍ Duffait p124 ⏲

Matériel : matos pour étudier le gain + boîte à décades de résistance

On mesure les impédances par la méthode de la tension moitié :

- Impédance d'entrée : mettre la boîte à décade de résistance R entre le GBF et C_B. Mesurer la tension V_B au point B quand R est court-circuitée. Faire varier R jusqu'à obtenir une tension V_b divisée par 2. La valeur obtenue est l'impédance d'entrée Z_e.
- Impédance de sortie : mesurer la tension V_s à la sortie à vide du montage. Mettre la boîte à décade de résistance R entre la masse et C_C. Faire varier R jusqu'à obtenir une tension V_s divisée par 2. La valeur obtenue est l'impédance de sortie Z_s.

Les valeurs attendues sont :

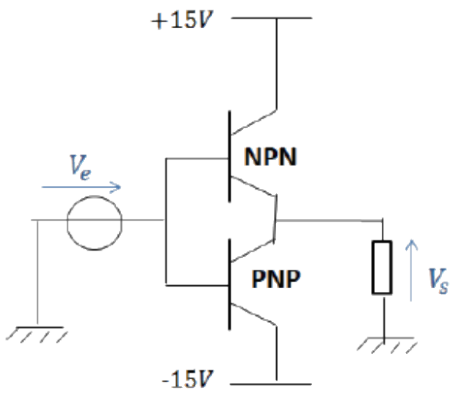
$$Z_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{h_{11}}} - R_{\text{GBF}} = 390\ \Omega \qquad \text{et} \qquad Z_s = \frac{R_C}{1+R_C h_{22}} \simeq R_C = 820\ \Omega$$

La valeur élevée de l'impédance d'entrée est une bonne chose. Cette valeur élevée de l'impédance de sortie, causée par les résistances incluses dans le montage pour polariser le transistor, empêche une bonne transmission de puissance. De plus, on a ici amplifié en tension, mais pas en intensité. Or, si on veut amplifier en puissance, on veut les deux.

☕

Brancher le micro en entrée du montage et le haut-parleur en sortie. Constater qu'aucun son ne sort de l'ampli.

3 Montage push-pull



On a vu que le transistor ne peut amplifier que les tensions qu dépassent un certian seuil, de 0.6V. Or les signaux que l'on traite peuvent être négatifs. On va donc utiliser un montage push-pull constitué d'un transistor NPN et d'un PNP connectés têtes-bêches.

Quand -0.6V<Vs<0.6V, les deux transistors sont bloqués. Le courant de sortie est donc nul.

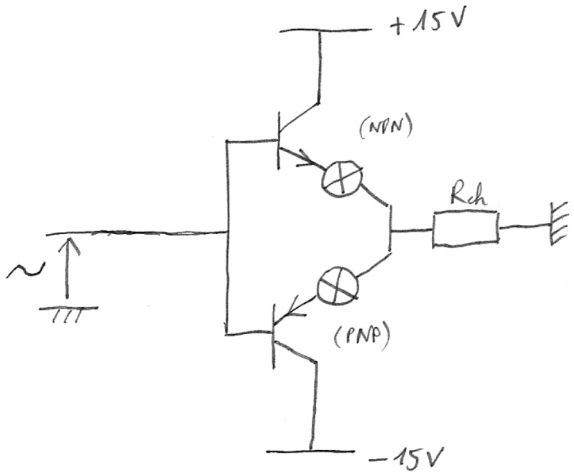
Quand Vs>0.6V, le PNP est bloqué et le NPN est en zone active. On a alors amplification des signaux positifs.

Quand Vs<-0.6V, le PNP est en zone active et le NP est bloqué. On a alors amplification des signaux négatifs.

Étudions maintenant l'impédance de sortie de ce montage ainsi que son rendement. On va également observer que le signal est distordu.

Pour le montage, on a choisi d'utiliser les plaquettes toutes prêtes (plaquette push-pull P41.18). En effet, réaliser manuellement ce push-pull, une fois intégré dans la chaîne totale d'amplification, c'est-à-dire avec des entrées de quelques volts, faisait que les transistors chauffaient trop. On peut effectivement voir que les transistors de la plaquette sont collées sur une architecture maximisant le refroidissement.

Monter un push-pull soi-même avec 2 transistors assortis (genre BD135 et BD136). Vérifier d'abord que le signal aux bornes de la charge Rch (rhéostat d'environ 50Ω, enfin, testez-en plusieurs si ça ne marche pas) est symétrique, sinon changer les transistors jusqu'à ce que ce soit bon. Pour l'alimenter, prendre par exemple la petite alim marron Jeulin (je crois) qui délivre jusqu'à 16 VA. Les modules Hameg ont un peu de mal à délivrer de la puissance... Monter ensuite deux petites ampoules de 3,5 V comme sur le dessin. Envoyer en entrée une tension de fréquence environ 0,2 Hz (pour bien voir). On peut envoyer en amplitude quelque chose de l'ordre de 5 ou 6 V (peak-peak) avant que les ampoules ne commencent à s'allumer, mais quand même, on vous conseille d'y aller petit à petit et de vérifier la température des transistors !



Pour vraiment convaincre votre auditoire que le NPN « pousse » le courant et que le PNP le « tire », montrer à l'oscillo (en « roll ») que quand le courant est positif (bon ok j'ai pas fléché mon schéma), c'est le NPN qui pousse (la lampe du haut s'allume), et quand il est négatif, c'est le PNP qui tire (l'autre lampe s'allume, quoi). Have a good time !

Ajouter une ampoule en Rch.

Observation de la distortion

✍ ⏲

Matériel : plaquette, GBF, Oscillo, rhéostat

Brancher le rhéostat en tant que charge de sortie. Avec le GBF, fournir pour Ve une tension sinusoïdale de 3 volts de basse fréquence (10Hz par exemple).

Observer Vs et Ve à l'oscilloscope. Constater le palier au niveau du zéro pour Vs. Ceci est causé par le régime bloqué des deux transistors entre -0.6V et 0.6V

Impédence de sortie

✍ ⏲

On réutilise la méthode de la tension moitié. Fournir en entrée une tension constante. Mesurer la tension de la sortie en coupe circuit. Faire varier le rhéostat jusqu'à obteir une tension de sortie deux fois moindre. Relever la valeur de la résistance.

Cette valeur est très faible, on pourra donc faire une bonne transmission de puissance.

☕

Calcul de rendement

✍ ⏲

Calculer la puissance d'alimentation en mesurant Ia et Ea. Négliger la puissance d'entrée car on a un très petit courant d'entrée Ib. Calculer la puissance de sortie en mesurant la tension aux bornes du rhéostat de charge et l'intensité parcourant ce dernier.

Ce push-pull est un amplificateur de classe C. C'est-à-dire que les transistors ne fonctionnent que sur une demi-période : le courant collecteur n'existe que sur une moitié de cycle (voire un peu moins ici à cause des blocages à 0.6V). Ces amplificateurs ont un bon rendement, de maximum 0.75

On peut alors évaluer le gain en tension qui est de l'ordre de 1 MAIS on a aussi un gain en intensité et on voit que lorsque l'impédance de la charge augmente, on a une amplification nette de puissance ! (et pas de tension a priori). C'est cet effet d'adaptation d'impédance dont nous avons parlé en introduction qui fait de ce montage Push-Pull, un bon candidat pour amplifier un signal correctement. On pourrait également améliorer ce montage en essayant de réduire la distorsion à l'aide de diode pour que le signal de sortie ne subisse pas de déformations fortes liées à la variation d'amplitude du signal d'entrée.

4 Amplification finale

Brancher le micro + montage émetteur commun + push-pull + haut-parleur. Constater qu'un son est produit.

5 Amplificateur Opérationnel ?

Une possibilité parmi d'autres.

Conclusion

L'amplification n'est qu'un maillon de la chaîne de l'information. En effet on remarque que l'on a amplifié le signal ET le bruit, et une étape prochaine serait le filtrage de ce dernier.

Remarque, en industrie on utilise pas des montages merdiques comme celui-là, on fait soit de l'ao

MP 23

Mise en forme, transport et détection de l'information

Commentaires du jury

- **2017 :** La transmission de signaux numériques n'est malheureusement jamais abordée.
- **2014-2016 :** Ce montage ne se restreint pas à la modulation d'amplitude. Dans le cas de la démodulation synchrone, le problème de la récupération de la porteuse est systématiquement passé sous silence.
- **2012 :** Comme l'indique son titre, ce montage comporte trois parties d'égale importance ; il se prête bien à la réalisation d'une chaîne complète traitant des trois aspects. Il est souhaitable de connaître les différentes solutions technologiques employées dans les applications de la vie quotidienne. Ce montage ne doit pas se restreindre à la modulation et démodulaiton d'amplitude. Ce montage suppose une connaissance argumentée des choix en radio AM, radio FM, téléphonie mobile... Il convient aussi de se demander comment passer de l'étude élémentaire d'un signal informatif purement sinusoïdal au cas d'une ou plusieurs conversations téléphoniques par exemple. Rappelons enfin l'importance des fibres optiques en télécommunications.

Bibliographie

- ✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait** ⟶ Modulation et démodulation
- ✍ *Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage*, **Manneville** ⟶ Bon complément théorique du Duffait
- ✍ *Principes d'électroniques*, **Malvino** ⟶ PLL
- ✍ *Ondes*, **Brébec** ⟶ Modèle des constantes réparties (pour les questions
- ✍ **Quaranta IV** ⟶ Câble coaxial

1 Caractérisation d'un moyen de transport : le câble Coaxial 1210
1.1 Vitesse de propagation 1210
1.2 Impédance 1211
1.3 Fonction de transfert et déformation 1211
2 Modulation et démodulation 1212
2.1 Le besoin d'une mo-dem 1212
2.2 Mo-Dem AM 1212
2.3 Mo-Dem FM 1214

Introduction

Transmettre une information d'une source à un destinataire est un enjeu de première importance dans notre société. Cette transmission se fait en plusieurs étapes :

1. la source émet une information
2. un codeur transforme l'info en message
3. un transducteur transforme le message en signal émis
4. le canal permet le transport de l'information jusqu'au destinataire
5. le signal reçu est alors retransformé en message par un transducteur
6. ce message est finalement transformée sous forme d'information reçue par la destinataire

Dans le cadre de ce montage, on va s'intéresser aux étapes **3, 4 et 5**.

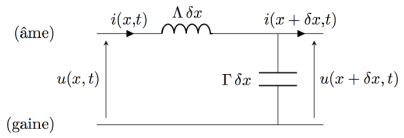
Les différents moyens utilisés pour le transport de l'information sont les lignes électriques, les guides d'ondes ou la propagation dans l'atmosphère sous la forme d'onde hertzienne.

Le nombre d'information transmise étant de plus en plus nombreux, nous devons être capables d'en transmettre plusieurs à l'aide d'un unique canal (multiplexage). Cependant, les signaux audio transmis dans la vie courante se trouvent dans une petite fourchette de fréquences (entre 20Hz et 20kHz), délimitée par les limites d'audibilité. Il faut trouver un moyen pour que les signaux restent distinguables lorsqu'ils arrivent chez le particulier. Nous effectuons pour cela de la **modulation**, modifiant le signal informatif et nous permettant ainsi l'accès à un intervalle de fréquence plus vaste, puis à de la **démodulation** pour réobtenir le signal d'intérêt.

Pour avoir une résonance dans une antenne il faut avoir une longueur d'antenne multiple de la demi-longueur d'onde (voir cours sur les ondes de Jérémy Ferrand). Ainsi, pour émettre une onde de fréquence 1kHz, il faudrait une antenne de l'ordre de la centaine de kilomètre.

1 Caractérisation d'un moyen de transport : le câble Coaxial

Le câble coaxial est un moyen de transport de signal électrique très commun dans les salles de TP. On peut modéliser un tronçon mésoscopique de câble par un LC puisqu'on observe à la fois des phénomènes d'induction entre l'âme et la gaine parcourus par des courants variables



L'étude de ce circuit aboutit à l'équation d'Alembert suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma\Lambda\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ce qui nous intéresse, ce sont la vitesse de propagation, l'impédance du câble (pour transmettre le plus de puissance à travers le câble) et sa réponse en fréquence.

1.1 Vitesse de propagation

☕

Mesure de la vitesse de propagation

✍ ⏲

Mettre un T sur le GBF. Relier une extrémité au câble, l'autre à un oscilloscope. Envoyer au GBF un burst sinusoïdale de fréquence 5 MHz, d'amplitude 5 V, avec 1 cycle et 1ms entre chaque burst. Régler l'impédance de l'oscilloscope sur 50 Ω au lieu de 1 MΩ pour éviter les réflexions.

On observe à l'oscilloscope les réflexions des bursts sur l'autre extrémité du câble. Mesurer l'intervalle de temps Δt entre un burst et sa réflexion. On en déduit la vitesse de propagation $v = \dfrac{2l}{\Delta t}$ avec $l = 100$ m. On doit trouver $2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Remarqe : On utilise un burst sinusoïdal pour limiter la dispersion en fréquence dans le câble (visible avec un créneau). Le burst réfléchi est déformé à cause de cette dispersion (cf équation des télégraphistes).

1.2 Impédance

Le coefficient de réflexion en amplitude est $\mathcal{R} = \dfrac{Z - R}{Z + R}$

Impédance du câble coaxial

✍ ⏲

Rajouter une boîte à décades de résistance en sortie du câble. Trouver la valeur de résistance pour laquelle l'onde réfléchie s'annule (la mesurer à l'ohmmètre pour la connaître plus précisément).

On a alors trouvé l'impédance Z du câble. On attend 50 Ω.

Ordres de grandeur :50 Ω (instrumentation), 75 Ω (TV), 600 Ω (téléphonie).

On peut s'amuser à calculer Γ et Λ avec v et Z mais ça n'a pas grand intérêt dans ce montage.

1.3 Fonction de transfert et déformation

La fonction de transfert aux bornes de la capacité s'écrit sous la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2} \tag{23.1}$$

A priori, la câble coaxial se comporte donc comme un passe-bas. On va vérifier ça en traçant son diagramme de Bode.

Diagramme de Bode du câble coaxial

✍ ⏲

Brancher la sortie du câble sur la voie 2 de l'oscilloscope (dont l'impédance est toujours réglée sur 50 Ω. Mesurer les tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences du GBF.

Tracer le gain linéique $g = \dfrac{20\log(V_s/V_e)}{L}$ avec l la longueur du câble en fonction de la fréquence. Déterminer la fréquence de coupure qui doit être de l'ordre du MHz.

Le câble coaxial n'est donc adapté que pour transporter des signaux de fréquence inférieure au MHz. Cela peut poser problème quand on s'intéresse aux signaux numériques. En effet, de tels signaux peuvent être modélisés par une superposition de signaux en forme de créneaux donc la fréquence représente la quantité de bits (donc d'information) à transmettre. Ce débit d'information est donc limité par le côté passe-bas du câble. Ici on aurait une limite de l'ordre de 1 Mb/s.

Une solution alternative serait la fibre optique, dont la limite physique de transmission est bien plus avantageuse (multimodal, plusieurs Gb/s).

Dans la suite on se focalise sur la science du 19-20ème siècle, avec les signaux analogiques.

2 Modulation et démodulation

2.1 Le besoin d'une mo-dem

On a vu dans le cours d'électromagnétisme que pour émettre une onde à une certaine longueur d'onde, il faut avoir une antenne (un dipole) dont la longueur est similaire à celle de la longueur d'onde émise. Don soit on émet à courte longueur d'onde, donc haute fréquence, dont haute énergie, soit on fait des antennes immenses.

Il existe cependant une limitation fondamentale à la fréquence de l'onde utilisée, puisque l'atmosphère, et les systèmes de propagation, ont une fonction de transfert !

Nous allons donc dans cette partie réaliser une modulation de signal. Le principe de cela est simple, on génère un signal dit *porteur*, qui est facilement émis par une antenne raisonnable, et qui est efficacement transporté dans le milieu considéré, et on le module pour y inclure une faible variation qui contient le *signal*. Le processus de modulation se doit d'être réversible sans perte d'information, c'est pourquoi nous allons nous intéresser aux processus dans les deux sens !

2.2 Mo-Dem AM

2.2.1 principe

La modulation d'amplitude (ou AM) est la méthode privilégiée de transport d'ondes radios sur des longues distance, très présent en Angleterre par exemple. Son principe est de multiplier le signal de fréquence type f_1 par une porteuse de fréquence fixe $f_2 \gg f_1$. Ce faisant, on peut transporter le signal dans les variations d'amplitude de la porteuse. La porteuse est généralement choisie pour être une onde qui se propage bien dans l'atmosphère (100-2000kHz). La portée de telles ondes est suffisante pour capter les radios anglaises depuis la Bretagne, le cotentin et le pas de calais.

2.2.2 On module au multiplieur

✍ Duffait p209

Pour effectuer la modulation, on utilise un multiplieur(http://kudelsko.free.fr/articles/multiplieur.htm). En entrée : la porteuse $v_p(t) =_p \cos(2\pi f_p t)$ et le signal $v_i(t) = A_0 + A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$.

En sortie : $v_m(t) = kA_pA_0\left(1 + \frac{A_i}{A_0}\cos(2\pi f_i t + \phi_i)\right)\cos(2\pi f_p t)$, où k est la constante du multiplieur en V^{-1} et $m = \frac{A_i}{A_0}$ est le taux de modulation, qui dépend donc de l'amplitude ET de l'offset du signal modulant le cas échéant.

On s'intéresse alors à l'enveloppe du signal, mais celle-ci peut être déformée et repliée si le taux de modulation est trop grand.

☕

Modulation par multiplieur

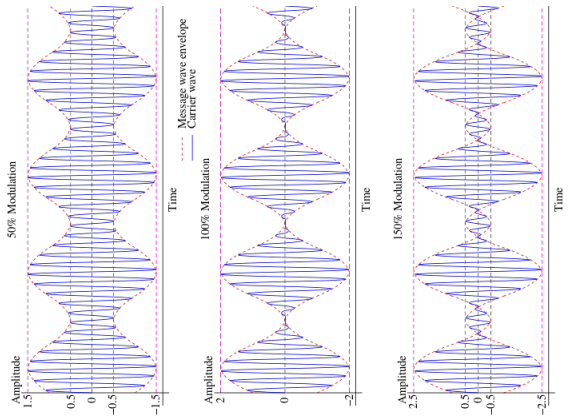
✍ ⏲

Matériel : multiplieur, deux GBFs, coaxs, oscillo

Porteuse 2V à 10kHz, signal 1V (on va le changer après) offset nul (idem) 500Hz.

Observer le signal résultant et montrer l'intérêt de l'offset et du taux de modulation.

On voit que pour retrouver le signal, le plus simple c'est un détecteur de crête, mais alors le facteur de modulation doit être inférieur à 1. Cela impose un gros offset, et c'est pas cool.

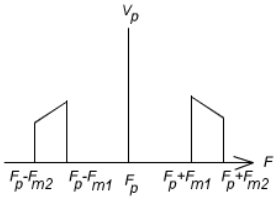


2.2.3 Spectre et rendement de la modulation

Tracer le spectre du signal modulé en amplitude, et remarquer qu'il a trois pics, don la hauteur varie en fonction de l'offset et l'amplitude.

Numérique : Parler du fait que pour acquérir ce spectre on passe par une discrétisation du signal, qui impose sa numérisation.

En pratique le signal est dans une gamme de fréquences $f_i - \delta_f, f_i + \delta_f$. Le spectre du signal modulée est alors de la forme



On peut alors montrer [1] que $\eta =$ [Puissance dans les bandes latérales]/[Puissance totale] vaut, avec $P(s)$ la puissance dans le signal,

$$\eta = \frac{m^2 P(s)}{1 + m^2 P(s)} \tag{23.2}$$

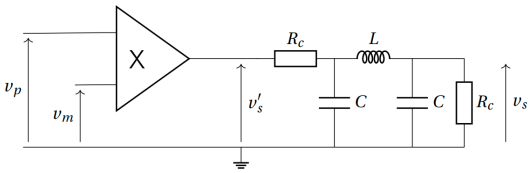
Ainsi on a tout intérêt à favoriser une méthode alternative à la détection de crêtes.

2.2.4 On démodule à la détection synchrone

Vu la forme du spectre, on brûle d'envie de faire de la détection synchrone. Cette méthode permet d'extraire efficacement une fréquence ou bande de fréquence d'un signal, à la manière d'un basse bande actif. Celle-ci est très répandue car ses applications dépassent la démodulation : on l'utilise notamment pour réduire le bruit ou pour acquérir un signal de fréquence connue noyé dans un fort bruit (dans les « lock-in amplifiers »).

1. http://www.telecom.ulg.ac.be/teaching/notes/total1/elen008/node30_mn.html

Cette méthode consiste à multiplier le signal modulé par un signal de même fréquence que la porteuse, puis à filtrer passebas. On peut comprendre simplement ce principe dans le domaine spectral. Les fréquences d'un signal de fréquence$f$modulé par une porteuse f_p sont f_p -f et f_p +f(dans le cas où il n'y a pas de composante continue ajoutée au signal informatif). Si l'on multiplie ce signal par un sinus de fréquence f_p on obtient des pics aux fréquences suivantes :f, $2f_p$ -f , $2f_p$ +f. En filtrant passe-bas de telle sorte que les fréquences de l'ordre de $2f_p$ soient supprimées, on se retrouve avec seulement la composante f du signal informatif. Notons qu'il n'y a ici aucune condition sur le taux de modulation. Il est d'ailleurs a priori inutile d'avoir une composante continue dans le signal informatif.



Démodulation par détection synchrone

Deux GBF. Avec le premier, reprendre le signal modulé en amplitude précédent. Avec le second, créer une sinusoïde vp de fréquence 100 kHz et d'amplitude 5V.

La seconde partie est un filtre passe-bas du troisième ordre : on prendra Rc = 4,7 kΩ, C = 2 nF, et L = 100 mH. On doit récupérer en sortie du filtre un sinus à 5 kHz, auquel s'ajoute un offset de très basse fréquence (voir remarque). Vérifier que cela fonctionne aussi si le signal informatif est un triangle, puis si le taux de modulation dépasse 100%.

Vérouillage de phase : Les deux GBF ne sont pas synchronisés donc il reste un léger décallage. En utilisant une boucle à vérouillage de phase on peut s'en séparer. On peut contourner cela en utilisant le même GBF pour la porteuse et la démodulante.

2.2.5 Multiplexage

On peut facilement montrer le multiplexage dans le cas de la modulation d'amplitude. Le multiplexage c'est al superposition de plusieurs signaux sur des bandes différentes, sans perte d'information, le but étant d'extraire les multiples pistes séparément.

Multiplexage AM

Créer deux signaux modulés 1 et 2 par deux porteuses de fréquences différentes, et avec deux signaux informatifs différents (par exemple un sinus et un triangle). Sommer ces deux signaux à l'aide d'un montage soustracteur ou de tout autre porcédé, puis envoyer la sortie du soustracteur sur le montage démodulateur précédent. En fonction de la fréquence du démodulateur choisie, on observe en sortie du filtre le signal informatif 1 ou 2.

En pratique, prendre un haut parleur et écouter la sortie dans les deux cas peut être amusant.

Oui mais bon, dans la vraie vie on utilise aussi de la modulation FM, et c'est vraiment plus avantageux pour plein de choses.

2.3 Mo-Dem FM

2.3.1 Principe

Dans ce type de modulation, l'information est encodée dans la variation de la fréquence instantanée f de la porteuse $v_p(t) = A_p cos(2\pi f_p t)$. Si $v_i(t)$ est le signal informatif, la fréquence instantanée du signal modulé est de la forme :

$$f(t) = f_p + kv_i(t) = f_p + kA_i \cos(2\pi f_i t)$$

où k est un facteur de proportionnalité s'exprimant en $\mathrm{Hz\,V^{-1}}$. Cette fréquence instantanée est reliée à la phase instantanée du signal modulée Φ par $f = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Le signal modulé s'écrit donc :

$$U(t) = A\cos(\Phi) = A\cos\left(2\pi f_p t + \frac{kA_i}{f_i}\sin(2\pi f_i t)\right) = A\cos(2\pi f_p t + \beta\sin(2\pi f_i t))$$

avec β **l'indice de modulation**.

Un signal modulé en fréquence est donc décrit par trois grandeurs différentes : la fréquence centrale f_p , la plage de fréquence $f_{max} - f_{min}$ qui dépend de l'amplitude de $v_i(t)$, et la fréquence de balayage en fréquence, qui est la fréquence de $v_i(t)$.

2.3.2 Modulation à l'oscillateur commandé en tension (OCT)

Il existe plusieurs manières de réaliser la modulation en fréquence d'un signal (modulateur d'Armstrong...). Nous avons choisi la plus simple expérimentalement : la modulation par un Oscillateur Commandé en Tension (OCT), c'est-à-dire un dispositif tel que la fréquence est proportionnelle à une tension de commande. On peut ainsi mettre en entrée la porteuse et le signal informatif en tension de commande. Le signal de sortie sera alors un signal sinusoïdal avec l'amplitude de la porteuse et dont la fréquence est modulée par le signal informatif. Cette modulation est directement réalisée par les GBF Agilent.

Modulation de fréquence

✍ Duffait p.222 ⏲ 2 min

Visualiser le signal donné par un GBF sur un oscilloscope.

Choisir un sinus de fréquence 100 kHz, d'amplitude 8 Vpp et un offset nul. Cette commande correspond aux paramètres de la porteuse.

Appuyer sur la touche Mod. Choisir le mode 'Fm', 'source int', 'freq dev' 50 Hz, 'FM' 0.5 Hz et une forme de sinus. Ces paramètres correspondent quant à eux à la fréquence du signal d'intérêt pour FM définissant la période des oscillations et la plage en fréquence ('freq dev') sur laquelle varie ces oscillations.

Mesure du coefficient de proportionnalité k

✍ ⏲

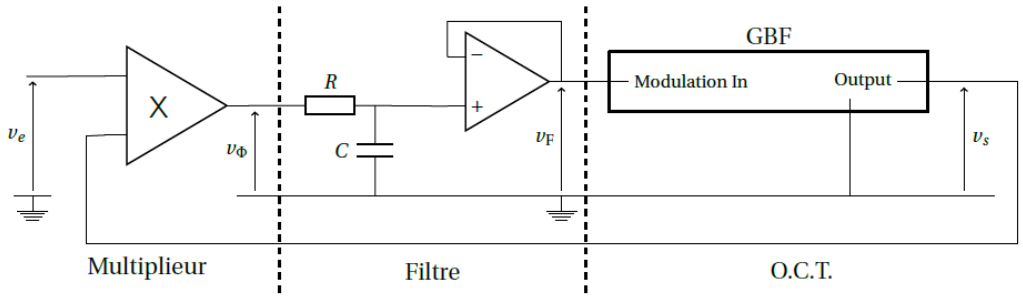
Plaçons le GBF en 'mod source ext' et relier sa face arrière à un générateur de tension continu. La 'freq dev' est ici de 100 kHz.

Mesurer la fréquence en sortie du GBF pour différentes valeurs de tension en entrée variant entre -5 V et 5 V (les mesurer au multimètre pour être plus précis). Ne réaliser en live que quelques points, les autres ayant étés faits en préparation. On obtient alors une droite de pente k.

2.3.3 Démodulation à la boucle à verrouillage de phase (PLL)

✍ Malvino p273, Duffait p234

Principe



La boucle à verrouillage de phase est le système le plus couramment utilisé pour démoduler les signaux modulés en fréquence. Dans l'idée, il s'agit de faire une démodulation synchrone, comme en démodulation AM : on multiplie notre signal modulé par un signal de même fréquence et en phase. Tout le problème est dans la phrase « signal de même fréquence en en phase » car notre signal modulé possède une phase et une fréquence qui varient à tout instant. On utilise alors une PLL.

Le but est de créer un oscillateur de fréquence variable qui va osciller à la même fréquence que le signal à démoduler. La commande envoyée à l'OCT qui se trouve à l'intérieur de la PLL donnera alors le signal démodulé.

L'OCT a pour rôle de fournir un signal v_s dont la phase instantanée suit celle de v_e. On multiplie $v_s = \cos(2\pi ft+\phi)$ par $v_e = \cos(2\pi ft)$, où $f = f_p + kv_i$, avec un multiplieur.

Le signal de sortie contient alors un terme en $\cos\phi$ et un terme en $\cos(4\pi ft + \phi)$, donc en filtrant passe-bas, on obtient juste un terme qui dépend du déphasage entre les deux signaux. On a intercalé un suiveur pour éviter tout problème d'impédance vis-à-vis de l'entrée 'Mod In' du GBF (suiveur et adaptation d'impédance).

A ce niveau, le but est d'obtenir $v_F = v_i$: en effet, si on a v_i en sortie du filtre, alors l'OCT qui module un sinus de fréquence f_p avec v_i va renvoyer précisément v_e. L'enjeu est donc de régler l'OCT correctement pour qu'il puisse réussir à « s'accrocher » i.e. à verrouiller et à suivre les variations.

Mise en place de la PLL

✍ ⏲

Câbler le circuit précédent. Pour l'OCT, utiliser un GBF qui délivre une tension sinusoïdale d'amplitude 4V, de fréquence 100 kHz, modulée de façon externe avec une excursion en fréquence Freq Dev de 100 kHz. Choisir $R = 1.0 \times 10^1$ kΩ et $C = 1.5 \times 10^1$ nF.

Envoyer une sinusoïde non modulée de fréquence 100 kHz et d'amplitude 4 V en v_e. On doit alors avoir une tension v_F nulle. Si on observe le signal d'entrée v_e et le signal en sortie de l'OCT v_s, ils doivent être identiques mais déphasés de $\pi/2$.

Paramètres de la PLL La PLL est définie par (entre autres) par 2 paramètres : sa plage de capture et sa plage de verrouillage.

- Plage de verrouillage Δf_v : intervalle de fréquences pour v_e pour lequel la boucle peut suivre et rester verrouillée, lorsqu'au départ elle est verrouillée.
- Plage de capture Δf_c : à atteindre pour que la boucle se verrouille lorsqu'elle n'est initialement pas verrouillée.

Plage de verrouillage de la PLL

✍ ⏲

On peut maintenant modifier la fréquence de l'entrée v_e sans modifier celle de la sortie. Changer f_e de quelques Hz pour vérifier que la PLL reste verrouillée. La tension en sortie du filtre v_F doit être une constante, et v_e et v_s restent déphasés, mais plus de $\pi/2$. Regarder sur quel intervalle de fréquence la PLL reste accrochée. Cet intervalle s'appelle la **plage de verrouillage**.

Plage de capture de la PLL

✍ ⏲

Modifier la fréquence f_e , par exemple en l'augmentant, jusqu'à sortir de la plage de verrouillage.

Une fois que la PLL n'est plus verrouillée, re-diminuer cette fréquence jusqu'à qu'au ré-accrochage. Constater l'hystérésis : la plage de capture n'est pas identique à la plage de verrouillage.

La démodulation en fréquence est alors correcte si on respecte deux conditions :

- Il faut que la fréquence du signal modulé en entrée soit toujours dans la plage de verrouillage.
- Il faut que la fréquence du signal informatif reste dans la bande passante du filtre passe-bas.

Quid des signaux numériques ?

2.3.4 Modulation/démodulation FSK pour des signaux numériques

✍ Manneville p187 *Modem basé sur la modulation/démodulation FSK*

Modulation/démodulation FSK

✍ ⏲

On module en fréquence par des créneaux, qui symbolisent des bits. Il faut filtrer en sortie de la PLL, et prendre des créneaux très basse fréquence.

La discussion est faite dans le ✍ Duffait.

Conclusion

On peut également faire du multiplexage en FM, tout comme on peut transmettre des signaux numériques en AM. La prochaine étape serait de voir comment on traite le signal démodulé pour avoir accès à l'information qu'il contient.

Tout ceci c'est bien sûr placé dans le cadre des signaux analogiques, mais des discussions similaires pourraient être abordées pour les signaux numériques.

MP 24

Signal et Bruit

Commentaires du jury

- 2017 : La mesure du bruit thermique d'une résistance est une très jolie expérience à la condition de comprendre les différents étages d'amplification nécessaires dans ces expériences. L'utilisation de boîtes noires non justifiée a été sanctionnée par le jury.
  Jusqu'en 2016, le titre était Acquisition, analyse et traitement des signaux
- 2013 à 2016 : Les notions d'erreur de quantification et de rapport signal/bruit ne sont pas bien dégagées. Pour la numérisation d'un signal, il faut mettre en évidence le rôle de l'échantillonnage et ses conséquences.
- 2011 et 2012 : Les caractéristiques de la numérisation d'un signal ont été mieux illustrées cette année. L'analyse des signaux ne se limite pas à une FFT sur un oscilloscope. L'aspect traitement du signal est trop souvent absent notamment le rapport signal/bruit.
- 2010 : L'étude exhaustive d'un circuit RLC série n'a pas sa place dans ce montage, même si ce circuit peut servir à illustrer la réduction du bruit sur un signal de fréquence donnée. Les notions d'erreur de quantification et de rapport signal/bruit ne sont pas bien dégagées. Pour la numérisation d'un signal, il faut mettre en évidence le rôle de l'échantillonnage et ses conséquences.
- 2008 : La partie « acquisition » est souvent omise.

Bibliographie

✍ *Dictionnaire de physique*, **Taillet, Villain, Febvre** ⟶ Pour l'intro, Voir "signal", "bruit" et "rapport signal sur bruit"
✍ *Acquisition de données, du capteur à l'ordinateur*, **Asch** ⟶ Chp 12 le début sur le bruit
✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait, Lievre** ⟶ Additionneur, CAN, chp III Intéressant et concis
✍ *Acquisition de données*, **Asch** ⟶ CAN,dense
✍ *Electronique*, **Pérez** ⟶ CAN plus didactique
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD** ⟶ Détection synchrone

1 Mesure du RSB sur un exemple simple . . . 1220
1.1 Calcul du RSB . . . 1220
1.2 Mesure du RSB . . . 1221
1.3 Amélioration par filtrage . . . 1222
2 Influence du bruit sur la mesure (CAN) . . . 1223
2.1 Théorie du CAN . . . 1223
2.2 Calibrage (à faire en préparation) . . . 1224
2.3 Sensibilité au bruit . . . 1224
3 Modulation et détection synchrone . . . 1226
3.1 Principe de la détection synchrone (tampon) . . . 1226
3.2 Illustration concrète . . . 1226

Introduction

Si on prend un signal physique s, on peut le décomposer en deux parties.

$$\begin{cases} s_{\text{info}} \text{ est la partie utile, qui trasporte l'information qui nous intéresse} \\ b \text{ est le bruit, sans intérêt (ça se discute)} \end{cases}$$

Une analogie simple serait celle d'une conversation dans une pièce bruyante, tout ce que l'on cherche à entendre c'est la voix de l'autre. La voix représente l'information et le bruit... le bruit ! Mais il peut aussi être intéressant d'entendre le four qui sonne au fond de la pièce, ainsi la définition de *bruit* dépend de la situation et de l'objectif fixé !

Probléme : Comment peut-on quantifier cette notion ?

Une réponse est l'approche énergétique. On compare la quantité d'énergie présente dans s_{info}, que l'on nomme E_{info}, et celle de b, E_b. Cela nous donne une définition du **rapport signal sur bruit :**

$$\text{RSB} = 10 \log \frac{E_{\text{info}}}{E_b} \qquad \text{en déciBel, dB} \tag{24.1}$$

Problématique : Comment le mesurer ? Et quelle est l'influence du bruit sur un signal ?

1 Mesure du RSB sur un exemple simple

1.1 Calcul du RSB

Dans ce montage, on va toujours supposer que le bruit est un bruit blanc idéal, sa fonction d'autocorrélation est un $\delta \Rightarrow$ sa valeur entre deux instants successifs est totalement décorélée $\Rightarrow$ sa TF est une constante !

On rappelle que la densité spectrale de puissance est

$$\mathcal{P}(\nu) = |\mathcal{TF}[s](\nu)|^2 \tag{24.2}$$

On rappelle également que l'énergie totale s'exprime en fonction de la densité spectrale d'énergie via :

$$E_s = \int_0^{+\infty} |\mathcal{TF}[s](\nu)|^2 \mathrm{d}\nu \tag{24.3}$$

On peut alors définir l'énergie du signal contenue entre 0 et f :

$$E_s(f) = \int_0^{f} |\mathcal{TF}[s](\nu)|^2 \mathrm{d}\nu$$

Hypothèse de l'exemple simple : On a un bruit blanc par dessus un signal qui, spectralement, est une porte.

Comme on a supposé que le bruit est spectralement constant, tracer le spectre du signal donnera la superposition d'une constante et d'un carré :

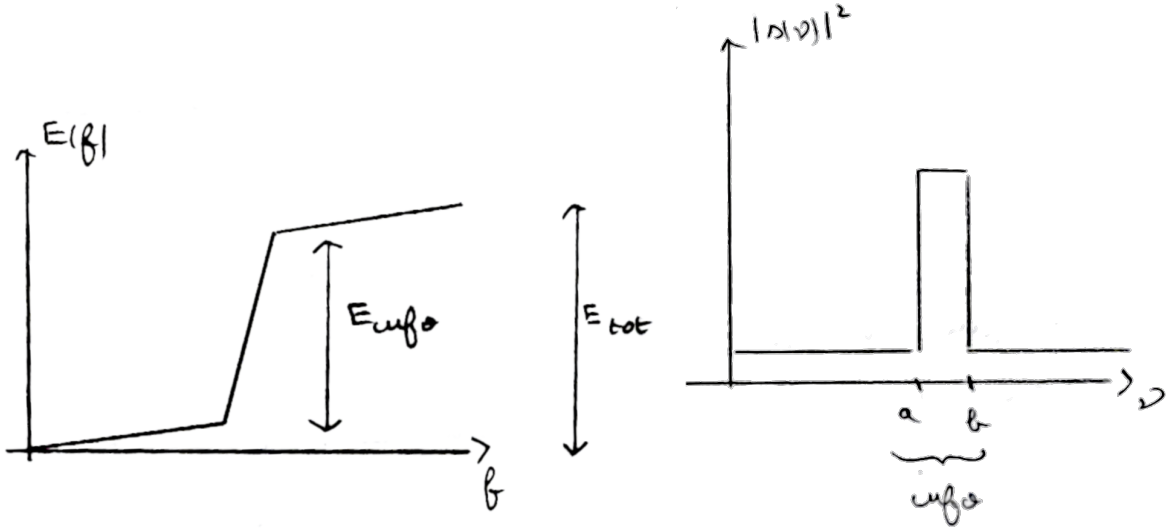


FIGURE 24.1 – Densité spectrale de puissance du signal test.

On a grâce à ce tracer directement

$$\mathrm{RSB} = 10\log\frac{E_{\text{info}}}{E_b} = 10\log\frac{E_{\text{info}}}{E(+\infty) - E_{\text{info}}} \tag{24.4}$$

Pour toute la section 1 on veillera avec Latis Pro à respecter le critère de Shannon pour le signal informatif. On prendra la TF en cochant la case "puissance" et on intégrera pour avoir $E(f)$.

1.2 Mesure du RSB

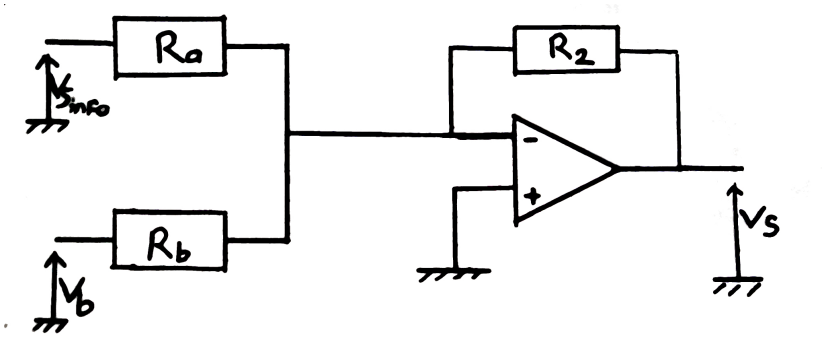


FIGURE 24.2 – Montage additionneur.

On prend $R_A = R_B = R_2 = 1000\Omega$

remarque : on prend les trois résistance égales pour ne pas favoriser un des côtés et pour ne pas amplifier. On réalise cependant une inversion du signal en faisant cela.

Visionner le spectre en puissance

✍ ⏲

On utilise un additionneur afin de sommer un signal de bruit de grande amplitude généré au GBF et un signal informatif de 1V 1000Hz.

On trace alors le signal temporel en prenant 100ms pour le temps d'acquisition et 25μs pour le temps d'échantillonage.

Tout d'abord on remarque que le signal temporel est bruité, on ne voit rien. En traçant la TF **sans lissage** on voit un pic qui se distingue et sort du reste. (`traitement, calcul spécifiques, Fourier`, cocher `"en puissance"`).

Mesure du RSB

On intègre le spectre en puissance, et on obtient $E(f)$, avec un saut autour de 1kHz. En faisant le rapport entre la hauteur du saut et la hauteur totale du spectre, on obtient le RSB !

Il faut se donner une fréquence d'arrêt, parce qu'en pratique on ne fait pas une intégrale à l'infini.

On peut alors calculer le RSB, on peut éventuellement faire des incertitudes mais ne pas pousser l'explication, car cela n'a pas vraiment de sens : pas de valeur tabulée, signal totalement fictif. Maintenant que l'on sait comment le calculer, on va essayer de l'améliorer.

1.3 Amélioration par filtrage

On a vu lorsque l'on a fait la transformée de Fourier que le bruit était réparti sur toutes les plages de fréquences, et visuellement, on a l'impression que le bruit est de fréquence élevée. On peut donc penser à filtrer le signal pour éliminer les hautes fréquences.

RSB d'un signal filtré

On ajoute un filtre passe-bas (si on a eu le temps, on a fait la méthode de la réponse indicielle pour avoir son diagramme de Bode en amplitude), faire un filtre RC d'ordre 1 de fréquence de coupure à environ 1.0×10^{1} kHz (en fait j'avais pris $R = 3.9\,\text{k}\Omega$ et $C = 4.70 \times 10^{2}$ nF) pour être bien certain.e de ne pas enlever de signal informatif.

On récupère le signal filtré, on TF, on intègre, on calcule le RSB.

Si tout c'est bien passé, on a un RSB plus grand, ce qui est signe que l'on améliorer notre signal, et on peut le constater à l'acquisition.

> *Il reste encore du bruit, on aurait pu faire un filtre passe-bande plus piqué autour de notre signal informatif pour encore réduire le bruit mais cela nécessite de connaître a priori ou après une première acquisition la fréquence du signal informatif.*
> *Pour pouvoir faire l'acquisition, faire la transformée de Fourier, éventuellement filtrer numériquement, il a fallu acquérir la tension bruitée. Pour cela on utilise un convertisseur analogique numérique. On va maintenant voir l'influence du bruit sur son fonctionnement.*

2 Influence du bruit sur la mesure (CAN)

Lorsqu'on passe d'un signal analogique à un signal numérique, on doit l'échantillonner. Cela revient à le quantifier, et cette quantification peut déformer le signal numérique par rapport au signal analogique. Par exemple, le signal envoyé par un micro sera déformé à la fois par le bruit et par son échantillonnage.

2.1 Théorie du CAN

✍ Duffait p268-273, Asch p261, Pérez p604

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/electro/canrampe.html

2.1.1 Principe

Le CAN a pour principe de transformer une tension analogique et continue en un nombre binaire de n bits de valeur comprise entre 0 et $2^n - 1$. Lorsque le signal est quantifié, on subdivise l'amplitude maximale U du signal en $N = 2^n$ intervalles réguliers, ce qui permet de définir le **pas de conversion** $p = \dfrac{U}{N}$. Le signal numérique ne prend donc que des valeurs multiples de ce pas.

Cette quantification induit une erreur puisque la tension analogique n'est pas forcément un multiple du pas de conversion. Tout se passe comme si une tension de bruit s'était rajoutée à la tension analogique pour obtenir un multiple du pas de conversion.

Le CAN est composé de 2 parties :

- l'échantillonneur-bloqueur : en aval, il convertit la tension analogique en temps
- le compteur-bloqueur : en amont, il convertit le temps en un nombre de paliers

2.1.2 Le CAN simple-rampe

Il consiste à intégrer une tension de référence E_{ref} **continue** qu'il va ensuite comparer à une valeur de tension à mesurer. Un chronomètre est lancé au début de l'intégration puis arrêté à la bascule du comparateur. À l'instant initial, la tension de sortie est nulle. La tension en sortie de l'intégrateur vaut donc

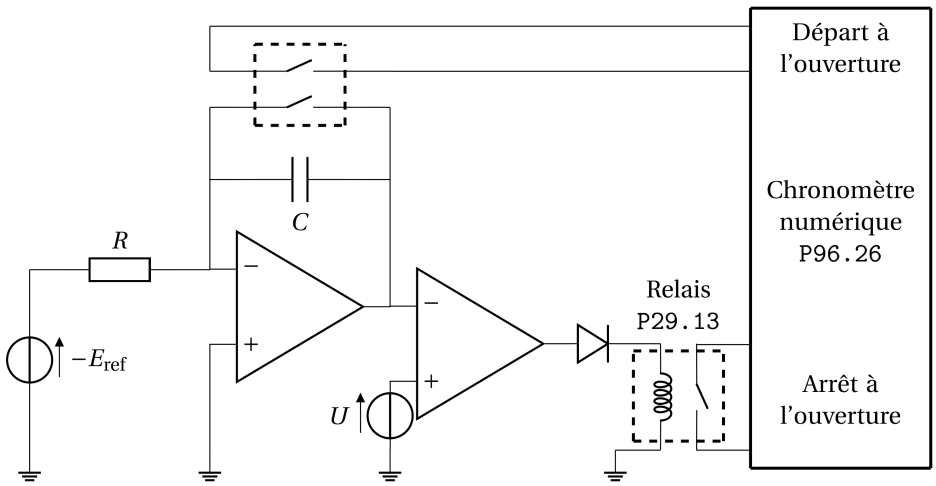
$$V(t) = \frac{E_{\text{ref}}}{RC} t$$

Le comparateur repère le moment où $V(T) = U$ avec U la tension à mesurer. Le temps d'intégration vaut alors

$$T = RC \frac{U}{E_{\text{ref}}} \tag{24.5}$$

Remarques

Le CAN simple-rampe est unipolaire, *i.e.* il ne convertit que des signaux d'entrée positifs. De plus, les temps d'acquisition sont d'une dizaine de seconde donc les fréquences d'échantillonnage des signaux doivent être faibles.



Dans ce montage, l'intégrateur est le premier AO avec la résistance et la capacité tandis que le comparateur est le second AO.

2.2 Calibrage (à faire en préparation)

Calibrage

Réaliser le montage si-dessus. On utilise en parallèle un double-interrupteur mécanique P30.24 : le premier débute la rampe de tension et le second déclenche le chronomètre. Le chronomètre s'arrête via l'ouverture d'un relais.

Choisir une constante RC de l'ordre de la seconde, par exemple avec $R = 4.7$ MΩ et $C = 1$ μF.

Prendre une tension de référence E_{ref} autour de 1 V. **Attention au câblage** : la tension en amont de R doit être $-E_{\text{ref}}$. Pour cela, on utilise un module Hameg ou un GBF (car ce sont des générateurs isolés).

Envoyer avec un autre GBF une tension à mesurer $U = 1$ V.

Observer à l'oscilloscope :

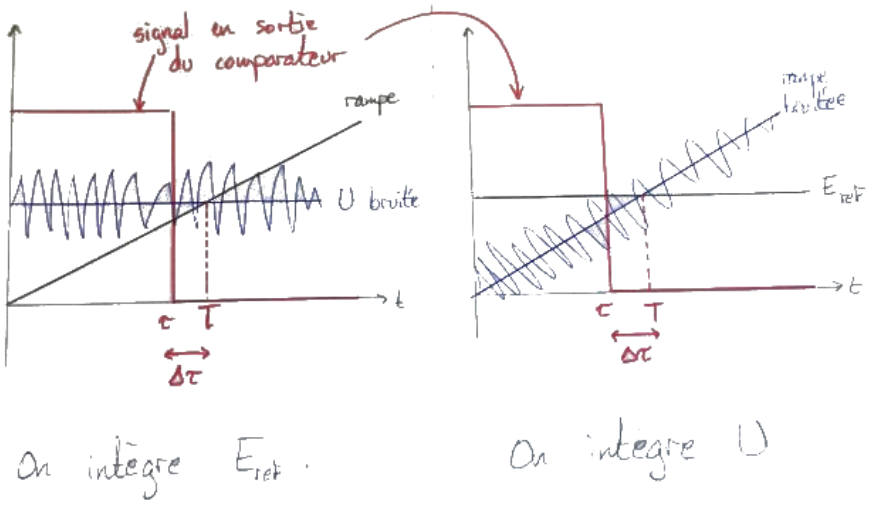
- la rampe de tension en sortie de l'intégrateur
- la tension à mesurer U
- le signal en sortie du comparateur

On vérifie à l'oscilloscope que le chronomètre part en même temps que la rampe et qu'il s'arrête quand la rampe atteint U. Comparer le temps T qu'il affiche au temps T mesuré par l'oscilloscope avec les curseurs.

Répéter l'opération pour plusieurs tensions U. Tracer $T = f(U)$ est vérifier qu'on a une droite.

2.3 Sensibilité au bruit

On veut maintenant mesurer une tension inconnue mais constante et bruitée. On veut comparer deux cas : soit on intègre E_{ref} et on compare la rampe au signal bruité U (graphe de gauche), soit on intègre U et on compare la rampe bruitée à E_{ref} (graphe de droite). Dans les deux cas, le bruit fait que la comparateur stoppe le chronomètre prématurément à un temps $\tau < T$.



Cas 1 : on intègre la référence, la rampe n'est donc pas bruitée

On intègre E_{ref}

✍ ⏲

On utilise $E_{\text{ref}} = 1$ V et $U = 1$ V $+ b$ avec du bruit b (cf section sur l'additionneur).

Mesurer T à l'oscilloscope pour différentes valeurs de b entre 0 et 8 V (5 mesures en préparation, 2 en live).

On obtient la moyenne U_T ainsi qu'un écart-type en guise de barre d'erreur.

Plus b augmente, plus la valeur moyenne U_T s'éloigne de la valeur attendue (1 V) qui ne rentre même plus dans les barres d'erreur pour $b = 8$ V. Une erreur systématique (de type A) s'installe sur notre mesure.

Cas 2 : on intègre U, la rampe est bruitée

On intègre E_{ref}

✍ ⏲

Idem que pour le premier cas mais en inversant les branchements de U et de E_{ref}.

Même avec un gros bruit, on a des valeurs proches de la valeur attendue. **L'intégration du signal permet de réduire l'influence du bruit**. EN effet, le bruit est à haute fréquence alors que nous travaillons à basse fréquence.

Quantification des écarts

Pour quantifier le bruit ici, on ne peut pas utiliser le rapport signal sur bruit, parce qu'on a pas vraiment de signal en sortie. Cependant on peut calculer $\frac{\sigma(U)}{U}$ l'écart type normalisé de la valeur mesurée, soit la largeur de la distribution, et $\frac{U - U_{\text{ref}}}{U_{\text{ref}}}$ l'écart à la valeur vraie normalisé. Cela donne une idée plus précise.

Remarque

En pratique, on n'utilise pas le CAN simple-rampe car il est trop sensible au bruit (RC est sensible à la température). On utilise plutôt le double-rampe, qui intègre la tension à mesurer, la lisse, puis intègre la tension de référence. Il se ramène ensuite à une simple mesure de temps comme le CAN simple-rampe.

3 Modulation et détection synchrone

✍ FLTCLD p539

On n'a pas toujours des sources de bruit blanches. Par exemple, quand on veut étudier la lumière d'une ampoule avec une photodiode, la lumière du jour, un lampe, et les néons de la salle (bruit à 100 Hz) sont des sources de bruit non blanches. Cependant, puisque la répartition de ces bruits n'est pas homogène en fréquence, on peut étudier la répartition spectrale du bruit afin de trouver une plage de fréquence avec un bruit faible. Il suffit ensuite de déplacer le signal d'intérêt dans cette plage de fréquence, de la propager, puis de le récupérer à l'arrivée.

3.1 Principe de la détection synchrone (tampon)

✍ Duffait p219-222

Principe de la détection synchrone

✍ 🕒 5 min

Avec un GBF, on prend un sinus de fréquence f_s. Ce sera le signal d'intérêt. On translate le signal dans une zone de faible bruit en le multipliant par une porteuse de fréquence f_p (choisie pour avoir un minimum de bruit). On a alors un spectre avec 2 signaux à $f_p + f_s$ et à $f_p - f_s$. Ce sera le signal 'émis' avant propagation.

On additionne ces signaux à un bruit blanc avec une zone de fréquences moins bruitée (filtrée). On a alors un spectre avec 2 signaux à $f_p + f_s$ et à $f_p - f_s$ plus le bruit. Ce sera le signal 'reçu' après propagation.

C'est ensuite là qu'intervient vraiment la détection synchrone. À l'arrivée on démodule en remultipliant par la porteuse pour avoir dans le spectre un signal à f_s, un signal à $f_s + 2f_p$ et le bruit décalé. On applique alors un passe-bas RC pour n'obtenir que f_s.

3.2 Illustration concrète

On va maintenant appliquer ce principe à notre lampe.

Application de la détection synchrone à la détection du signal bruité d'une lampe

✍ FLTCLD 🕒 10 min

On veut récupérer avec un photo-capteur le signal émis par une lampe à quelques mètres au milieu de la pièce éclairée.

On alimente une petite ampoule avec GBF+Ampli à une fréquence $f_s = 0.5$ Hz par exemple.

On crée un bruit avec une lampe (ne pas l'orienter dans l'axe de la petite ampoule) ou la lumière du jour, il y a aussi les néons (100 Hz et le bruit électronique (50 Hz et 60 Hz).

Étape 1 : On fait l'acquisition du signal avec une photodiode + montage à AO (résistance de 100 kOhm par ex). On obtient un signal très bruité.

Calculer le RSB du signal, et voir qu'il est immonde. (On peut faire varier la distance si on veut.)

Étape 2 : Modulation

On utilise un hacheur optique alimenté par un GBF avec une fréquence f_p vers 140 Hz si possible (pour éviter tous les bruits)

Étape 3 : Démodulation synchrone On utilise le boîtier de détection synchrone commercial P47.8 (faire la détection à la main est trop difficile à cause de différences de phase). hoisir REF IN = REF OUTPUT du hacheur (et pas avec un autre GBF).

Faire l'acquisition du signal filtré, on voit déjà que le signal est retrouvé, et on calcule le RSB, qui doit être vachement meilleur !

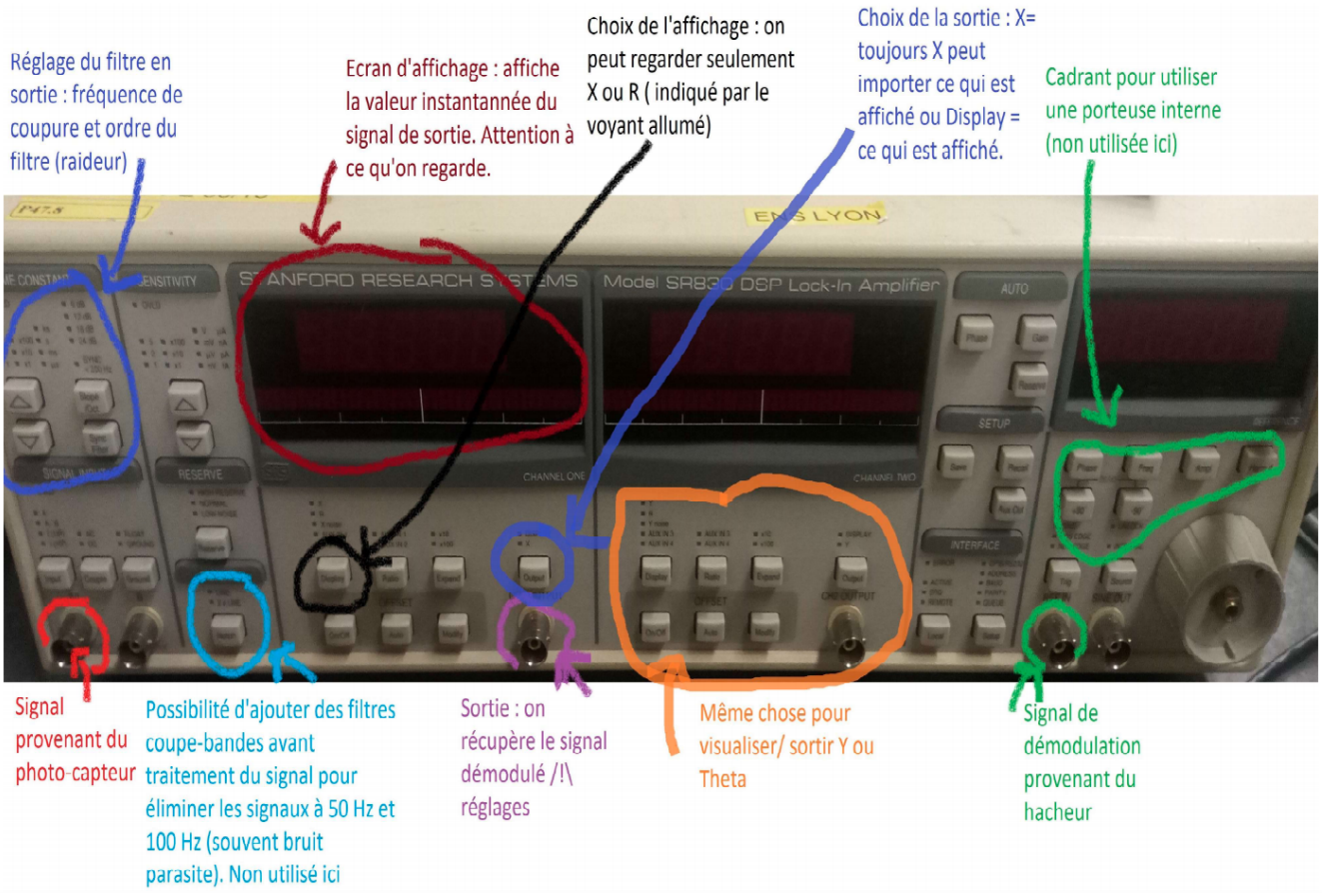


FIGURE 24.3 – Utilisation du boîtier de détection synchrone commercial : on peut visualiser la partie du signal en phase avec la porteuse (signal X) et celle en quadrature (signal Y). On peut également regarder $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ou θ.

Conclusion

Dans ce montage, on a pu mettre en oeuvre des méthodes pour améliorer le Rapport Signal sur Bruit. Ce rapport permet de quantifier la caractère informatif du signal.

Cela a surtout été l'occasion de montrer comment on peut jouer avec le domaine spectral et la transformée de Fourier ainsi que d'aborder les problèmes liés à l'acquisition de signaux, problématiques chères au traitement du signal.

Types de bruits

http://www.aclaf.fr/lexique-acoustique-et-definitions/lexique-des-bruits-types/

MP 25

Mesure de fréquences temporelles (domaine de l'optique exclu)

Commentaires du jury

- **2015-2017 :** Le principe de ce montage est de présenter les techniques de mesure de fréquences. Il ne s'agit pas de réaliser différentes expériences faisant intervenir des phénomènes périodiques et de parvenir à une détermination de fréquence moins précise que celle obtenue avec le fréquencemètre présent sur la paillasse. [Ajout 2017] Ainsi le jury souhaiterait que le stroboscope ne soit plus utilisé comme fréquencemètre pour l'étude des résonances de la corde de Melde.
- **2013 :** La résolution spectrale lors d'une transformée de Fourier discrète n'est pas toujours connue. Les candidats gagneraient à connaître les méthodes de détermination de fréquence par multiplication (translation) ou hétérodynage.
- **2007 :** Le candidat doit avoir un minimum de connaissances sur la fonction FFT des logiciels spécialisés ou des oscilloscopes.

Bibliographie

✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait**
✍ **FLTCLD**

⟶ Fréquencemètre
⟶ Effet Doppler et détection synchrone

1 Par mesure directe d'une période : pendule pesant . . . 1230
2 Par nombre d'oscillations : le fréquencemètre . . . 1230
2.1 Principe . . . 1231
2.2 Mise en place expérimentale . . . 1231
3 Par transformée de Fourier . . . 1232
3.1 Oscillateur mono-fréquence . . . 1232
3.2 Oscillateurs couplés . . . 1232
4 Par isolation d'une fréquence : la détection synchrone . . . 1234

Introduction

Les fréquences interviennent dans quasiment tous les domaines de la physique, il peut être très important de les mesurer avec précision. Le problème c'est que c'est une mesure qui nécessite forcément de passer par un moyen détourné (on n'a pas d'instrument capable de mesurer l'inverse d'un temps). On va voir comment, en fonction du type de fréquence à laquelle on s'intéresse (hors domaine de l'optique puisque les méthodes sont très particulières et applicables seulement à ce domaine) on va pouvoir accéder à une mesure précise.

Utiliser un accordeur (application sur la play store) pour mesurer la fréquence d'un diapason. On peut baisser la note avec une masselotte.

1 Par mesure directe d'une période : pendule pesant

La représentation la plus intuitive d'une fréquence temporelle est sa définition en tant qu'inverse d'une période :

$$f = \frac{1}{T}$$

On peut donc connaître la fréquence d'un phénomène en mesurant sa période, ce qui est facile car on a des appareils mesurant directement le temps, comme un chronomètre. Prenons un exemple simple : le pendule pesant. Dans la limite des petits angles, sa fréquence d'oscillation s'écrit

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{J+mL^2}}$$

On connaître f, on va alors mesurer la période $T = 2\pi\sqrt{\frac{J+mL^2}{mgL}}$.

Pour s'assurer de la validité de cette méthode de mesure, on peut par exemple l'utiliser pour remonter à la valeur g. *Il s'agit en effet d'un montage de métrologie donc on se situe plus dans le contexte d'une mesure que celui d'une vérification de loi.*

Mesure de la fréquence d'un pendule pesant par sa période

✍ ⏲ 5 min

On fixe une masse m à une distance L de l'axe de rotation. Pour plusieurs valeurs de L, on lâche le pendule avec un angle suffisamment faible (pas besoin de le mesurer...).

On mesure au chronomètre une dizaine d'oscillations et on rentre la période mesurée. Si la mesure est bonne, le tracé de $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{J+mL^2}{m} = f(L)$ nous donne directement la valeur de g en coefficient directeur (le moment d'inertie J est donné par le constructeur).

Faire quelques points en préparation et seulement un ou deux en live. Au niveau des incertitudes, on a celles sur la longueur (1 mm) et celles sur le temps au chrono (0.2 s/N où N est le nombre d'oscillations mesurées).

2 Par nombre d'oscillations : le fréquencemètre

2.1 Principe

En TP, on a tendance à surutiliser l'oscillo, car on peut accéder numériquement à toutes les caractéristiques de notre signal (y compris sa fréquence). Mais l'oscilloscope N'EST PAS un instrument de mesure (j'avoue c'est quand même pratique).

Il existe des appareils capables de donner directement la fréquence d'un signal (de la même manière qu'un ampèremètre affiche simplement l'intensité du courant). Nous allons essayer de fabriquer notre propre fréquencemètre. Cette fois-ci, la méthode est moins intuitive, mais plus directe : la fréquence d'un signal peut aussi être vue comme le nombre d'oscillations en 1s.

Le signal est traité ainsi :

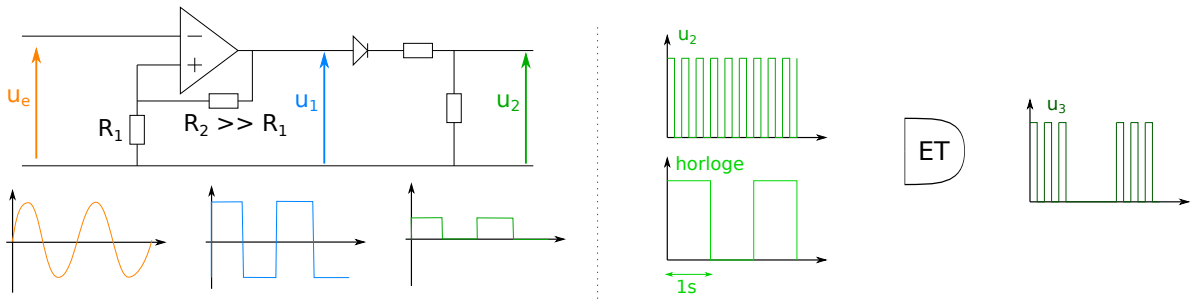


FIGURE 25.1 – Principe du fréquencemetre

- Le signal u_0, ici sinusoïdal de fréquence f_0, rentre dans un comparateur à hystérésis à seuil très faible qui sort u_1.

$$\begin{cases} u_0 > 0 & \Rightarrow u_1 = +15\text{V} \\ u_0 < 0 & \Rightarrow u_1 = -15\text{V} \end{cases}$$

- On coupe les tensions négatives avec une diode, puis on divise par 3 pour avoir un signal TTL [1] 0-5V.
- On multiplie ce signal à un créneau de fréquence 0.5Hz appelé *horloge*, par l'intermédiaire d'une porte ET.

En sortie on a alors un signal nul pendant 1s, et créneau de fréquence f_0 pendant 1s, et ainsi de suite. Il suffit alors, à l'aide d'un compteur de compter le nombre de montées de ce signal de sortie pendant 1s, ce nombre est directement la fréquence f_0 !

2.2 Mise en place expérimentale

Avec un sinus connu

✍ 🕒 1mn

Matériel : Boitier "Principe du fréquencemètre" P42.49, oscillo, gbf.

On peut aussi prendre un compteur de front montants et le refaire soi même en fonction de ce qui est dispo.

On fait quelques tests au GBF pour montrer que la fréquence affichée correspond à l'unité près à celle envoyer.

On peut aussi en profiter pour montrer à l'oscillo l'évolution du signal entre chaque bloc (u_e , u_1 , u_2 et u_3).

Attention !

Parfois le compteur donne toujours une valeur supérieure à la fréquence envoyée et la valeur affichée n'est jamais

1. https://fr.wikipedia.org/wiki/Transistor-Transistor_logic

la même... Ceci est du au fait qu'il existe un peu de bruit et que le compteur compte des montées qui ne sont pas censé exister. Il faut alors brancher une petite résistance en parallèle avant le compteur afin de réduire ces petits bruits. Régler la valeur de cette résistance (de l'ordre de 1000Ω généralement) jusqu'à ce que la fréquence soit toujours la même et qu'elle corresponde à la fréquence envoyée.

Mesure de la fréquence d'un diapason

✍ Duffait élec ⏲ 2mn

On fait pareil mais avec un diapason et un micro à la place du GBF. Notons que la fréquence affichée avec cette méthode a nécessairement une incertitude de 1Hz à cause des effets aux bords de l'horloge : par exemple si à la montée de l'horloge, le signal vient juste de passer de 0V à +5V, on a loupé une oscillation.

Tout ça c'est bien gentil, mais pour l'instant on s'est quand même limité à des signaux très simples : des sinusoïdes. Mais par exemple si on écoute deux diapasons de fréquences proches, on entend des battements... Comment isoler la fréquence des battements dans ce cas ? Avec cette méthode c'est impossible, nous avons besoin d'une méthode nous permettant d'isoler une fréquence avant de la mesurer.
Deux possibilités : détection synchrone ou transformée de Fourier !

3 Par transformée de Fourier

Principe

L'analyse de Fourier permet de décomposer les signaux en une somme (éventuellement continue) de signaux harmoniques. On peut l'utiliser afin de mesurer les fréquences des modes propres.

3.1 Oscillateur mono-fréquence

Mesure de fréquence par FFT

✍ ⏲

On fait la transformée de fourier d'un (signal de diapason/pendule/autre), on trouve une fréquence précise et on évalue l'incertitude à celle de la dispersion sur la FFT.

The frequency resolution is defined as Fs/N in FFT. Where Fs is sample frequency, N is number of data points used in the FFT. For example, if the sample frequency is 1000 Hz and the number of data points used by you in FFT is 1000. Then the frequency resolution is equal to 1000 Hz/1000 = 1 Hz.

3.2 Oscillateurs couplés

Étudions le cas de deux oscillateurs couplés. On considère le dispositif composé de deux pendules couplés par un fil de torsion.

Tout ce qui concerne le pendule pesant a été fait en préparation :

- Étalonnage du capteur pour vérifier la linéarité.
- Équilibrage des barres sans la masse. Sinon il faut considérer le poids à leur centre de gravité.

Mise en équation

Par un théorème du moment cinétique :

$$(J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_i + MgL\sin(\theta_i) = C(\theta_j - \theta_i) \tag{25.1}$$

Soit dans les petits angles :

$$\ddot{\theta}_i + \omega_0^2\theta_i = (\omega_C^2 - \omega_0^2)(\theta_j - \theta_i) \tag{25.2}$$

En cherchant les solutions à ce système (diagonalisation), on obtient les modes propres : $\omega_s = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ et $\omega_{as} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_C^2} = \sqrt{\dfrac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2}}$.

Cela signifie que deux fréquences propres existent pour le système, cependant on voit bien, quand on laisse le système osciller, qu'on ne peut pas mesurer de périodicité propre et claire. On va passer par la TF !

Mesure de la constante de couplage

✍ Notice des pendules

On accroche la même masse au même L sur les deux pendules équilibrés au préalable.

Lancer les pendules tels que $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 \neq 0$ pour exciter les modes symétriques et anti-symétriques.

On fait l'acquisition sur Latis-Pro pendant 2 min. On fait la FFT et on a ω_s et ω_{as}.

On fait ça pour plusieurs L et on trace $\dfrac{1}{\omega_{as}^2 - \omega_s^2}$ en fonction de L^2. On retrouve C et J_0. (On fait bien sûr un seul point en live)

On a $y = \dfrac{M}{2C}x + \dfrac{J_0}{2C}$

Incertitudes :

- Voir au niveau de la FFT pour l'incertitude sur la détermination des ω. (The frequency resolution is defined as Fs/N in FFT. Where Fs is sample frequency, N is number of data points used in the FFT. For example, if the sample frequency is 1000 Hz and the number of data points used by you in FFT is 1000. Then the frequency resolution is equal to 1000 Hz/1000 = 1 Hz.)
- Prendre en compte l'incertitude sur M, à la balance
- Prendre aussi celles des coefficients de la régression.

Vérification des hypothèses et discussion du modèle

- Petits angles
- équilibrage parfait

Autre méthode possible

Exciter les deux modes séparément, en lançant les deux pendules en phase ou en antiphase. On obtient les deux pulsations propres ainsi.

On a grâce à la FFT une méthode systèmatique pour déterminer des fréquences propres de système. Cependant on voit qu'on a une résolution finie, ce qui peut être gênant dans les cas où les fréquences à distinguer sont très très proches.

4 Par isolation d'une fréquence : la détection synchrone

Dans les différents exemples que nous avons présentés, il fallait retrouver la fréquence d'un signal monochromatique, c'est à dire ne possédant qu'une fréquence. Dans des cas plus compliqués et réalistes les signaux sont composés de plusieurs fréquences et donc plus difficiles à traiter.

Prenons l'exemple de l'effet Doppler qui décrit le changement de fréquence perçue provoquée par le changement de la distance émetteur-récepteur. Cet effet va être illustré sur un banc où on a un émetteur piézoélectrique mobile et un récepteur fixe.

La théorie de l'effet Doppler permet d'exprimer la fréquence f_r du signal reçu par le récepteur en fonction de celle du signal monochromatique émis par l'émetteur f_e se déplaçant à la vitesse constante v_e par rapport au récepteur :

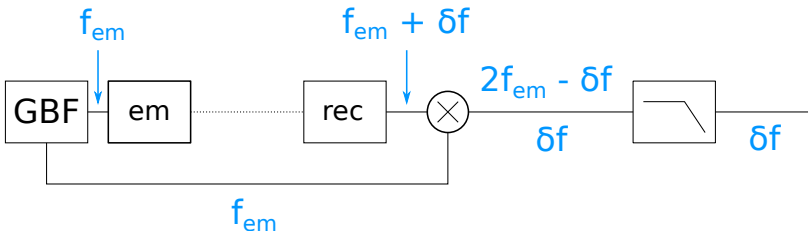
$$f_r = \frac{1}{1 - \frac{v_e}{c}} f_e \tag{25.3}$$

avec c la vitesse du son dans l'air.

Dans le cas réaliste où $v_e \ll c$, on obtient $f_r \simeq f_e + \delta f$ avec $\delta f = \frac{v_e}{c} f_e \ll f_e$. Le signal reçu par le récepteur est donc constitué de deux fréquences avec l'une très faible devant l'autre. Comme les méthodes détaillées précédemment ne sont pas applicables ici, nous allons présenter une nouvelle méthode pour remonter à une fréquence : la **détection synchrone**.

On veut obtenir δf pour en déduire v_e. On doit donc comparer la fréquence émise f_e et celle reçue $f_e + \delta_f$, qui sont très proches. Pour séparer δf, on procède en 2 étapes :

1. On multiplie le signal reçu par un signal de fréquence f_e. On obtient alors la somme 2 signaux de fréquence $f_r + f_e$ et $f_r - f_e$, *i.e.* de fréquence $2f_e + \delta f$ et δf. C'est l'*hétérodynage*.
2. On filtre ensuite cette somme de signaux avec un passe-bas pour ne récupérer que la composante de fréquence δf



Application de la détection synchrone à l'effet Doppler

✍ FLTCLD

On utilise le banc à effet Doppler dans la collection avec l'émetteur et le récepteur ultrasonore (l'émetteur émet à $f_e = 40$ kHz et alimenté avec du 10 V). Les signaux de l'émetteur et du récepteur sont envoyés sur un multiplieur suivi d'un filtre passe-bas et on observe le signal de sortie à l'oscilloscope.

Lorsque l'émetteur n'est pas en mouvement, on ne détecte aucun signal. En revanche, dès que ce dernier a une vitesse non nulle (constante, de préférence) on enregistre un signal de fréquence δf. On détermine l'incertitude sur δf avec la méthode de notre choix. Pourquoi ne pas utiliser le compteur ? Ou une FFT ?

Deux possibilités viennent ensuite :

- **Mesurer la vitesse du son**

On mesure la vitesse de l'émetteur avec des détecteurs séparés d'une distance fixe, qui mesurent le temps de parcours entre ces deux émetteurs (en vrai, c'est les mêmes détecteurs que pour le TP sur la chute d'une bille). Ainsi on remonte à une valeur plutôt précise de la vitesse v_e de l'émetteur.

On trace ensuite $\delta f = f(v_e)$ et on fait une régression linéaire. On doit avoir une pente $a = \frac{f_e}{c}$. On en déduit c avec une incertitude

$$u(c) = c\sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(f_e)}{f_e}\right)^2}$$

Mesurer précisément la vitesse de l'objet

On connaît la vitesse du son (d'une façon peu importe laquelle), et on a

$$v = c\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{\delta f}{f}}\right) = \frac{c\delta f}{f - \delta f} \tag{25.4}$$

Incertitude :

$$u(v) = v\sqrt{\left(\frac{u(c)}{c}\right)^2 + \left(\frac{u(\delta f)}{\delta f}\right)^2 + \left(\frac{u(f) + u(\delta f)}{f - \delta f}\right)^2} \tag{25.5}$$

Conclusion

Voilà on a fait un peu le tour des méthodes de mesure de fréquences... Pour aller plus loin, on pourrait citer l'analyse spectrale d'un signal ou la détection synchrone, selon ce que l'on choisit de faire. En effet, lorsque l'on veut étudier un signal plus complexe, composé de plusieurs fréquences, aucune de nos méthodes n'est vraiment adapté.

Finalement, on peut retenir que le plus important, c'est que la méthode s'adapte au contexte !

MP 26

Mesures de longueurs

Commentaires du jury

- 2017 : Des mesures de longueurs dans une large gamme sont appréciées et là encore les candidats ne doivent pas se contenter du réglet comme outil de mesure. L'utilisation de mesures utilisant des interférences optiques conduit à des mesures intéressantes dont on pourra discuter la précision par rapport à des mesures plus directes.
- 2015, 2016 : Des mesures de longueurs dans une large gamme sont appréciées et là encore les candidats ne doivent pas se contenter du réglet comme outil de mesure. Par ailleurs, la mesure d'une longueur de cohérence n'a pas en soi sa place dans ce montage.
- 2014 : Ce montage n'est ni un montage de spectroscopie, ni un montage de focométrie ; en particulier, la mesure de longueurs d'ondes en tant que telle ne semble pas indiquée. On peut en revanche discuter des méthodes de mesure de longueurs adaptées à grande et à petite échelle. Rappelons que des objets micrométriques peuvent être mesurés avec un instrument optique adapté.
- 2013 : Il est dommage de voir tant de montages à prétention métrologique où les incertitudes sont très mal gérées. Lors d'utilisation de « boites noires », il est indispensable de connaître leur fonctionnement.
- 2012 : Le jury a pu assister à des montages variés et bien structurés, balayant les diverses échelles de longueurs, de l'infiniment petit à l'infiniment grand. Cependant, les incertitudes, malgré leur importance dans ce montage, sont souvent très mal gérées et mal hiérarchisées.
- 2011 : Le jury a pu assister cette année à des montages variés et bien structurés. Cependant, les incertitudes, malgré leur importance dans ce montage, sont souvent très mal gérées et mal hiérarchisées.

Bibliographie

✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Télémetrie et Lame mince
✍ *Expériences de physique au CAPES*, **Duffait** ⟶ Des compléments
✍ *Démo 2015*, **Lecomte** ⟶ Introduction
✍ *Notice de la manip des électrons*, **Leybold** ⟶
✍ *Physique des électrons dans les solides*, **Alloul** ⟶ Partie Physique du solide

1 Mesure à l'échelle du mètre . . . 1238
2 À l'échelle du micromètre . . . 1239
2.1 L'arnaque de la mesure interférométrique qui n'en est pas une . . . 1239
2.2 La vraie mesure interférométrique . . . 1240
2.3 Mesure des variations d'épaisseur de la lame (tampon) . . . 1241
3 À l'échelle du picomètre . . . 1242
3.1 Principe . . . 1242
3.2 Calculs associés . . . 1243
3.3 Mise en place expérimentale . . . 1243

Introduction

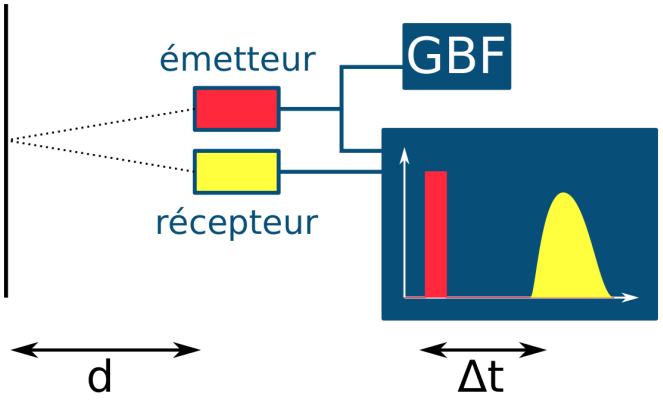
Attention à ce que ce montage ne traîne pas trop en longueur... HAHAHA on s'amuse comme on peut pour occuper le confinement.

La problématique de la mesure de longueur est sans doute la plus ancienne et une des plus intuitive qui soit. Pour se repérer dans l'espace, à différentes échelles, l'homme a conçu plans et cartes. Une mesure est la détermination de la valeur numérique d'une grandeur physique, en comparaison avec un étalon, qui définit l'unité de cette mesure. Cet étalon a d'abord été choisi par rapport au corps humain (coude, pouce, pied), mais face à l'anarchie d'étalons différents, a été décidé d'harmoniser ces étalons. D'abord la longueur d'une règle en alliage de platine et d'iridium, le mètre est maintenant défini à partir de la vitesse de la lumière : c'est la distance parcouru par la lumière en $\frac{1}{299792458}$s [1].
Nous verrons au cours de ce montages différentes façons de mesurer des longueurs, autrement qu'avec notre règle ou qu'un palmer.

1 Mesure à l'échelle du mètre

✍ FLTCLD p515

Le principe est simple : on envoie un signal, ce signal est réfléchit, on le reçoit. On mesure le temps que le signal a mis pour faire l'aller-retour, on connaît sa vitesse, on en déduit la distance nous séparant de l'objet réfléchissant.



Un calcul extrêmement poussé nous permet, après moult heures éprouvantes et étapes de calcul passées sous silence, d'obtenir l'expression de cette distance :

$$d = \frac{c\Delta t}{2}$$

Télémétrie acoustique

✍ FLTCLD ⏲ 5 min

Mettre un émetteur d'ultrasons ($f = 40$ kHz) et un récepteur côte à côte et dont la tension est observée à l'oscilloscope. Avec un GBF, on envoie des bursts sinusoïdaux vers une paroi et on mesure Δt.

En préparation : obtenir c en mesurant des Δt pour plusieurs d connus

En live, on prend un d random et on le détermine par télémétrie. On pourra comparer avec ce qu'on a obtenu avec une règle ou un télémètre commercial. Il faut donc bien connaître les incertitudes.

1. La seconde étant elle même définie par 9 192 631 770 transitions entre deux niveaux hyperfins de l'atome de Césium 133. https://fr.wikipedia.org/wiki/Seconde_%28temps%29

Remarques

- La façon dont on mesure Δt peut faire débat. En effet, le burst réfléchi est étalé à cause des piézoélectriques puisque l'émetteur peut être modélisé comme un passe-bande (et non pas à cause de la dispersion, d'Alembert marche très bien pour les ultrasons dans l'air). On peut alors mesurer Δt de plusieurs manières :
  - en repérant le début des pulses, ce qui peut être pas très précis pour le pulse réfléchit
  - en repérant un point pour lequel on a une fraction de l'intensité maximale (par exemple la moitié). Cependant, on risque de faire une erreur si on a par exemple un régime transitoire qui retarde la montée en intensité. Bien sûr, une fois la fraction choisie, il faut la garder pour toutes les mesures.

  Le débat reste ouvert, mais perso je choisis de repérer les débuts.
- On n'a pas forcément la référence absolue de temps en prenant le signal du GBF en voie 1 car l'émetteur modifie également le signal. Cependant, faire une modélisation affine au lieu de linéaire résout le problème vite fait bien fait.
- Depuis le fond de la salle, Timéo remarque que l'aller-retour se fait selon un chemin incliné et donc plus grand que $2d$. Cependant, un rapide théorème de Pythagore permet de lui faire fermer son clapet en lui montrant que c'est négligeable au même titre que sa dignité en tant qu'être humain.
- Une autre méthode serait possible. On peut s'affranchir des précédents problèmes en envoyant une sinusoïde et en comptant le nombre de longueurs d'ondes balayées lorsque l'on parcourt Δd. On n'a certes, plus les problème de paquet d'onde dégueu, mais concrètement c'est bof puisque ça nécessite d'avoir un étalon (une longueur de référence connue précisément à partir de laquelle on commence à balayer les distance). En plus en pratique faudrait être en mesure de déplacer l'objet dont on souhaite connaître la distance... C'est pas ouf notamment pour les sonars !

Notons également que cette méthode est couramment utilisée avec des lasers. On peut alors aller jusqu'à mesurer la distance Terre-Lune.

2 À l'échelle du micromètre

Passons maintenant à une échelle plus petite. Imaginons que l'on veuille mesurer l'épaisseur d'une lame de verre. Le bourrin moyen utiliserait un palmer mais franchement on est des gens civilisés donc nous on va faire ça au Michelson [2].

2.1 L'arnaque de la mesure interférométrique qui n'en est pas une

Réglage du Michelson

✍ ⏲

Voir le pdf du lycée Bart.

Quand on introduit une lame d'indice n dans un bras du Michelson, on introduit une différence de marche

$$\delta = 2(n-1)e$$

2. https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/optique/michelson2/michelson2.html

"Mesure interférométrique" d'une épaisseur de lame

✍ Duffait p88, Sextant p150 ⏲ 5 min

Se placer en coin d'air, au contact optique avec une source de lumière blanche étendue. **Noter la position du contact optique sur le vernier.**

Avec une lentille de projection, conjuguer le miroir avec l'écran pour qu'on puisse y voir les franges.

Placer la lame sur le trajet d'un des deux rayons et revenir au contact optique en notant la distance d parcourue sur le vernier.

À ce moment là, Timéo est tout content parce qu'il a mesuré l'épaisseur de la lame de verre en utilisant des interférences optiques. Sauf que, mon cher Timéo, t'as utilisé quoi pour ta mesure ? Le vernier non ? Dans ce cas, autant balancer la lame dans le vernier et l'utiliser comme palmer, non ? T'essaierais pas de m'arnaquer Timéo ? ? ?

En effet, on ne dépasse pas la précision du vernier, qui est de 5 μm.

2.2 La vraie mesure interférométrique

Quand le Michelson est réglé en lumière blanche au contact optique, on rajoute la lame de verre dans un des bras. Cela introduit une différence de marche $\delta = 2(n(\lambda)-1)e \simeq 2(n-1)ne$ où e est l'épaisseur de la lame de verre que l'on cherche à mesurer.

L'intensité est donc de la forme

$$I \propto \left(2 + \cos\left(\frac{2\pi 2(n-1)e}{\lambda}\right)\right)$$

La figure d'interférence est maintenant un blanc d'ordre supérieur et donc caractérisée par un spectre cannelé. Cela est cohérent avec le fait que la condition d'interférences constructives $\delta = p\lambda$ sélectionne certaines longueurs d'ondes, et même chose pour la condition d'interférences destructives $\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Ainsi, en mesurant le nombre de cannelures, de minima d'intensité, entre un λ_1 et un λ_2 on pourra remonter à e.

Si λ_1 et λ_2 sont des minima d'intensité, on a

$$\delta = \left(p_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1 \qquad \text{et} \qquad \delta = \left(p_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

On ne peut pas connaître p_1 et p_2 directement, mais on sait que $p_2 - p_1$ est le nombre de cannelures entre λ_1 et λ_2. On a alors :

$$p_2 - p_1 = 2e(n-1)\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

On obtient finalement :

$$e = \frac{(p_2 - p_1)}{2(n-1)}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

On obtient évidemment la même formule en prenant des maxima d'intensité.

Mesure de l'épaisseur d'une lame par spectroscopie

✍ Duffait p88 ⏲

Déplacer le chariot de l'interféromètre à mi-chemin entre le contact optique sans et avec la lame.

Enregistrer le spectre cannelé du blanc d'ordre supérieur avec la lame et sans la lame avec un spectromètre

numérique.

À partir des minima des longueurs d'onde (ou des maxima) successifs des 2 spectres cannelés au voisinage d'une longueur d'onde λ_0 et de l'indice du verre $n(\lambda_0)$, en déduire e.

Pour éprouver cette méthode au maximum, il faut que l'erreur relative sur la variation d'indice soit de l'ordre de celle sur la longueur d'onde. Le repérage des maxima donne $u(\lambda) = 0.25$ nm ; la grandeur pertinente pour le calcul d'erreur est $\lambda_1 - \lambda_2$. On cherche donc à avoir $u(\lambda)/(\lambda_1 - \lambda_2) \simeq u(n)/n$. C'est le cas en travaillant entre 600 et 660 nm, où la variation d'indice est de 0.003.

Incertitudes

$$u(e) = e\sqrt{\left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)^2 \left[\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\lambda_2^4}\right] u(\lambda)^2 + \left(\frac{u(n)}{n-1}\right)^2}$$

2.3 Mesure des variations d'épaisseur de la lame (tampon)

Mesure des défauts de la lame de verre

✍ Sextant p.150 ⏲ 5mn

- Utiliser un faisceau laser éclaté à l'objectif de microscope, et parallélisé avec une lentille.
- Obtenir une teinte plate au contact optique
- Intercaler la lame de verre dans l'un des bras
- Projeter l'image de la lame sur l'écran
- Charioter pour montrer les variations d'épaisseur

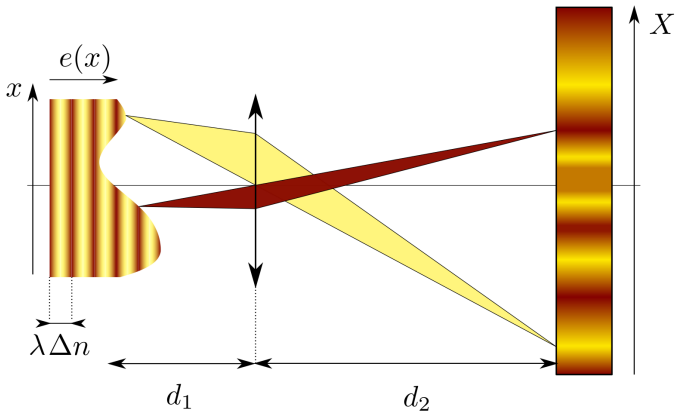


FIGURE 26.1 – Les interférences sont délocalisées donc en particulier, on les retrouve sur la lamelle.

Remarques en tout genres

- Monochromatique car sinon on voit rien
- Utiliser une source très cohérente pour délocaliser les franges
- Lame bien $\perp$
- On utilise ça pour tester la planéité des miroirs dans LIGO et VIRGO, et si c'est pas plan, on rajoute des atomes.

En considérant que $e(x)$ varie peu, on a une relation de proportionnalité entre les distances sur l'écran et celles sur la lamelle. Ainsi, les tâches sur l'écran nous donne directement accès à la topologie de la lamelle !

$$\frac{x}{d_1} = \frac{X}{d_2}$$

Remarquons cependant, qu'on ne peut pas savoir si une tâche claire correspond à une bosse ou à un creux... Pour la savoir, il faut charioter, ce qui revient sur le schéma à translater les interférences dans la lamelle. Suivant l'évolution de la couleur, on en déduit si c'était une bosse ou pas. Ainsi, on peut mesurer la taille typique des creux et des bosses tant qu'elle sont pas plus petites que $\lambda/4$

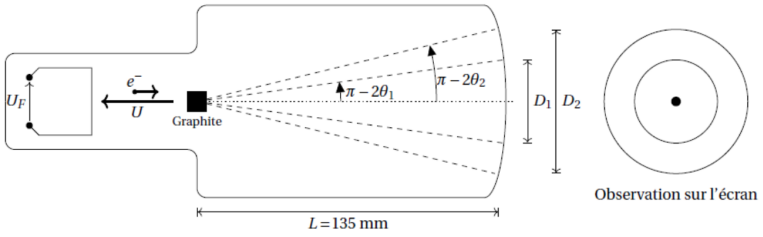
3 À l'échelle du picomètre

But : mesurer la distance entre les plans de graphène, qui est de 340pm.

Bon là, on peut faire joujou avec notre palmer et autres tant qu'on veut, mais on est franchement baisés. Même avec un microscope optique on ne peut plus rien faire !

3.1 Principe

Nous allons illustrer la mesure d'une longueur picométrique par la détermination de la séparant deux plans réticulaires du graphène, d étant de l'ordre de la centaine de pm. Nous pour cela la diffraction des électrons par une poudre (méthode dite de Debye-Scherrer). La est possible grâce au caractère ondulatoire des électrons, illustrée par sa longueur d'onde de $\lambda = h/p$ où p est l'impulsion de l'électron.



On présente ici une représentation schématique du dispositif P93.1/P93.6. La formule de de Broglie nous indique que pour avoir des électrons de longueur d'onde de l'ordre de la centaine de pm, nécessaire pour être diffracté par les plans réticulaires, il faut que les électrons aient une impulsion de l'ordre de $7 \times 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$.

Pour se faire, on produit des électrons avec un filament chauffant et on les accélère entre une anode et une cathode qui produisent une tension. Cette méthode d'accélération a pour avantage de produire un faisceau d'électrons monocinétiques et par conséquent monochromatique.

Et les rayons X ?

Ici on diffracte entre deux couches, mais en théorie les rayons X ça marche aussi, leur longueur d'onde étant de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-12}m. Cependant ce sont des rayons ionisants, et dangereux pour l'être humain. Comme on ne peut pas garantir que seul Timéo sera irradié, on préfère les rayons d'électrons ! (Éthique Et Responsable)

3.2 Calculs associés

On note U la tension accélératrice entre l'anode et la cathode et e, m la charge et la masse de l'électron. Leur énergie cinétique E_c peut s'écrire de deux façons que l'on égale à loisir : $E_c = eU = \frac{p^2}{2m}$. On obtient ainsi :

$$\lambda(U) = \frac{h}{2meU} \tag{26.1}$$

Pour faire de la diffraction, on veut $\lambda \lesssim$100 pm, donc $U \gtrsim U$(100 pm)=150V. Pour être large, on prend des tensions de l'ordre du kV, avec notamment λ(1 kV)=89 pm qui satisfait tout à fait la condition de diffraction.

Une fois le faisceau d'électrons créé, il est focalisé (par une électrode spécifique) sur une poudre de graphène. Celui-ci diffracte donc les électrons et dans des directions bien précises par rapport au faisceau incident, directions données par la loi de **Bragg**, avec θ l'angle de diffraction et d la distance entre deux plans :

$$\lambda = 2d\sin\theta \tag{26.2}$$

L'objet diffractant est une poudre donc toutes les directions ϕ de rayonnement diffracté sont possibles (ϕ est l'autre angle des coordonnées sphériques), on observe donc des anneaux dont la taille D est fixée par l'angle θ.

Dans l'approximation des petits angles (**Valide ici ?**) on a $\sin\theta = \frac{D}{L}$ et donc $\lambda = d\frac{D}{2L}$.

$$\frac{1}{D} = \frac{d\sqrt{2me}}{2hL}\sqrt{U} \tag{26.3}$$

Ainsi pour remonter précisément à d, on fait une régression linéaire de $1/D$ en fonction de $\sqrt{U}$.

3.3 Mise en place expérimentale

Mesure du paramètre de maille par la méthode de Debye-Scherrer

✍ ⏲

- On utilise la manip toute prête dans la collection (P96.1 et P93.6), BIEN LIRE LA DOCUMENTATION POUR LES BRANCHEMENTS QUI SONT TOUT SAUF INTUITIFS et on fait gaffe car 1 kV ça envoie du lourd.
- En l'allumant on observe deux anneaux donc deux plans réticulaires diffractent les électrons
- On peut approcher un aimant et vérifier qu'il dévie bien les anneaux : on a bien un rayonnement chargé
- Pour plusieurs U entre 1 et 5 kV (lues sur l'alimentation car nos voltmètres ne supportent pas le kV), prendre en photo les anneaux avec un papier millimétré derrière pour faire la mesure des diamètres D_i sur ImageJ. faire une mesure des deux D_i pour une tension devant le jury.
- Les valeurs tabulées pour le graphène sont $d_1 = 213$ pm et $d_2 = 123$ pm

Incertitudes : On a une incertitude de mesure sur D qui est due à la méthode complètement schnaps utilisée, et une incertitude au dernier digit sur la tension.

$$u(d) = d\sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2}$$

Remarques diverses et variées

- Spectromètre : mesure du spectre, spectrophotomètre : dans UV-visible
- Pour la manip du spectro, la formule des minima est donnée au contact optique exact... Faire gaffe à prendre ça en compte dans les incertitudes
- Utiliser les petits spectros noirs qui ont la meilleure résolution
- Pour la mesure précise au Michelson commencer au contact optique
- Utiliser une lame de verre mince mais il faut l'indice avec une ÉNORME précision (petites lames de microscope dont on connaît la matière)

Conclusion

On a vu une large gamme de mesures, mais il pourrait être intéressant de se pencher sur les mesures de très grandes distances, comme par exemples les mesures astronomiques.

En fonction du temps qu'il reste, parler des mesures de parallaxes, et des mesures par télémétrie optique.

MP 27

Systèmes bouclés

Commentaires du jury

- **2014-2017 :** Ce montage concerne la physique des asservissements et/ou celle des oscillateurs auto-entretenus. Une maîtrise minimale des montages élémentaires est requise. Un oscillateur à quartz serait le bienvenu, compte tenu de son fort facteur de qualité.
- **2012 :** Les notions de stabilité, puis de temps de réponse et de précision sont essentielles dans ce montage. Le monde moderne regorge de systèmes asservis évitant l'utilisation de « boîtes noires » présentant des défauts introduits exprès pour qu'on les corrige par asservissement. Le produit « gain × bande passante = constante » ne doit pas être attendu aveuglément, les conditions de validité de cette relation doivent être connues et respectées.

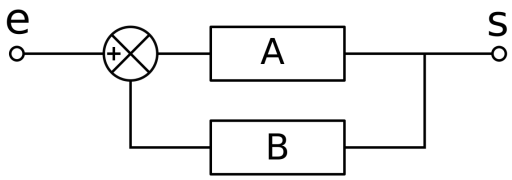
Bibliographie

✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait** ⟶ Asservissement du moteur
✍ *Electronique expérimentale*, **Krob** ⟶ Pont de Wien

1 Rétro-action positive : l'oscillateur à pont de Wien . . . 1246
1.1 Principe de l'oscillateur . . . 1246
1.2 Étude en boucle ouverte (facultatif) . . . 1247
1.3 Condition d'oscillation du système bouclé . . . 1247
1.4 Croissance des oscillations . . . 1249
1.5 Multivibrateur astable (facultatif) . . . 1249
2 Rétro-action négative : asservissement d'un MCC . . . 1250
2.1 Présentation du MCC asservi . . . 1251
2.2 Diagramme de Bode . . . 1253
2.3 Précision (qualitatif) . . . 1254
2.4 Rapidité (qualitatif) . . . 1254
2.5 Dépassement (tampon) . . . 1254
3 Oscillateur à quartz . . . 1255

Introduction

Les systèmes bouclés sont tout autant présent dans la nature (fonctions de régulation du sang, de l'oxygène, du corps humain, maintien de l'équilibre, etc.) que dans nos outils quotidiens (régulateur de vitesse, chauffage, chasse d'eau, ...). Commençons par définir ce qu'est un système bouclé : on appelle système bouclé un système qui va comporter une boucle de rétroaction, c'est-à-dire dont la valeur en sortie du système va être réinjecté en entrée. Le schéma-bloc ci-dessous éclaire ce principe.



Les lettres A et B désignent les fonctions de transfert de chaque boucle, qui vont s'appliquer à la valeur d'entrée.

On peut distinguer deux types principaux de systèmes bouclés : les oscillateurs, à rétroaction positive, qui vont répéter périodiquement un même signal, et les asservissements, qui se serviront de la boucle retour pour faire tendre la valeur de sortie vers une valeur souhaitée.

Vase de Tantale

On peut mettre le Vase de Tantale en intro, en spécifiant que le côté bouclé apparaît si on considère qu'on remet l'eau qui sort dans le récipient.

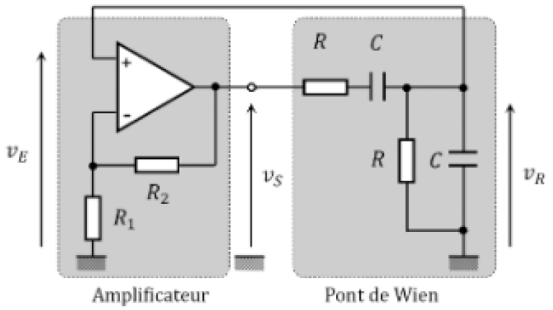
1 Rétro-action positive : l'oscillateur à pont de Wien

Nous allons commencer par un oscillateur à rétroaction positive : l'oscillateur à pont de Wien.

Autres possibilités

Le cadre général de cette partie est "oscillateurs auto-entretenus", on peut citer d'autres exemples comme l'oscillateur de Van der Pol ✍ Duffait p.174 , l'oscillateur à quartz ✍ Krob p.147, Brenders p.259, l'oscillateur de Colpitts ou encore l'oscillateur à résistance négative ✍ Duffait p.169, Brebders p.253.

1.1 Principe de l'oscillateur



La fonction de transfert de l'amplificateur et du filtre sont respectivement :

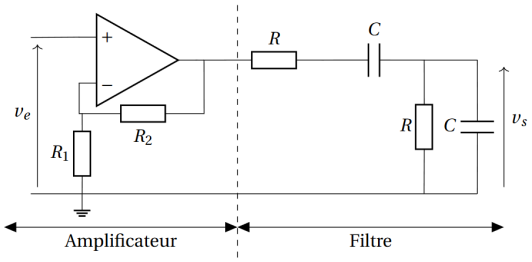
$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{27.1}$$

Pour le choix des paramètres, on a $Q = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, et globalement, pour que ça marche bien on prend $R_1 = R = 1$ kΩ, et $C = 1$ μF. Il est malin de mettre une boite à décades sur R_2.

On voit que la boucle de retour c'est le filtre, et la rétroaction est positive.

1.2 Étude en boucle ouverte (facultatif)

Objectif : tracer le diagramme de Bode du circuit en boucle ouverte pour caractériser ω_0 et Q. Easy ?



$$H = AB = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{27.2}$$

Diagramme de Bode

✍ 🕒 3mn

On trace en préparation le diagramme, devant le jury on fait juste un vieux sweep des familles.

Bode pour $R_2 = 2.1$ et 1.9 kω.

Remonter à ω_0 et Q par régression. La bande passante à -3dB donne Q, la phase nulle donne ω_0.

1.3 Condition d'oscillation du système bouclé

Pour établir les conditions d'oscillation du système bouclé, on annule le dénominateur de sa fonction de transfert : AB = -1, de manière à faire diverger le gain et ainsi permettre l'apparition des oscillations - le système est rendu instable. La résolution de cette équation mène à deux conditions (dites de Barkhausen) :

$$s = A(e + Bs) \Rightarrow s = \frac{A}{1 - AB}e$$

$$\begin{cases} R_2 = 2R_1 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La première impose que les oscillations ne sont possibles que si la chaîne directe amplifie suffisamment le signal pour avoir un gain de 1. En pratique, cette condition est nécessaire pour que les oscillations naissent mais n'est pas suffisante pour qu'elles se maintiennent ; on retiendra que pour qu'elles s'établissent durablement il faut : $R_2 > 2R_1$.

La deuxième condition stipule que les oscillations qui s'établissent dans le système bouclé sont les oscillations du régime libre de la chaîne de retour, elles ont donc une fréquence égale à la fréquence de résonance du filtre passe-bande. On peut vérifier expérimentalement ces deux conditions.

Vérification des conditions d'oscillation

✍ ⏲

Enlever le GBF du circuit et boucler la sortie sur l'entrée.

- Condition n°1 : Pour $R_2 < 2$ kΩ, constater que les oscillations peinent à s'établir, puis augmenter R_2 jusqu'à ce qu'elles se maintiennent. Déterminer un encadrement à l'ohm près de la valeur de la résistance critique qui correspond à la condition d'oscillation. Mesurer les valeurs de R_c^+ et R_c^- à l'ohmmètre en les sortant du circuit. En déduire $R_c = (R_c^+ + R_c^-)/2$. L'incertitude sur R_c s'obtient en sommant quadratiquement le demi- écart $(R_c^+ - R_c^-)/2$ et l'incertitude de l'ohmmètre. Comparer à la valeur attendue $R_c = 2R_1$ (la valeur attendue a elle aussi une incertitude qui provient de la mesure de R_1 à l'ohmmètre).
- Condition n°2 : Pour une valeur de R_2 supérieure à R_c , visualiser les oscillations à l'oscilloscope. On peut alors soit directement mesurer la fréquence au fréquence-mètre, soit la déduire d'une mesure de période à l'aide des curseurs sur l'oscilloscope. Dans le premier cas l'incertitude est celle du fréquence-mètre, dans l'autre elle est dominée par l'incertitude sur le positionnement des curseurs.

Comparer ces deux valeurs aux valeurs attendues, ça doit rentrer dans les barres d'incertitudes.

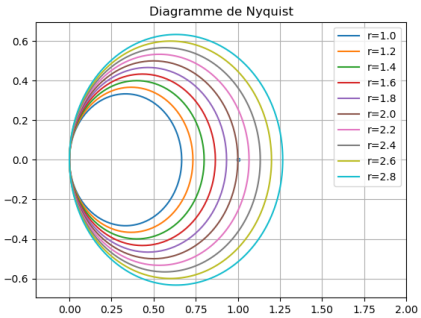
Une autre manière de formuler la condition d'oscillation consiste à utiliser le critère d'instabilité de Nyquist, qui stipule qu'un système bouclé est instable si le diagramme de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte entoure le point (-1 ; 0). **(Aller voir les hypothèses !)**

Numérique : tracer les diagrammes de Nyquist

✍ ⏲ 2mn

Avec les points déjà acquis pour le diagramme de Bode, on trace les diagrammes de Nyquist correspondant aux trois valeurs de résistance précédentes.

On trace Im(H) fonction de Re(H), et bam. CF ci-dessous, r est le rapport des résistances.



1.4 Croissance des oscillations

✍ Benders p.244, Krob p.133

But : Retrouver la croissance exponentielle des oscillations naissantes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3-A}{RC}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 \exp\left(-(2-\frac{R_2}{R_1})\omega_0 t\right)\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{27.3}$$

On retrouve bien des oscillation naissante pour $R_2 > 2R_1$. En vrai le signal ne continue pas à diverger car le gain de l'ampli op est limité... La saturation des oscillations correspond à la saturation de l'ampli.

Croissance des oscillation

✍ ⏲ 5mn

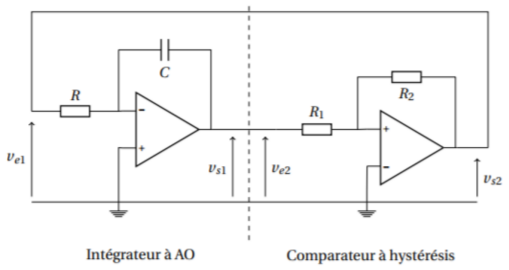
Après avoir introduit le détecteur de crête en sortie du montage, faire une acquisition de la croissance des oscillations sous Latis-Pro. Pour cela, court-circuiter R_2 avec un fil, régler le seuil de déclenchement à 10 mV avec un pré-trig à 0% et ôter le court circuit après avoir lancé l'acquisition.

Cela revient à introduire instantanément R_2 dans le circuit et donne un signal plus propre. Faire une modélisation affine de $\ln s(t)$. On obtient $-\alpha\omega_0 t$, avec $\alpha = 2 - \frac{R_2}{R_1}$.

Répéter ceci pour plusieurs valeurs de $R_2 > 2R_1$ et tracer α en fonction de R_2 . Comparer la pente de la droite obtenue à $1/2R_1$.

Nous venons à l'aide du pont de Wien d'illustrer les différents types d'oscillations que l'on peut obtenir à l'aide d'un système bouclé. Voyons maintenant un exemple d'oscillateur à relaxation.

1.5 Multivibrateur astable (facultatif)



On peut déterminer que la période de l'oscillateur vaut :

$$T = 4\frac{R_1 RC}{R_2} \tag{27.4}$$

La tension v_{s2} est donc un signal créneau $\pm V_{\text{sat}}$ de période T. À saturation positive $v_{s2} = +V_{\text{sat}}$, l'intégrateur intègre cette tension au cours du temps et donne une sortie décroissant linéairement à la vitesse $-\frac{V_{\text{sat}}}{RC}$. Lorsque $v_{s1} = v = e2$ atteint le seuil de l'oscillateur à relaxation $-V_0 = -\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$, le comparateur bascule à saturation négative $v_{s2} = -V_{\text{sat}}$. La tension en sortie de l'intégrateur croît à la vitesse $+\frac{V_{\text{sat}}}{RC}$ jusqu'à atteindre $+V_0$. On a alors de nouveau basculement et c'est reparti pour un tour.

Au final, v_{s1} est un signal triangulaire $\pm\frac{R_1}{R_2}V_{\text{sat}}$ également de période T. Il est important de prendre $R_1 < R_2$ pour être sûr d'avoir un inverseur.

Remarque

On peut remplacer l'AO intégrateur par un bon vieux RC. Le montage est alors un peu différent et notamment la charge/décharge du condensateur se fait en $\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$. Au final, la nouvelle période d'oscillation s'écrit

$$T = 2RC\ln\left(1+\frac{2R_1}{R_2}\right)$$

☕

Étalonnage du multivibrateur astable

✍ Duffait p187 ⏲ 10 min

Matériel :

- $R = 100$ kΩ, $R_1 = 3.3$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, mesurées à l'ohmmètre (lire la notice pour les incertitudes)
- Boîte à décade de capacités
- 2 AO
- Latis-Pro

Réalise le montage ci-dessus, qui est un montage en série d'un intégrateur inverseur avec un comparateur à hystérésis. La tension à la sortie du 1er AO et celle à la sortie du 2ème sont respectivement un signal triangulaire (intégrateur) et un signal créneau (comparateur). C'est un système bouclé et auto-entretenu.

Mesurer la période T à l'oscilloscope pour plusieurs valeurs de R_1.

Tracer $T = f(R)$ pour obtenir une droite de pente a. Comparer a à la valeur de $a_{\text{théorique}} = 4\frac{CR}{R_2}$.

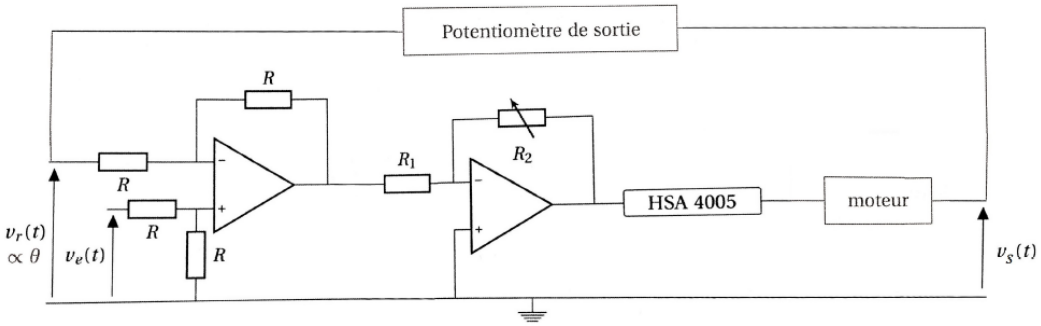
Incertitudes :

$$u(a_{\text{théorique}}) = a_{\text{théorique}}\sqrt{\left(\frac{u(C)}{C}\right)^2+\left(\frac{u(R_2)}{R_2}\right)^2+\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2}$$

2 Rétro-action négative : asservissement d'un MCC

✍ Duffait p330

2.1 Présentation du MCC asservi



Dans ce montage :

- v_e est la tension consigne qui commande l'angle de la vis voulu par l'habile expérimentateur : on peut la changer en direct pour montrer que ça change l'angle
- le premier AO est un soustracteur $v = v_r - v_e$ donc c'est lui qui est le comparateur nécessaire à tout système bouclé et on remarque bien le "-" sur le signal de retour
- le deuxième AO est un amplificateur inverseur (de gain $-\dfrac{R_2}{R_1}$)
- le bloc HSA 4005 est juste un ampli de puissance
- le moteur c'est juste "entrée = tension" $\Rightarrow$ "sortie = vitesse de rotation"
- le potentiomètre de sortie est un capteur qui renvoie une tension v_r proportionnelle à l'angle de la vis, c'est ce qui fait le retour

On comprend bien grâce au comparateur que si *l'angle commande* et **l'angle réel** sont égaux alors après le comparateur la tension est nulle donc vous aurez beau l'amplifier autant que vous voulez le moteur n'aura pas de tension en entrée et donc de bougera pas, c'est ce qu'on voulait !

Si maintenant on s'écarte de la position souhaitée d'un angle négatif, alors v_r diminue et on se retrouve avec $v_r < v_e$. Par conséquent en sortie de comparateur on a une tension positive qui va donc commander une vitesse positive, qui ramène la vis vers sa position d'équilibre. On peut faire le même raisonnement pour un angle positif, et on se rend compte qu'on est bien en train d'asservir en position la position de la vis.

Potentiomètre

On sait pas trop comment il marche, mais parfois c'est des dynamomètres (mesure de vitesse de rotation) suivit d'un intégrateur.

La question du gain du potentiomètre sort de l'étude du montage mais il est important à signaler qu'il faut que comparer les tensions reviennent effectivement à comparer des angles. Ceci se traduit par le fait que le gain doit être le même dans les deux sens (par exemple si une consigne de 2 V implique un angle 10°, alors il faut qu'un angle de 10° implique également 2 V).

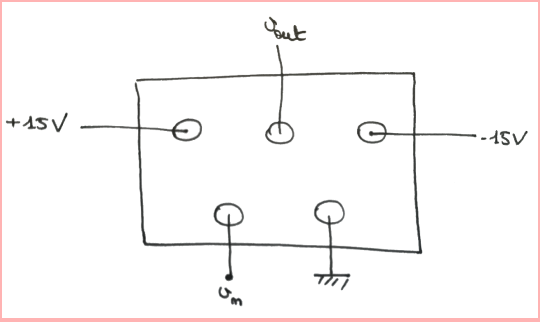
Mise en marche

✍ ⏲

Matériel :

- MCC P95.16
- alimentation Jeulin P54.12

- ampli de puissance HSA 4005 P47.5 ou P47.6
- boîte à décade R_2, 4 résistances $R = 100$ kΩ, une résistance $R_1 = 1$ mΩ
- 2 AO
- oscilloscope
- GBF



Brancher directement le GBF à l'entrée v_m du moteur P95.16 (ne rien mettre sur les entrées +15 V/-15 V et v_{out} pour l'instant), et envoyer 2 V en continu. Le moteur se met à tourner. Augmenter la tension : le moteur tourne plus vite. Changer le signe de la tension : le moteur tourne dans l'autre sens.

Réaliser le montage ci-dessus. Pour l'ampli de puissance HSA, sélectionner « Input A », régler le gain sur x10 (c'est le minimum), Z_{in} sur $6.00 \times 10^2\,\Omega$ et BIAS sur OFF.

Brancher v_m sur le moteur. Pour cela, relier la sortie Output de l'amplificateur à la masse du moteur, et la masse de l'amplificateur sur l'entrée v_m du moteur afin d'avoir un gain de -10 pour l'amplificateur. Mettre v_r à la masse pour l'instant, et appliquer avec un GBF une tension 1 V continue sur v_e . Le moteur doit tourner.

Avec une alimentation +15/-15 V (module Hameg), alimenter le potentiomètre en +15/-15 V. ATTENTION, la masse de l'alimentation doit être reliée à celles des AO, mais pas à celle du boîtier du moteur (pour éviter un court-circuit). Par pont diviseur de tension, on a alors v_{out} comprise entre +5/-5 V (à cause des deux résistances de part et d'autre du potentiomètre). Relier v_r et v_{out}.

Mise en évidence de l'asservissement

Mettre en entrée une tension continue 1 V. Observer que la position de la vis est maintenant asservie (elle ne tourne plus). Appliquer un signal créneau de fréquence 0,5 Hz pour voir la vis passer d'une position à une autre. On montre ainsi que la tension d'entrée commande la position de la vis.

Attention

Attention, pour une trop grande tension d'entrée (en valeur absolue) la chaîne de retour ne joue plus son rôle. Le potentiomètre est en effet « à course infinie », c'est-à-dire qu'on peut le tourner indéfiniment contrairement aux potentiomètres habituels. La plage de tension étant restreinte à +5/-5 V, il sautera à -5 V une fois arrivé à +5 V et renverra donc une tension qui ne correspond plus à la véritable position angulaire de la vis. Si cela arrive, la vis se met à tourner indéfiniment.

Etalonnage

✍ ⏲

Balayer toutes les tensions pour lesquelles la sortie est bien asservie. Tracer l'angle θ en fonction de la tension d'entrée v_e. On obtient une droite.

2.2 Diagramme de Bode

La fonction de transfert du MCC asservi se met sous la forme d'une fonction de transfert d'ordre 2 (✍ Duffait p331-337) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_r}}{\underline{v_e}} = \frac{1}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{27.5}$$

avec m le coefficient d'amortissement et ω_0 la pulsation de résonance.

Choix des composants

R doit être pris grande devant les impédances de sortie du potentiomètre (1 kΩ) et du GBF (50 Ω). On prend $R = 100$ kΩ.

R_1 doit être grande devant l'impédance de sortie de l'AO (50 Ω) : on prend $R_1 = 1$ kΩ.

Diagramme de Bode du MCC asservi

✍ Duffait p337 ⏲

On peut le faire de deux façons différentes.

- **Version rapide :**
  On fait un sweep logarithmique de la fréquence d'entrée du GBF pour montrer le comportement passe-bas d'ordre 2 avec une résonance d'autant plus aigüe que le gain de l'amplificateur est élevé (donc que R_2 est grande).
- **Version lente :**
  On fixe R_2 et on relève v_r et v_e pour différentes fréquences d'entrée. On trace alors le gain $G = 20\log\frac{v_r}{v_e}$ en fonction de la fréquence. On peut discuter l'intérêt de faire ça vu qu'on a pas de valeurs théoriques pour m et ω_0 mais on peut remonter expérimentalement à m et donc au facteur de qualité $Q = \frac{1}{2m}$. Puisqu'on ne veut pas une réponse qui oscille avant de se stabiliser, on attend un Q petit.

En fait, $m = \frac{A}{\sqrt{R_2}}$ (d'après ✍ Duffait p331) avec A une constante dépendant des paramètres des éléments de l'asservissement. Ce qui est important, c'est que **changer R_2 permet de modifier le régime** (peuso-périodique, apériodique) car on change m qui change Q. Nous nous intéresserons donc aux variations de R_2, *i.e.* de l'amplification, et à leur impact sur les caractéristiques du MCC asservi, à savoir la précision, la rapidité et le dépassement.

L'asservissement se veut le plus efficace possible et dans cette notion d'efficacité d'asservissement vient évidemment la notion d'erreur statique : est-ce que le système arrive à obéir à la demande, i.e. est-ce que la tension de sortie converge vers la tension de commande ?

2.3 Précision (qualitatif)

On veut savoir dans un premier temps quelle est l'influence de R_2 sur la capacité du moteur à répondre à la commande, *i.e.* est-ce que la tension de sortie converge vers la tension de commande.

Précision du MCC asservi

✍ ⏲

Pour plusieurs valeurs de R_2, comparer les tensions de sortie et de commande.

En particulier, montrer que pour $R_2 = 100\ \Omega$ la tension de sortie ne converge pas vers la tension de commande si l'on part d'un angle différent de l'angle voulu (vis tenue au doigt).

Montrer cependant qu'aux grands R_2, donc aux grandes amplifications, ça marche bien.

Si le gain est trop petit, le signal sortant du comparateur n'est pas assez amplifié. Le moteur reçoit donc une commande en tension faible et la vitesse de sortie sera trop faible pour vaincre les frottements.

2.4 Rapidité (qualitatif)

On veut maintenant savoir quelle est l'influence de R_2 sur la rapidité du moteur, *i.e.* quel temps il faut attendre pour que la tension de sortie converge vers la tension de commande. Ce temps est d'ailleurs analogue à un temps de réponse.

Rapidité du MCC asservi

✍ ⏲

Pour plusieurs valeurs de R_2 comprises entre 1 et 5 kΩ, estimer le temps de réponse du système en comparant la commande v_e et l'entrée v_r et constater qu'il augmente avec R_2.

Diminuer R_2 diminue le temps de réponse. Cependant, à force de diminuer le temps de réponse, on passe dans le régime pseudo-périodique caractérisé par un dépassement de la valeur voulue ! Pour des robots d'assistance en chirurgie, c'est un problème assez sérieux. Parler d'abaque de temps de réponse.

Remarque

Il est tout à fait possible de faire cette étude de manière quantitative.

2.5 Dépassement (tampon)

On définit le dépassement D comme :

$$D = \frac{v_{\max} - v_\infty}{v_\infty}$$

avec $v_{\max}$ la tension maximale atteinte lors des oscillations. On suppose que le système est précis, *i.e.* $v_\infty = v_{\text{commande}}$. On a vu que le MCC asservi était un système d'ordre 2. En régime pseudo-périodique (atteint si on diminue trop R_2), on peut alors écrire :

$$D = \exp\left(\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right) \iff m = \frac{\ln D}{\sqrt{\pi^2 - \ln D^2}}$$

Étude du dépassement

✍ fascicule de TP d'électronique p61 ⏲

- Qualitativement, on peut tracer D en fonction de R_2 pour montrer que plus on diminue le temps de réponse (*i.e.* on diminue R_2), plus D augmente.
- On peut retrouver m à partir de D et comparer à des valeurs de m obtenues avec le diagramme de Bode
- On peut aussi s'amuser à mesurer D déterminer m pour chaque valeur de R_2 puis à tracer $\ln D$ en fonction de $\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}$ et trouver une pente de -1. Sauf que je ne vois pas dans quel Univers on peut avoir le temps de faire ça.

3 Oscillateur à quartz

Remarque

Vraisemblablement, cette partie ne peut pas être abordée par manque de temps, sauf si on abandonne quelques manips sur le MCC ou Wien. Cependant, le jury a l'air d'aimer qu'on parle de l'oscillateur à quartz (*"Un oscillateur à quartz serait le bienvenu, compte tenu de son fort facteur de qualité."*) donc ça peut valoir le coup.

L'oscillateur à quartz, tout comme l'oscillateur de Wien, est composé d'un amplificateur (à transistor, et non pas à AO car le produit gain × BP est meilleur) et d'un filtre passe-bande (cellule CLC où le quartz joue le rôle de L). Il permet d'obtenir un signal quasi sinusoïdal haute fréquence (MHz) avec une grande pureté spectrale, très stable en fréquence. C'est pourquoi il peut être utilisé comme étalon de temps, notamment dans les montres de poignet.

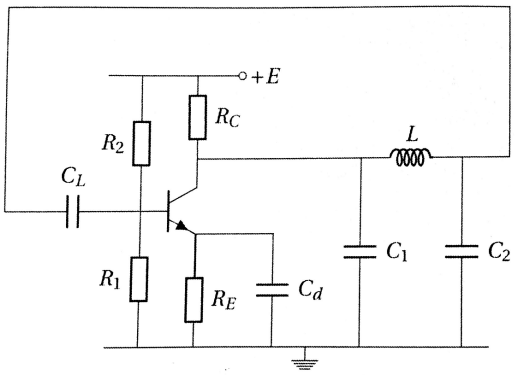


Diagramme de Bode de l'oscillateur à quartz

✍ Krob ⏲ 2 min

On utilise le dispositif tout fait P42.47 alimenté en continu sous 1 V. Tracer le diagramme de Bode en boucle ouverte en faisant varier la fréquence (presque) hertz par hertz au niveau de la résonance : celle-ci est très piquée et assez dure à repérer. Mesurer f_0 et Δf, en déduire Q. On trouve $f_0 = 5,0682$ MHz, $\Delta f = 60$ Hz et $Q = 60000$.

Boucler le système et afficher le signal ainsi que sa FFT à l'oscilloscope : le signal est plus pur spectralement que celui obtenu avec l'oscillateur de Wien (en pratique, on observe quand même une nette distortion des oscillations et la présence de quelques harmoniques dans le spectre...).

Conclusion

Nous avons présenté ici les systèmes bouclés à travers les oscillateurs, quasi-sinusoidaux (pont de Wien) et de relaxation (multivibrateur astable), et les asservissements. On aurait pu pour ce dernier présenter aussi d'autres types d'asservissements, comme les asservissements en vitesse. Nous nous sommes ici principalement occupé de systèmes bouclés électroniques, mais il en existe dans des domaines bien plus large : le vase de Tantale en est un exemple ; on peut aussi penser aux lasers largement utilisés en optique. On peut même ouvrir cette notion de système bouclé à des domaines encore plus larges : on pourrait par exemple qualifier la physique elle-même de système bouclé ! On désire avoir en sortie un modèle théorique décrivant parfaitement le monde qui nous entoure ; on fait pour cela une théorie (chaîne d'action), qui est ensuite confrontée aux expériences (chaîne de retour), et l'on corrige notre théorie en conséquent. On a donc ici un système bouclé de type asservissement.

MP 28

Instabilités et phénomènes non-linéaires.

Commentaires du jury

- 2017 : Ce montage ne peut pas se limiter à étudier le non isochronisme des oscillations du pendule pesant.
- 2014, 2015, 2016 : Il s'agit de bien d'illustrer quelques caractéristiques des systèmes non-linéaires, de préférence dans différents domaines de la physique. Selon le (ou les) système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage, on peut penser à la pluralité des positions d'équilibre, au phénomène de bifurcation, à l'enrichissement spectral, au ralentissement critique ...
- 2010, 2013 : Il s'agit de bien illustrer quelques caractéristiques des systèmes non linéaires : pluralité des positions d'équilibre, bifurcation, caractérisation des non linéarités, enrichissement spectral, doublement de période, ralentissement critique..., en fonction du ou des système(s) choisi(s) pour illustrer ce montage.
- 2011 : Les candidats doivent prendre en compte les deux aspects de l'intitulé du montage. Cette année, les présentations se sont trop souvent limitées aux aspects non-linéaires.

Bibliographie

- ✍ *BUP 867 et 891* ⟶ Pendule grand angle
- ✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Pendule grand angle
- ✍ *Électronique expérimentale*, **Krob** ⟶ Van der Pol
- ✍ *Hydrodynamique physique*, **Guyon,Hulin,Petit** ⟶ Instabilité de Taylor-Couette
- ✍ *Dictionnaire de physique. Tome 1. Mécanique*, **Quaranta** ⟶ Instabilité de Taylor-Couette
- ✍ *Cours de Capillarité*, **Etienne Lidon** ⟶ https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01332274/document, instabilité de Rayleigh-Plateau

1 Le pendule pesant non-linéaire . . . 1258
1.1 Équation du pendule . . . 1258
1.2 Étude de stabilité (rapide) . . . 1258
1.3 Calibrage de la réponse du capteur . . . 1259
1.4 Portrait de phase et non-linéarité . . . 1259
1.5 Quantification de la non linéarité et modélisation . . . 1260
2 Oscillateur de Van der Pol . . . 1260
2.1 Présentation de l'élément non linéaire . . . 1261
2.2 Naissance des oscillations et cycle limite . . . 1262
2.3 Étude de la bifurcation . . . 1263
2.4 Autres effets de la non linéarité . . . 1263
3 Oscillateur double puits . . . 1264
3.1 Retour sur le pendule . . . 1264
3.2 Double-puits électronique . . . 1264

Introduction

La physique, c'est la science de l'approximation, et la première approximation que l'on fait toujours, c'est celle de la linéarité. Dans ce montage, on va montrer les limites de ce modèles et des modèles plus fins, qui permettent de conserver un traitement analytique ou expérimental des problèmes non-linéaires.

1 Le pendule pesant non-linéaire

1.1 Équation du pendule

Je crois qu'on peut raisonnablement la rebalancer. Pour nous $\omega_0 = \dfrac{MgL}{J_0 + ML^2}$ avec M la masse attachée à la barre, L la longueur de la tige entre la masse et le rotor, J_0 le moment d'inertie du pendule.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

D'habitude on fait l'approximation de $\sin\theta = \theta$, mais dans la pratique on sait très bien que cela ne marche pas, et on va le vérifier ici.

Dessiner le potentiel dans les deux cas.

1.2 Étude de stabilité (rapide)

On voit que l'introduction d'un terme non linéaire entraîne l'apparition d'un deuxième point d'équilibre. En effet là où l'équation du pendule harmonique prévoit un unique point d'équilibre, (0,0), on voit que (π,0) en est un aussi. D'ailleurs on peut remarquer qu'aux grands angles, l'équation linéaire n'a aucun sens, puisqu'elle prédit des mouvements totalement fantaisistes du pendule.

On remarque également que ce nouvel équilibre est instable. En effet si on prend un pendule en (π,0), on le lâche, on met un angle ϵ, et cet angle diverge et ne nous ramène pas à la position d'équilibre.

Stabilité des points

Montrer en direct la stabilité. Toucher le matos quoi.

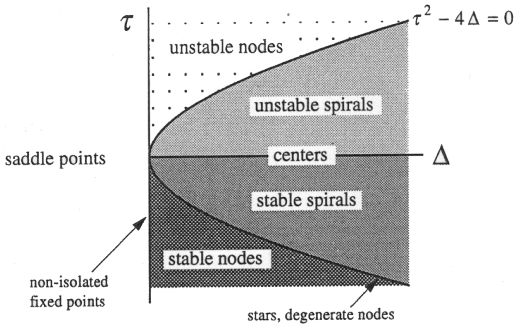
Étude théorique de la stabilité :

On a $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2]$. Si le système est sympa (les nôtres le sont), on peut écrire $\dot{\overrightarrow{u}} = f(\overrightarrow{u}) = [f_1(u_1,u_2), f_2(u_1,u_2)]$ avec f différentiable. Alors on peut écrire la Jacobienne de f :

$$\mathcal{J}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

On a alors un théorème sympa qui dit ça : *Le déterminant et la trace de la matrice Jacobienne en un point d'équilibre nous renseigne sur sa stabilité et sa forme.*

On nomme τ la trace et Δ le déterminant, et on a :



Ici on a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$, soit $\tau = 0$ et $\Delta = \omega_0^2 \cos(\theta)$. Pour le point du bas, on a un centre, pour le point du haut, on a un point selle.

Il est bon de noter qu'en vérité le point du bas est une spirale stable ou un noeud stable, en fonction de la violence de l'amortissement.

1.3 Calibrage de la réponse du capteur

Présenter le matos, dire que c'est un potentiomètre, et que par conséquent on a une réponse linéaire du capteur.

Étalonnage du capteur

✍ 🕒 5mn

Il faut vérifier la réponse linéaire du capteur. Ajouter simplement un point pour le jury. Bien caler le pendule au support boy pour fixer l'angle.

Attention aux incertitudes.

Mesure de J_0

✍ 🕒

On mesure J_0 par une régression linéaire sur le log de la période en fonction de la longueur, À PETITS ANGLES.

Pas la peine de le montrer au jury, c'est juste pour nous. TABULÉ : $J_0 = 2.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$

1.4 Portrait de phase et non-linéarité

Mise en évidence des effets de la non linéarité

✍ 🕒

Après acquisition du signal par Latis-Pro, on peut constater la modification du spectre, via transformée de Fourier :

- Décalage de la fréquence fondamentale
- Apparition d'une fréquence à $3\omega_0$

Portrait de phase, et constater qu'aux grands angles les ellipses (caractéristiques d'un oscillateur linéaire) sont déformées car le mouvement n'est plus sinusoïdal.

MONTRER LE PROGRAMME PYTHON, montrer que le centre devient un noeud spirale, voire un noeud stable, avec l'atténuation. Noter que cet effet est **Linéaire**.

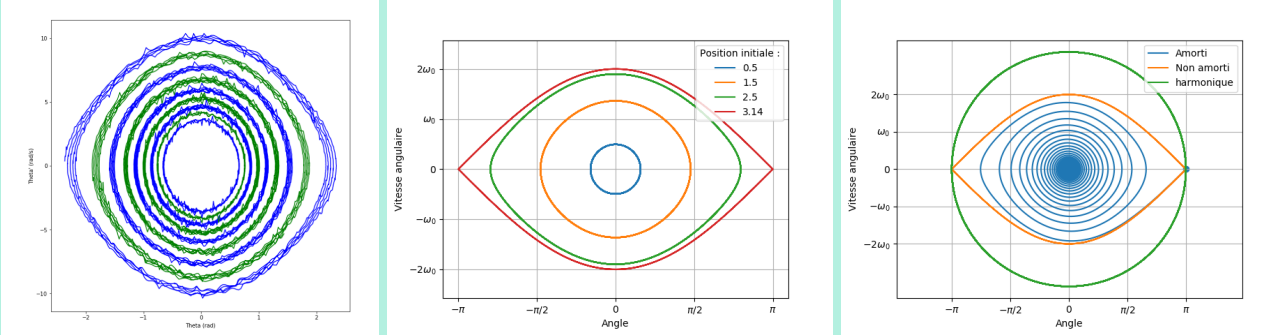


FIGURE 28.1 – Portraits de phase, expérimental puis théorique.

1.5 Quantification de la non linéarité et modélisation

On voit l'apparition d'un pic à $3\omega_0$ dans la TF, ça nous fait furieusement penser à un développement d'ordre supérieur du sinus, car $\sin\theta =_0 \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$. Ainsi on a pour les *petits mais pas si petits que ça* angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \mathcal{O}(\theta^7) \right) = 0 \tag{28.1}$$

Si on va plus loin dans le développement théorique, on obtient la formule suivante, pour un lancé sans vitesse initiale, à l'angle initial θ_0. On y voit de manière explicite la perte de l'isochronisme des oscillations.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 = \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11\theta_0^4}{3072} + \mathcal{O}(\theta_0^6) \right) \tag{28.2}$$

Formule de Borda

✍ Jolidon ⏲ 5mn

Avec un chronomètre on chronomètre 5 périodes pour différents angles θ_0, pour pouvoir négliger autant que possible les pertes par frottement ET les incertitudes de mesure sur le chrono.

On en déduit T, et on fait une régression. Au choix linéaire en θ_0^2 ou polynomiale custom.

3 moyens de vérifier que l'on est bien, car trois valeurs ω_0.

2 Oscillateur de Van der Pol

✍ Krob p170

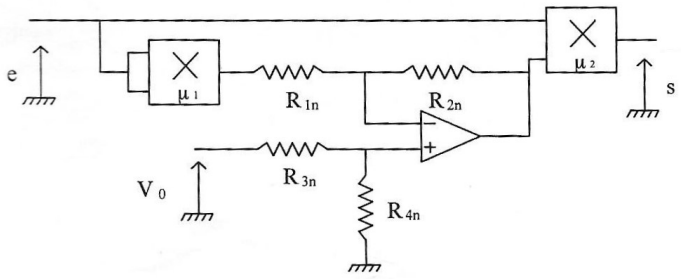
L'oscillateur de Van der Pol est un oscillateur qui est décrit par l'équation suivante :

$$\ddot{s} - \epsilon\omega_0 \left(1 - \left(\frac{s}{s_0} \right)^2 \right) \dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{28.3}$$

On repère immédiatement le terme non linéaire dans cette équation, à savoir le pré-facteur du terme $\dot{s}$. Le coefficient ϵ pilote la non linéarité et quand $\epsilon = 0$ on retrouve l'oscillateur harmonique classique. Il reste maintenant à construire un circuit électrique qui correspond à cette équation.

2.1 Présentation de l'élément non linéaire

Commençons d'abord par nous intéresser à l'élément non linéaire de l'oscillateur. Le boîtier P42.46 fera l'affaire dans notre cas, et il peut être modélisé par le circuit suivant (tirée de ✍ Krob) :



Il s'agit d'un circuit à résistance négative alimenté par une tension V_0 et composé de 4 résistances, 2 multiplieurs et un AO. Pour la mise en équation, on suppose que l'AO est les multiplieurs sont idéaux.

Le multiplieur μ_2 multiplie les signaux en entrée x_1 et x_2 avec un coefficient $-K < 0$ (peut être faut-il rajouter un inverseur en amont, absent du schéma tiré du Krob ?) pour avoir une sortie de la forme $s = -Kx_1x_2$ avec :

$$x_1 = e$$

$$x_2 = \frac{R_{4n}}{R_{4n}+R_{3n}}\frac{R_{1n}+R_{2n}}{R_{1n}}V_0 - \frac{KR_{2n}}{R_{1n}}e^2$$

On obtient alors une sortie de la forme

$$s = \left[-K\frac{R_{4n}}{R_{4n}+R_{3n}}\frac{R_{1n}+R_{2n}}{R_{1n}}V_0\right]e + \left[\frac{K^2R_{2n}}{R_{1n}}\right]e^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = \alpha e + \beta e^3 \tag{28.4}$$

avec $\alpha = -K\dfrac{R_{4n}}{R_{4n}+R_{3n}}\dfrac{R_{1n}+R_{2n}}{R_{1n}}V_0 < 0$ et $\beta = \dfrac{K^2R_{2n}}{R_{1n}} > 0$. Cet élément a donc une caractéristique polynomiale d'ordre 3 et donc bien non linéaire. La pente de cette caractéristique à l'origine nous permet d'estimer α puis on peut remonter à la valeur de β grâce à la mesure des abscisses des zéros non nuls e_1 et e_2 de la caractéristique qui donnent $\beta = -\dfrac{\alpha}{e_1^2}$.

Caractéristique de l'élément non-linéaire

✍ Krob 🕒 10 min

Matériel : boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39, oscilloscope, GBF, carte d'acquisition + LatisPro.

Utiliser le boîtier P42.46 composé des résistances $R_{1n} = R_{3n} = 6.2$ kΩ, $R_{2n} = 82$ kΩ, $R_{4n} = 2$ kΩ et de muliplieurs de gain $K = 0.1$ V^{-1}. Il est alimenté par le boîtier P42.39.

Appliquer une tension sinusoïdale e d'amplitude 3 V_{pp} et de fréquence $f = 100$ Hz.

Dans un premier temps, envoyer e et s sur les voies 1 et 2 d'un oscilloscope. Passer en mode XY pour observer la caractéristique. Faire varier V_0 entre -2 V et 2 V et observer comme la caractéristique est modifiée (notamment la pente à l'origine α).

Dans un second temps, fixer $V_0 = 1V$. **On ne touchera plus à cette valeur.** Acquérir e et s sur LatisPro et tracer $s = f(e)$. Faire un fit polynomial d'ordre 3 pour obtenir α et β. On attend $\alpha = -0.347$ et $\beta = 0.132$ V^{-2}.

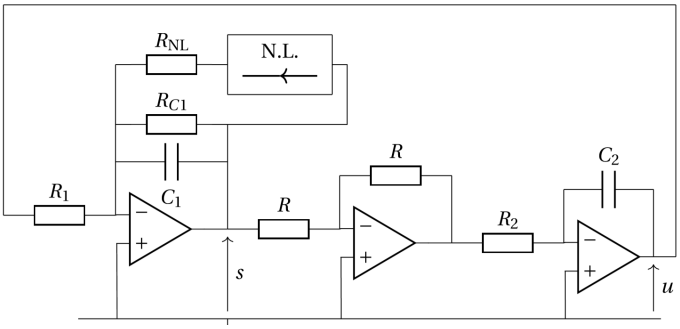
Ne pas oublier de discuter des incertitudes.

Remarques

- Il ne faut pas appliquer des tensions trop importantes sous peine de saturer l'AO ni avoir une fréquence trop élevée sous peine d'avoir des effets d'hystérésis dans les multiplieurs.
- Pour vraiment se convaincre de la validité du fit cubique, on peut regarder la FFT de s sur LatisPro et trouver un premier pic à f et un second à $3f$.

2.2 Naissance des oscillations et cycle limite

Maintenant qu'on a vu ce qu'allait être l'élément non linéaire du circuit, on peut construire l'oscillateur de Van der Pol. Pour cela, on réalise le circuit électrique suivant, où le composant NL est le boîtier non-linéaire vu précédemment :



Ce circuit est composé de 3 AO, le premier et le troisième étant des intégrateurs tandis que le second est un inverseur. L'équation associée à ce circuit est alors :

$$\ddot{s} + \frac{1}{C_1}\left(\frac{\alpha}{R_{NL}} + \frac{1}{R_{C_1}}\right)\omega_0\left[1-\left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right]\dot{s} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}s = 0 \iff \ddot{s} - \epsilon\omega_0\left(1-\left(\frac{s}{s_0}\right)^2\right)\dot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{28.5}$$

en posant

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}} \tag{28.6}$$

$$\epsilon = -\sqrt{\frac{R_1R_2C_2}{C_2}}\frac{\alpha R_{C_1} + R_{NL}}{R_{C_1}R_{NL}} \tag{28.7}$$

On voit donc qu'on peut faire varier ϵ avec R_{NL}.On a alors :

$$\begin{aligned} \text{amplification} &\iff \text{le terme devant } \dot{s} \text{ est négatif} \\ &\iff \epsilon > 0 \\ &\iff R_{NL} < -\alpha R_{C_1} \end{aligned} \tag{28.8}$$

Si R_{NL} ne satisfait pas cette condition, le terme d'amortissement est positif et donc les oscillations disparaissent.

Mise en évidence des deux régimes et détermination de R_{NL}

✍ Krob

Matériel : boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39, $R = 1$ kΩ, $R_1 = R_2 = 10$ kΩ, $R_{C_1} = 100$ kΩ et $C_1 = C_2 = 0.1$ µF, boîte à décades de résistance R_{NL}, oscilloscope.

Réaliser le montage ci-dessus. Montrer à l'oscilloscope les deux régimes (avec et sans oscillations) et chercher la valeur limite de R_{NL} (elle est vers 20-25 kΩ.

Tracer en mode XY les cycles (plus ou moins déformés) dans le plan de phase.

En ouvrant le circuit puis en le refermant, on devrait voir la convergence vers le cycle limite par des oscillations à l'intérieur ou à l'extérieur du cycle selon le conditions limite (ouverture de la branche contenant l'élément non linéaire ou court-circuit de l'entrée inverseuse du premier AO en la reliant à la masse). En effet, on a convergence depuis la conditon initiale (intérieur du cycle dans le premier cas, extérieur dans le second à cause de la saturation des AO). *L'utilisation du mode persistance de l'oscilloscope est très utile.*

On a donc au passage de cette valeur limite une bifurcation. On passe d'un régime avec un *point fixe attracteur* (0,0) non oscillant ($R_{NL} > -\alpha R_{C_1}$) à un régime instable oscillant avec un *cycle limite* ($R_{NL} < -\alpha R_{C_1}$). On va essayer de caractériser un peu plus le passage de l'un à l'autre et ainsi la force de la non-linéarité.

2.3 Étude de la bifurcation

Les oscillations dans le circuit sont quasi-sinusoïdales tant que $0 < \epsilon < 0.05 \iff 23.1\ \text{k}\Omega < R_{NL} < 34.7\ \text{k}\Omega$. Les oscillations ont un fréquence $f = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$ et une amplitude **crête à crête** :

$$s_{cc} = 4\sqrt{-\frac{\alpha}{3\beta} - \frac{R_{NL}}{3\beta R_{C_1}}} \tag{28.9}$$

Nota Bene

La formule du ✍ Krob p167 est **fausse**.

Vérification de l'expression de l'amplitude des oscillations

✍ ⏲

Pour différentes valeurs de R_{NL} entre 23.1 kΩ et 34.7 kΩ, mesurer s_{cc}.

Tracer $s_{cc}^2 = f(R_{NL}$ puis remonter à α et β par régression linéaire.

Ne pas oublier de discuter des incertitudes.

2.4 Autres effets de la non linéarité

Quand on diminue R_{NL}, ϵ croît et les oscillations quasi-sinusoïdales tendent vers des oscillations de relaxation plus riches en harmoniques. De plus, la période des oscillations n'est plus constante par rapport à R_{NL}. On peut montrer que

$$\lim_{\epsilon \gg 1} T = (3 - \ln 4)\frac{\epsilon}{\omega_0} \tag{28.10}$$

Enrichissement spectral et augmentation de la période de oscillations

✍ ⏲

Réduire progressivement R_{NL} de 20 kΩ à quelques ohms et constater la déformation du signal de sortie qui n'est plus sinusoïdale. On peut aussi observer la déformation du cycle en mode XY.

Pour chaque valeur de R_{NL}, mesurer la période T des oscillations et calculer ϵ grâce à l'équation 28.7. Tracer $T = f(\epsilon)$ puis ajouter sur le graphe la droite $T = (3 - \ln 4)\dfrac{\epsilon}{\omega_0}$ pour observer la convergence des mesures expérimentales

vers cette droite.

Remarque

Il peut être nécessaire de sacrifier certaines parties du pendule ou de Van der Pol si on veut présenter le double-puits.

Un puit c'est bien, deux puits c'est mieux !

3 Oscillateur double puits

Ici on s'intéresse à un oscillateur non linaire avec un profil de potentiel un peu... Particulier.

Dessiner le potentiel en double puits.

3.1 Retour sur le pendule

Une façon de faire un double puits c'est de mettre des aimants. La mise en équation devient difficile car il faut être capable d'exprimer l'attraction d'un aimant sur le pendule.

Le point central devient un point d'équilibre instable (un col), deux centres de plus apparaissent. Ceci correspond à une bifurcation fourche supercritique.

Pendule double-puits

✍ FLTCLD

Montrer que l'ancienne position d'équilibre stable est devenue instable.

Faire plusieurs acquisitions et voir que le pendule est piégé à l'état final à l'une ou l'autre des nouvelles positions d'équilibre stable.

Tracer le portrait de phase sur un temps d'acquisition long.

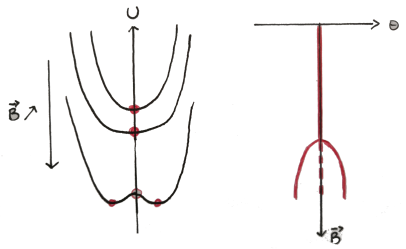
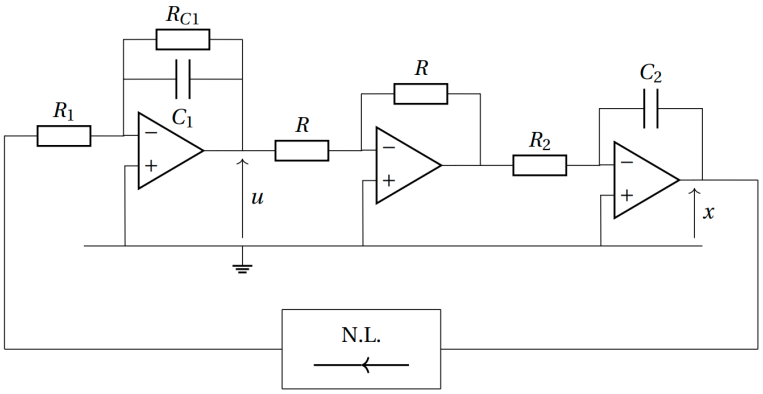


FIGURE 28.2 – Discutons de bifurcation

3.2 Double-puits électronique

On peut obtenir un potentiel double-puits en changeant la place de l'élément non-linéaire dans l'oscillateur Van der Pol et en le plaçant dans la boucle de rétroaction. On a donc le montage électrique suivant :



Remarque

Nous n'avons plus de paramètre de contrôle R_{NL}. De plus, les valeurs des résistances et des capacités **seront différentes** par rapport au montage utilisé pour Van der Pol.

La nouvelle équation caractérisant le montage est alors :

$$\ddot{x} + r\dot{r} + \delta x + \lambda x^3 = 0 \tag{28.11}$$

avec

$$r = \frac{1}{R_{C_1} C_1}$$
$$\delta = \frac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} < 0$$
$$\lambda = \frac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} > 0$$

Le système est analogue à un oscillateur mécanique soumis à un force dérivant d'un potentiel en $\frac{1}{2}\delta x^2 + \frac{1}{4}\lambda x^4$.

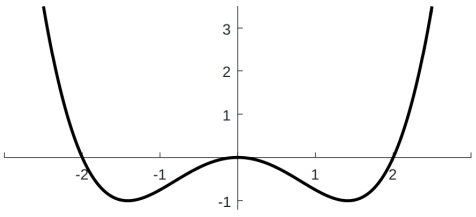


FIGURE 28.3 – Forme du potentiel.

Double-puits électronique

✍ Krob p178

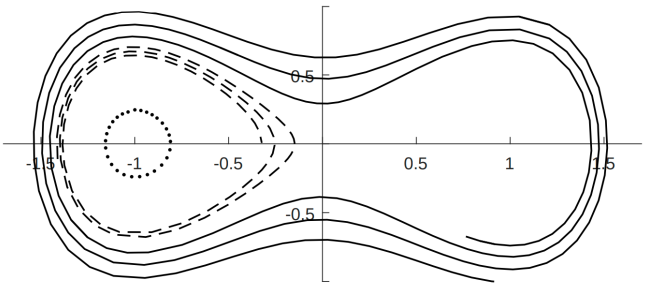
Matériel : boîtier non linéaire P42.46 avec son alimentation 42.39, $R = 1$ kΩ, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, et $C_1 = C_2 = 3$ μF, boîte à décades de résistance R_{C_1}, oscilloscope, carte d'acquisition + LatisPro

Réaliser le montage ci-dessus. Tracer le portrait de phase sur l'oscilloscope en mode XY.

On pourra commencer par un amortissement faible $R_{C_1} = 1$ MΩ et en court-circuitant l'entrée inverseuse du troisième AO en la reliant à la masse (condition initiale éloignée). On peut également court-circuiter la tension x pour partir d'une autre condition initiale. *L'utilisation du mode persistance de l'oscilloscope est de nouveau très utile.*

On peut ensuite modifier l'amortissement en modifiant R_{C_1}. La trajectoire est déterministe : on tombe dans le même puit si on garde les mêmes conditions initiales.

On peut également acquérir u et x sur LatisPro, ouvrir le circuit au niveau de R_{C_1} pour fortement réduire l'amortissement et court-circuite l'entrée inverseuse du 3ème AO. Lancer une acquisition quand le système balaie chacun des trois états énoncés ci-dessous et tracer leur FFT pour observer l'évolution des harmoniques.



La trajectoire dans l'espace des phases passe par plusieurs états successifs :

- au-dessus des puits de potentiel, le système évolue périodiquement autour du double-puits → *trait continu sur la figure*

  Les oscillations du système sont anharmoniques mais symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Le spectre d'amplitude de $x(t)$ ne contient que les harmoniques impairs.

- le système piégé dans un des puits ne peut plus en sortir → *trait en tiret sur la figure*

  Le système est loin de sa position d'équilibre *i.e.* le fond du puit et es oscillations sont anharmoniques et asymétriques. Le spectre d'amplitude de $x(t)$ ne contient que les harmoniques pairs et impairs.

- le système se rapproche de la position d'équilibre au fond du puit → *trait pointillé sur la figure*

  La trajectoire du système est quasi-elliptique. Ses oscillations sont alors quasi-sinusoïdales et son spectre n'a quasiment plus d'harmoniques.

Conclusion

Les phénomènes non linéaires sont monnaie courante dans la physique moderne, et il faut savoir quand les négliger, quand et comment les prendre en compte, et maîtriser la théorie derrière (développement polaires, etc.). Les oscillateur présentés ici sont assez abstrait, et peu appliqués, mais ils sont une excellent façon d'aborder les phénomènes concernés.

Ouverture sur la théorie du Chaos.

MP 29

Ondes : propagation et conditions aux limites

Commentaires du jury

- 2015, 2016, 2017 : Ce montage est riche, car l'existence de conditions aux limites permet l'apparition de phénomènes aussi variés que la réflexion, la réfraction, la diffraction, les interférences. . . Dans ce contexte, on veillera à bien distinguer ondes stationnaires et ondes stationnaires résonantes. Notons enfin que la notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial. Enfin, la détermination de la fréquence de résonance de la corde de Melde à l'aide d'un stroboscope n'a pas de sens quand la corde est utilisée avec un générateur basse fréquence muni d'un fréquencemètre avec cinq digits.
- 2014 : Ce montage est riche car l'existence de conditions aux limites permet l'apparition de phénomènes aussi variés que la réflexion, la réfraction, la diffraction, les interférences ... Dans ce contexte, on veillera à bien distinguer ondes stationnaires et ondes stationnaires résonantes. Notons enfin que la notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial.
- 2010 à 2013 : L'existence de conditions aux limites permet aussi l'apparition de phénomènes de réflexion, réfraction, diffraction, interférence, propagation guidée ... La notion d'impédance caractéristique n'est pas limitée au câble coaxial.

Bibliographie

✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Ondes ultrasons
✍ *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, **Garing** ⟶ Lois de Snell-Descartes
✍ *Ondes mécaniques et diffusion*, **Garing** ⟶ Corde de Melde
✍ *Ondes*, **Brébec, Hprépa** ⟶ Le câble coaxial et exemples d'ondes

1 Propagation libre . . . 1268
1.1 Ultra-sons dans l'air . . . 1268
1.2 Ondes gravito-capillaires . . . 1270
2 Conditions aux limites . . . 1270
2.1 En mécanique : ondes stationnaires de la corde de Melde . . . 1270
2.2 Application de la corde de Melde : les harmoniques de guitare/des tuyaux . . . 1272
2.3 En optique : Snell-Descartes (tampon) . . . 1272
2.4 En électricité : impédance du câble coaxial (tampon) . . . 1272
3 Propagation guidée . . . 1273
3.1 La relation de dispersion du banc hyperfréquences . . . 1273
3.2 Influence des conditions aux limites . . . 1274
3.3 Acoustique des tubes . . . 1274

Introduction

Les ondes sont omniprésentes dans la nature, on peut penser aux ondes à la surface de l'eau, aux ondes acoustiques ou électromagnétiques.

Le but de ce montage sera de s'intéresser à la propagation libre d'ondes, puis de voir l'influence des conditions aux limites sur leur propagation pour enfin finir par parler de propagation guidée.

1 Propagation libre

1.1 Ultra-sons dans l'air

✍ FLTCLD p515

On commence ce montage par l'étude d'ondes ultrasonores se propageant dans l'air. On va faire les hypothèses suivantes :

- Air homogène, isotrope, au repos
- Hypothèse acoustique
- Hypothèse adiabatique
- Onde sphérique

Avec toutes ces hypothèses, on aboutit à une équation d'Alembert pour les variations de pression dans l'air :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \tag{29.1}$$

avec $c = \dfrac{1}{\sqrt{\chi_s \rho}}$ où ρ est la masse volumique du milieu de propagation et χ_s est sa compressibilité isentropique. On peut alors déduire une relation de dispersion de la forme $\omega = ck$ *i.e.* $\lambda = cT$ ou encore $d = vt$. C'est ainsi très utile en télémétrie acoustique. On remarque d'ailleurs que c'est une relation non dispersive : la vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence (mais elle dépend du milieu de propagation).

Expression de c

En considérant l'air comme un gaz parfait, on a aussi $c = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$.

Propagation libre d'ultrasons dans l'air : méthode 1

✍ FLTCLD ⏲ 5 min

Mettre un émetteur d'ultrasons ($f = 40$ kHz) et un récepteur côte à côte et dont la tension est observée à l'oscilloscope. Avec un GBF, on envoie des bursts sinusoïdaux vers une paroi et on mesure Δt.

Répéter l'opération pour plusieurs distances $D = 2d$ **(l'onde fait un aller-retour)** entre l'émetteur et le récepteur. Tracer $2d = f(\Delta T)$ pour obtenir c.

Remarques

- La façon dont on mesure Δt peut faire débat. En effet, le burst réfléchi est étalé à cause des piézoélectriques puisque l'émetteur peut être modélisé comme un passe-bande (et non pas à cause de la dispersion, d'Alembert marche très bien pour les ultrasons dans l'air). On peut alors mesurer Δt de plusieurs manières :
  - en repérant le début des pulses, ce qui peut être pas très précis pour le pulse réfléchit
  - en repérant un point pour lequel on a une fraction de l'intensité maximale (par exemple la moitié). Cependant, on risque de faire une erreur si on a par exemple un régime transitoire qui retarde la montée en intensité. Bien sûr, une fois la fraction choisie, il faut la garder pour toutes les mesures.

  Le débat reste ouvert, mais perso je choisis de repérer les débuts.
- On n'a pas forcément la référence absolue de temps en prenant le signal du GBF en voie 1 car l'émetteur modifie également le signal. Cependant, faire une modélisation affine au lieu de linéaire résout le problème vite fait bien fait.
- l'aller-retour se fait selon un chemin incliné et est donc plus grand que $2d$. Cependant, un rapide théorème de Pythagore permet de montrer que c'est négligeable.

Une autre méthode serait possible. On peut s'affranchir des précédents problèmes en envoyant une sinusoïde et en comptant le nombre de longueurs d'ondes balayées lorsque l'on parcourt Δd. **On n'aura vraisemblablement pas le temps de faire les deux méthodes donc il est bien de choisir quelle méthode faire le jour du montage.**

Propagation libre d'ultrasons dans l'air : méthode 2

✍ Quaranta tome 4 p397 et p461 ⏲ 5 min

Matériel :

- Émetteur à ultrasons
- Récepteur à ultrasons
- Oscilloscope
- GBF
- Divers : métre ruban, règle en bois et plaques en bois pour faciliter la translation du récepteur, blocs de mousse

La mesure sera indirecte : on impose la fréquence de 40 kHz à l'émetteur (grâce au GBF). La tension n'a pas d'importance, du moment qu'elle est suffisante pour bien voir les oscillations à l'oscilloscope.

Placer le récepteur à une distance de quelques dizaines de centimètres de l'émetteur. Ensuite, Tracer la tension d'émission et de réception sur les voies Y1 et Y2 de l'oscilloscope en mode XY.

Reculer alors le récepteur de sorte à ce que la courbe décrite dans le plan (XY) soit une droite (par exemple la première bissectrice). À cet endroit, les ondes émises et reçues sont en phase (méthode de Lissajous). Noter les positions de l'émetteur x_0 et du récepteur x_i grâce au mètre ruban. Enfin, reculer le récepteur et compter le nombre entier N de retour à une phase nulle (par exemple la première bissectrice) et la position finale x_f du récepteur. N correspond alors au nombre de longueurs d'onde parcourues. On a :

$$\frac{c}{f} = \lambda = \frac{|x_i - x_f|}{N}$$

Comme on ne peut quasiment pas faire varier la fréquence, il est possible de réaliser plusieurs mesures de c à des fréquences proches de 40 kHz puis d'en faire la moyenne statistique.

Remarque

-
- Il faut se placer à une distance grande devant la taille typique de l'émetteur pour que l'approximation d'ondes sphériques est valide.
- Il vaut mieux placer des blocs de mousse entre l'émetteur et le récepteur pour éviter que les ondes réfléchies sur la table ne provoquent des interférences
- On n'a certes plus le problème du paquet d'onde étalé, mais cette méthode nécessite d'avoir un étalon (une longueur de référence connue précisément à partir de laquelle on commence à balayer les distance). C'est donc peu utile en télémétrie puisque ça signifie qu'en pratique il faudrait être en mesure de déplacer l'objet dont on souhaite connaître la distance...

1.2 Ondes gravito-capillaires

✍ FLTCLD p503

Les ondes à la surface de l'eau vérifient la relation de dispersion

$$\omega^2 = gk(1 + l_c^2 k^2)\tanh(hk) \tag{29.2}$$

avec $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ la longueur capillaire et h la hauteur d'eau. Dans le cadre des eaux profondes ($h \gg \lambda$), $\tanh(hk) \simeq 1$ et on a donc

$$\omega^2 = gk(1 + l_c^2 k^2) \tag{29.3}$$

Relation de dispersion des ondes gravito-capillaires

✍ FLTCLD p503 ⏲ 10 min

Observer des ondes gravito-capillaires à l'aide d'une cuve à ondes. Un excitateur crée des ondes à la surface de l'eau à une fréquences imposée.

Régler un stroboscope pour "figer" l'image des ondes sur le côté de la cuve à ondes. Mesurer alors λ. On pourra projeter l'image des ondes avec un lentille ou bien la filmer avec un appareil photo.

Tracer $\frac{\omega_2}{k} = f(k^2)$ et comparer les valeurs de g et de la tension de surface γ obtenues aux valeurs tabulées.

2 Conditions aux limites

Nous venons de voir la propagation libre, dans un milieu uniforme, mais que se passe-t-il lorsque l'on rencontre une interface ? On fixe une condition aux limites.

2.1 En mécanique : ondes stationnaires de la corde de Melde

Ici la condition aux limites fixée est celle d'un noeud de vibration de chaque côté de la corde. La corde est usuellement susceptible de propager des ondes transverses de périodes variées, mais celles-ci se refletent sur les surfaces telles que les mur.

Réflexion dans une corde

✍ ⏲

Deux choix :

- **Réflexion sur le montage de la corde de Melde**, on fait un pulse toutes les secondes, et on regarde comment ça se reflète.
- **Réflexion sur une grosse corde/un ressort**, on attache une corde d'un côté de la salle, et on fait à la main pour observer la réflexion.

Que se passe-t-il avec une onde harmonique ? Elle se superpose avec son reflet, ce qui fait qu'on sélectionne des modes.

Mise en marche de la corde de Melde

✍ ⏲

On allume le dispositif pour montrer en parlant.

On voit bien que là on ne voit plus une onde propagative, mais des fuseaux pour certaines longueurs d'onde, du fait de l'effet fabry-perot. Une condition aux limites réflexion, ça impose une onde stationnaire.

Si on considère (première approximation) que les deux côtés sont des noeuds, la quantification des fréquences donne une onde sinusoïdale de pulsation.

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

remarque : le forçage d'un côté entraîne l'apparition d'une petite variation, qui décale un peu les noeuds, mais en pratique c'est négligeable. On a alors divergence de l'amplitude aux résonances, mais ça c'est de la théorie.

Corde de Melde

✍ ⏲

- Choisir une corde P99 (la plus homogène possible) mesurer la longueur et sa masse
- Installer la avec potence, poulie et masse
- En préparation, mesurer la fréquence de résonance pour plusieurs modes en s'en gardant un facile pour devant le jury
- Faire une mesure devant le jury en détaillant le protocole (même si il est assez léger)
- Tracer f(n) et modéliser par une fonction affine et vérifier la modélisation linéaire.
- On peut en profiter pour remonter à la vitesse de propagation de l'onde qui a donné naissance à l'onde stationnaire, c'est un peu hors sujet.

Normalement $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. On peut vérifier ça.

2.2 Application de la corde de Melde : les harmoniques de guitare/des tuyaux

Quand on joue de la guitare, on déforme la corde avec une forme initiale qui n'est pas sur ses harmoniques. On excite alors tous les modes, et ils se mettent à résonner, ce qui donne sa "couleur" au son de la guitare. On a d'ailleurs pas la même couleur si l'on joue au milieu ou à l'extrémité d'une corde. En appuyant sur la corde, on y impose un noeud. On va donc exciter tous les modes présentant un noeud à cet endroit.

En imposant une condition limite dans la corde on peut exciter des harmoniques précises.

Harmoniques de guitare

✍ https://youtu.be/CwejeOHD_Ak

Prendre une guitare, ukulélé ou une ficelle tendue sur une boite quelconque, et faire des harmoniques. Mettre en évidence l'existence de ces multiples.

do-do-sol-do-mi-sol-~sib-do.

Les cuivres et bois marchent pareil, sauf qu'un cuivre combine l'existence d'harmoniques au changement de longueur pour jouer.

2.3 En optique : Snell-Descartes (tampon)

✍ Garing ondes EM p.226

La lumière est comme une onde électromagnétique. Le changement de milieu implique la continuité de la composante tangentielle de $\overrightarrow{E}$ et de la composante normale de $\overrightarrow{B}$. On peut alors remonter aux lois de Descartes.

Lois de Snell-Descartes

✍ Garing p226

On utilise un laser, le demi-disque de plexi + graduation en angle (P4.4). On veut vérifier : $i_1 = i_1'$ en réflexion et $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ en réfraction.

Réaliser l'expérience pour plusieurs angles d'incidence (sur la face plane) et on mesure l'angle de sortie. On trace $1 \times \sin i_1$ en fonction de $\sin i_2$. On obtient bien une droite, et on peut en déduire l'indice du bloc de plexi (qui n'est pas très bien tabulé.

Remarques

- Avoir une référence précise pour l'indice du plexiglas est compliqué car cela dépend de sa composition exacte et de sa vieillesse.
- On peut aussi faire arriver le laser sur la face ronde du plexi, ce qui est plus facile à faire que de taper bien au milieu de l'autre face.

2.4 En électricité : impédance du câble coaxial (tampon)

✍ Quaranta 4 et Hprépa à faire rapidement, ce qui est interressant c'est de discuter

En électricité, on a une bonne vision de ce qu'est une impédance, c'est le rapport $Z = \frac{u}{i}$. On va illustrer l'effet de l'impédance terminale sur un câble coaxial. Pour avoir une expression simple de Z, on suppose le modèle sans perte.

On modélise un câble coaxial comme une circuit LC d'inductance linéique Λ et de caapicté linéique Γ. L'impédance du câble veut alors

$$Z_{\text{câble}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Le coefficient de réflexion à la sortie du câble est alors :

$$R = \frac{Z - Z_{\text{câble}}}{Z + Z_{\text{câble}}} \tag{29.4}$$

Mesure de l'impédance d'un câble coaxial

✍ ⏲

On relie une entrée du câble à un GBF et un oscilloscope. On envoie un burst sinusoïdal (1 cycle, $f = 5$ MHz car le coax est un passe-haut, amplitude 5 V, 1 ms entre chaque burst). On voit le signal réfléchi sur l'oscilloscope donc on en déduit la vitesse c du signal (on attend $2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$).

Ensuite, on placer une boîte à décade de résistance en sortie du câble et on cherche la résistance qui annule le signal retour sur l'oscilloscope (adaptation d'impédance). On trouve l'impédance Z du câble. On attend 50 Ω.

On a ici imposé des conditions d'interface en laissant globalement un degrés de liberté à l'onde. On peut décider de faire un confinement sur deux dimensions d'une propagation à 3.

3 Propagation guidée

On se place dans le cadre d'un milieu non dispersif pour les ondes considérées, ici l'air et les ondes centimétriques. La relation de dispersion est donc $c = \lambda f$.

3.1 La relation de dispersion du banc hyperfréquences

Description du banc hyperfréquence :

- Émetteur : diode Gunn alimentée par une tension de 10V. (cf. Notice)
- Isolateur : Il protège l'oscillateur à diode Gunn afin que l'onde réflechie ne revienne pas et ne détériore pas la diode.
- Atténuateur : Il permet de choisir la quantité d'énergie que l'on souhaite. Elle est réglable à l'aide d'un vernier.
- Ondemètre : il permet de récupérer la fréquence de résonance (à l'aide d'une courbe d'étalonnage fournie).
- Ligne de mesure : La ligne de mesure est une section de guide ayant une fente longitudinale. Une antenne parallèle au champ électrique y est insérée et permet de prélever la tension le long de la ligne grâce à un chariot. Ainsi on peut retrouver les nœuds de l'onde stationnaire et ainsi la longueur d'onde.
- Impédance terminale : une plaque métallique, rien ou un cornet.

Théorie : Les seuls modes qui se propagent dans la cavité sont les transverses électriques m, n, avec m et n des entiers, et a et b les dimensions du guide d'onde.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2} \tag{29.5}$$

Les fréquences de coupures (passe haut) sont alors $f_{m,n} = \frac{c}{2}\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$.

Banc hyperfréquences : vérification de la relation de dispersion

✍ Hprepa, Quaranta V ⏲

Pour cette expérience, mettre une plaque de métal en sortie du banc, ça fait réflexion totale (hypothèse vérifiée plus tard).

Vérifier la relation de dispersion à l'aide de l'ondemêtre et de la courbe d'étalonnage fournie. tracer fréquence(longueur d'onde) et bam.

3.2 Influence des conditions aux limites

On enlève la pièce métallique, et on veut propager dans l'espace autour du banc. On peut pour étudier cela mesurer le taux d'ondes stationnaires, le TOS. Il est défini à partir de l'énergie totale (onde incidente+ réfléchie) suivant que l'onde réfléchie est en phase ou en opposition de phase avec l'incidente.

$$TOS = \frac{E_{max}}{E_{min}} = \frac{1+|r|}{1-|r|} \tag{29.6}$$

Mesure du TOS

✍ ⏲ 10mn

On cherche ici à caractériser plusieurs conditions limites différentes. On essaye de ne rien mettre, de mettre une pièce de métal et de mettre un cornet.

Pour caractériser chaque condition limite on cherche à déterminer le coefficient de réflexion de chacune d'elles, que l'on trouve en mesurant le TOS. Pour mesurer le TOS, on se place sur un minimum d'intensité de l'onde sur la ligne de mesure, on note l'atténuation (de l'atténuateur) initiale A_1 et l'amplitude de l'onde (mesurée à l'antenne).

On se place ensuite à un maximum de l'onde et on atténue l'amplitude de l'onde à l'aide de l'atténuateur de telle sorte que l'amplitude du maximum vaille désormais celle mesurée pour le minimum (pour mesurer plus précisément les faibles amplitudes du signal on peut utiliser un voltmètre plutôt que l'oscilloscope.) On note ensuite la valeur de l'atténuation A_2.

$$TOS = 10^{\frac{A_2 - A_1}{20}}$$

TOS(metal)>TOS(libre)>TOS(cornet) ; on discute des impédences.

3.3 Acoustique des tubes

Les tubes ont eux une accoustique riche, puisqu'ils sont habités par des harmoniques de fonctions de Bessel. Cependant on a un lien entre longueur et note émise, avec L la longueur et d le diamètre du tube. Cette équation

compense le fait que le point exact auquel une onde sonore se reflète à une extrémité ouverte n'est pas parfaitement à la section d'extrémité du tube, mais une petite distance en dehors du tube.

$$f_n = \frac{nv}{2(L+0.8d)} \simeq \frac{nv}{2L} \qquad \text{Pour un tube ouvert}$$

$$f_n = \frac{(2n-1)v}{4(L+0.4d)} \simeq \frac{nv}{2L} \qquad \text{Pour un tube fermé}$$

Tube résonnant

✍ ⏲

Frapper le tube avec une tong, cela émet un son. Retrouver sa fréquence et faire une régression pour montrer que l'on a bien ce que l'on voulait. Il peut être intéressant de faire la dépendance en d.

On peut également faire la petite expérience de boucher le tube d'on côté, et observer qu'on rend la note une octave plus basse, signe de la division de fréquence par 2.

Conclusion

L'impédence de sortie ça compte, et les effets de conditions au limites sont nombreux. Il est important de les maitriser et de les reconnaitre.

MP 30

Acoustique

Commentaires du jury

- **2017 :** Ce montage se limite souvent à la mesure de la célérité du son dans l'air et à l'étude du diapason. L'utilisation de la représentation de Lissajous pour mettre en évidence les passages en phase n'est pas généralisée. L'utilisation d'émetteurs et récepteurs ultrasonores est répandue, mais leur principe de fonctionnement doit être connu. Par ailleurs, certains dispositifs commerciaux conduisent à des réflexions parasites qui perturbent les mesures.
- **2014-2016 :** Les phénomènes de réflexion/transmission et d'impédance ont aussi leur place dans ce montage. En outre le jury apprécie qu'on ne se limite pas à la propagation dans l'air ni à une gamme de fréquences restreinte aux fréquences audibles. Le montage ne doit pas se limiter à des mesures de la célérité du son. Signalons enfin que les mesures d'atténuation des ondes acoustiques dans l'air qui ont été proposées par les candidats, n'ont pas donné de résultats probants.
- **2012 :** On peut penser : (i) aux phénomènes de réflexion-transmission, d'interférences et de diffraction, de modes... (ii) aux notions d'impédance acoustique, de timbre, de hauteur, d'effet Doppler... (iii) aux nombreuses applications : instruments de musique, sonar, échographie.

Bibliographie

✍ *CAPES*, **Duffait** ⟶
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶
✍ **Quaranta I** ⟶
✍ *Rhéophysique, ou comment coule la matière*, **Oswald** ⟶ Ondes acoustiques dans le dural

1 Vitesse de propagation 1278
1.1 Dans l'air en fonction de la température 1278
1.2 Dans d'autres milieux 1279
2 Caractère ondulatoire 1281
2.1 Interférences 1281
2.2 Effet Doppler 1282
2.3 Battements acoustiques (Tampon) 1283
3 Application à l'acoustique 1283
3.1 Corde vibrante 1284
3.2 Acoustique des tubes 1285

Introduction

1 Vitesse de propagation

1.1 Dans l'air en fonction de la température

✍ FLTCLD

La célérité c d'une onde acoustique dans un gaz parfait peut être exprimée en fonction de la température T grâce à l'expression :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{30.1}$$

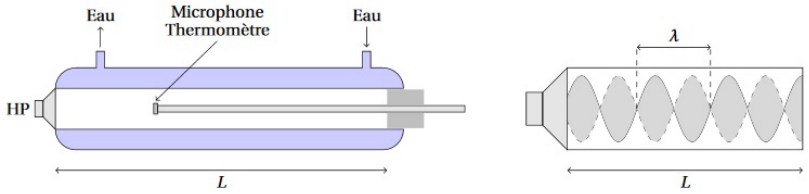
avec γ le coefficient isentropique (ou adiabatique) du gaz, R la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz parfait.

On se propose de vérifier cette expression en utilisant le tube de Kundt. Il s'agit d'un tuyau circulaire de longueur L rempli d'air et thermolisé grâce à un bain thermostaté. Un haut-parleur émet à l'entrée du tube un son qui se réfléchit aux extrémités du tuyau. On a alors des ondes stationnaires. On détecte les noeuds et les ventres de l'onde stationnaire grâce à un microphone placé sur une tige que l'on peut déplacer dans le tube. Un thermomètre est également relié à la tige pour mesurer T.

Les fréquences de résonance du tube de Kundt s'expriment en fonction de sa longueur L selon l'expression

$$f_n = (n+1)\frac{c}{2L} \qquad \text{avec } n \text{ un entier naturel}$$

Connaissant l'ordre de grandeur de c, on en déduit que l'ordre de grandeur de la fréquence du fondamental.



Dépendance de c avec la température

✍ FLTCLD

Matériel :

- tube de Kundt + bain thermostaté
- haut-parleur + GBF
- tige avec le micro et le thermocouple
- oscilloscope

On commence à température ambiante. Noter la valeur de la température ambiante T_{amb} dans le tube avec le thermocouple.

Alimenter le HP avec le GBF (amplitude de 2 V) et commencer vers $f \simeq 2$ kHz.

Mettre la sortie du GBF en voie 1 de l'oscilloscope et la sortie du microscope en voie 2 et passer en mode XY. Trouver une fréquence pour laquel on a une droite et non pas une ellipse (méthode de Lissajous). On a alors trouvé une fréquence de résonance. Mesurer cette fréquence à l'oscilloscope.

Déplacer le micro pour repérer les noeuds et le ventres de l'onde stationnaire. En déduire λ en prenant le plus de minima et de maxima possibles pour être le plus précis possible.

Répéter l'opération pour différentes températures : remmtre la tige dans le tube, **attendre la thermalisation pendant environ 10 minutes**, mesurer la température dans le tube, trouver la fréquence de résonance, mesurer λ.

Tracer $c^2 = f(T)$. On peut en déduire γ en sachant que $R = 8.314\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ et $M = 29$ g/mol.

Curieusement, l'erreur sur la mesure de la cavité dans le tube de Kundt est non négligeable. Il est difficile de prévoir la taille exacte de la cavité à cause de la position un peu incertaine du haut parleur d'une part et et la paroi épaisse en verre à l'autre bout. Au mètre ruban, la précision n'est pas non plus exceptionnelle, et une incertitude de 2cm semble raisonnable. L'erreur sur la température est de l'ordre de 1K (pertes thermiques, microphone non collé au thermocouple, thermocouple qui donne une valeur qui fluctue légèrement, et surtout une erreur systématique ... Changez de thermocouple pour voir !). En tout et pour tout, 1K d'incertitude semble raisonnable. Enfin, il y a la précision sur l'estimation de la fréquence de résonance. Celle ci est faible, et en général négligeable devant le reste. On laisse Regressi s'occuper du calcul d'incertitude, qui prend donc en compte l'incertitude combinée entre l'incertitude expérimentale ET l'incertitude sur l'ajustement de ces mêmes données expérimentales avec un modèle linéaire, ou affine.

Remarques

- Le tube de Kundt a une fréquence de coupure basse de l'ordre de 4 kHz. Rester en dessous de cette valeur est crucial pour garantir qu'il n'y a qu'un seul mode dans le tube.
- Le HP n'impose pas un ventre de vibration à l'entrée du tube.
- On se place à la résonance pour que λ ne dépende pas de T.

1.2 Dans d'autres milieux

Nous allons mesurer la vitesse du son dans deux milieux : l'eau et le dural (alliage Al/Cu). Pour cela, on utilise la méthode du temps de vol (faisable aussi dans l'air mais bon pas l'temps d'naiser).

1.2.1 Dans l'eau

Mesure de c dans l'eau

✍ ⏲

Matériel : dispositif P0.28 avec le bloc de dural, GBF, oscilloscope, pinces croco

Relier le bloc de dural à la masse de l'oscilloscope avec les pinces croco. En effet, le signal reçu est bruité à cause de la propagation d'ondes électromagnétiques entre les transducteurs dans l'eau, et relier le dural à la masse atténue cet effet.

Cacher le bloc de dural dans un coin où il ne gène pas la propagation des ondes dans l'eau – pour le moment il ne nous intéresse pas. Alimenter un transducteur avec le GBF (amplitude 10 V, $f = 420$ kHz. Soigner l'alignement des transducteurs pour maximiser le signal reçu et chercher la fréquence de résonance des transducteurs (autour de 420 kHz).

Envoyer des bursts sinusoïdaux avec le GBF à cette fréquence (burst espacés de 10 ms).

Mesurer le temps de vol t_{eau} d'une onde pour parcourir la distance d entre les deux transducteurs, et en déduire

la vitesse du son dans l'eau c_{eau}. On attend $c_{\text{eau}} \simeq 1.48 \times 10^3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Les incertitudes sont données par la formule classique de propagation des incertitudes.

Précision de la mesure

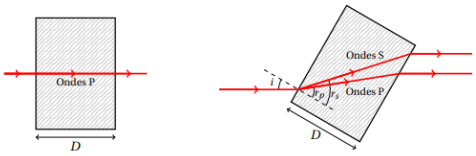
Ne faire qu'un seul point est peu précis, il faudrait mesurer les temps de propagation pour différentes distances entre l'émetteur et le récepteur et faire une régression linéaire pour que ça soit mieux. Cependant, on n'a pas le temps de faire ça proprement et il est difficile de bouger l'émetteur et le récepteur dans la cuve P0.28. On va donc s'en contenter pour illustrer le principe de la méthode du temps de vol.

1.2.2 Dans le dural

✍ Oswald p211

Dans un solide isotrope, deux types d'onde acoustique peuvent se propager :

- Les ondes de compression (ondes P) sont longitudinales et se déplacent à la vitesse
$$c_P = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$
avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et ρ la masse volumique.
- Les ondes de cisaillement (ondes S) sont transversales et se déplacent à la vitesse
$$c_S = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} < c_P$$
Les ondes S ne peuvent se propager dans les fluides (car elles sont transversales).



On obtient, de manière analogue à Snell-Descartes où les vitesses jouent le rôle d'indice optique,
$$\frac{\sin i}{c_{\text{eau}}} = \frac{\sin r_P}{c_P} = \frac{\sin r_S}{c_S}$$
On se limite à un angle d'incidence i très faible pour l'onde S par considérer qu'elle parcourt une distance D.

Mesure de c_P et c_S dans le dural

✍ 🕐

On utilise le même matos que pour mesurer c_{eau}.

Mesure de c_P :

Placer le bloc de dural entre les transducteurs dans le sens de la longueur ($D = 8.5$ cm). Orienter ses surfaces perpendiculairement à l'onde acoustique pour être en incidence normale.

Mesurer le temps de vol t_P de l'onde. On a alors

$$c_P = \frac{D}{t_P - \dfrac{d-D}{c_{\text{eau}}}}$$

avec d la distance entre les transducteurs. Pour le dural, $E \simeq 73$ GPa, $\nu = 0.33$ et $\rho = 2.8 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$ donc on attend $c_P = 6.2 \times 10^3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Mesure de c_S :

Incliner le bloc de dural pour avoir une incidence faible. On observe alors l'apparition d'un second burst dans le signal reçu, correspondant aux ondes S.

Mesurer t_S. On a alors

$$c_S = \frac{D}{t_S - \dfrac{d-D}{c_{\text{eau}}}}$$

On attend $c_S = 3.1 \times 10^3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

2 Caractère ondulatoire

L'acoustique dans les milieux est très complexes en raison de la géométrie des lieux, par exemple l'opéra de Sydney a une terrible acoustique et à coûté 102 millions de dollars. La conception et l'accordage d'instruments de musique sont aussi des points clés car une très faible erreur a des conséquences terribles. Cela est dû au caractère ondulatoire du son, et donc à sa capacité à faire des interférences et battements.

2.1 Interférences

✍ Quaranta I à « Sons (propagation libre des) » p352, Duffait CAPES p.287

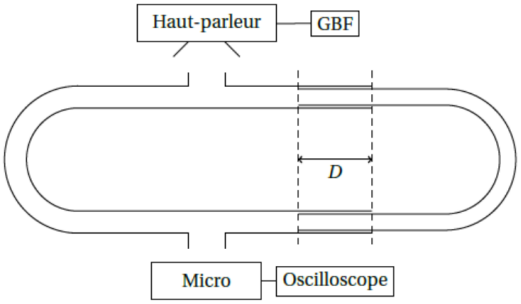


FIGURE 4.5 – Principe du trombone de König.

Le trombone de König, schématisé en figure 4.5, permet d'illustrer le phénomène d'interférence entre deux ondes acoustiques.

On envoie à l'aide d'un haut-parleur une onde à l'entrée du trombone. Une partie de l'onde parcourt la branche gauche du trombone de longueur fixe. L'autre partie de l'onde parcourt la branche droite du trombone qui est mobile. En déplaçant la coulisse d'une distance D, on faire varier la longueur de la branche de $2D$. Au niveau de la sortie, les deux ondes se rejoignent et interfèrent. Entre deux maxima ou deux minima successifs, la différence de chemin acoustique a varié d'une longueur d'onde, soit $\lambda = 2D$.

Le trombone étant un système fermé, il peut également développer des ondes stationnaires et un phénomène de résonance à l'intérieur de celui-ci, mais cela n'empêche pas l'observation des interférences.

Trombone de Koenig

✍ ⏲ 3mn

Fixer des cornets P71.21 sur les embouchures du trombone de Köenig P72.2. Placer un haut-parleur alimenté par un GBF devant l'un des cornets du trombone. Placer un micro devant l'autre cornet, et le relier à un adaptateur P74.38 puis à un oscilloscope. Générer une onde de fréquence fixe avec le haut-parleur (f = 1 kHz par exemple). Déplacer la coulisse et relever les positions D_n correspondant aux n maxima (ou minima) successifs. On pourra utiliser le mode Haute résolution de l'oscilloscope.

Réaliser la régression linéaire de D_n en fonction de n et remonter au coefficient directeur $\frac{\lambda}{2}$. Remonter ensuite à la vitesse du son dans l'air $c_{\text{air}} = f\lambda$.

2.2 Effet Doppler

L'effet Doppler décrit le changement de fréquence perçue provoquée par le changement de la distance émetteur-récepteur. Cet effet va être illustré sur un banc où on a un émetteur piézoélectrique mobile et un récepteur fixe.

La théorie de l'effet Doppler permet d'exprimer la fréquence f_r du signal reçu par le récepteur en fonction de celle du signal monochromatique émis par l'émetteur f_e se déplaçant à la vitesse constante v_e par rapport au récepteur :

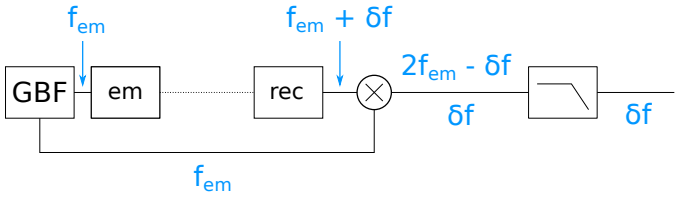
$$f_r = \frac{1}{1 - \frac{v_e}{c}} f_e \tag{30.2}$$

avec c la vitesse du son dans l'air.

Dans le cas réaliste où $v_e \ll c$, on obtient $f_r \simeq f_e + \delta f$ avec $\delta f = \frac{v_e}{c} f_e \ll f_e$. Le signal reçu par le récepteur est donc constitué de deux fréquences avec l'une très faible devant l'autre.

On veut obtenir δf pour en déduire v_e. On doit donc comparer la fréquence émise f_e et celle reçue $f_e + \delta_f$, qui sont très proches. Pour séparer δf, on procède en 2 étapes :

1. On multiplie le signal reçu par un signal de fréquence f_e. On obtient alors la somme 2 signaux de fréquence $f_r + f_e$ et $f_r - f_e$, *i.e.* de fréquence $2f_e + \delta f$ et δf. C'est l'*hétérodynage*.
2. On filtre ensuite cette somme de signaux avec un passe-bas pour ne récupérer que la composante de fréquence δf



Effet Doppler

✍ FLTCLD ⏲

On utilise le banc à effet Doppler dans la collection avec l'émetteur et le récepteur ultrasonore (l'émetteur émet à $f_e = 40$ kHz et alimenté avec du 10 V). Les signaux de l'émetteur et du récepteur sont envoyés sur un multiplieur suivi d'un filtre passe-bas et on observe le signal de sortie à l'oscilloscope.

Lorsque l'émetteur n'est pas en mouvement, on ne détecte aucun signal. En revanche, dès que ce dernier a une vitesse non nulle (constante, de préférence) on enregistre un signal de fréquence δf. On détermine l'incertitude sur

δf avec la méthode de notre choix. Pourquoi ne pas utiliser le compteur ? Ou une FFT ?

Deux possibilités viennent ensuite :

- **Mesurer la vitesse du son**

  On mesure la vitesse de l'émetteur avec des détecteurs séparés d'une distance fixe, qui mesurent le temps de parcours entre ces deux émetteurs (en vrai, c'est les mêmes détecteurs que pour le TP sur la chute d'une bille). Ainsi on remonte à une valeur plutôt précise de la vitesse v_e de l'émetteur.

  On trace ensuite $\delta f = f(v_e)$ et on fait une régression linéaire. On doit avoir une pente $a = \frac{f_e}{c}$. On en déduit c avec une incertitude

$$u(c) = c\sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(f_e)}{f_e}\right)^2}$$

Mesurer précisément la vitesse de l'objet

On connaît la vitesse du son (d'une façon peu importe laquelle), et on a

$$v = c\left(1 - \frac{1}{1 - \dfrac{\delta f}{f}}\right) = \frac{c\delta f}{f - \delta f} \tag{30.3}$$

Incertitude :

$$u(v) = v\sqrt{\left(\frac{u(c)}{c}\right)^2 + \left(\frac{u(\delta f)}{\delta f}\right)^2 + \left(\frac{u(f) + u(\delta f)}{f - \delta f}\right)^2} \tag{30.4}$$

2.3 Battements acoustiques (Tampon)

Les battements sont ce que l'on utilise pour accorder une guitare au diapason.

Si l'on prend deux diapasons et qu'on les fait sonner ensemble, on a une unissons, mais comme leur fréquence est légèrement différente, on peut entendre, par exemple si l'un des deux est chaud, des battements.

Étude des battements

✍ ⏲

Faire battre deux diapasons, l'un chauffé avec un bec Bunzen si il faut.

3 Application à l'acoustique

intro :diapason wow la caisse de résonance c'est pour avoir une résonance wow incroyable

Donc les considérations physiques sont utiles en acoustique ? :o

3.1 Corde vibrante

Les cordes sous la tension, comme dans des instruments tels que des luths, des harpes, guitares, pianos, violons et ainsi de suite, ont des fréquences de résonance directement liées à la masse, à la longueur, et à la tension de la corde. La longueur d'onde qui créera la première résonance sur la corde est égale deux fois la longueur de la corde. Des résonances plus élevées correspondent aux longueurs d'onde qui sont des divisions de nombre entier de la longueur d'onde fondamentale. Les fréquences correspondantes sont liées à la vitesse v d'une onde voyageant en bas de la corde par l'équation :

$$f = \frac{nv}{2L}$$

où L est la longueur de la corde (pour une corde fixe aux extrémités) et $n = 1, 2, 3...$ La vitesse d'onde dans une corde ou un fil est liée à sa tension T et à la masse par unité de longueur μ :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Ainsi la fréquence est liée aux propriétés de la corde par l'équation :

$$f = \frac{n\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}}$$

où T est la tension, le μ est la masse **linéique**, et m est la masse totale.

Une tension plus élevée et des longueurs plus courtes augmentent les fréquences de résonance. Quand la corde est excitée avec une fonction impulsive (pincements de doigts ou coups de marteau), la corde vibre à toutes les fréquences actuelles dans l'impulsion (une fonction impulsive contient théoriquement « toutes les » fréquences). Ces fréquences qui ne sont pas l'une des résonances sont rapidement filtrées et atténuées, ce qui laisse subsister uniquement les vibrations harmoniques que nous entendons comme note musicale.

Fréquence de vibration d'une corde

✍ La tête de Yohann

(beaucoup de) masses pour stabiliser les supports ... et 2 supports microphone (le gris (sans pile) et le noir (à pile) fonctionnent assez bien) la tige métallique biseautée exprès (merci à Benoît Capitaine !) le filtre et l'ampli (nous avons utilisé "le Stanford"), et une carte d'acquisition avec Latis Pro

On prend une corde fine en nylon dont on peut faire varier la tension en accrochant une masse M à une de ses extrémités. Alors $T = Mg$.

Tracer la régression fréquence de résonance - tension, pour montrer que c'est bien une jolie droite. On fait également la régression sur la masse linéique de la corde si c'est possible. Et on peut aussi faire la régression sur la longueur, mais ça on peut le garder pour la manip suivante.

Détail des incertitudes : Pour la fréquence mesurée, c'est difficile de le faire autrement qu'à l'accordeur. Et même à l'accordeur la corde risque de ne pas résonner assez fort ou assez longtemps, pour la faire résonner plus fort : utiliser une boite de conserve (façon talkie walkie d'enfants). Une autre astuce est de perdre en précision en le faisant à l'oreille, en comparant à une fréquence de référence, ou à un piano. https://www.szynalski.com/tone-generator/. L'erreur sur une fréquence f est alors de l'ordre de $f \times 2^{1/24} - f$ pour une personne non musicienne et de $f \times 2^{1/24} - f$ pour un musicien, car pour passer d'une note à la suivante dans la gamme occidentale à 12 notes, on fait $\times 2^{1/12}$.

On peut faire l'acquisition avec Latis : une acquisition de 2 s est suffisante, pour 100000 points, ce qui fait un pas d'échantillonnage de 50 μs (OK pour Shannon). Enfin, on fait la transformée de Fourier du signal obtenu. On retrouve un fondamental avec des harmoniques.

Maintenant, on se propose de vérifier la décroissance des harmoniques du spectre en $\frac{1}{n^2}$ où n est le numéro du mode. Dans le spectre de Fourier, attention à ne pas tirer de conclusion trop hâtive, puisque le micro possède une fonction de transfert qui n'est pas plate. Il faut le vérifier, mais on l'a déjà fait normalement à ce stade.

Corde Vibrante : décroissance des harmoniques (plus dur)

✍ ⏲

Prendre une guitare si possible pour faire cette expérience. Mettre en évidence les harmoniques avec la méthode discuté dans le montage MP29.

On commence par étalonner la réponse en fréquence du micro. Ensuite, prendre la TF du signal. Il faut absolument choisir une fenêtre manuelle et prendre le début du signal, parce que la décroissance des modes n'est pas uniforme (c'est ce que l'on veut montrer !). Les hautes fréquences risquent d'être absentes ou pire ne pas être des multiples du fondamental, même si cet effet est faible. L'explication est donnée en détail dans le Garing pour ceux que ça intéresse. C'est un effet d'anharmonicité lié à l'épaisseur de la corde (sur la corde de Mi grave choisie, il y a un fil de nylon autour duquel on réenroule un câble, tout ça pour augmenter la masse linéique et changer la fréquence.).

La partie rigolote commence alors, sur votre spectre de Fourier, vous notez la hauteur des pics pour chaque mode. Ensuite il faut pondérer chaque hauteur par un coefficient que vous déterminez grâce à l'étalonnage du micro réalisé précédemment. Enfin, il reste à tracer le ln de l'amplitude en fonction du ln de n où n est le numéro du mode.

Si tout va bien, la pente est de -2. Je discute des incertitudes dessous.

$\ln(A) = \alpha \ln n + b$, avec b qui tend vers 0 et α=-2

Incertitudes : Sur la hauteur du pic, il suffit de l'estimer à partir de l'allure de la transformée de Fourier sous Latis Pro. En prenant suffisamment de points, la TF est bien résolue et s'il y a deux pics très proches, prendre l'écart de hauteur entre les deux pics est une borne supérieure de l'incertitude raisonnable.

Concernant la réponse du micro, et donc le coefficient de pondération qui intervient dans le calcul de A, c'est plus délicat, parce qu'à basse fréquence, le micro utilisé coupe les basses fréquences ! Pour estimer les incertitudes, il faut considérer "l'épaisseur" du signal sinusoidal sous Latis Pro. Attention, l'estimation de votre incertitude dépend du calibre utilisé sous Latis Pro, puisqu'elle est bornée inférieurement par le pas d'acquisition du logiciel (si vous observez une "quantification" du signal, changez de calibre).

3.2 Acoustique des tubes

Les tubes ont eux une acoustique plus riche, puisqu'ils sont habités par des harmoniques de fonctions de Bessel. Cependant on a aussi un lien entre longueur et note émise, avec L la longueur et d le diamètre du tube. Cette équation compense le fait que le point exact auquel une onde sonore se reflète à une extrémité ouverte n'est pas parfaitement à la section d'extrémité du tube, mais une petite distance en dehors du tube.

$$f_n = \frac{nv}{2(L+0.8d)} \simeq \frac{nv}{2L} \qquad \text{Pour un tube ouvert}$$

$$f_n = \frac{(2n-1)v}{4(L+0.4d)} \simeq \frac{nv}{2L} \qquad \text{Pour un tube fermé}$$

Tube résonnant

✍ ⏲

Frapper le tube avec une tong [a] (comme si on voulait boucher le tube), cela émet un son. Retrouver sa fréquence et faire une régression sur la longueur du tube pour montrer que l'on a bien ce que l'on voulait. Il peut être intéressant de faire la dépendance en d.

On peut également faire la petite expérience de boucher le tube d'on côté, et observer qu'on rend la note une octave plus basse, signe de la division de fréquence par 2.

a. https://youtu.be/W5sKXqA3puY

Conclusion

La musique, c'est bien <3

MP 31

Résonance

Bibliographie

✍ *Ondes mécaniques et diffusion p11* **Garing**	Corde le Melde
✍ *Dictionnaire de physique expérimentale tome I, p258* **Quaranta**	Modes résonants de la corde de Melde
✍ *Optique physique* **Taillet**	Fonctionnement du Fabry Pérot
✍ *Les lasers* **Dangoisse**	Fonctionnement des lasers (no joke)
✍ *Expériences d'optique à l'agreg de physique, p97* **Duffait**	Modes du laser via Fabry-Pérot
✍ *Fascicule d'optique p38*	Modes du laser via Fabry-Pérot
✍ *Mécanique p120* **Landau**	Résonance paramétrique

Expériences

- Circuit RLC
- Corde de Melde
- Oscillateur paramétrique
- Diapason

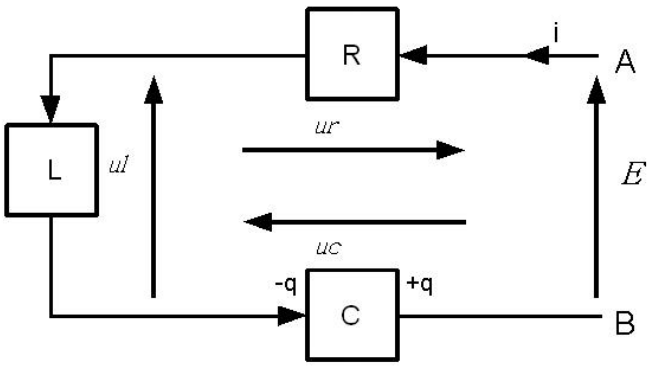
1 Mesure de facteur de qualité . . . 1288
1.1 RLC . . . 1288
1.2 Facteur de qualité du diapason . . . 1290
2 Corde de Melde . . . 1291
3 Etude des modes d'un Laser He-Ne à l'aide d'un Fabry-Pérot (FP) . . . 1292
4 Résonance d'un oscillateur paramétrique . . . 1294
5 Un meilleur oscillateur paramétrique . . . 1295
5.1 La théorie en bref . . . 1296
5.2 L'expérimental . . . 1296
6 Oscillateur à quartz, Q très élevé . . . 1298

Introduction

La résonance est un phénomène omniprésent en physique, on peut parfois vouloir l'éviter, et parfois s'en servir. Nous allons dans ce montage observer différents cas de résonances.

1 Mesure de facteur de qualité

1.1 RLC



https://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

Un circuit RLC est un système linéaire d'ordre 2, régi par l'équation

$$L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$

On va se mettre aux bornes de R (passe bande). On le regarde en régime imposé sinusoïdal, ce qui fait qu'on peut regarder en impédances complexes :

$$\frac{S}{E} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Les grandeurs d'intérêt sont :

- $\alpha = \dfrac{R}{2L}$
- $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- $\xi = \dfrac{\alpha}{\omega_0} = \dfrac{R}{C}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 1/2Q$
- $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta_{5\%}\omega} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$

On peut mesurer R à l'ohm-mètre et L et C au RLC mètre (dont la fréquence de travail est réglée sur 1 kHz, *i.e.* grosso modo la fréquence de résonance du montage).

Ici on se place à $Q > 1/2$, donc on a en réponse indicielle $I(T) = I_0 \exp(-\alpha t)\sin(\omega_d t) = I(T) = I_0 \exp(-\frac{\omega_0}{2Q}t)\sin(\omega_d t)$.

Ainsi Q correspond au nombre de pseudo périodes entre deux atténuations à 5% car ln(20)*2=2π.

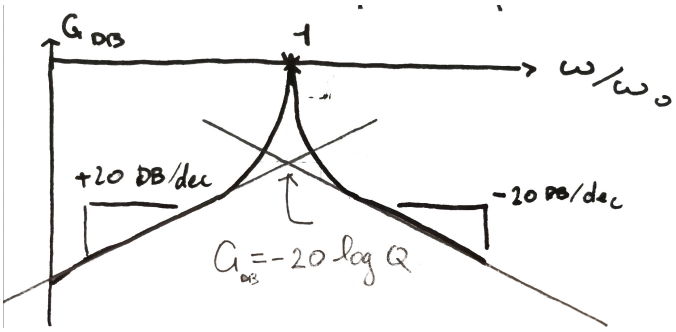
Q correspond aussi à la largeur de la résonance.

Les asymptotes du bode sont en $\frac{j\omega}{Q\omega_0}$ et $\frac{j\omega_0}{Q\omega}$. de plus

$$G_{DB} = 20\log G$$

Donc les asymptotes sont, en DB, à

$$-20\log Q \pm 20DB/decade$$



ÉVALUATION des grandeurs caractéristiques de la résonance en RÉPONSE CRÉNEAU

✍ ma tête ⏲

Faire un RLC quelconque, avec Q élevé (10-20), suivi en sortie par un AO en suiveur (entrée sur +, le - est relié à la sortie) (ca évite les fuites de courant, **ATTENTION À NE PAS SATURER, TOUT VÉRIFIER AVANT LA MANIP LIVE**) aux bornes de R (passe bande).

Expliquer le bousin

Faire en direct le schéma de l'ampli.

Bode en direct pour montrer que tu sais de quoi tu parles.

Montrer les oscillations à la réponse créneau et en déduire une évaluation de :

- Q (nb d'oscillations avant U=U_0*5%)
- ω_0, période des oscillations

On n'espère pas mieux que des incertitudes de 5% (estimation), ce qui est grossier.

Comparer aux valeurs théoriques.

Mesure des grandeurs en RSF

✍ ma tête ⏲

Passer en régime forcé sinusoïdal

Se placer autour de la résonance et trouver la résonance de fréquence à l'aide du GBF. Deux méthodes :

- Phase (ellipse des phases, méthode de lissajous), phase nulle entre entrée et sortie (droite en mode XY) => résonance
- Amplitude => maximum

Trouver ensuite le facteur de qualité :

- $G_{dB}(\omega_0 \pm \frac{1}{2}\Delta\omega)$=-3dB, et on a $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$. En mesurant le delta, on obtient Q.

Évaluer l'incertitude : $\delta Q = Q\sqrt{(\frac{\delta\omega_0}{\omega_0})^2 + (\frac{2\delta\omega_{-3dB}}{\omega_{-3dB}})^2} \simeq \frac{Q}{\omega_0}\sqrt{\delta\omega_0^2 + 4\delta\omega_{-3dB}^2}$

Comparer aux valeurs théoriques.

☕

Tracer le diagramme de Bode

✍ ma tête ⏲

Tracer le diagramme de bode en phase et en amplitude. Le faire en Préparation ?

Les asymptotes se croisent à -20log Q (si le gain est de 1). Il faudra peut-être amplifier.

Faire une régression linéaire (regressi ftw) sur les asymptotes.

On peut aussi faire un sweep.

1.2 Facteur de qualité du diapason

☕

Facteur de qualité du Diapason

✍ Quaranta méca p273 ⏲

On mesure la réponse temporelle du système à une impulsion (taper assez fort avec le marteau) et utliser les petits micros à mettre dans la caisse de résonance (plutôt que le gros micro). On utilise un déclenchement sur le PC avec latispro.

On obtient l'enveloppe si possible (détecteur de crête, faire un fit sur latispro, méthode de l'incrément logarithmique sur plusieurs paires de maxima) On en déduit la temps caractéristique $\tau = 1/_a lpha$ et donc on trouve $Q = \omega_0/2\alpha$

Remonter à la bande passante à partir de Q.

La caisse de résonance c'est de l'adaptation d'impédance (améliore transmission du son dans l'air) et de l'interférométrie (interférences constructives), donc double résonance. On veut $L = \lambda/4 = c/4f$

Remarque : calculer la finesse de la résonance et la comparer à l'écart entre deux notes.

Décrément logarithmique

Si $x(t) = x_m \cos(\omega t + \Phi) f(t)$, alors le décrément logarithmique vaut $D = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{f(t)}{f(t+T)}$
avec T la période du cosinus.
Dans le cas où $f(t) = \exp(-t/\tau)$, alors $D = T/\tau$. Or $Q = \omega_0 \tau/2$ donc on retrouve Q avec D.

En réalité un diapason a deux oscillateurs couplés, on peut mettre en évidence l'existence d'un deuxième mode sur le grand diapason géant (mode symétrique, antisymétrique, etc..) De manière générale, n oscillateurs couplés donnent n modes.

Si n est infini (limite continue), on a une infinité de modes, comme pour la corde de Melde.

2 Corde de Melde

• **Principe :** *Garing p11* On a une corde de longeur L attachée à une poulie et une masse en $x = 0$ et à un pot vibrant de l'autre côte en $x = L$ On a donc les CL $y(x = 0, t) = 0$ et $y(x = L, t) = F_0 \sin(\omega_f t)$. On a une équation différentielle de la forme

$$\ddot{y} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

avec T la tension du fil égale au poinds de la masse Mg et μ la masse linéique de la corde. pour cela, il faut supposer les déplacements petits et que selon y, la corde homogène et sans élasticité.

Si le forçage est de faible amplitude, on a quantification des modes de vibration avec $f_n = n \frac{c}{2L}$. tant que le forçage est sinusoïdale, on a réflexion totale en $x = 0$ et donc on observe une onde stationnaire (superposition de 2 OPP de sens de propagation opposée et de même amplitude) indépendamment de la fréquence d'excitation.

On peut cependant exciter la corde dans ses modes propres pour avoir **résonance en amplitude** de l'onde stationnaire. L'amplitude est limitée par des effets non linéaires (car l'amplitude devient grande) et d'autres paramètres comme la raideur/élasticité de la corde, les frottements, la dissipation de l'onde.

• **Expériences :**

Pour mesurer μ, on prend 20 m de ficelle ! (1 m de ficelle ne pèse pas lourd...)

Modes résonants de la corde de Melde

✍ Quaranta tome 1 p258 ⏲

Mettre en route le vibreur à une faible fréquence (10 Hz). Des ondes stationnaires sont observables. Augmenter la fréquence jusqu'à obtenir au milieu de la corde un ventre de grande amplitude : il s'agit du mode $n = 1$. Noter la fréquence du vibreur, on prend celle donnée par le GBF, ou on prend un fréquencemètre (a priori l'affichage du GBF se fait avec un fréquencemètre à 5 chiffre, on ne sort pas le stroboscope qui a une précision bien moins grande cf rapport de Jury). A noter qu'il faut toujours faire l'expérience dans le même sens à cause d'un phénomène d'hystérésis (inconnu de ma part).

Répéter (en préparation) l'opération jusqu'aux modes 6 ou 7.

Tracer alors f_n en fonction de $\frac{n}{2L}$ pour trouver c, et comparer à la valeur théorique $c_{theorique} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ où $T = Mg$, en prenant soin d'évaluer les incertitudes sur L, M, g et μ.

Facteur de Qualité

✍ ⏲

Refaire l'expérience précédente et retrouver le mode $n = 1$. Mesurer l'amplitude y_0 puis faire varier la fréquence d'excitation pour avoir une amplitude $\frac{y_0}{\sqrt{2}}$. On obtient deux valeurs autour de la fréquence propre f_1, on a donc la bande passante Δf.

On calcule alors le facteur de qualité $Q = \frac{f_1}{\Delta f}$. On peut aussi le faire pour les autres modes en préparation si il y a le temps. On attends $Q \simeq 50$.

• Vérification des hypothèses et discussion du modèle :

- Deux points qui peuvent expliquer un écart entre la valeur expérimentale trouvée et la théorie : la corde choisie n'est pas forcément très homogène donc la valeur de μ n'est pas forcément bien déterminée ; la théorie suppose que la corde a une longueur L entre un point qui oscille verticalement et un point fixe. La position du point fixe n'est pas forcément bien déterminé avec une poulie, une barre d'erreur plus grande est peut-être nécessaire. Le calcul suppose que l'amplitude des oscillations est faible, il est donc peut-être nécessaire de baisser l'amplitude ou de vérifier que les conditions sont respectées.
- On peut vérifier l'angle pour le mode 1 et calculer sa tangente pour vérifier l'hypothèse des petits angles
- à L fixée, on a une limite sur le nombre de modes car le vibreur impose un f_{max}. Or $f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ donc on peut augmenter le nombre de mode que l'on peut obtenir en diminuant la tension T (attention il faut que la corde reste tendue sinon on peut avoir des torsions et l'équation n'est plus valable).
- faire les mesures en faisant varier f dans le même sens (en augmentant ou en diminuant) car hystérésis dû au fait que la corde est faite de fibres torsadées qui se frottent les unes aux autres et qui disspient donc de l'énergie.

3 Etude des modes d'un Laser He-Ne à l'aide d'un Fabry-Pérot (FP)

✍ *Duffait p97, fascicule d'optique p37*

✍ *Sextant*, qui donne bien la méthode pour étaloner un FP

• Analyse théorique

Un laser émet un spectre de plusieurs raies discrètes, ce qui est visible avec une cavité d'analyse FP. Ces raies sont très rapprochées (donc longueur de cohérence grande) donc le détail du spectre n'est pas observable via Michelson qui ne permet pas d'atteindre des différences de marche suffisantes.

En effet, on définit la *finesse* d'un instrument car $\frac{\Delta f}{\delta f}$ où Δf est la distance entre 2 pics et δf est la largeur à mi-hauteur des pics. Pour le Michelson, elle vaut 2

$\Rightarrow$ On utilise un FP qui permet d'avoir une bien meilleur précision sur le spectre de la source grâce aux interférences multiples (cf *Taillet p108 et Houard p235* pour fonctionnement du FP et *Dangoisse* pour fonctionnement du laser). En effet, le FP a une finesse de l'ordre de 100.

Pourquoi les pics ont une largeur donnée ?

Déjà, les particules de gaz de la cavité sont en mouvement donc effet Doppler qui provoque un shift de fréquence et élargit le pic selon une Gaussienne.

En plus, les particules de gaz interagissent entre elles (provoque souvent des levées de dégénérescence) et ça élargit le pic selon un Lorentzienne.

La convolution d'une Gaussienne et d'une Lorentzienne donne un **profil de Voigt**. La largeur de ce profil c'est la largeur du pic.

On utilise un FP à miroirs sphériques confocal (foyer des deux miroirs confondus), appelé cavité de Melles Griot (P17.11), séparés d'une distance d. L'expérience est dans le *Duffait, p97.*

On envoie sur le FP un laser. Un rayon lumineux quelconque se superpose à lui même après 2 réflexions sur chaque miroir, parcourant un distance $4d$. La **résonance de cavité** se fait quand

$$4d = k\lambda \qquad \text{où} \qquad k \in \mathbb{N}$$

.

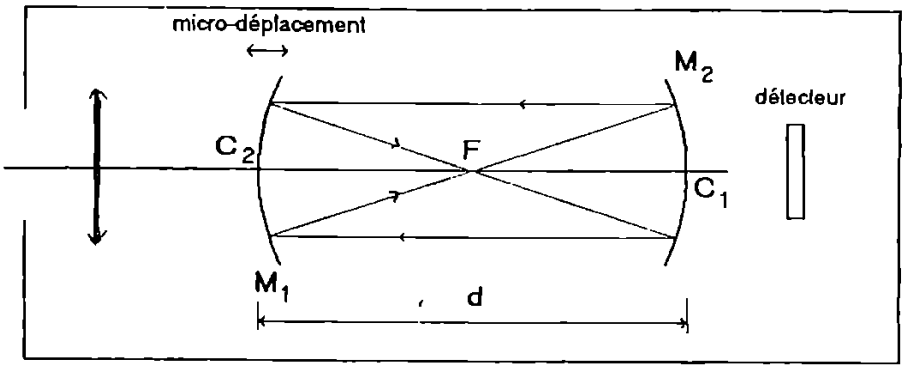


FIGURE 31.1 – Cavité de Melles-Griot. Un rayon se superpose au bout de 2 réflexions sur chaque miroir, parcourant une distance $4d$. Figure tirée du Duffait.

On fait faiblement varier d en appliquant une tension à un piézo électrique :

$$d = d_0 + \delta d, \qquad \delta d \ll d_0$$

La condition de résonance n'est pour plus vérifiée pour la même λ ou le même k. un photodétecteur en sortie du FP reçoit un signal pour les différentes λ à k donné ou les différents k à λ donnée qui satisfont la condition de résonance.

Supposons qu'on vérifie la condition de résonance pour d_1 et λ_1 : on a $4(d_0+\delta d_1) = k\lambda_1$. Pour l'ordre d'interférence $k+1$ suivant, il faut bouger de $\delta d = \dfrac{\lambda_1}{4}$. Cependant, quand on revient à l'ordre k, on a résonance pour λ_2 si $4(d_0 + \delta d_2) = k\lambda_2$, on a donc

$$\delta d_1 - \delta d_2 = \frac{k}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)$$

En travaillant en fréquence, on a donc

$$\delta d = \frac{c}{4\nu_1} \qquad \text{et} \qquad \delta d_1 - \delta d_2 = \frac{kc}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)$$

On mesure ces 2 quantités. On ne connaît k mais on peut le supposer grand : $k \simeq \dfrac{4d}{\lambda_1}$. De plus, les fréquences ν_1 et ν_2 sont proches donc en introduisant $\nu = \dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, on a

$$\delta d = \frac{c}{4\nu} \qquad \text{et} \qquad \delta d_1 - \delta d_2 = \frac{kc}{4\nu}(\nu_2 - \nu_1)$$

d'où

$$\frac{\delta d_1 - \delta d_2}{\delta d} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{FSR} \qquad \text{avec} \qquad FSR = \frac{c}{4d}$$

Le FSR est le *Free Spectral Range* (ou étendue spectrale libre) et elle est une caractéristique de la cavité (on l'obtient donc dans la notice du FP). Elle caractérise la capacité de la cavité à séparer des fréquences dans la lumière que le FP reçoit. Si elle est grande (donc d petite), peu de λ vont résonner et on peut les séparer. Si elle est petite (donc d grand), beaucoup de λ vont résonner en même temps à des ordres différents et vont se retrouver dans un même ordre d'interférence sur l'oscilloscope alors que ce n'est pas le cas. Le FSR est donc en gros "la taille en fréquence d'un ordre d'interférence".

On peut ainsi obtenir l'écart de fréquence entre 2 raies avec un règle de trois en mesurant sur l'oscilloscope la distance ntre ces 2 modes et la distance δd entre les 2 pics analogues correspondant au même mode (même λ) mais à deux ordres différentes. Les écarts de distance sont proportionnels où temps car on applique une rampe de tension sur le piézo-électrique.

- **Aspect expérimental**

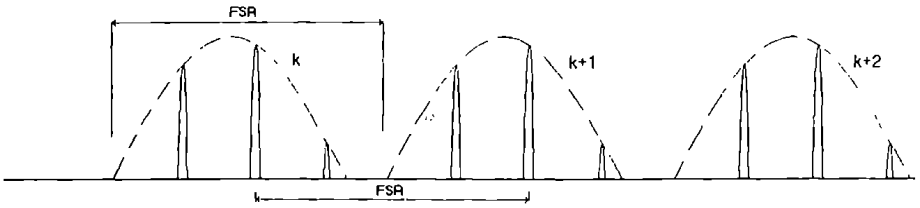


Figure 31.2 – Ce qu'on doit voir à l'oscilloscope : les modes du laser. Tirée de Duffait.

Analyse des modes d'un laser avec une cavité FP

✍ Duffait p97 + notice du FP ⏲ 10 min

Avoir allumé le laser pendant la préparation pour qu'il soit chaud.

Etalonnage : Choisir un laser He-Ne non polarisé, aligner le laser avec la cavité et observer le spectre. On connaît le FSR du FP (voir dans la notice, $FSR = 1.5$ GHz). Il correspond à l'intervalle entre 2 motifs (même mode à deux ordres consécutifs). On a donc une correspondance temps-fréquence

$$\Delta f = \Delta t \frac{f_{FSR}}{\Delta t_{FSR}}$$

avec f_{FSR} la valeur de la notice et Δt_{FSR} la valeur mesurée sur l'oscilloscope. Ainsi, n'importe quelle valeur Δt mesurée par la suite peux être convertie en Δ_f

Mesure : L'intervalle entre 2 pics dans le même ordre est le FSR_{laser}. On mesure Δt_{laser} pour obtenir cette valeur. On est censé avoir 2 pics pour chaque ordre.

$\Rightarrow FSR_{laser,theorique}$ dans la notice est de 435 MHz à vérifier dans la notice du laser.

On mesure également $\delta\nu$ qui est la largeur à mi-hauteur du plus grands des pics. On en déduit le facteur de qualité

$$Q = \frac{\nu_0}{\delta\nu} = \frac{c}{\lambda_{laser}\delta\nu}$$

Incertitudes de type produits/rapports

4 Résonance d'un oscillateur paramétrique

✍ BUP 747, Laudau p120

On va ici présenter un autre type de résonance : la résonance paramétrique. Il s'agit de modifier l'un des paramètres du système (ici sa pulsation propre) de façon périodique. On remarque qu'à une certaine fréquence de cette excitation, le système "résonne" et gagne en amplitude. On veut caractériser ça.

✍ Landau : on a un certain intervalle de fréquence pour lequel la résonance a effectivement lieu : $[f-\epsilon; f+\epsilon]$

$$\epsilon = \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}$$

avec λ l'inverse du temps caractéristique d'amortissement (donné par exp(-λt)), h l'amplitude de l'excitation, ω_0 le bon bail qu'on connait. On veut vérifier que l'intervalle de fréquence 2ϵ où la résonance commence augmente avec l'amplitude de l'excitation h.

Résonance paramétrique d'un pendule

✍ ⏲

• On utilise le moteur P95.28 avec la petite poulie qui s'adapte sur la roue.

• Un pendule (ficelle + masse), une poulie

• un GBF

• On fixe une valeur de h sur le moteur en vissant la petite poulie dans l'un des 3 pas de vis.

• On mesure la longueur maximale et la longueur minimale de la corde (en fonction de la position du moteur), et on remonte alors à $l0 = (lmax + lmin)/2$ et $h = (lmax - lmin)/2$.

• On peut estimer le coefficient d'amortissement λ

• On lance le GBF à basse fréquence. On augmente progressivement la fréquence. On se donne un critère pour dire "il y a résonance" : on attend par exemple 1 ou 2 seconde pour voir si les oscillations démarrent vénères ou pas. On note la fréquence que l'on trouve.

Même chose pour une fréquence maximale en commençant à haute fréquence (attention, le moteur ne monte que jusqu'à 700Hz).

• On a alors notre intervalle de fréquence où ça marche.

• On change h en changeant la position de la roue, et on recommence.

• Tout le traitement est dans le fichier excel.

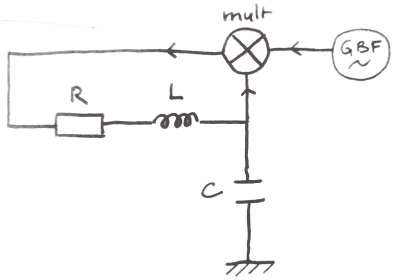
5 Un meilleur oscillateur paramétrique

PENDULE vs RLC : le pendule c'est dur car la résonance met en doute l'hypothèse des petits angles et on ne connaît pas bien la disspation. Pour le RLC, on n'a pas ce problème et la disspitaion est très bine connue : c'est R!!

Objectifs :

• Calculer un incrément logarithmique et en déduire les coefficients de Lyapunov

• Retrouver les graphes des simulations du BUP par l'expérience



Un meilleur exemple d'oscillateur paramétrique (non soumis aux aléas de la mécanique) est de prendre un RLC et d'y brancher un multiplieur. Les calculs sont détaillés dans le bup joint au montage.

L'oscillateur paramétrique est un des systèmes non linéaires les plus simples ; à ce titre il est souvent mis en avant pour illustrer les phénomènes spectaculaires à la fois très riches et complexes qui caractérisent ce domaine de la Physique. Rappelons qu'un oscillateur est dit «paramétrique» lorsque l'on peut agir sur lui de manière à modifier périodiquement sa fréquence propre. Le montage effectué est le suivant, où M est un multiplicateur :

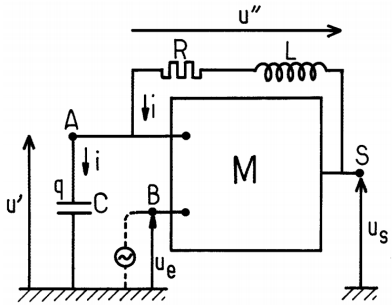


FIGURE 31.3 – L'oscillateur paramétrique.

5.1 La théorie en bref

✍ BUP 747

Le multiplicateur prend en entrée u_e et u', et donne en sortie $u_s = ku_e u'$, avec k une constante.

Le GBF débite une entrée sinusoïdale de fréquence $\Omega = 2\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$ et d'amplitude u_{eo}. Si on fait les calculs on a l'équation différentielle suivante pour q la charge du condensateur :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2(1 + h\cos 2\omega t)q = 0 \qquad \text{avec } \lambda = \frac{R}{2L},\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC},\ \text{et } h = ku_{eo} \tag{31.1}$$

On se retrouve avec une équation dite de Mathieu, linéaire d'ordre 2. La tension du GBF fixe la fréquence secondaire du système, et donne le même résultat que si on faisait varier l'épaisseur du condensateur sous la forme $e_0(1 - ku_e)$.

L'équation est techniquement encore linéaire en q, mais elle est à coefficients non constants. Cependant là où cet oscillateur est non linéaire, c'est dans le rapport qu'entretient u_e avec u_s.

Pour passer de l'équation avec amortissement à celle sans amortissement, il suffit de faire un changement de variable $q' = qe^{\lambda t}$. C'est détaillé dans le BUP.

5.2 L'expérimental

5.2.1 À u_e fixé

Étude à u_e fixé

✍ ⏲ préparation

Le circuit se comporte comme un RLC de pulsation $\omega^2 = \frac{1_k u_e}{LC}$.

On peut vérifier cela aisément et le présenter, en traçant $\omega(u_e)$.

Ici L=0.5H, C=53.8nF et R$\simeq$ 310Ω, f_0 $\simeq$1kHz sont des choix logiques.

Mesure du k du multiplieur

✍ ⏲

On peut grâce à cette méthode remonter à k du multiplieur.

5.2.2 Régime résonnant

Si la fréquence est trop élevée on peut avoir un déphasage sur le multiplieur...

Pour observer la résonance paramétrique, il faut se placer en u_e sinusoïdal comme décrit plus haut. On cherche l'intervale $[f_1(u_{eo}), f_2(u_{eo})]$ pour lequel il y a raisonance paramétrique. En dehors le signl est faible, en dedans, on a rapidement l'apparition d'une exponentielle divergente. Elle sature évidemment, mais la saturation n'est pas décrite par notre modèle.

On peut essayer de retracer la figure suivante pour déterminer les domaines de stabilité. Si on est chaud on peut aussi faire une simulation numérique !

Il y a plusieurs domaines d'instabilité (sur des multiples de ω_0), mais on va ici regarder celui qui est autour de $2\omega_0$.

On se place dans la limite $h = ku_{eo} \ll 1$ et $\varepsilon \ll \omega_0$ et $\lambda \ll \omega_0$ (à vérifier). Le domaine d'instabilité alors est donné par la formule

$$\text{intervalle} = \left[2\omega_0 \pm \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}\right] \tag{31.2}$$

Tracé du domaine de stabilité

✍ ⏲

Tracer exactement la figure au dessous, quitte à la comparer à un test numérique (à faire).

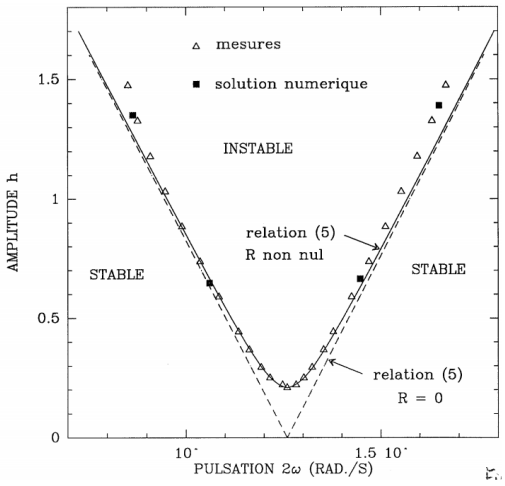


FIGURE 31.4 – Domaines de stabilité de l'équation. Ici L=0.5H, C=53.8nF et R$\simeq$ 310Ω, f_0 $\simeq$1kHz.

6 Oscillateur à quartz, Q très élevé

Mesure de Q

Krob p151

Matériel : boitier ENS Quartz à 2MHz, GBF, fréquencemètre, oscilloscope.

On alimente le résonateur à quartz avec un signal sinusoïdal de fréquence f et on regarde le signal de sortie.

On relève les amplitudes pour tracer le Bode autour de 2MHz. On trouve f_0 et Δf.

Wa Q est super haut, 10^4

MP 32

Couplage des oscillateurs

Commentaires du jury

- 2014 à 2017 : Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples, et les candidats doivent en tirer les conclusions qui s'imposent. Les expériences de couplage inductif sont souvent difficiles à exploiter car les candidats ne maîtrisent pas la valeur de la constante de couplage. Enfin, il n'est pas interdit d'utiliser plus de deux oscillateurs dans ce montage, ou d'envisager des couplages non linéaires, qui conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, et ont de nombreuses applications.

  Jusqu'en 2013, le titre était : Oscillateurs couplés
- 2013 : Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples. Enfin, les couplages non linéaires conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, qui ont de nombreuses applications.
- 2011 : Le jury met en garde les candidats contre l'utilisation de dispositifs dont la modélisation n'est pas comprise. Les pendules utilisés dans le cadre de ce montage sont souvent loin d'être des pendules simples. D'autre part, il faut réaliser le montage correspondant aux équations que l'on écrit (ou l'inverse), sinon l'interprétation n'est pas correcte. Enfin, les couplages non-linéaires conduisent à des phénomènes nouveaux comme l'accrochage de fréquence, qui ont de nombreuses applications.
- 2004 : L'étude de la phase est trop souvent absente de ces montages alors qu'elle fournit des relations complémentaires non redondantes à celle de l'amplitude.

Bibliographie

✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD**
✍ *BUP 815 (2)*
✍ *H-prépa Ondes PC*, **Brébec**

⟶ Couplage mécanique
⟶ Couplage non linéaire
⟶ Mise en équation des pendules couplés

1 RLC couplés . . . 1300
1.1 Oscillateur seul . . . 1300
1.2 Oscillateurs couplés . . . 1301
2 Pendules couplés en torsion . . . 1302
2.1 Constante de couplage . . . 1302
2.2 Indépendance des modes . . . 1304
3 Masses couplées par un ressort . . . 1304
3.1 Théorie . . . 1304
3.2 Mise en place avec 4 masses . . . 1305
3.3 Dépendance en le nombre de masses . . . 1306
3.4 Généralisation à la corde de Melde . . . 1306
4 Couplage de deux oscillateurs à relaxation . . . 1306
4.1 Présentation de l'oscillateur à relaxation . . . 1307
4.2 Couplage non linéaire de deux oscillateurs à relaxation . . . 1307

Introduction

Le phénomène d'oscillation est une variation périodique d'un système physique autour d'un point d'équilibre. Il correspond à de nombreux exemples simples (masse accrochée au bout d'un ressort, pendule simple, oscillateur harmonique quantique pour la vibration d'une liaison covalente...), facilement caractérisables par leur fréquence propre f_0 . Pour autant, un oscillateur est rarement isolé : si on reprend l'exemple de la liaison covalente, on se doute que les vibrations de toutes les liaisons covalentes présentes dans une molécule ne sont pas indépendantes et interagissent les unes avec les autres. On parle alors d'oscillateurs couplés.

Intro : Couplage de deux métronomes

✍ 1mn

Mettre deux métronomes pas en phase sur une planche, elle même posée sur deux canettes qui roulent.

Les oscillateurs se synchronisent. On peut aussi voir qu'il y a un mode antisymétrique si on l'excite convenablement.

Lorsque les deux métronomes ne sont pas couplés, ils évoluent librement et possèdent chacun une même fréquence propre f_0 s'ils sont supposés identiques. En revanche, si on les lie maintenant par une tige, les deux pendules se couplent et la fréquence globale du système est modifiée et n'a aucune raison de valoir f_0 . Le but de ce montage est d'étudier quels sont les différentes couplages possibles entre N oscillateurs, et de voir comment le couplage influe sur les propriétés du nouveau système. Commençons simplement en regardant le couplage de deux circuits RLC en électricité.

1 RLC couplés

Ce couplage est intéressant car on contrôle facilement son intensité : il suffit d'utiliser une boîte à décades de capacités pour en changer la valeur.

1.1 Oscillateur seul

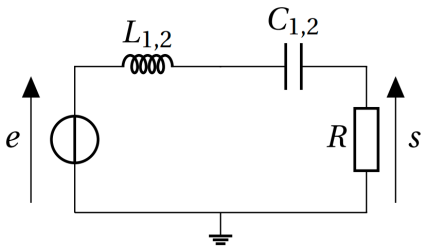


FIGURE 32.1 – Schéma du circuit RLC simple. On a $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

$$\ddot{s}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = e(t) \tag{32.1}$$

Si on a une entrée sinusoïdale de fréquence f_0, on a un transfert maximal.

1.2 Oscillateurs couplés

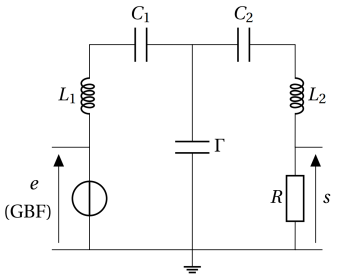


FIGURE 32.2 – Deux oscillateurs couplés par une capacité variable Γ. On enlève la résistance du premier aussi, parce que ça marche mieux. On excite ici le mode anti.

On prend cet oscillateur et on le couple à un deuxième de son espèce [1].

Dans ce cas là, en supposant les deux RLC identiques, on a deux fréquences de résonance qui apparaissent, l'une pour l'excitation en phase et l'autre en opposition de phase.

$$\begin{cases} \omega_s^2 &= \dfrac{1}{LC} \\ \omega_a^2 &= \dfrac{1}{LC}\left(1+2\dfrac{C}{\Gamma}\right) \end{cases} \tag{32.2}$$

Accordage des RLC

✍ 🕒 3mn

Commencer par construire deux circuits RLC série :

le premier composé d'une bobine L_1 d'environ 10mH, d'un condensateur C_1 d'environ 10nF et d'une résistance R = 50Ω ; et le second d'une bobine L_2 d'environ 10mH, d'une boîte à décades pour C_2 et d'une résistance R = 50 Ω. On peut les faire sur deux plaquettes différentes pour clarifier le montage.

Appliquer au circuit 1 une tension sinusoïdale 1 V et 10 kHz avec un GBF. Observer à l'oscilloscope la tension excitatrice e et la tension aux bornes de la résistance s en mode XY. Faire varier la fréquence de telle sorte à avoir une droite en XY. On est alors à la résonance (puisque la phase de la fonction de transfert est nulle à la résonance, méthode de Lissajou), mesurer cette fréquence.

Ne pas changer la fréquence. Alimenter le circuit 2 à la place du circuit 1. Faire varier la capacité pour obtenir à nouveau une droite en XY. Les deux oscillateurs sont accordés et on a alors $L_1C_1 = L_2C_2$.

Couplage des oscillateurs

✍ 🕒 3mn

Coupler les deux circuits RLC comme montré ci-dessus via une boîte à capacités Γ. Utiliser la méthode de la réponse indicielle pour mesurer $s(t)$: envoyer un créneau de fréquence 10Hz en entrée avec une rampe de 4V et acquérir le signal sur Latispro avec un trigger à 100mV . Lisser, dériver et faire la TF du signal obtenu pour obtenir le spectre en fréquence et identifier les deux fréquences propres du système f_a et f_s . Répéter la mesure pour des valeurs de Γ entre 5 et 50nF et tracer $\omega_{a,s}$ en fonction de Γ. On s'attend à trouver deux courbes respectivement de pente nulle et de pente $2/L$.

ATTENTION : La mesure présente de nombreuses incertitudes. En effet, les deux circuits RLC sont supposés identiques, ce qui n'est jamais le cas en réalité. Les deux pics possèdent également leur propre largeur entre autre

1. Ca fait des bébés RLC ?

à cause du facteur de qualité de chacun des circuits. Enfin, la résolution fréquentielle sur Latispro est **DEGUEULASSE** (Satan ce logiciel) : la distance entre deux pics est au mieux de 500Hz, c'est pourquoi les valeurs de $f_{a,s}$ peuvent fortement varier d'une mesure à l'autre. Essayez de régler au mieux les temps d'acquisition (2000 points pour un temps de mesure de 1μs et un temps total d'acquisition de 2s a l'air de marcher), mais ne vous attendez pas à un miracle non plus.

On observe bien que l'on n'a plus des pseudo-périodes en guise de réponse indicielle mais un signal plus compliqué, typique de l'addition de deux sinusoïdes. On relève bien deux pulsations propres différentes, signe que le système couplé est à deux degrés de libertés. Le couplage éloigne les pulsations propres.

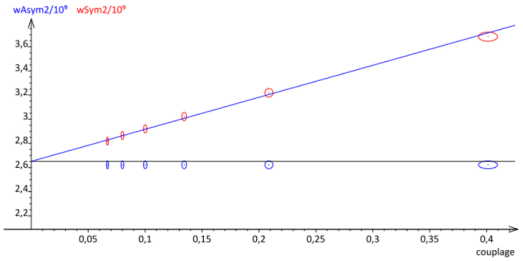


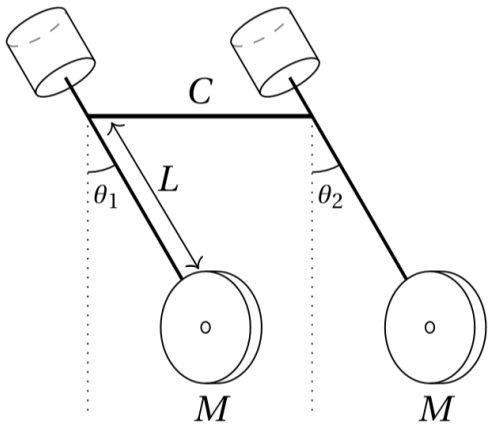
FIGURE 32.3 – Y'a une erreur ici, les deux ω sont inversées.

Il est possible de réaliser un analogue plus visuel, et peut-être préférable d'ailleurs...

2 Pendules couplés en torsion

✍ *H-prépa*

On étudie le dispositif P79.21, constitué de deux pendules pesants accordés et couplés via un fil de torsion.



2.1 Constante de couplage

On applique le TMC aux deux pendules pour obtenir :

$$\begin{cases} (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_1 + MgL\sin\theta_1 = C(\theta_2 - \theta_1) \\ (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_2 + MgL\sin\theta_2 = C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \tag{32.3}$$

L'approximation des petits angles permet de simplifier ces équations :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0 \theta_1 = \dfrac{C}{J_0 + ML^2}(\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0 \theta_2 = \dfrac{C}{J_0 + ML^2}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \tag{32.4}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{MgL}{J_0 + ML^2}}$ la pulsation propre des pendules isolés.

Si on s'amuse à chercher des solutions harmoniques à ces équations, on aboutit à deux solutions :

- un mode symétrique de pulsation
$$\omega_s = \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}$$
- un mode antisymétrique de pulsation
$$\omega_{as} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2C}{J_0 + ML^2}} = \sqrt{\frac{MgL + 2C}{J_0 + ML^2}}$$

Équilibrage des pendules

✍ ⏲

Ces pendules devraient être en théorie équilibrés dynamiquement mais en pratique on les équilibrera de façon statique. Pour ce faire, s'assurer que les pendules soient découplés, et ne laisser qu'une masselotte vissée en haut de la tige de chaque pendule. Pour chaque pendule, ajuster la position de la masselotte pour qu'à chaque angle il soit dans une position d'équilibre.

Une fois les masselottes bien placées, ne plus y toucher et coupler à nouveau les pendules.

Remarques

- On pourrait mesurer J_0 en mesurant ω_0 pour un pendule isolé. On ne le fait pas ici dans ce montage.
- Un équilibrage parfait est très difficile à obtenir.

Étalonnage des capteurs

✍ ⏲

Cet étalonnage n'est pas nécessaire si on ne cherche qu'à mesurer des pulsations. Après, si on veut avoir de belles courbes sans risquer d'avoir d'offsets, on peut quand même étalonner les capteurs.

Pour ce faire, relier les pendules aux capteurs potentiométriques (boîtier blanc) et l'alimenter avec le boîtier P42.39.

Placer le gain au maximum pour chaque pendule, puis régler les zéros pour que la position verticale de la tige corresponde à des tensions nulles en sortie du capteur que l'on mesure au multimètre.

Pour le capteur de chaque pendule, mesurer la tension U_i pour différents angles θ_i et faire une régression linéaire. On obtient ainsi le coefficient de proportionnalité.

Pendules couplés en torsion

✍ Notice du dispositif ⏲ 10 min

Ajouter une masse M à une distance L de l'axe de rotation de chaque pendule (identique pour les 2 pendules).

Brancher les capteurs du potentiomètre sur synchronie. Lancer les pendules à des angles initiaux différents ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 \neq 0$) afin d'exciter les deux modes. Lancer une acquisition pendant 2 minutes.

Faire la FFT du signal acquis et en déduire ω_s et ω_{as}.

Répéter l'opération pour plusieurs L et tracer $\dfrac{1}{\omega_{as}^2 - \omega_s^2} = f(L^2)$. On obtient une droite de pente $\dfrac{M}{2C}$ et d'ordonnée à l'origine $\dfrac{J_0}{2C}$. En déduire J_0 et C.

Remarque

- On peut relier C et module de cisaillement G et donc au module d'Young E de la tige de diamètre D :
$$C = \frac{G}{L}\frac{\pi D^4}{32} \qquad \text{où} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$
- On peut également mesurer C en immobilisant un pendule et en étudiant les oscillations de l'autre pendule. En effet, l'ordonnée à l'origine de la droite $(J_0 + ML^2)\omega^2 = f(L)$ est bien C.

2.2 Indépendance des modes

☕

Indépendance des modes

✍ ⏲

Lancer un acquisition où les pendules ont le même angle initial $\theta_1 = \theta_2$. On n'excite que le mode symétrique. Faire la FFT du signal pour constater qu'on a qu'un seul pic à ω_s.

Faire de même pour $\theta_1 = -\theta_2$. On n'excite que le mode antisymétrique. Refaire un FFT : on n'a de nouveau qu'un seul pic à ω_{as}.

Les deux modes ne s'échangent donc pas d'énergie : si un seul mode est excité initialement, alors ça restera le cas tout le temps. Il s'agit d'une propriété général des oscillateurs **linéairement** couplés.

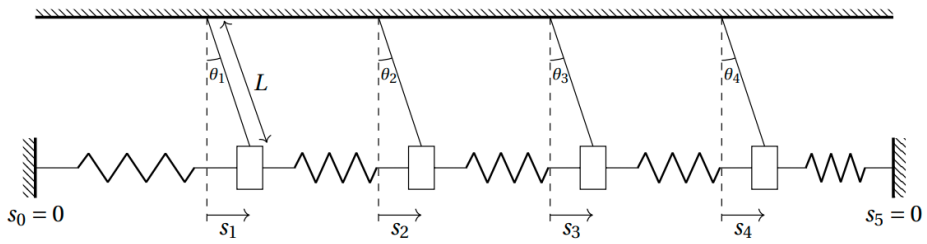
Il se passe quoi si on met N oscillateurs ?

3 Masses couplées par un ressort

3.1 Théorie

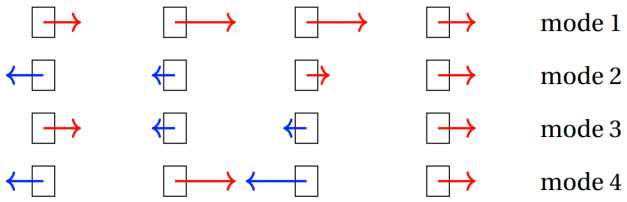
Théorème : N Oscillateurs $\Longleftrightarrow$ N fréquences propres.

Si c'est vrai pour 2 et 4, c'est vrai pour tout N non ?



Théorie : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$. 4 pulsations ω_i :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\Omega_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\Omega_1^2} \\ \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)\Omega_1^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\Omega_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\Omega_1^2} \\ \omega_4 = \sqrt{\Omega_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(5+\sqrt{5}\right)\Omega_1^2} \end{cases}$$



Généralisation

On peut montrer que pour N oscillateurs on a :

$$\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$$

3.2 Mise en place avec 4 masses

Système de 4 pendules couplés

✍ ⏲

On sort le gros dispositif, avec la caméra et le logiciel Vidéocom. Le réglage est fastidieux, mais une fois que ça marche on est heureux, ça fait tout tout seul. Dans le menu Réglage et l'onglet Généralités indiquer le raccordement choisi (USB) dans Raccord Série, puis dans l'onglet Spécifications sélectionner la période d'échantillonnage Δt la plus basse possible.

Si le poids des masses du système P79.22 n'est pas indiqué, les peser, puis calculer la masse moyenne M. Mesurer la constante de raideur moyenne k des ressorts du système en suspendant des masselottes et en mesurant leurs allongements relatifs. Mesurer la longueur L des pendules formés.

Expérimentalement, nous obtenons : $M \simeq 323$ g, $k \simeq 115$ N/m et $L \simeq 33$ cm.

Tracer les FFT des courbes obtenues : avec un clic droit sélectionner Calcul FFT, puis surligner l'enregistrement

d'une masse. Mesurer les fréquences propres obtenues.

Recommencer plusieurs fois l'expérience précédente en partant à chaque fois d'une condition initiale où la position des masses correspond à un mode propre. Tracer la FFT des courbes, et observer que l'amplitude du mode correspondant est plus importante que les autres.

Remarques :

- Le temps d'acquisition sur lequel est réalisé la FFT doit être judicieusement choisi pour bien mesurer les fréquences propres du système. Il faut trouver un compromis entre un temps suffisamment long pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, mais suffisamment faible pour éviter l'amortissement dû aux non-linéarités qui provoque un élargissement des pics.
- Pour une condition initiale quelconque, on retrouve une superposition des quatre modes propres du système. Les trois premiers modes sont habituellement assez faciles à détecter, contrairement au quatrième dont l'amplitude est assez faible. On peut donner plus d'amplitude à un mode propre particulier en utilisant une condition initiale proche de son vecteur propre.
- le départ en bruit blanc, obtenu en tapant une masse au marteau, permet de tout exciter uniformément. C'est une bonne solution.

3.3 Dépendance en le nombre de masses

Évolution avec le nombre de masses

En réduisant le nombre de masses constituant le système, on modifie les modes propres. Fixer la position d'une masse à l'extrémité du système en la maintenant à l'aide d'un statif et d'une pince. Enregistrer les oscillations libres des masses restantes pour une condition initiale quelconque, puis tracer la FFT des courbes et mesurer les 3 pulsations propres du système.

Fixer la seconde masse, et recommencer l'expérience puis fixer la troisième masse, et recommencer l'expérience.

Superposer sur une même courbe toutes les mesures de ω en fonction de $\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$. On trace ω^2 en fonction de K, cela donne une droite normalement !

Remonter à ω_0 et ω_1.

Incertitudes : $\omega_{i,N}^2 = \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$, on pose $K = 4\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(N+1)}\right)$, et on a $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + K\omega_1^2}$

$$u(\omega) = \frac{1}{\omega}\sqrt{(\omega_0 u(\omega_0))^2 + (K\omega_1 u(\omega_1))^2} \tag{32.5}$$

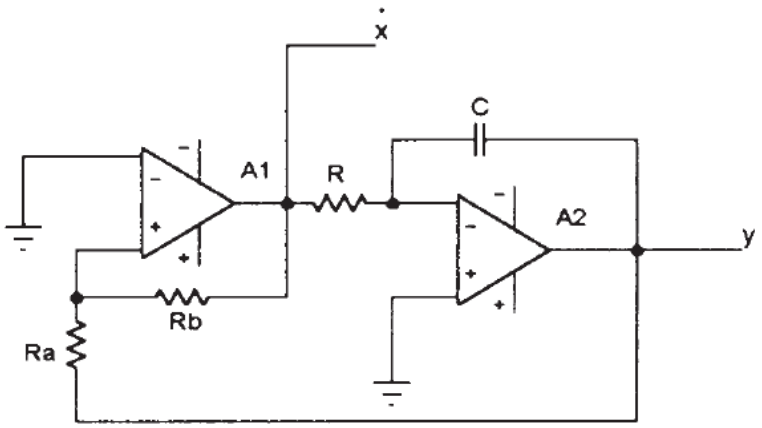
3.4 Généralisation à la corde de Melde

On peut faire une corde de Melde et dire que "waaaa on a une infinité de modes parce qu'on a une infinité d'oscillateurs et de degrès de liberté."

4 Couplage de deux oscillateurs à relaxation

BUP 815 (dont sont tirées les figures)

4.1 Présentation de l'oscillateur à relaxation



L'oscillateur à relaxation est constitué de 2 AO : le premier est un comparateur à hystérésis et le second est intégrateur inverseur. C'est également un multivibrateur astable.

La tension de saturation des AO est $\pm V_{\text{sat}}$. On note également $k = \dfrac{R_a}{R_b}$. Les oscillations ont une fréquence

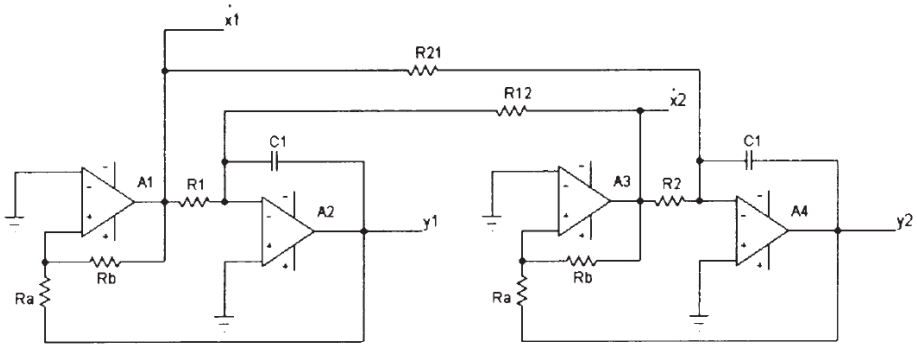
$$f_0 = \frac{1}{2RC\ln(1+2k)} \simeq \frac{1}{4kRC} \qquad \text{si } k \ll 1$$

La sortie de l'intégrateur est donnée par $y = -\dfrac{x}{RC}$, on obtient donc pour la sortie du comparateur

$$\dot{x} = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign}\left(k\dot{x} - \frac{x}{RC}\right) = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign}\left(\dot{x} - 4f_0 x\right) \tag{32.6}$$

On comprend ainsi que l'oscillateur n'est pas linéaire.

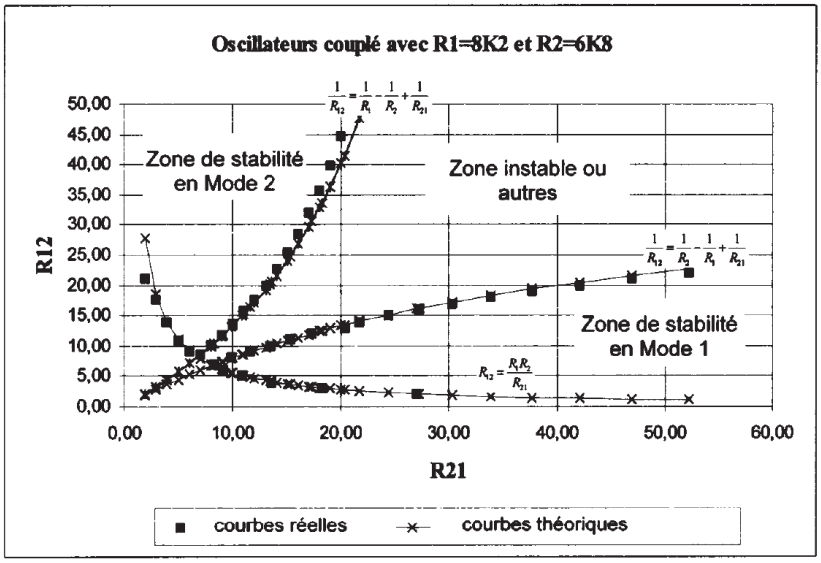
4.2 Couplage non linéaire de deux oscillateurs à relaxation



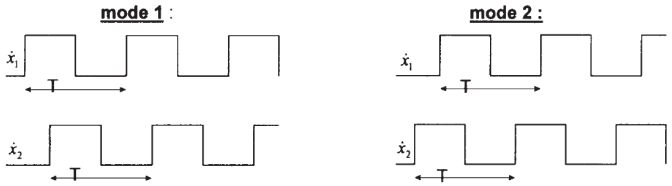
Quand on couple deux oscillateurs à relaxation de fréquences propres f_1^0 et f_2^0 différentes, on obtient les équations suivantes (calcul complet dans le ✍ BUP) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign}\left[\dot{x}_1 - 4f_1^0\left(x_1 + \dfrac{\tau_1}{\tau_{12}}x_2\right)\right] \\ \dot{x}_2 = V_{\text{sat}} \cdot \text{sign}\left[\dot{x}_2 - 4f_2^0\left(x_2 + \dfrac{\tau_2}{\tau_{21}}x_1\right)\right] \end{cases} \tag{32.7}$$

avec $\tau_1 = R_1C_1$, $\tau_2 = R_2C_1$, $\tau_{12} = R_{12}C_1$, $\tau_{21} = R_{21}C_1$ ainsi que $f_1^0 = \dfrac{1}{4k\tau_1}$ et $f_2^0 = \dfrac{1}{4k\tau_2}$. Une étude très complète menée dans le BUP permet *in fine* de dresser un diagramme de stabilité des modes 1 et 2.



Le mode 1 correspond au mode où $\dot{x}_1$ est en avance sur $\dot{x}_2$ et inversement pour le mode 2.



On voit donc deux zones de stabilité (1 pour chaque mode) et une zone d'instabilité, donc les limites sont données par les équations

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 R_2}{R_{21}} && \text{(courbe en bas, notée } \mathcal{C}_1\text{)} \\ \frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21}} && \text{(courbe au milieu, notée } \mathcal{C}_2\text{)} \\ \frac{1}{R_{12}} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{21}} && \text{(courbe en haut, notée } \mathcal{C}_3\text{)} \end{aligned} \tag{32.8}$$

On obtient ainsi deux modes stables dans lesquels les deux oscillateurs sont déphasés mais oscillent à la même fréquence, alors que les oscillateurs seuls n'ont pas la même fréquence !0 ! On voit aussi qu'on a des zones de stabilité et d'instabilité où le comportement est plus ou moins chaotique ! (à voir si on peut faire une analogie avec le pendule double chaotique...)

☕

Pour chaque oscillateur isolé

✍ ⏲

En préparation, bien faire le zéro sur les offsets des AO, *i.e.* relier à la masse les entrées + et - de l'AO, et faire varier la molette de l'offset jusqu'à avoir un signal nul en sortie.

Observer le signal en $\dot{x}$ et y. Remarquer que l'on a bien un signal carré pour $\dot{x}$, triangulaire pour y, et que leurs fréquences correspondent bien à celle prévue. On doit avoir un rapport cyclique de 0.5. Si ce n'est pas le cas, c'est que l'offset est mal réglé.

Mesurer précisément la valeur de R_1 (ou de R_2 pour le second oscillateur). Vérifier rapidement les valeurs des autres composants.

Couplage non linéaire de 2 oscillateurs à relaxation

✍ BUP 815 ⏲

Matériel :

- 4 AO avec leurs alimentations
- 2 résistances $R_a = 1$ kΩ, 2 résistances $R_b = 10$ kΩ, $R_1 = 6$ kΩ, $R_2 = 8$ kΩ, 2 condensateurs $C_1 = 1$ μF
- boîtes à décades à résistance R_{12} et R_{21}
- oscilloscope

Mesurer précisément R_1 et R_2 à l'ohmmètre, et vérifier les valeurs des autres composants.

Observer à l'oscilloscope les sorties des quatre AO. A R_{21} fixé, faire varier R_{12} jusqu'à atteindre les limites de stabilité de la synchronisation.

Tant que l'on est à gauche du mode 1, c'est-à-dire pour R_{21} petit, on ne trouve qu'une limite inférieure, correspondant à la courbe $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_3$, notée $R_{\mathcal{C}_1}$ ou $R_{\mathcal{C}_3}$. Pour R_{21} suffisamment grand, on trouve trois limites correspondant aux courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Recommencer les mesures en faisant varier R_{21}.

Tracer les courbes $R_{\mathcal{C}_1} = a_1 \times \dfrac{1}{R_{21}}$, $\dfrac{1}{R_{\mathcal{C}_2}} = a_2 \times \dfrac{1}{R_{21}} + b_2$ et $\dfrac{1}{R_{\mathcal{C}_3}} = a_3 \times \dfrac{1}{R_{21}} + b_3$.

Incertitudes :

Il y a deux incertitudes ici présentes : celle de la boîte à décade et celle du choix de la résistance comme valeur limite. Celle des boîtes à décade est de 1/100 et est largement majoritaire devant celle du choix de la valeur limite. On pourrait limiter l'incertitude des boîtes à décade en les enlevant du circuit à chaque fois et en mesurant leur valeur au multimètre, mais cela ralentit assez largement la prise de mesure, et cela donnerait une précision sans doute inutile ici. En effet, on ne fait pas de la métrologie, on cherche juste à vérifier une relation analytique.

Conclusion

On a vu des couplages variés : couplage de 2 RLC identiques, couplage linéaire de pendules en torsion, couplage de plus de 2 oscillateurs et couplage non-linéaire entre oscillateurs à relaxation. On pourrait étudier un couplage inertiel (couplage inductif de 2 RLC), et l'exemple des métronomes sur un planche roulante est également un bon exemple de couplage non linéaire.

Le nombre de modes observés est égal au nombre d'oscillateurs s'il y a dégénérescence totale. Tant que l'équation est linéaire, plus le couplage est intense plus les modes s'écartent les uns des autres. L'étude des masses couplées est importante pour la dispersion de phonons dans les solides et le couplage inductif est fondamental dans le cadre des transformateurs.

MP 33

Régimes transitoires

Commentaires du jury

- **2013-2017 :** Il existe des régimes transitoires dans plusieurs domaines de la physique et pas uniquement en électricité ; de même, l'établissement de régimes forcés peut conduire à une physique bien plus variée que le retour à une situation d'équilibre. Par ailleurs, bien que le régime transitoire des systèmes linéaires, évoluant en régime de réponse indicielle, puisse parfois se ramener à l'étude d'un circuit RC, la simple mesure du temps de réponse d'un tel circuit ne caractérise pas l'ensemble des propriétés des régimes transitoires. Enfin, varier les échelles de temps dans la présentation serait appréciable.

Bibliographie

✍ *Électronique expérimentale*, **Krob**	⟶ Manips
✍ *Expériences d'électronique*, **Duffait**	⟶ Manips
✍ *BUP 819*,	⟶ Glycérol
✍ **Quaranta tome 2**	⟶ Glycérol (aller à "transports"), p466
✍ *Problèmes et exercices de thermodynamique*, **Calecki**	⟶ Calculs glycérol
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCD**	⟶ Photorésistance
✍ *Optique expérimentale*, **Sextant**	⟶ Photorésistance

1 RLC . . . 1312
1.1 Les différents régimes . . . 1312
1.2 Régime pseudo-périodique . . . 1313
1.3 Caractérisation du régime transitoire par diagramme de Bode . . . 1314
2 Transitoire croissant : Pont de Wien . . . 1314
2.1 Principe de l'oscillateur . . . 1315
2.2 Condition d'oscillation du système bouclé . . . 1315
2.3 Croissance des oscillations . . . 1316
3 Diffusion . . . 1316
3.1 Diffusion de matière . . . 1316
3.2 Diffusion de chaleur . . . 1318
4 Expérience de Rüchardt . . . 1319
5 Photorésistance (Tampon) . . . 1321

Introduction

Le régime transitoire est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable ou le régime établi. Il peut apparaître lors d'une modification d'un système. Il peut être caractérisé par un taux d'amortissement, un temps de relaxation ou encore un facteur de qualité. On va voir différents types de régimes transitoires dans ce montage : des transitoires courts dans le cas du RLC et longs dans le cas de la diffusion du glycérol dans l'eau. Dans tous les cas, l'étude du régime transitoire permet de remonter à des caractéristiques importantes du système étudié.

1 RLC

Les régimes transitoires électronique, c'est super important en informatique et robotique, parce qu'on veut une réponse prompte, mais sans dépassement de consigne. On peut aussi vouloir une oscillation longue, sans perte. C'est ce que l'on va voir ici.

1.1 Les différents régimes

Toute la diversité des régimes transitoires d'un SLIT (Système Linéaire Indépendant du Temps) est contenue dans un circuit RLC. C'est pourquoi on étudie un tel circuit.

Je t'épargne les détails, on prend un RLC au bornes de C, ça fait un passe-bas, et on a $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{f_0}{\Delta_{3dB} f} = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, avec e en entrée et s en sortie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = e \tag{33.1}$$

La résolution de l'équation donne trois cas à considérer :

- $Q < 1/2$, c'est le régime apériodique, pas d'oscillation entre l'état initial et l'état final.
- $Q = 1/2$, le régime critique, sans existence réelle
- $Q > 1/2$, c'est le régime pseudo périodique.

Différents régimes en réponse indicielle, résistance critique

✍ ⏲ 2mn

On met une entrée créneau très lente, et on regarde la variation de la forme de la solution en fonction de la valeur de résistance (boite à décade).

Commenter tout en faisant sur la forme de la solution, et invoquer le fait que la pseudo période dépend de Q.

Trouver la valeur critique et montrer que ça correspond aux prédictions. Valeur typique de composants : 10mH, 10nF, 1000 Ω.

On vient de voir les trois régimes, et on va s'intéresser en particulier au régime pseudo périodique. Il est à noter cependant que les régimes apériodiques et critiques sont très intéressants pour les systèmes sans dépassement [1] [2].

1. http://xpessoles.ptsi.free.fr/fichiers/PDF_VRAC/5_ordre2.pdf
2. https://decout.org/coursdephysique/cours_de_physique_PDF/mecanique_oscillations_libres.pdf

En effet certains systèmes, comme les bras de robot par exemple, ne doivent pas osciller indéfiniment pour atteindre leur position finale, c'est pourquoi le régime critique est très intéressant. Il combine rapidité et non dépassement. Si on peut tolérer un dépassement à 5%, le régime idéal est celui à Q=$\frac{1}{\sqrt{2}}$.

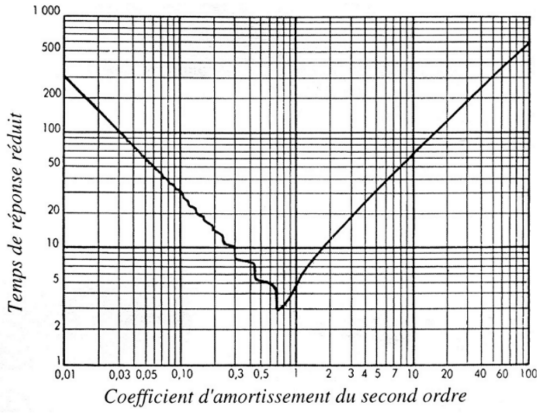


FIGURE 33.1 – Abaque de temps de réponse d'un système d'ordre 2.

1.2 Régime pseudo-périodique

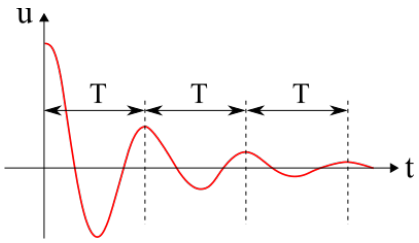
✍ MP31

On se place à $Q > 1/2$ pour observer les oscillations amorties du régime pseudo-périodique. Il est tout à fait possible d'estimer les caractéristiques du système en étudiant le transitoire.

La solution analytique du système est, dans ce régime :

$$s(t) = A \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} + \varphi\right) \tag{33.2}$$

On voit l'apparition d'une sinusoïde dans une enveloppe exponentielle. **tracer au tableau.**



On peut alors définir la pseudo période T et le décrément logarithmique δ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \qquad \delta = \ln\left(\frac{s(t)}{s(t+T)}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}} \tag{33.3}$$

Estimation de Q et ω_0

✍ ⏲ 3mn

Faire une acquisition, faire le décrément logarithmique sur quelques pseudo périodes, mesurer la pseudo période, remonter à Q et ω_0 avec les incertitudes.

Comparer aux valeurs calculées avec les composants considérés.

Faire une spreadsheet.

☕

Vérification de la loi de période

✍ ⏲

On peut, si on le souhaite, tracer la pseudo période en fonction de la résistance, et remonter à une jolie droite.

On peut vérifier que Q correspond au nombre de pseudo périodes entre deux atténuations à 5% (car ln(20)*2=2π).

1.3 Caractérisation du régime transitoire par diagramme de Bode

Le régime transitoire peut être entièrement caractérisé par le tracé d'un diagramme de Bode.

☕

Tracé du diagramme de bode

✍ ⏲ 3mn

Utilisez la méthode de votre choix pour tracer un diagramme de Bode. On détaille en dessous la méthode indicielle.

On envoie en entrée du circuit un échelon de tension (un créneau de basse fréquence) et l'on mesure la tension de sortie v s avec Latis-Pro. Une petite TF et l'on trace son amplitude multipliée par la fréquence en fonction de la fréquence. On obtient le diagramme de Bode d'un passe bas. On mesure la fréquence de résonance et la bande passante à 3dB et pouf, on a ω_0 et Q.

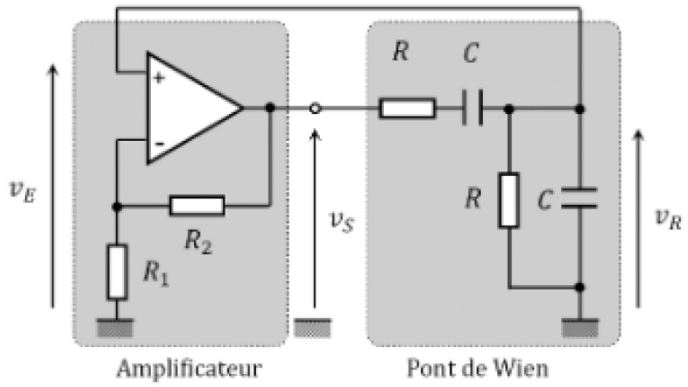
On a vu un transitoire décroissant, mais on peut aussi avoir un transitoire entre le fixe et l'oscillant, comme par exemple dans le cas du pont de Wien.

2 Transitoire croissant : Pont de Wien

✍ MP27.

Les régimes transitoires apparaissent aussi dans les oscillateurs non linéaires, par exemple ici on a un régime transitoire entre l'état fixe et l'état oscillant !

2.1 Principe de l'oscillateur



La fonction de transfert de l'amplificateur et du filtre sont respectivement :

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \tag{33.4}$$

Pour le choix des paramètres, on a $Q = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, et globalement, pour que ça marche bien on prend $R_1 = R = 1$ kΩ, et $C = 1$ μF. Il est malin de mettre une boite à décades sur R_2.

On voit que la boucle de retour c'est le filtre, et la rétroaction est positive.

2.2 Condition d'oscillation du système bouclé

Pour établir les conditions d'oscillation du système bouclé, on annule le dénominateur de sa fonction de transfert : AB = -1, de manière à faire diverger le gain et ainsi permettre l'apparition des oscillations - le système est rendu instable. La résolution de cette équation mène à deux conditions (dites de Barkhausen) :

$$s = A(e + Bs) \Rightarrow s = \frac{A}{1 - AB}e$$

$$\begin{cases} R_2 = 2R_1 \\ \omega = \omega_0 \end{cases}$$

La première impose que les oscillations ne sont possibles que si la chaîne directe amplifie suffisamment le signal pour avoir un gain de 1. En pratique, cette condition est nécessaire pour que les oscillations naissent mais n'est pas suffisante pour qu'elles se maintiennent ; on retiendra que pour qu'elles s'établissent durablement il faut : $R_2 > 2R_1$.

La deuxième condition stipule que les oscillations qui s'établissent dans le système bouclé sont les oscillations du régime libre de la chaîne de retour, elles ont donc une fréquence égale à la fréquence de résonance du filtre passe-bande. On peut vérifier expérimentalement ces deux conditions.

Une autre manière de formuler la condition d'oscillation consiste à utiliser le critère d'instabilité de Nyquist, qui stipule qu'un système bouclé est instable si le diagramme de Nyquist de sa fonction de transfert en boucle ouverte entoure le point (-1 ; 0). **(Aller voir les hypothèses !)**

2.3 Croissance des oscillations

✍ Benders p.244, Krob p.133

But : Retrouver la croissance exponentielle des oscillations naissantes.

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3-A}{RC}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \Rightarrow s(t) = s_0 \exp\left(-(2-\frac{R_2}{R_1})\omega_0 t\right)\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{33.5}$$

On retrouve bien des oscillation naissante pour $R_2 > 2R_1$. En vrai le signal ne continue pas à diverger car le gain de l'ampli op est limité... La saturation des oscillations correspond à la saturation de l'ampli.

☕

Croissance des oscillation

✍ ⏲ 5mn

Après avoir introduit le détecteur de crête en sortie du montage, faire une acquisition de la croissance des oscillations sous Latis-Pro. Pour cela, court-circuiter R_2 avec un fil, régler le seuil de déclenchement à 10 mV avec un pré-trig à 0% et ôter le court circuit après avoir lancé l'acquisition.

Cela revient à introduire instantanément R_2 dans le circuit et donne un signal plus propre. Faire une modélisation affine de $\ln s(t)$. On obtient $-\alpha\omega_0 t$, avec $\alpha = 2 - \frac{R_2}{R_1}$.

Répéter ceci pour plusieurs valeurs de $R_2 > 2R_1$ et tracer α en fonction de R_2 . Comparer la pente de la droite obtenue à $1/2R_1$.

Les régimes transitoires que l'on a vu là sont dans le domaine de l'électronique. Ils sont rapides à l'échelle de l'observateur, et sont peu amortis. Nous allons maintenant nous intéresser à un domaine très différent de la physique, la diffusion, dans lequel les temps d'établissement d'un régime périodique sont nettement plus grands.

3 Diffusion

3.1 Diffusion de matière

✍ BUP 819, Quanta tome 2 p466

Un autre exemple de régime transitoire est le régime de diffusion. Le moteur de la diffusion est l'inhomogéneité d'une grandeur. On tend alors soit vers un état stationnaire (particules homogènes), soit vers un état de diffusion permanent (cas d'un gradient de température).

Dans ce montage, le paramètre inhomogène à considérer est la densité des particules, le moteur microscopique de la diffusion est l'agitation thermique (désordonnée), ce qui est bien pris en compte dans la loi phénoménologique de Fick :

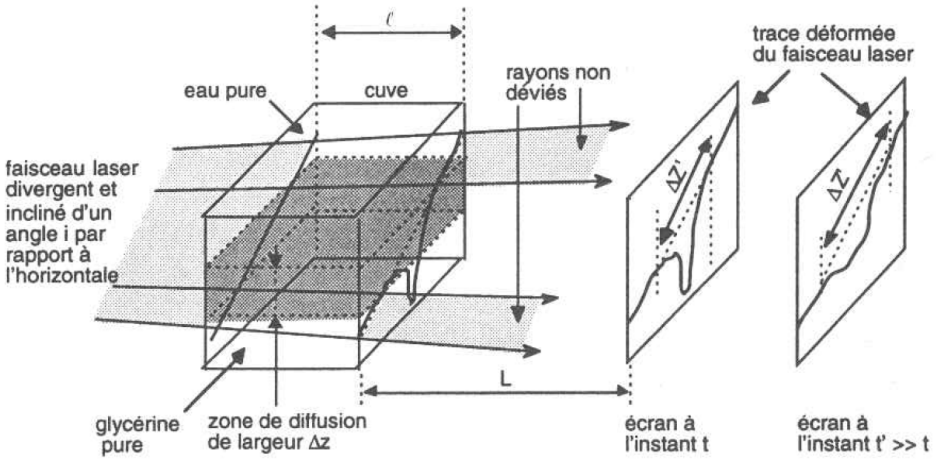
$$\vec{j} = -D\vec{\nabla}c. \tag{33.6}$$

La conservation du nombre de particules en l'absence de sources donne :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c. \tag{33.7}$$

On va illustrer la diffusion de particules avec la diffusion du glycérol dans l'eau. Pour étudier ce phénomène, on va utiliser une méthode optique puisque l'indice optique d'une solution eau-glycérol dépend de la concentration en glycérol : pour une solution eau-gylcérol de fraction molaire en glycérol x_g, on a

$$n_{eg} = x_g n_g + (1-x_g)n_e$$



L'idée est la suivante : on utilise une solution eau-glycérol à 50% en masse (c'est du 16% en molaire). Ainsi, son indice optique vaut

$$n_{eg} = \frac{1}{1 + \dfrac{M_g}{M_e}}(n_g - n_e) + n_e$$

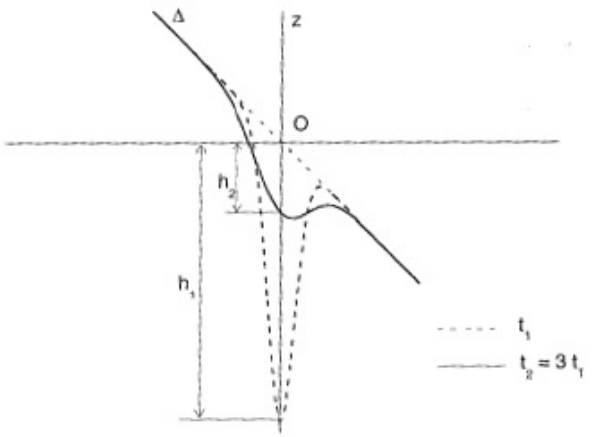
Pour éviter de créer de la convection, on le fait avec une burette et doucement (il faudra donc laisser la burette dans la cuve pour éviter de faire des remous).

Remarque

Avec une solution de glycérol pure, l'expérience serait bien trop longue.

On élargit un faisceau laser avec une lentille cylindrique. Les rayons incidents sont alors contenus dans un plan incliné à 45degree par rapport à l'horizontale mais normal à la surface de la cuve. Les rayons transmis sont alors projetés sur un écran.

Une partie de ces faisceaux traverseront donc soit l'eau pure, soit la solution eau-glycérol et donc une zone sans gradient d'indice optique : on voit alors une droite sur l'écran car les rayons ne sont pas déviés (incidence normale). Cependant, entre ces deux zones, les rayons vont traverser la zone de diffusion où il y a un gradient d'indice dû au gradient de concentration en glycérol. Les rayons seront donc déviés dans cette zone qui prend alors une forme de pic sur l'écran.



Plus le temps passe, et plus la concentration en glycérol s'homogénéise et donc plus le pic sera petit. On peut montrer que l'angle de déviation θ dans le plan vertical des rayons a pour expression :

$$\theta(z,t) = e\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{e(n_{eg} - n_e)}{\sqrt{4\pi D t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$$

on a bien une déviation proportionnelle au gradient d'indice, et on peut en déduire la hauteur du pic (qui est une gaussienne) au cours du temps :

$$h(t) = \frac{eL(n_{eg} - n_e)}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

avec e l'épaisseur de liquide traversée et L la distance entre la cuve et l'écran.

Les hypothèses réalisées pour ce montage sont donc :

- L'épaisseur du milieu traversant est suffisamment faible pour avoir un gradient de concentration constant sur toute l'épaisseur
- Temps assez long pour pouvoir confondre θ et $\tan\theta$ en z=0
- Milieux semi-infinis
- On néglige l'influence de la pesanteur

Diffusion du glycérol dans l'eau

✍ Quaranta tome 2, BUP 819

Expérience à démarrer assez tôt lors des 4h de préparation.

On introduit de l'eau dans une cuve (par exemple une cuve avec des joints en caoutchouc) puis on injecte **avec précaution** une solution eau-glycérol à 50% en masse avec une burette. **Cette étape doit être réalisée au moins 2h avant la mesure**.

Éclairer la cuve avec d'une nappe laser (réalisée grâce à une lentille cylindrique, *i.e.* un bout de cylindre en verre, en sortie d'un laser).

À $t = 0$, tracer un trait vertical passant par le sommet du pic. On mesure ensuite toutes les dix minutes la hauteur h en repérant l'intersection entre la nappe laser et le trait vertical. (Il faut bien faire attention à repérer toujours la hauteur h sur la même ligne verticale).

Tracer $\left(\frac{eL(n_{eg} - n_e)}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{h}\right)^2 = f(t)$ pour obtenir une droite de pende D.

On peut comparer D à la littérature : $D_{\text{litt}} = 3.95 \times 10^{-10}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$ pour un mélange eau-glycérol à 16% molaire en glycérol.

Valeur tabulée trouvée dans **Diffusion Coefficients for the Binary System Glycerol Water at 25°C. A Velocity Correlation Study**, *J. Chem. Eng. Data*, **2004**, *49* (6), pp 1665–1670.

L'article est également disponible au lien https://www.academia.edu/13578602/Diffusion_Coefficients_for_the_Binary_System_Glycerol_Water_at_25_C._A_Velocity_Correlation_Study.

3.2 Diffusion de chaleur

Prendre le montage avec le module Peltier et faire une acquisition de température dans les 6 capteurs à flux de chaleur constant. En déduire un coefficient de diffusion.

La température a une expression de la forme

$$T(x,t) = A\text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + B$$

Puisque $\text{erf}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on en déduit qu'à l'instant t la position x du point où on enregistre une variation de T égale à la moitié de la variation totale vérifie :

$$\frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{1}{2}$$

On peut ainsi tracer x en fonction de t pour remonter à D.

Faire une analogie avec un mur et dire que là, on veut un régime transitoire le plus lent possible.

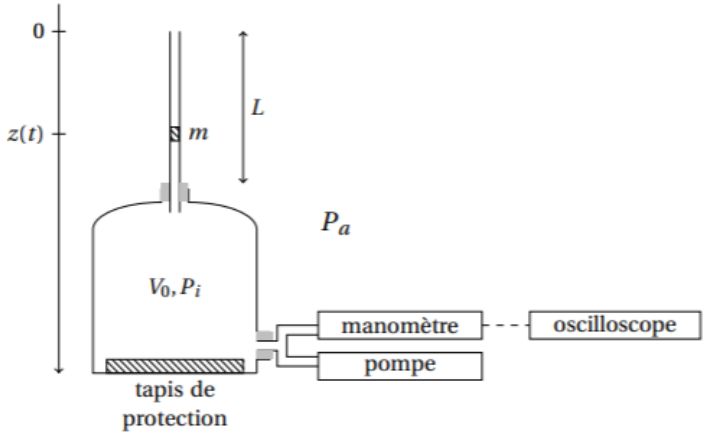
Le meilleur PDF : https://physique-pt-cluny.monsite-orange.fr/file/a016cc98ec2bb13e2494ea50256faf64.pdf

Un autre acceptable : http://ressources.unisciel.fr/sillages/physique/thermo_2a_mp/res/Conduction_thermique_ESIB_MP.pdf.

4 Expérience de Rüchardt

✍ BUP 837 et BUP 808

L'expérience de Rüchardt est un exemple d'oscillateur mécanique basé sur l'élasticité des gaz. Dans cette expérience, un tube en verre de longueur L et de section S est inséré dans un grand récipient de volume V_0. Une masse m est présente dans le tube - sa taille est ajustée de sorte à isoler l'air contenu dans le récipient tout en réduisant au maximum les frottements sur les parois. Cette masse est lâchée du haut du tube et se met à osciller dans celui-ci. L'embouchure en bas du récipient est reliée à une petite pompe manuelle et à un manomètre, lui-même relié à un oscilloscope.



La chute de la masse est considérée comme rapide et adiabatique. On peut alors écrit l'équation du mouvement de la masse en appliquant le PFD :

$$m\ddot{z} = mg - (P_i - P_a)S \tag{33.8}$$

On suppose l'enceinte adiabatique afin d'appliquer la loi de Laplace

$$P_a(V_0 + LS)^\gamma = P_i(V_0 + (L - z)S)^\gamma \tag{33.9}$$

On suppose de plus que le volume du tube est petit devant celui du récipient, *i.e.* $LS \ll V_0$, ce qui permet de développer la loi de Laplace au premier ordre en $\frac{zS}{V_0}$ pour obtenir

$$P_i \simeq P_a\left(1 + \frac{\gamma z S}{V_0}\right) \tag{33.10}$$

Forts de toutes ces hypothèses, nous pouvons réécrire le PFD pour obtenir une équation d'oscillateur harmonique :

$$m\ddot{z} + \frac{P_a S^2 \gamma}{V_0} z = mg \iff \ddot{z} + \omega_0^2 z = g \tag{33.11}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{P_a S^2 \gamma}{m V_0}}$

On en déduit la période des oscillations $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mV_0}{P_a S^2 \gamma}}$, donc la mesure permet de remonter à γ.

Expérience de Rüchardt

✍ Notice de la manip ⏲ 5 min

Matériel :

- récipient P104.42
- tube en verre P104.41
- masse coulissante P104.41
- manomètre Jeulin P96.55
- pompe manuelle P104.43
- des bouchons troués et des tuyaux (boîte P104.43)
- oscilloscope

Place à la verticale (le mieux possible pour limimter les frottements) le tube en verre au-dessus du récipient à l'aide d'un bouchon troué. Relier le bas du récipient au manomètre et à la pompe manuelle via un bouchon troué et des tuyaux. Les valeurs du volume et de la surface sont dans la notice de l'expérience de Rüchardt. Allumer le manomètre et afficher sa tension sur un oscilloscope.

Maintenir la masse en haut du tube sans la lâcher pour isoler l'air dans le récipient. Pomper 2-3 fois pour atteindre une pression pouvant contrer le poids de la masse et relever cette pression au manomètre. **Il faudra toujours pomper de la même manière pour toutes les manips sur le dispositif.**

Lâcher la masse : elle doit se mettre à osciller dans le tube. Mesurer T_0 à l'oscilloscope (l'amplitude des oscillations est de l'ordre de la dizaine de mV). En déduire γ avec l'expression

$$\gamma = 4\pi^2 \frac{mV_0}{P_a S^2 T_0^2}$$

Pour un gaz parfait diatomique, on a $\gamma = \dfrac{7}{5}$.

Parce que le système n'est pas parfaitement étanche, la masse finit par redescendre après fini d'osciller. Produire une surpression pour récupérer la masse par le haut du tube.

Incertitudes :

$$u(\gamma) = \gamma\sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V_0)}{V_0}\right)^2 + 4\left(\frac{u(S)}{S}\right)^2 + 4\left(\frac{u(T_0)}{T_0}\right)^2}$$

Analogie avec le RLC

Cette manip est une analogie du circuit RLC vu un peu plus tôt. Dans le RLC, le condensateur stocke de l'énergie, la bobine ajoute de l'inertie et la résistance dissipe. Dans l'expérience de Rüchardt, le grand bocal constitue le condensateur (on stocke de l'énergie car l'évolution est isentropique donc on vérifie la loi de Laplace), l'air dans le tube et la masse constituent les sources d'inertie et les sources de dissipation dans le système sont l'analogue de la résistance du circuit RLC. On retrouve un régime transitoire pseudo-périodique de période T_0.

Un régime transitoire peut aussi correspondre à un temps de réponse, comme par exemple dans le cas de la photorésistance.

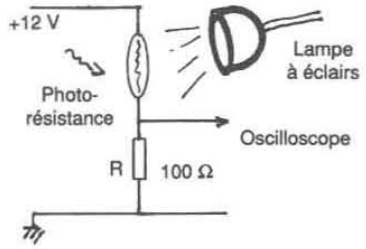
5 Photorésistance (Tampon)

ÇA MARCHE AUSSI AVEC UNE PHOTODIODE

Une photorésistance ajuste sa valeur de résistance en fonction de la quantité de lumière qu'elle reçoit. Cependant sa réponse n'est pas immédiate, et elle a un régime transitoire amorti d'établissement de sa valeur de résistance.

On cherche ici à faire une mesure de ce temps caractéristique pour la photorésistance. Pour ce faire, on dispose côte-à-côte une photorésistance et une photodiode en face d'un stroboscope. On observe à l'oscilloscope les signaux issus de la photorésistance et de la photodiode. Cette dernière - dont le temps de réponse est beaucoup plus court que pour la photorésistance - permet de vérifier que le temps de montée et de descente des flashs lumineux produits par le stroboscope sont tout à fait négligeables face au temps de réponse de la photorésistance. On fait ensuite une simple mesure des temps de montée τ_m et de descente τ_d de la photorésistance qui doivent être de l'ordre de la dizaine de μs. On peut éventuellement discuter de la non-symétricité des régimes transitoires de montée et de descente.

Lorsque la lumière s'éteint, le courant ne cesse pas automatiquement : il y a un **temps de recombinaison** pendant lequel les électrons de la bande de conduction se recombinent avec les trous de la bande de valence. On va pouvoir mesurer le temps de recombinaison des porteurs avec un stroboscope.



Mesure du temps de recombinaison des porteurs de charge

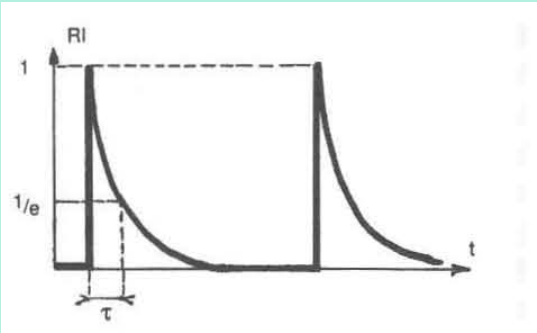
✍ Quaranta tome 3 p435 ⏲

Matériel :

- Photorésistance
- Stroboscope
- Alimentation 12 V
- Résistance
- Oscilloscope

- GBF

On effectue le montage de la figure 7. On mesure la tension aux bornes de la résistance pour avoir l'image du courant en sortie de la photorésistance. On l'éclaire avec un stroboscope avec des flashs de fréquence 100Hz (commandé avec un GBF en pulses de faible largeur). A l'oscillo, on voit une décroissance exponentielle du courant.



On estime le temps de recombinaison grâce à l'oscillo en mesurant le temps de décroissance expontentielle du courant. Pour du Silicium, on attend un temps de recombinaison de l'ordre de la milliseconde.

Mettre une photodiode en plus permet de s'assurer que le temps de réponse est celui de la résistance, pas celui du strobo.

Conclusion

Au cours de ce montage, nous avons exposé les 3 types de régimes transitoires qui peuvent apparaître (apériodique, critique, pseudo-périodique) et nous avons constaté qu'ils n'apparaissent pas seulement aux temps cours mais aussi sur des temps longs. Ces régimes transitoires ne sont pas seulement limitants puisqu'ils sont porteurs d'informations sur le système. En ce qui concerne les capteurs, la connaissance de leur régime transitoire est primordiale puisque cela permet de déterminer la limite de détection d'un appareil de mesure.

Par ailleurs, nous n'avons qu'effleuré la notion d'asservissement capitale en ingénierie : un transitoire pseudo-périodique est bien souvent impensable dans ce domaine car cela créerait des oscillations qui pourraient casser certaines pièces. En général, l'idéal reste le régime critique voire un régime pseudo-périodique avec un dépassement très faible si le système asservi le supporte.

MP 34

Phénomènes de transport

Commentaires du jury

- **2014-2017 :** Des transports autres que diffusifs peuvent faire l'objet de ce montage. Lors de la mesure du coefficient de diffusion du glycérol, par la déviation d'une nappe laser, les candidats doivent être à même d'expliquer précisément la nature de l'image observée sur l'écran et son origine physique.
- **2010-2013 :** Le choix des expériences doit veiller à souligner l'aspect transport.
- **2012 :** Ce montage est ouvert à de nombreux domaines, pouvant donner lieu à des études comparées ; on pensera à exploiter les régimes transitoires et les régimes permanents.
- **2009 :** La mesure de la conductivité thermique d'un métal par sa réponse en température à une excitation alternative a posé problème à de nombreux candidats par suite de l'analyse des mesures à l'aide d'une loi non valide avec les conditions aux limites concernées. Le régime permanent implicitement mis en jeu doit être précisé, de même que son temps d'établissement.
- **2000 :** Connaître a priori l'ordre de grandeur de quelques coefficients de diffusion est indispensable. Les dispositifs dédiés permettant d'étudier l'effet Hall sur des échantillons sélectionnés semblent poser, malgré leur simplicité, de gros problèmes d'utilisation.

Bibliographie

✍ *BUP 827* ⟶ Rayonnement
✍ *Physique expérimentale*, **FLTCLD** ⟶ Convection et viscosimètre
✍ *BUP 819* ⟶ Diffusion du glycérol
✍ **Calecki** ⟶ Calculs du glycérol
✍ **Quaranta tome 2** ⟶ Glycérol (p466)

1 Transport par convection . . . 1324
2 Transport par diffusion . . . 1325
2.1 Diffusion de particules . . . 1325
2.2 Diffusion de quantité de mouvement (tiré par les cheveux) . . . 1327
3 Transport par conduction . . . 1328
3.1 Conduction électrique . . . 1328
3.2 Conduction thermique . . . 1330
3.3 Loi de Wiedemann-Franz . . . 1332
4 Transport d'énergie par rayonnement . . . 1332
4.1 Loi de Stefan . . . 1332
4.2 Vérification expérimentale . . . 1333

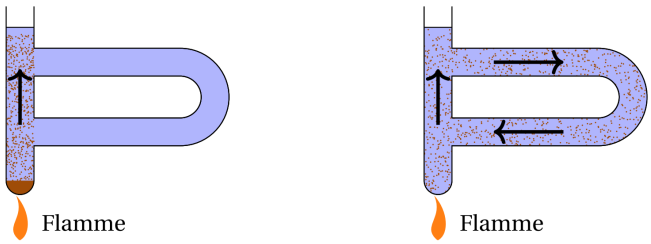
Introduction

Les phénomènes de transport concernent les situations où on a un déplacement d'une grandeur, scalaire ou vectorielle, sans qu'il n'y ait disparition ou création de celle- ci. Ils naissent dans les systèmes hors équilibre. Ils sont généralement classés en quatre catégories : la convection lorsqu'il y a déplacement macroscopique de matière, la diffusion due à l'inhomogénéité d'un paramètre intensif, la dérive sous l'action d'un champ de force et le rayonnement lorsque le transport ne nécessite pas de milieu matériel.

Les phénomènes de transport mettent en jeu une grande diversité de grandeurs comme la quantité de matière, l'énergie thermique ou la quantité de mouvement. Dans ce montage, nous ne nous intéresserons pas à la dérive, nous allons décrire principalement les phénomènes de diffusion pour en faire ressortir les différentes propriétés et la variétés des situations qui les caractérisent.

1 Transport par convection

La convection thermique naturelle correspond à une mise en mouvement d'un fluide sous l'action d'un gradient de température. On met en évidence le phénomène en chauffant de l'eau dans un tube coudé spécifique représenté ci dessous, avec de la sciure de bois, qui a une densité proche de celle de l'eau, pour visualiser le mouvement du fluide :



Convection thermique

✍ 🕒 2mn

Déposer un peu de sciure de bois dans le fond du tube coudé, puis le remplir d'eau. Fixer le tube à un statif à l'aide d'une pince, puis chauffer son extrémité basse avec un chalumeau. Après quelques secondes, la sciure se met en mouvement : elle monte verticalement le long du tube, puis redescend en passant par le coude.

Le fluide chauffé en bas du tube est moins dense que le fluide au-dessus, il s'élève donc verticalement et entraine la sciure avec lui. Le fluide plus froid est alors poussé dans la conduite supérieure du coude, puis il retourne en bas du tube en passant par le coude.

Un gradient de température a ainsi entraîné un transport de matière et d'énergie thermique.

temps caractéristique : 5s pour 10cm, c'est plutôt rapide.

Quantité transportée : $Q = c_p \Delta T \rho V$, la surface c'est $S = \pi R^2$, donc la puissance vaut $P = c_p \Delta T \rho V \Delta t / S \simeq 4 \times 10^5 \,\mathrm{W\,m^{-2}}$.

> *Ce phénomène de transport est macroscopique, nous allons maintenant changer d'échelle et étudier des transports de proche en proche.*

2 Transport par diffusion

2.1 Diffusion de particules

✍ BUP 819, Quanta tome 2 p466

Le moteur de la diffusion est l'inhomogéneité d'une grandeur. On tend alors soit vers un état stationnaire (particules homogènes), soit vers un état de diffusion permanent (cas d'un gradient de température). On va s'intéresser dans cette sous-partie au cas où le paramètre inhomogène à considérer est la densité des particules. Le moteur microscopique de la diffusion est alors l'agitation thermique (désordonnée), ce qui est bien pris en compte dans la loi phénoménologique de Fick :

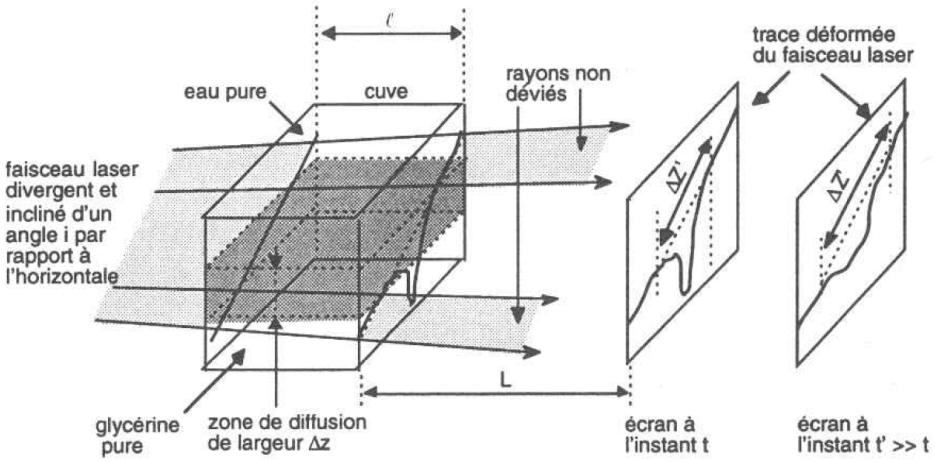
$$\vec{j} = -D\vec{\nabla}c. \tag{34.1}$$

La conservation du nombre de particules en l'absence de sources donne :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c. \tag{34.2}$$

On va illustrer la diffusion de particules avec la diffusion du glycérol dans l'eau. Pour étudier ce phénomène, on va utiliser une méthode optique puisque l'indice optique d'une solution eau-glycérol dépend de la concentration en glycérol : pour une solution eau-gylcérol de fraction molaire en glycérol x_g, on a

$$n_{eg} = x_g n_g + (1 - x_g)n_e$$



L'idée est la suivante : on utilise une solution eau-glycérol à 50% en masse (c'est du 16% en molaire). Ainsi, son indice optique vaut

$$n_{eg} = \frac{1}{1 + \dfrac{M_g}{M_e}}(n_g - n_e) + n_e$$

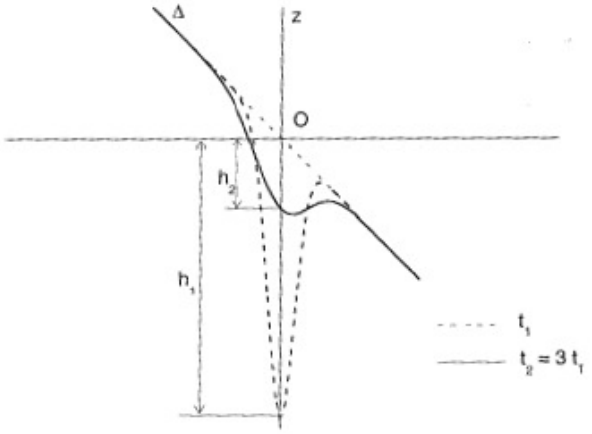
Pour éviter de créer de la convection, on le fait avec une burette et doucement (il faudra donc laisser la burette dans la cuve pour éviter de faire des remous).

Remarque

Avec une solution de glycérol pure, l'expérience serait bien trop longue.

On élargit un faisceau laser avec une lentille cylindrique. Les rayons incidents sont alors contenus dans un plan incliné à 45degree par rapport à l'horizontale mais normal à la surface de la cuve. Les rayons transmis sont alors projetés sur un écran.

Une partie de ces faisceaux traverseront donc soit l'eau pure, soit la solution eau-glycérol et donc une zone sans gradient d'indice optique : on voit alors une droite sur l'écran car les rayons ne sont pas déviés (incidence normale). Cependant, entre ces deux zones, les rayons vont traverser la zone de diffusion où il y a un gradient d'indice dû au gradient de concentration en glycérol. Les rayons seront donc déviés dans cette zone qui prend alors une forme de pic sur l'écran.



Plus le temps passe, et plus la concentration en glycérol s'homogénéise et donc plus le pic sera petit. On peut montrer que l'angle de déviation θ dans le plan vertical des rayons a pour expression :

$$\theta(z,t) = e\frac{\partial n}{\partial z} = -\frac{e(n_{eg}-n_e)}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$$

on a bien une déviation proportionnelle au gradient d'indice, et on peut en déduire la hauteur du pic (qui est une gaussienne) au cours du temps :

$$h(t) = \frac{eL(n_{eg}-n_e)}{\sqrt{4\pi Dt}}$$

avec e l'épaisseur de liquide traversée et L la distance entre la cuve et l'écran.

Les hypothèses réalisées pour ce montage sont donc :

- L'épaisseur du milieu traversant est suffisamment faible pour avoir un gradient de concentration constant sur toute l'épaisseur
- Temps assez long pour pouvoir confondre θ et $\tan\theta$ en z=0
- Milieux semi-infinis
- On néglige l'influence de la pesanteur

Diffusion du glycérol dans l'eau

✍ Quaranta tome 2, BUP 819

Expérience à démarrer assez tôt lors des 4h de préparation.

On introduit de l'eau dans une cuve (par exemple une cuve avec des joints en caoutchouc) puis on injecte **avec précaution** une solution eau-glycérol à 50% en masse avec une burette. **Cette étape doit être réalisée au moins 2h avant la mesure**.

Éclairer la cuve avec d'une nappe laser (réalisée grâce à une lentille cylindrique, *i.e.* un bout de cylindre en verre, en sortie d'un laser).

À $t = 0$, tracer un trait vertical passant par le sommet du pic. On mesure ensuite toutes les dix minutes la hauteur h en repérant l'intersection entre la nappe laser et le trait vertical. (Il faut bien faire attention à repérer toujours la hauteur h sur la même ligne verticale).

Tracer $\left(\frac{eL(n_{eg}-n_e)}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{h}\right)^2 = f(t)$ pour obtenir une droite de pende D.

On peut comparer D à la littérature : $D_{\text{litt}} = 3.95 \times 10^{-10}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}$ pour un mélange eau-glycérol à 16% molaire en glycérol.

Valeur tabulée trouvée dans **Diffusion Coefficients for the Binary System Glycerol Water at 25°C. A Velocity Correlation Study**, *J. Chem. Eng. Data*, **2004**, *49* (6), pp 1665–1670.

L'article est également disponible au lien https://www.academia.edu/13578602/Diffusion_Coefficients_for_the_Binary_System_Glycerol_Water_at_25_C._A_Velocity_Correlation_Study.

Remarque : Bien savoir expliquer le principe de la mesure optique, qu'est-ce qu'on observe sur l'écran et pourquoi ?

Précautions : Eviter d'introduire un mouvement de convection (ne pas enlever la burette après avoir introduit le glycérol).
Il faut avoir un indice optique relativement proche de l'eau, d'où un mélange eau-glycérol 50-50.

A l'instant t=0, les deux liquides ne sont pas mélangés, l'interface est donc horizontale. Puis ils diffusent l'un dans l'autre suivant la direction verticale : la concentration en glycérol et donc l'indice optique dépend alors du temps et de l'altitude.

Temps caractéristique : Pour 10cm, le temps de diffusion est de l'ordre de 30 millions de secondes, soit plus d'un an (après 24h, on voyait encore l'interface).

Quantité transportée : concentration, quantité de matière. On voit que c'est un transport particulièrement inefficace pour les grandes distances.

2.2 Diffusion de quantité de mouvement (tiré par les cheveux)

✍ FLTCLD

Quand on écrit Navier-Stokes, on peut être amené à écrire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$$

On retrouve une équation de diffusion dont le coefficient est la viscosité cinématique ν et il se trouve que cette viscosité est responsable des forces de frottement qui s'exerce sur un objet dans l'écoulement d'un fluide visqueux. Le but est ici de déterminer ce coefficient de diffusion (la viscosité cinématique), cette fois en régime permanent.

Pour cela on fait tomber des billes de rayon r et masse volumique ρ_b dans une éprouvette cylindrique remplie d'un fluide de masse volumique ρ_f, ici de l'huile Rotitherm. On fait les hypothèses suivantes :

- Régime stationnaire atteint
- Ecoulement rampant (Re«1)
- Le fond de l'éprouvette n'a pas d'influence sur l'écoulement

La force de frottement fluide est donnée par la formule de Stokes pour les écoulements à bas nombre de Reynolds :

$$\vec{F} = -6\pi\eta \frac{r}{1 - 2.1\frac{r}{R}} \vec{v}$$

, le terme $2.1\frac{r}{R}$ permettant de prendre en compte les effets de bords, avec R le rayon de l'éprouvette et η la viscosité dynamique du fluide.

Quand le régime permanent est atteint, la vitesse de la bille est constante et vaut :

$$v = \frac{2}{9}\frac{\rho_b - \rho_f}{\eta} r^2 g(1 - 2.1\frac{r}{R})$$

Viscosimètre à bille

✍ FLTCLD ⏲ 2 min

Matériel : Éprouvette remplie d'huile Rotitherm M220, billes en acier de différents rayons, chronomètre, règle

Mesurer le temps de chute d'une bille entre deux graduations, plusieurs fois (8 fois) pour plusieurs rayons, et remonter à la vitesse. On réalise un ajustement de la forme $v = f(r) = ar^2 - br^3$ au vu de l'équation précédente. Le coefficient a permet de remonter à la viscosité dynamique de l'huile η_{exp}.

Incertitudes :

- Longueur : mesure à la règle, $\Delta L = \frac{0.001}{2\sqrt{3}}$
- Diamètre des billes : mesure au pied à coulisse et données constructeur.
- Masse des billes : dernier digit de la balance et données constructeur.
- Temps de mesure : écart-type sur la série de N(=8) mesures et erreur systématique due au temps de réaction de l'expérimentateur de 0,1s ; $\Delta(\Delta t) = \sqrt{(\frac{écart - type}{\sqrt{N}})^2 + \sigma_{syst}^2}$

Temps caractéristique : Pour parcourir 10 cm, le temps de diffusion est de l'ordre de 10 s.

Remarque : Bien défendre sa place dans le montage puisqu'on ne montre pas explicitement la diffusion de quantité de mouvement.

3 Transport par conduction

3.1 Conduction électrique

✍ FLTCLD p399

La conductivité σ d'un matériau, *i.e.* l'inverse de sa résistivité ρ_{elec}, est une donnée importante si on veut l'utiliser comme composant électrique. Cependant, elle n'est pas constante et dépend notamment de la température. On se propose d'étudier la dépendance en température de σ.

Pour cela, on va mesurer la résistance R d'un fil de cuivre en fonction de la température T. En supposant que le fil est un fil cylindrique de longueur L et de section S, on peut relier la résistance R à la conductivité par la relation :

$$R = \frac{\rho_{\text{elec}} L}{S} = \frac{L}{\sigma S}$$

Dans la gamme de température ambiante, ρ_{elec} est une fonction affine de T et donc R l'est également :

$$R(T) = \frac{L}{S}(\alpha T + \rho_{\text{elec},0}) \qquad \textbf{avec la température en °C} \tag{34.3}$$

On va chercher à vérifier cette loi. Cependant, les résistances en jeu sont faibles, si bien qu'on ne peut pas juste brancher un ohmmètre et mesurer R directement. À la place, on va utiliser un **montage à quatre fils**.

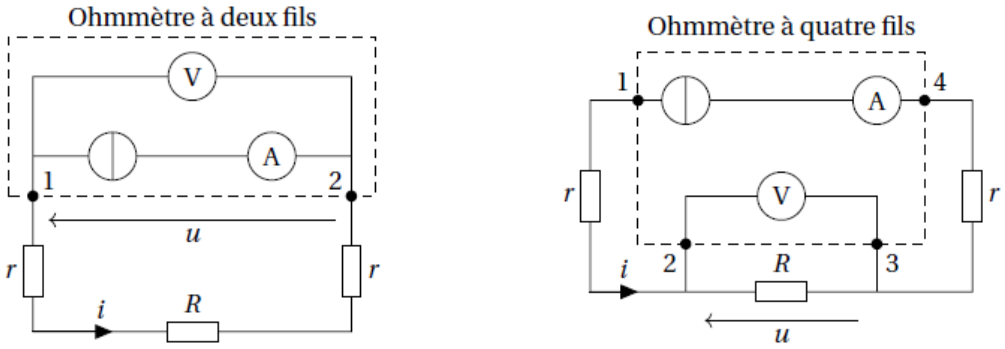


FIGURE 34.1 – Montages de mesure de résistance à deux fils et à quatre fils

Intérêt du montage quatre fils

Dans ce montage, nous utilisons un montage dit "à quatre fils" pour mesurer la résistance de notre fil de cuivre. Voyons les caractéristiques d'un tel montage qui expliquent son utilisation ici.

Le principe d'un ohmmètre commercial est d'imposer un courant i dans le circuit d'une résistance R et de mesurer la tension u à ses bornes. On revient à la valeur de la résistance directement avec la loi d'Ohm. Le problème de cette méthode dite "à deux fils" est que l'on mesure la résistance de toute la branche du circuit contenant le dipole à étudier, la valeur de résistance retournée prend en compte la résistance des fils et des soudures modélisée par une résistance r parasite. On peut estimer la valeur de r à moins de 0.5 mΩ donc négligeable lors de mesure de grandes résistances mais **dont il faut tenir compte pour la mesure de petites valeurs de R.**

Le montage quatre fils fonctionne sur le même principe d'une mesure de u et i mais l'apport de ce montage est de séparer ces deux mesures. Sous la forme d'un quadripôle, l'ohmmètre impose toujours un courant i dans le circuit mais la mesure de la tension u se fait dans une maille différente. On suppose que le voltmètre ne modifie pas la valeur du courant grâce à sa résistance interne très élevée (environ 1 MΩ) et ceci est d'autant plus vrai que l'on s'intéresse à des faibles résistances R... La mesure du courant qui traverse R et de la tension **directement** à ses bornes permet d'avoir directement la valeur de R sans les résistances parasites.

Conductivité électrique du cuivre en fonction de T

✍ FLTCLD ⏲ 5 min

Matériel :

- bobine P56.27 (fil de cuivre de longueur $L = 1710 \pm 5$ cm et de diamètre $d = 0.80 \pm 0.01$ mm
- multimètre quatre fils de précision P69.35
- bécher assez grand pour qu'on puisse immerger la bobine
- agitateur magnétique
- bouilloire
- thermocouple P102.16 branché sur l'appareil P102.27

Brancher le multimètre quatre fils sur la bobine (une extrémité reliée aux deux sorties LOW et l'autre extrémité reliée aux deux sorties HIGH). Immerger la bobine dans un bécher d'eau chaude (garder les jonctions électriques sèches). Lancer l'agitation.

Mesurer la température T du bécher avec le thermocouple est la résistance R du fil avec le mulitmètre quatre fils. relever T régulièrement (par exemple tous les 0.2°C).

Tracer $R = f(T)$ et faire la régression affine $\rho_{\text{elec}} = \alpha T + \rho_{\text{elec},0}$ **avec T en °C**. On peut alors en déduire $\sigma = \dfrac{1}{\rho_{\text{elec}}}$

Pour le cuivre, les valeurs tabulées sont $\alpha_{\text{tab}} = 6.76 \times 10^{-11}\,\Omega\,\text{m}\,\text{K}^{-1}$ et $\rho_{\text{elec},0,\text{tab}} = 1.543 \times 10^{-8}\,\Omega\,\text{m}$.

Remarques

- On envoie du courant continu dans la bobine donc on n'a pas d'effets inductifs
- La modélisation affine de ρ_{elec} en fonction de T **n'est valable que pour une gamme de température ambiante**. On le voit ici car d'après la modélisation, $\rho_{\text{elec}}(0\ \text{K} < 0$.

Incertitudes :

$$u(\rho_{\text{elec}}) = \rho_{\text{elec}} \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2}$$

$$\frac{u(\sigma)}{\sigma} = \frac{u(\rho_{\text{elec}})}{\rho_{\text{elec}}}$$

Comparaison avec d'autres matériaux non métalliques :

Matériau	ρ_{elec} (Ω·m)
Métal	$10^{-8} - 10^{-9}$
Eau	10^{5}
Verre	10^{17}
Polystyrène	10^{20}

3.2 Conduction thermique

Dans cette sous-section, ρ désigne la *masse volumique* et non pas la résistivité électrique.

3.2.1 Intro qualitative et théorie

L'équation qui régit le transfert de chaleur dans les matériaux est, dans le cas unidimensionnel (les valeurs données sont pour le cuivre).

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa = \frac{\lambda}{\rho c} \quad \text{en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \text{ la diffusivité ;} \\ \lambda = 401\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{la conductivité ;} \\ \rho = 8.96 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \text{la masse volumique ;} \\ c = 3.85 \times 10^2\,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{la capacité calorifique massique.} \end{cases}$$

On voit donc que c'est le facteur de diffusion κ qui détermine la vitesse de transfert de la chaleur. On voit bien qu'il y a une différence de κ entre ces matériaux. Nous allons donc déterminer précisément κ pour le cuivre, et remonter à λ. La méthode donnée serait tout à fait utilisable pour les autres matériaux, et permettrait de remonter à toutes leurs conductivités respectives.

Validité : Faibles écarts de température, et $\delta \ll l$.

3.2.2 Détermination de la conductivité thermique du cuivre

On utilise l'appareil LM35DZ. Il s'agit d'une barre de cuivre calorifugée de longueur $L = 25$ cm, dans laquelle sont placés 6 capteurs que l'on espère non intrusifs de température. Ces capteurs ont une réponse linéaire en température et sont espacés de 5cm les uns des autres.

On impose un flux thermique en entrée à l'aide d'un module Peltier (✍ Quaranta II, p.180), et on se place en régime sinusoïdal forcé, en considérant la barre semi-infinie.

$$\text{C.L. :} \qquad -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = \phi_0 \sin(\omega t)$$

Ainsi la solution est de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-x/\delta} \sin(\omega t - x/\delta) \qquad \text{avec } \delta = \sqrt{2\kappa/\omega} \tag{34.4}$$

On veut que l'onde thermique parcoure toute la barre, par conséquent on choisi ω pour avoir $5\delta \simeq L$. Du coup on est pas vraiment infini, mais ça fera l'affaire.

Mesure de la conductivité du cuivre

✍ ⏲

Mettre en place le dispositif (barre de cuivre P0.73) : brancher les six capteurs sur une carte d'acquisition SYSAM, alimenter les ventilateurs (12 V continu) et les capteurs (15 V continu). Le potentiel de référence pour les signaux issus des capteurs est la masse de l'alimentation de ceux-ci.

ATTENTION : Bien alimenter les ventilateurs avant toute manipulation, pour ne pas griller le module Peltier !

Alimenter le module Peltier par un amplificateur de puissance Kepco P53.9 piloté par un GBF (entrée sur Input, sortie entre Common et Output). Régler le GBF sur Vpp = 3V, sans offset, à une fréquence de 10 mHz.

Vérifier à l'ampèremètre en mode continu (car la période est grande) que le courant ne dépasse jamais 4 A sur une période.

Suivre en temps réel l'évolution de la température sur le dernier capteur à l'oscilloscope. Attendre que le signal se stabilise (environ 30 minutes). Faire l'acquisition des signaux des différents capteurs sur Latis-Pro pendant quelques périodes (typiquement 20 minutes).

Grâce à l'outil informatique, nous avons la possibilité d'évaluer δ de deux manières : par la décroissance de l'exponentielle et par la phase prise par le signal.

Tu ajustes chaque signal par un sinus, tu obtiens son amplitude et sa phase, et gogo-gadgeto tableur !

On obtient des valeurs de δ et donc de κ. Il est alors possible de remonter à $\lambda = \kappa\rho c$ en mesurant ρ (facile) et c par calorimétrie. On va ici utiliser des valeurs tabulées à la place, parce que c'est plus rapide.

On s'attend à $\kappa = 1.14 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2/s}$, et $\lambda_{\text{tab}} = 3.90 \times 10^2\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

Astuce : sur l'amplitude on a les pertes thermiques qui font que λ semble plus faible, sur la phase par contre, on a la bonne valeur normalement. On a une erreur systématique sur le décrément logarithmique et donc sur l'évaluation de la moyenne de δ.

Quelques conductivités thermiques de quelques matériaux classiques :

Matériau	λ (W/(m.K)), @300K
Cuivre	390
Acier	20-50
Pierre	1-3
Bois	0.15
Liège	0.04
Laine de verre	0.03

3.3 Loi de Wiedemann-Franz

On a pris l'exemple du cuivre pour mesurer une conductivité électrique et thermique pour une bonne raison : en tant que métal, ces deux quantités sont reliées par la loi de Wiedemann-Franz :

$$\frac{\lambda \rho_{\text{elec}}}{T} = \text{constante} = \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \simeq 2.44 \times 10^{-8}\,\text{W}\,\Omega\,\text{K}^{-2} \tag{34.5}$$

avec λ la conductivité thermique, ρ_{elec} la résistivité électrique, k_B la constante de Boltzmann et e la charge élémentaire.

Vérification de la loi

✍ 🕒 10 sec

On a mesuré ρ_{elec}, on vient de mesurer λ, on calcule donc $\frac{\lambda\rho}{T}$ et on compare à $\mathcal{L}$.

4 Transport d'énergie par rayonnement

✍ BUP 827 p1595

4.1 Loi de Stefan

Cette loi relie le flux de lumière, et donc l'énergie rayonnée, à la température. On se dit intuitivement que plus c'est chaud plus ça brille, c'est ce que l'on va montrer.

Hypothèses :

- Régime permanent
- Le tungstène est un corps noir.
- Les pertes se font uniquement par rayonnement.

Le flux d'énergie rayonnée s'écrit

$$\Phi = \int_0^{+\infty} \frac{\text{c}}{4} \text{u}_\nu \text{d}\nu$$

En combinant cette expression avec la loi de Planck, on obtient alors

$$\Phi = \frac{2\pi \text{h}}{\text{c}^2}\left(\frac{\text{k}_\text{B}\text{T}_0}{\text{h}}\right)^4 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\text{d}x}_{=\frac{\pi^4}{15}} \tag{34.6}$$

On obtient ainsi la loi de Stefan :

$$\Phi = \sigma \mathrm{T}^4 \tag{34.7}$$

où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 \mathrm{k_B}^4}{15\mathrm{h}^3\mathrm{c}^2} = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$ est la constante de Stefan.

4.2 Vérification expérimentale

Vérification de la loi de Stefan sur une petite ampoule

✍ LP17 ⏲ 5 minutes

matériel : Une petite ampoule, deux multimêtres, une alim, un ordinateur.

L'ampoule de petite taille est un bon corps noir parce que le vide est quasiment total dans le bulbe. On peut d'ailleurs toucher ce dernier, il n'est pas chaud. On se place aux valeurs nominales de l'ampoule (6V, 0.1A).

Le filament à l'intérieur est en Tungstène, on connaît donc sa courbe résistivité-température, notée $\rho(T)$. Dans cette expérience celle-ci nous vient tout droit d'internet [a] [b]. On fait une regression quadratique sur les données de la table obtenue.

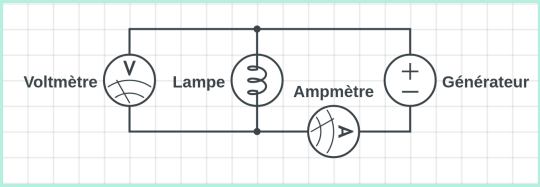
$$T = a + br + cr^2$$

$a = 128,0 \pm 9,0$, $b = 203,0 \pm 2,1$, $c = -1,62 \pm 0,1$.

Où on a posé

$$r = \frac{R(T)}{R(T_{amb})} = \frac{\rho(T)}{\rho(T_{amb})}$$

Pour remonter à R on utilise la relation $U = R \times I$, et le montage suivant :



Ainsi on remonte à T via la relation $r(T)$, puis on trace $\ln(P = U \times I)$ en fonction de $\ln(T)$ et Bam!!

a. The University of the State of New York Reference Tables for Physical Setting/Physics. New York : The State Education Department, 2002.

b. https://hypertextbook.com/facts/2004/DeannaStewart.shtml

Incertitudes : Courant et Tension : dernier digit de l'ampèremètre et du voltmètre

Vérification des hypothèses et discussion du modèle

- En réalité, le tungstène n'est pas vraiment un corps noir, il faut donc prendre en compte son émissivité :

$$P = \epsilon \sigma T^4 \tag{34.8}$$

qui vaut $\epsilon = 0,115$ à 1000K et $\epsilon = 0,28$ à 2000K.

- Échanges d'énergie par convection avec le support métallique et convection avec le gaz qui l'entoure, donc il a des termes supplémentaires (notamment convecto-diffusif avec le coefficient de Newton). Cependant, les ampoules faible puissance contiennent peu de gaz.

- La loi de Stefan s'applique sur un corps convexe, or le filament à une structure spiralée, certains tronçons absorbent l'énergie émise par d'autres parties.

Temps caractéristique : Propagation à la vitesse de la lumière, donc pour parcourir 10cm : $\Delta t = 0,3\ ns$, il faut aussi le temps que la chaleur diffuse dans la peau de la main par exemple.

Quantité transportée Puissance rayonnée par le fluide : $P = \sigma T^4$, soit en faisant un bilan sur les deux couches de fluides : $P = \sigma((T+\Delta T)^4 - T^4) \simeq 4\sigma T^3 \Delta T \simeq 6.0 \times 10^1\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.

Question : J'ai deux minutes pour boire un thé brûlant, et je veux y mettre de l'eau froide. Quand dois-je mettre cette eau froide pour avoir le meilleur refroidissement ?

Il me suffit d'attendre le dernier moment, j'aurais ainsi transféré autant d'énergie que possible à l'air ambiant avant de mélanger et de boire mon thé.

Boire le thé posé au bord de la paillasse.

Conclusion

Convection particulièrement efficace pour transporter de la matière et de l'énergie thermique.

Type de transport	Moteur	Déplacement de matière	Milieu matériel nécessaire
Convection	Poussée d'Archimède	Oui	Oui
Diffusion de particules	Inhomogénéité de concentration	Oui	Oui
Diffusion de $\overrightarrow{p}$	Inhomogénéité de vitesse	Oui	Oui
Conduction électrique	Inhomogénéité de potentiel	Oui	Oui
Conduction thermique	Inhomogénéité de température	Non	Oui
Rayonnement	Propagation de photons	Non	Non

Commentaires

But : illustrer la variété des quantités (molécules, électrons, quantité de mouvement, chaleur... scalaire ou vecteur) transportés et des types de transport (diffusion, convection, rayonnement)

Il existe un Techniques de l'ingénieur sur les phénomènes de transport par DIFFUSION (https://www.techniques-ingenieur.fr/res/pdf/encyclopedia/tiafp-a247-version1.pdf).

Il faut faire ressortir nettement les caractéristiques des différents types de transport et éventuellement comparer leur efficacité.

Questions

Viscosimètre : quel est le rapport avec les phénomènes de transport ? Pouvez-vous expliciter en quoi c'est un phénomène de diffusion ? Quel est le coefficient de diffusion caractéristique du phénomène ?

Diffusion de quantité de mouvement (Navier-Stokes sans gravité ni advection)
Coefficient de diffusion = Viscosité cinématique

De quoi dépend la viscosité d'un fluide ? De la température (exp décroissante)

Viscosimètre : ODG de la taille de la couche limite sur la bille ?

Connaissez des exemples de couplage entre deux phénomènes de transport ? Effet Peltier et Effet Seebeck : couplage de conduction thermique et électrique.

Hypothèse pour la loi de Fourier ? Domaine d'application ? Pour la loi de Fick ? Gradient de température pas trop important et variations temporelles pas trop importantes.

Convection : on parle différents types de convection, est-ce que tu peux en parler ? Convection naturelle (gradient de température) et convection forcée (advection, ventilateur, pompe)

Quelle relation utilise-t-on pour décrire la convection ? Transfert conducto-convectif, formule de Newton (h en $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$) : $\phi = hS(T - T_{fluide})$

Pourquoi l'eau monte quand on chauffe ? Toujours vrai ? Densité de l'eau chaude plus faible que celle de l'eau froide. Non, pas entre 0 et 4 degré, c'est l'inverse (maximum en $\simeq 4\,°\mathrm{C}$ qui est la définition de la densité 1.

Nombre sans dimension pour comparer la convection et la conduction thermique ? Nombre de Rayleigh

Tous les bons conducteurs électriques sont de bons conducteurs thermiques ? Toujours vrai ? Loi de Wiedmann-Franz : $\dfrac{\kappa}{\sigma} = LT$

Autre grandeur que conductivité thermique pour comparer la sensation de froid/chaud pour deux matériaux différents à la même température ? Effusivité $E = \sqrt{\kappa \rho c} = \sqrt{D_{th}}\rho c$, théorème du "Contact thermique" : $T = \dfrac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$

Est-ce que c'est de la diffusion qui régit le mouvement des charges ? Existence de la migration (présence d'un champ de force) en plus de la diffusion

Que se passe-t-il dans la couche limite et en-dehors ? Couche limite : zone de raccordement entre la condition aux bords et l'écoulement à l'infini : dans la couche limite = diffusion, en dehors = convection (pour écoulements à haut Reynolds). Plus la vitesse est grande, plus la couche limite est petite , et il existe des phénomènes de décollement. Couche limite à la base du Cx donc des frottements et donc des phénomènes de diffusion irréversibles
Taille de la couche limite $\delta \simeq \dfrac{L}{\sqrt{Re_L}}$

Qui est Stefan ? Physicien, mathématicien austro-hongrois du 19e siècle.
Il a notamment travaillé sur la biréfringence du quartz, puis a établi la loi de Stefan Boltzmann en 1879 (Boltzmann a été son élève et en a donné une justification théorique) ce qui lui a permis de donner une bonne approximation de la température de surface du Soleil.

Domaine de validité et hypothèses de la formule de Stokes ? Comment on la démontre ? Nombre de Reynolds inférieur à 0,1 et objet sphérique. Sphère suffisamment loin de tout obstacle (au moins 10 le rayon de la sphère).

Pouvez vous préciser les conditions aux bords et le fonctionnement du module Peltier ?

Comment avez-vous choisi la fréquence de forçage ?

Comment tester la présence de pertes latérales ? Comment les prendre éventuellement en compte ?

Pouvez-vous expliquer le principe du montage 4 fils pour mesurer la résistance ?

Comment fonctionne un thermocouple ?

MP 35

Moteurs

Commentaires du jury

- **2015-2017 :** Ce montage a été présenté plusieurs fois lors de cette session et a conduit à plusieurs prestations de bonne qualité. Le jury a apprécié la présentation quantitative d'un moteur de Stirling. Néanmoins, il est important que les candidats, face à un moteur, soient à même d'expliquer pourquoi il tourne.
- **2013 :** la notion de point de fonctionnement nominal est importante. D'autre part, les modèles utilisés pour décrire les convertisseurs sont souvent trop simplifiés. Il faut être capable d'interpréter l'écart entre le système idéal et le système réel.
- **2007 :** Un effort pédagogique incluant une approche physique des phénomènes impliqués dans le fonctionnement des moteurs permet d'éviter un montage constitué d'une série de mesures sans logique apparente.

Bibliographie

✍ *Thermodynamique*, **Pérez**	⟶ Stirling, pp182-183
✍ *BUP 864, Mai 2004*	⟶ Stirling, pp663-687
✍ *Electrotechnique, parcours IUT, Dunod*, **C. Palermo**	⟶ Fonctionnement de la MCC
✍ *Moteurs à courant continu*, **Quaranta IV**	⟶ MCC
✍ *Electronique II*, **HPrépa**	⟶ MCC
✍ *BUP 846*	⟶ Principes et applications des moteurs électriques

1 Moteur thermique : moteur de Stirling . . . 1338
1.1 Présentation . . . 1338
1.2 Étude à vide . . . 1339
1.3 Rendement . . . 1339
1.4 Moteur en charge (Tampon, ça marche pas) . . . 1340
2 Moteur électrique : MCC . . . 1340
2.1 Couplage électromécanique . . . 1340
2.2 Présentation du moteur . . . 1341
2.3 Étude à vide . . . 1342
2.4 Étude en charge . . . 1343
2.5 Rendement de la machine . . . 1343
3 Moteur à courant alternatif . . . 1344
3.1 Moteur synchrone . . . 1345
3.2 Moteur asynchrone . . . 1346

Introduction

Un moteur est un dispositif cyclique permettant de fournir du travail : sur un cycle, le travail donné par le reste de l'univers est négatif. Le but du moteur est donc de convertir de l'énergie chimique, électrique ou thermique en énergie mécanique, de façon la plus efficace possible.

On distingue deux types principaux (il en existe d'autres types) :

- les moteurs thermiques, qui fournissent du travail à partir de chaleur ;
- les moteurs électriques, qui fournissent du travail à partir de forces électromagnétiques.

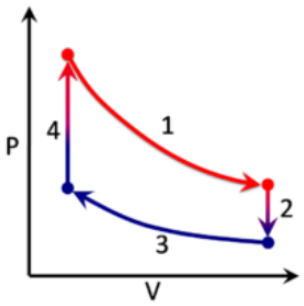
On va étudier ces deux types : avantages et inconvénients, rendement, applications.

1 Moteur thermique : moteur de Stirling

✍ Pérez p.169 **Éteindre le moteur après chaque expérience pour le laisser refroidir et le rendre de nouveau opérationnel.**

1.1 Présentation

Principe de Carnot : il n'existe pas de moteur monotherme. On va donc essayer de faire au plus simple, *i.e.* avec deux sources de chaleur. Un exemple historique est le moteur de Stirling. Inventé par Stirling en 1818 pour remplacer la machine à vapeur. Il a la particularité de fonctionner en système fermé, c'est à dire que rien n'en sort ou ne rentre.



Le moteur de Stirling parcourt le cycle. Ce cycle est composé de quatre étapes :
1. détente isotherme
2. refroidissement isochore
3. compression isotherme
4. chauffage isochore

Le moteur réel est constitué de deux parties : une en contact avec une flamme (source chaude) et l'autre en contact avec des ailettes de refroidissement (source froide) liés par un petit conduit. Le volume total est fixé par un premier piston, un deuxième piston en quadrature assure des échanges de volume entre les deux parties.

Le moteur de Stirling dont nous disposons possède un système de mesure fait maison, comprenant un capteur de pression ainsi qu'un capteur de volume qui est un compteur, et qui nécessite donc de faire un zéro (compteur calibré avec le piston en position basse). Il faut faire attention : le comptage doit s'effectuer dans un sens uniquement (marqué par une flèche sur le moteur). Tout retour en arrière fausse le comptage, et il faut alors refaire le zéro après avoir débranché puis rebranché le moteur.

Fonctionnement des capteurs

La pression est mesurée de façon relative grâce à une jauge de contrainte, l'interface renvoie une tension U_P. Le volume est déduit de la position du piston vertical et des dimensions géométriques du moteur, transcrit par la tension U_V.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jauge_de_déformation#Piézorésistance

1.2 Étude à vide

Nous allons tracer le diagramme (P,V) de la bête.

Diagramme PV

✍ ⏲ 5mn

Le moteur est utilisé ici sans charge. Faire chauffer le moteur en avance. Après quelques minutes, le lancer et s'assurer qu'il tourne bien. Arrêter le moteur. Mettre le piston en position basse. Brancher le moteur : la diode clignote. Faire le zéro en appuyant sur le bouton rouge (avec le piston en position basse). La diode ne clignote plus. Lancer le moteur dans le sens de rotation indiqué. L'acquisition est faite via LatisPro (0.5 s). On exporte les tensions représentant pression et volume sur Régressi. On fait la conversion en unité de pression et volume grâce aux données de la fiche technique. On calcule le travail sur un cycle via la fonction AIRE (après vérification, cette fonction permet bien de calculer l'aire et ce sur UN cycle uniquement). La puissance s'obtient en utilisant la durée d'un cycle mesurée sur LatisPro :

$$\mathcal{P}_W = \frac{W_{\text{cycle}}}{T_{\text{cycle}}} \simeq 1 \text{ W} \tag{35.1}$$

Noter les valeurs de T_c et T_f, les caractéristiques du cycle sur le graphe. Expliquer pourquoi on n'a pas exactement le beau cycle à 4 phases : les hypothèses ne sont pas toujours vérifiées et les phases se chevauchent.

Quid de l'éfficacité de cette chose ?

1.3 Rendement

Bilan énergétique : la source de chaleur n'est pas totalement utilisée comme source chaude : elle chauffe tout l'appareil et aussi l'air ambiant. Il y a des pertes thermiques aussi au niveau de chaque volume. Les frottements mécaniques doivent aussi être pris en compte (mais sont probablement négligeables).

On s'attend donc à avoir un rendement relativement faible dans ce dispositif, essayons de l'évaluer.

Le moteur étant un appareil essentiellement pédagogique, on doit garder à l'esprit que son rendement est nécessairement faible. Il est possible de calculer le rendement à partir de l'énergie de combustion de l'éthanol (qui *volens nolens* chauffe essentiellement l'air).

Mesurer la puissance fournie par la bougie

✍ ⏲

Allumez le brûleur après l'avoir pesé puis attendez un certain temps et refaites une pesée (un bon prétexte pour craquer une allumette de plus).

$\Delta_c H = -1368$ kJ/mol, M_{eth} =46.07 g/mol ;

$$Q = \frac{\Delta_c H \Delta m}{M} \qquad \text{(en J.)}$$

Tous calculs faits on trouve une puissance $\mathcal{P}_c$ de la centaine de Watts.

rendement de la machine :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_W}{\mathcal{P}_c}$$

Ce qui fait un rendement de... 1%, on a bien chauffé la pièce. Pour info le rendement de Carnot serait de l'ordre de 75%.

Dans la vraie vie on fait pas tourner un moteur pour rien.

1.4 Moteur en charge (Tampon, ça marche pas)

Étude en charge

✍ ⏲ 5mn

On branche l'alternateur du boîtier. On fait débiter dans une résistance avec un ampèremètre en série (il ne faut pas dépasser 80 mA). On fait la mesure pour plusieurs valeurs de résistances (qu'on aura mesurées précisément en préparation), rapidement pour éviter les problèmes de thermalisation. On trace alors $\mathcal{P} = RI^2 = C\omega$ en fonction de R (puissance fournie en fonction de la charge) et on trouve le fonctionnement nominal du système moteur + alternateur .

(On pourrait éventuellement faire l'étude sans l'alternateur avec un couple-mètre pour mesurer la puissance en sortie du moteur, mais cela semble délicat)

Question sans réponse : Comment prédire le couple et la vitesse de rotation du moteur indépendamment ?

Bilan du moteur Stirling : très simple et facilement optimisable pour le rendement. Il est d'ailleurs utilisé pour faire des groupes électrogènes notamment (en le reliant à un alternateur). Le gros désavantage est l'inertie thermique, ce qui le rend inadapté pour les véhicules (changer de vitesse sur une voiture c'est changer le couple qu'on exerce sur le moteur).

Et l'électricité dans tout ça ?

2 Moteur électrique : MCC

2.1 Couplage électromécanique

Mise en évidence du couplage électromécanique

✍ Quaranta tome 4 à "Laplace" ⏲ 2 min

On a deux possibilités pour cette manip qualitative :

- **première possibilité :** les rails de Laplace P65.5

  Relier un microampèremètre Fluke P69.25 aux rails. Placer un aimant en U puissant P63 entre les rails de manière à créer un champ magnétique vertical ascendant (dirigé du Nord (branche rouge) au Sud (branche blanche)). Déposer une tige métallique P65 dans l'entrefer de l'aimant pour relier les rails.

  Déplacer le rail, un courant algébrique de l'ordre du μA apparaît.

  Remplacer le multimètre par un générateur de tension continue et appliquer quelques Volts : le rail se déplace tout seul $\Rightarrow$ caractère réversible.

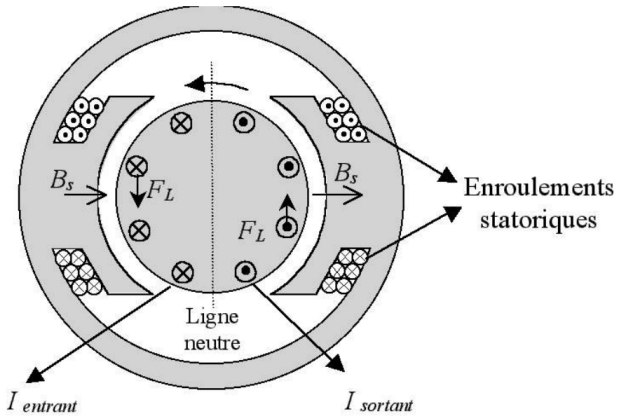
  Si l'expérience ne marche pas très bien, on peut humidifier les rails.

- **seconde possibilité :** pendule mécanique dans un aimant

  Avec une alimentation alternative, le pendule oscille spontanément à la bonne fréquence (manip efficace mais moins riche).

On voit que ça marche. On va donc pouvoir étudier des moteurs se basant sur ce principe. L'intérêt de ces moteurs réside dans le fait que leur rendement ne soit pas limité comme pour les moteurs thermiques, *i.e.* les moteurs électriques n'ont pas de rendement de Carnot. On peut donc en théorie atteindre un rendement de 100%.

2.2 Présentation du moteur



La machine à courant continu est composée de deux partie :

- d'un **inducteur** : c'est la source de champ magnétique. Il peut être réalisé soit à partir d'aimants permanents (cas des machines de faible puissance, qques W), soit à l'aide d'un second bobinage. L'inducteur est souvent fixe et est appelé **stator**.
- d'un **induit** : c'est le circuit électrique soumis au champ magnétique et qui est mobile (**rotor**). **Dans le cas du fonctionnement de la machine en moteur, l'induit produit un mouvement de rotation.** Dans le cas du fonctionnement en génératrice, l'induit produit un courant électrique.

La machine à courant continu est réversible est peut être utilisée soit en moteur (alimentation électrique de l'induit et de l'inducteur pour récupérer une énergie mécanique), soit en génératrice/dynamo (alimentation électrique de l'inducteur et mécanique de l'axe du rotor de l'induit pour récupérer une énergie électrique).

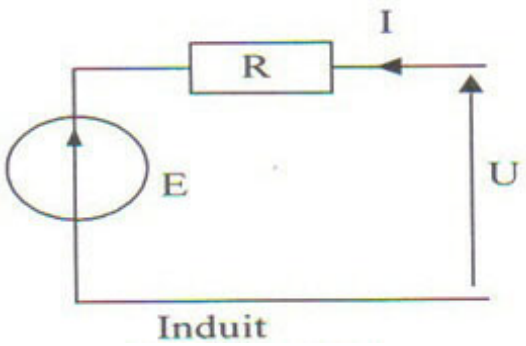
On utilise ici un ensemble de **deux génératrices**, l'une d'elles est utilisée en **moteur** pour entraîner le rotor de l'autre.

Pour toutes les mesures, il faut utiliser des voltmètres, la précision est meilleure pour le tachymètre et le capteur de couple.

Pour le démarrage de la MCC : Rhéostat de $1.0 \times 10^1\ \Omega$ en série avec l'induit.
En effet, au départ la vitesse de rotation est nulle et l'induit se comporte comme une résistance de très faible valeur (on la déterminera), il existe un risque aigu de surintensité.

Pour arrêter la MCC : il faut toujours couper l'induit en premier et ensuite l'inducteur, sinon risque d'emballement.

L'induit peut être modélisé par le circuit suivant :



On peut donc écrire $U_m = E + r_m I_m$ avec U la tension envoyée, $E = k\Phi_m\omega$ la fem créée par la rotation de la spire dans le champ magnétique et r_m la résistance interne. On peut également faire un bilan de puissance :$\mathcal{P}_{\text{elec}} = EI_m$ et $\mathcal{P}_{\text{rotation}} = \omega(C_m + C_r)$ avec C_m est le couple utile et C_r le couple résistif. On obtient donc deux relations pour le couple et la tension dans le rotor (✍ Quaranta p164) :

$$U_m = k\Phi_m\omega + r_m I_m \tag{35.2}$$

$$C_m = k\Phi_m I_m - C_r \tag{35.3}$$

remarque : en mode générateur on inverse juste les deux signes apparent, ca donne $-rI$ et $+C_r$.

Les deux équations présentées sont issues d'un modèle. On va vérifier s'il est acceptable.

2.3 Étude à vide

On réalise d'abord une étude à vide, sans freiner le moteur avec la génératrice, pour déterminer les caractéristiques électriques du moteur.

Étude à vide

✍ Quaranta IV ⏲ 5mn

Alimenter l'inducteur du moteur avec $U_e = 110$ V. On n'y touchera plus. On utilisera des multimètres (ou un wattmètre) pour y mesurer U_e et I_e.

Brancher l'induit du moteur. On utilisera des multimètres (ou un wattmètre) pour y mesurer U_m et I_m. Brancher un rhéostat de démarrage de 10 Ω en série avec l'induit (normalement pas besoin grâce aux pertes Joule mais question de sécurité devant le jury).

Pour démarrer le moteur, augmenter progressivement U_m. Une fois que le moteur tourne, court-circuiter le rhéostat.

Faire varier U_m jusqu'à 110 V et mesurer I_m ainsi que la fréquence de rotation $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ grâce au tachymètre. Vérifier la relation $U_m = k\Phi_m\omega + r_m I_m$. En déduire $k\Phi_m$.

On peut le faire pour différentes valeurs de U_e pour avoir la courbe d'aimantation $k\Phi_m = f(U_e)$, mais attention de parcourir U_m toujours dans le même sens (hystérésis).

Remarques

- $k\Phi_m$ dépend aussi de l'induit par la réaction magnétique de l'induit, mais c'est au moins d'ordre 1.
- La génératrice tachymétrique qui sert à mesurer la vitesse est en fait... une machine à courant continu.
- Pour le MCC, les multimètres font l'affaire ; attention cependant si vous vous attelez aux machines à courant alternatifs, car la puissance n'est plus directement le produit de la tension et du courant : il faut prendre en compte le déphasage, et les wattmètres sont alors bien pratiques.

Bon c'est bien beau tout ça mais ce qui nous intéresse c'est de balancer de la puissance dans une charge.

2.4 Étude en charge

On va maintenant appliquer un couple au moteur via la génératrice, sans s'intéresser à sa capacité à générer du courant (cf MP21).

Étude de la machine à courant continu en charge

✍ 🕒 10mn

Alimenter l'inducteur de la génératrice en parallèle de celui du moteur (avec voltmètre et ampèremètre), toujours avec $U_e = 110$ V.

Alimenter l'induit du moteur avec une tension constante ($U_m = 60$ V par exemple), toujours en faisant attention d'utiliser un rhéostat au démarrage qui sera ensuite court-circuité.

Brancher un rhéostat de 100 Ω en série avec un ampèremètre sur l'induit de la génératrice. La MCC ralentit.

Réduire la résistance R du rhéostat. On voit qu'il faut fournir plus de puissance à l'alimentation du moteur pour retrouver $U_m = 60$ V.

Pour différentes valeurs de R, ajuster la puissance fournie par l'alimentation du moteur pour retrouver $U_m = 60$ V puis mesurer C, I_m, I_e et f.

Tracer $C = f(I_m)$ pour trouver C_r et retrouver $k\Phi_m$.

Remarque

On a réalisé une étude à U_m constant, mais on peut aussi le faire en maintenant ω ou C constant.

La résistance R du rhéostat permet à un courant de circuler dans l'induit de la génératrice et donc de forunir un couple s'opposant à la rotation engendrée par le moteur.

2.5 Rendement de la machine

On peut également remonter au rendement η_m du moteur. Il est définit comme :

$$\eta_m = \frac{\text{Puissance utile}}{\text{Puissance fournie}} = \frac{C\omega}{U_m I_m + U_e I_e} \tag{35.4}$$

Rendement du moteur

✍ ⏲ 5mn

Tracer η_m fonction de la puissance utile $\mathcal{P}_u = C\omega$.

On obtient une courbe en cloche, dont le maximum (vers 30%) correspond au fonctionnement nominal du moteur pour la tension $U_m = 60$ V.

En déduire le couple nominal C_n, la vitesse nominale ω_n et l'intensité nominale dans l'induit $I_{m,n}$.

Pertes

- pertes cuivre (effet Joule) dans l'induit : $r_m I_m^2$
- pertes cuivre (effet Joule) dans l'inducteur : $r_e I_e^2$
- frottements mécaniques : $C_r\omega$
- pertes magnétique (hystérésis magnétique, courants de Foucault, perte de flux).

Avantages et inconvénients de la MCC

✍ Palermo pp111-112

La MCC présente plusieurs avantages : elle est facilement réversible (moteur-génératrice), la vitesse de rotation est contrôlée par la tension de l'induit, et elle s'adapte à différentes charges. Mais la fragilité des balais du collecteur nécessite un entretien régulier. Elles ont été largement utilisées par le passé, en particulier pour la propulsion des locomotives électriques (premiers TGV, métro lyonnais...). On les retrouve aujourd'hui plutôt dans des applications à faible puissance (ventilateur, photocopieuse, essuieglace...) avec des stators composés d'aimants permanents. Les moteurs à fortes puissances sont maintenant constitués de machines à courant alternatif.

Avantages	Inconvénients
Commande simple	Collecteur
Facilement réversible	Coût de fabrication
Stabilisation de vitesse	Coût d'entretien
Stabilisation de puissance	

On utilise bien plus le courant alternatif que le courant continu donc bon on l'a dans l'os avec notre MCC.

3 Moteur à courant alternatif

Ils sont basés sur la création d'un champ magnétique tournant, et l'interaction de ce dernier avec un moment magnétique, générant un couple :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{M} \wedge \overrightarrow{B}$$

On en distingue deux types, les moteurs synchrones, qui tournent à la vitesse d'oscillation du champ magnétique car les moments magnétiques sont permanents, et les moteurs asynchrones, qui ont une vitesse légèrement inférieure, du fait que les moments sont induits par le champs tournant.

Nous allons ici en faire une description qualitative qui a plus pour vocation de répondre à de potentielles questions que d'être dans l'exhaustivité.

3.1 Moteur synchrone

On prend un aimant permanent de moment $\vec{M}$ en équilibre si et seulement si il tourne à la même vitesse que le champ.

Pour cela, il doit être accroché au champ, c'est à dire lancé à la même vitesse que celui-ci.

3.1 Production d'un champ tournant

Un champ tournant est un champ magnétique de norme constante qui tourne à vitesse angulaire ω constante.

Au niveau industriel, la plupart des champs tournants sont produits par des courants triphasés. Pour rappel, un système de tension triphasé est constitué de trois tensions sinusoïdales, de même amplitude et de même fréquence, déphasées deux à deux de 120°. Les tensions simples V_i correspondent à la différence de potentiel entre une phase et le neutre (nœud central). Les tensions composées $U_{ij} = V_i - V_j$ correspondent à la différence de potentiel entre deux phases. Le réseau EDF est à la fréquence de 50 Hz, et l'amplitude des tensions vaut $V_i = 230$ V et $U_{ij} = 400$ V.

Un champ magnétique tournant peut être produit simplement à partir de trois bobines dont les axes sont décalés de 120°. Chaque bobine est alimentée par une tension simple V_i (montage en étoile) ou par une tension composée U_{ij} (montage en triangle). Le courant étant déphasé de 120° dans chaque circuit, il en résulte un champ magnétique tournant au centre :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = B_0 \left[\cos(\omega t)\, \vec{e}_x + \sin(\omega t)\, \vec{e}_y\right]$$

Réaliser le montage en triangle de la figure 4.5. Chacune des trois branches est constituée d'une bobine de 1000 spires P60.21 en série avec un tiers du rhéostat triple 3×330 Ω P62.2. Alimenter l'entrée de l'onduleur triphasé P0.14 sur le réseau électrique avec un câble secteur P57.20, sans l'allumer pour le moment. Relier chacune de ses sorties (U, V et W) à une extrémité du montage en triangle, et ajouter un ampèremètre dans l'une des branches pour contrôler l'intensité.

Placer les trois bobines autour du support P65.14 sur lequel on place une aiguille de boussole P63.8 au centre. Insérer un noyau ferromagnétique (P60.16 par exemple) dans chaque bobine pour amplifier le champ magnétique.

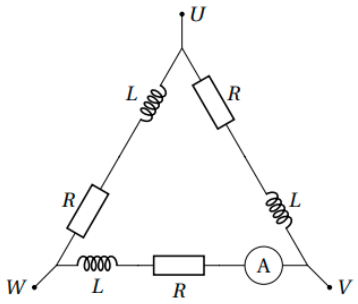


FIGURE 4.5 – Montage en triangle pour produire un champ tournant à l'aide d'un réseau triphasé.

Allumer l'onduleur et régler sa fréquence sur 5 Hz à l'aide des boutons ▲ et ▼. On règle l'amplitude à l'aide de la molette « vitesse ». Réduire progressivement la résistance du rhéostat triple pour augmenter le champ magnétique, tout en vérifiant que l'intensité dans le circuit ne dépasse pas 1 A. Mettre l'aiguille en mouvement en lui donner une petite impulsion avec le doigt. Une fois lancée, elle continue à tourner en indiquant la direction du champ magnétique.

Nous reviendrons sur la nécessité de lancer l'aiguille dans la partie suivante.

Le sens de rotation du champ magnétique (horaire ou antihoraire) dépend de l'alimentation des bobines et de l'enroulement des spires.

Inverser les branchements de l'une des bobines, et observer que le sens de rotation de l'aiguille s'est inversé.

L'avantage résulte dans le grand rendement de ces moteurs, et d'une vitesse de synchronisation très précise. Cependant, il nécessite d'être lancé. Le moteur synchrone a beaucoup été utilisé pour la conception de machines-outil des anciens TGV mais tend à être supplanté par la machine asynchrone. Il est encore utilisé pour des applications de forte puissance (Renault Zoé et Peugeot iOn par exemple) ou de faible puissance (commande de disque dur d'ordinateur).

3.2 Moteur asynchrone

Le moment est induit par les courants de Foucault, d'après la loi de Lenz, l'objet va s'opposer à la variation de flux magnétique en se mettant à tourner dans le même sens. On a alors ω qui tend vers ω_0, mais l'objet n'atteindra jamais cette vitesse à cause des frottements. Il permet d'obtenir des vitesses assez élevées, n'a pas besoin d'être lancé initialement, mais il est difficile d'avoir une vitesse de rotation précise. Il est de plus en plus utilisée grâce au développement de l'électronique de puissance (TGV récents, machines-outils, propulsion des navires...).

Machine asynchrone

Reprendre l'expérience précédente en remplaçant le support à aiguille par la cage d'écureuil P65.12. Retirer le rhéostat de chaque branche du triangle afin atteindre une intensité suffisante pour faire tourner la cage. Retirer également l'ampèremètre du montage car l'intensité dans chaque branche va dépasser 10 A ! Fixer les noyaux ferromagnétiques P60.16 à l'aide des bloqueurs P60.14 pour éviter qu'ils soient projetés durant l'expérience. Une fois votre câblage vérifié, allumer l'onduleur (quelques dizaines de secondes seulement) pour faire tourner la cage d'écureuil.

Conclusion

Les moteurs ont une importance considérable dans la société moderne, il faut choisir le type de moteurs approprié en fonction de la tâche à réaliser, des contraintes économiques, écologiques... De plus, la plupart des moteurs électriques sont réversibles, on peut les faire fonctionner en génératrice et produire ainsi de l'énergie électrique (barrages, éolienne).

Commentaires pratiques

- Attention à ne pas mettre de trops grosses charges sur le Stirling, il a un faible couple (on l'arrête à la main). Donc on veut des faibles courants dans la charge, donc des grosses résistances.
- Le Hprépa sur la MCC remet très bien les idées en place.
- Lorsque l'on fait une mesure de fréquence par stroboscopie, ne pas oublier la contre-mesure à $f/2$.
- Pour voir la réaction magnétique d'induit : P`http://l2ep.univ-lille1.fr/pagesperso/francois/files/ITEEM1_02_mcc.pdf`
- Sur la charge de la MCC : on se met à 60 V, ce qui n'est pas opti. Si on fait l'étude à U_m fixé, c'est un peu dommage car on n'est pas en régime nominal, donc autant passer à 110 V. Attention à ne pas dépasser les intensités limites de la génératrice cependant. Mais si on travaille à ω fixé, U_m va s'ajuster et il faut bien partir de 60 V.