

LP05 - LOIS DE CONSERVATION EN DYNAMIQUE

Année : 2019-2020

Passage : Léonard Aubry

Correcteurs : Nicolas Perez et Léo Mangeolle

Commentaire général

Le plan en trois en trois parties adopté par Léonard n'est pas entièrement satisfaisant car les deux premières parties sont assez redondantes. Il faudrait s'arranger pour les fusionner, ou les redécouper autrement. Il faut aussi s'interroger sur le sens qu'on veut donner à la dernière partie : (n'est-ce (qu')un exemple? Veut-on y aborder des notions nouvelles? Il est important d'avoir ça en tête dès le départ pour construire une leçon cohérente. Dans la suite de ce rapport, on suit le plan de Léonard, mais on fait aussi des commentaires sur ce qu'il faudrait mettre à peu près à cet endroit de la leçon (même si ça ne colle pas au titre annoncé de la partie).

Commentaires spécifiques

I) Lois de conservation : révisions

Il faut certainement insister sur : pourquoi les quantités conservées sont-elles utiles? Attacher par "les quantités conservées sont partout en physique" peut paraître un peu cheap. On peut envisager de montrer que connaître une intégrale du mouvement, c'est un tremplin formidable pour obtenir l'équation d'évolution à moindres frais. On peut en profiter pour sortir un peu de la mécanique du point (le titre de la LP demande "dynamique", pas "mécanique du point"). Par exemple, le circuit LC : l'énergie $E = Li^2 + q^2/C$ est conservée, et $dE/dt = 0$ donne immédiatement l'équation du mouvement.

Un point très problématique de la leçon de Léonard était la sous-partie "conservation de la charge" où on présente $\partial_t \rho + \text{div} j = 0$ comme une loi de conservation. C'est une relation de bilan, pas vraiment une loi de conservation, il faut donc absolument éviter de la mettre sur un pied d'égalité avec la conservation de l'impulsion par exemple. On peut quand même tout à fait mentionner qu'à une quantité microscopique conservée (\mathbf{p} , par exemple) correspond une relation de bilan mésoscopique ($\partial_t \mathbf{p} = \text{div} \boldsymbol{\sigma}$, par exemple, équation de Cauchy-Navier en élasticité), mais il faut vraiment faire apparaître clairement que cette "loi

de conservation" n'est pas du même genre que les autres (énergie, impulsion, moment cinétique), et les englobe. Ne surtout pas dire "conservation de la masse" (juste après la LP05, c'est la LP06, $E = mc^2$, etc) et éviter "conservation de la charge" (parce que la symétrie associée à cette conservation par le théorème de Noether est la symétrie de jauge $U(1)$ de l'électrodynamique, et on n'a pas envie d'en parler), même si "charge" est à double sens.

On a évoqué au moment des questions la conservation de la densité de points dans l'espace des phases (théorème de Liouville). Globalement, c'est semble-t-il une assez mauvaise idée d'en parler. En effet, les quantités conservées dont on parle sont des combinaisons du lagrangien et de ses dérivées, définies localement, et pas des quantités intégrales dans l'espace des phases. De même, il est assez douteux d'évoquer l'invariance temporelle comme symétrie associée à cette loi de conservation. Déjà parce que la densité dans l'espace des phases n'est pas concernée par le théorème, et parce qu'il existe des grandeurs intégrales dans l'espace des phases qui sont conservées alors que l'invariance temporelle est brisée (par exemple $\oint p dq$, l'aire à l'intérieur de l'ellipse pour l'OH, cf Bohr-Sommerfeld au passage) - bref, c'est très fumeux cette affaire.

II) Lois de conservation : symétries

Ici, Léonard a introduit les équations d'Euler-Lagrange ; c'est un choix qui se défend. Dans ce cas, il faut montrer en quoi c'est utile ! Pas rentrer dans les détails de covariance des équations sous changement de variables, mais au moins montrer que comme les grandeurs conservées, ça peut faciliter les calculs (c'est un peu hors-sujet mais si on s'en ressert après...). Et en profiter pour sortir de la méca du point : par exemple, le Lagrangien de la corde de Melde $L = \frac{\lambda}{2} (dy/dt)^2 - \frac{F}{2} (dy/dx)^2$ puis EL fournissent l'équation de d'Alembert beaucoup plus vite que l'approche newtonienne. En parlant de corde de Melde, la force projetée sur l'axe horizontal est une constante du mouvement, donc en creusant un peu on doit pouvoir bien installer la corde de Melde dans cette leçon. Just so you know.

Quitte à introduire le Lagrangien, peut-être donner directement la formule générale $Q = \partial L / \partial \dot{\phi}$ de la quantité conservée par une invariance selon ϕ ? (la translation temporelle bien sûr à part)

Certaines personnes ont présenté avec succès la fibre à gradient d'indice (in Portelli) ; il ne faut pas manquer ici de parler de la symétrie associée, qui nous changera peut-être des classiques translation-rotation-temps (ou pas, d'ailleurs).

III) Problème de Kepler

Il faut essayer de justifier le temps passé sur cette partie. Pourquoi aurait-on envie d'obtenir l'équation des trajectoires, plutôt que juste dire "moment cinétique et énergie conservés, voilà" ? La bonne réponse, c'est que ces trajectoires sont fermées, ce qui est une exception parmi les systèmes à force centrale, qui cache une symétrie supplémentaire. Rappel (cf correction LP 49) : théorème de Bertrand, seuls le problème de Kepler et l'OH ont des orbites fermées. Il ne faut surtout pas croire que la conservation du vecteur de Runge-Lenz est un détail sympathique redondant avec la conservation de E et de \mathbf{L} : c'est LE truc qui justifie de mettre le problème de Kepler en partie III !

D'ailleurs, il faut absolument faire un décompte des degrés de liberté, c'est essentiel. Au départ, $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$: 6 ddl. Conservation de \mathbf{L} : plus que 3 ddl. Conservation de E : plus que 2 ddl. Voilà ce qu'on obtient pour un problème à force centrale quelconque. Mais si les orbites sont fermées, on sait qu'on n'a plus qu'un paramètre, il faut donc encore une loi de conservation. Avec la conservation de \mathbf{A} , on tomberait à -1 ddl, mais en fait, il y a des redondances car $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ et $\mathbf{A}^2 = m^2 k^2 + 2mE\mathbf{L}^2$ et on tombe bien à 1 ddl finalement.

Ce qui est très frustrant avec Runge-Lenz, c'est que la symétrie qui se cache derrière est excessivement compliquée et contre-intuitive (il faut aller chercher dans le Weinberg pour espérer une "explication"), et on ne peut donc pas vraiment boucler la boucle de la leçon. Une alternative jamais explorée serait de choisir l'autre problème à force centrale avec des orbites fermées, l'oscillateur harmonique $H = \mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2$ (version adimensionnée). Cette fois les grandeurs conservées, en plus de H et \mathbf{L} , sont trivialement $p_x^2 + x^2$, $p_y^2 + y^2$ et $p_z^2 + z^2$, et il y a une redondance évidente puisque la somme des trois redonne H . Les symétries associées sont elles aussi très faciles à obtenir. Pour rappel, si on a indentifié une "génératrice" i.e. une grandeur conservée $G(p, q)$ en formalisme hamiltonien, la symétrie associée s'obtient via $\delta p = \partial G / \partial q$ et $\delta q = -\partial G / \partial p$. Ici, cela donne $\delta p = q$ et $\delta q = -p$, et on vérifie immédiatement que si dans H on remplace p_x par $p_x + \epsilon x$ et x par $x - \epsilon p_x$, à l'ordre 1 en ϵ le hamiltonien est invariant. Et idem pour y et z , tout ça se vérifie immédiatement. Bref, tout est transparent dans cet exemple, il ne manque plus qu'un crash-test pour voir ce qu'en pense le jury. Appel à candidatures. :)

Questions posées

- Utilité de Runge-Lenz en méca quantique ? *Il permet de résoudre la structure électronique des atomes hydrogénoïdes.*
- Quelle est la grandeur conservée dans le problème de la chute libre ? *C'est $\mathbf{p} - m\mathbf{g}t$, qui dépend explicitement du temps.*
- Comment adapter la démarche à une boule qui glisse sur un plan incliné ? *Avec un multiplicateur de Lagrange pour tenir compte de la contrainte.*

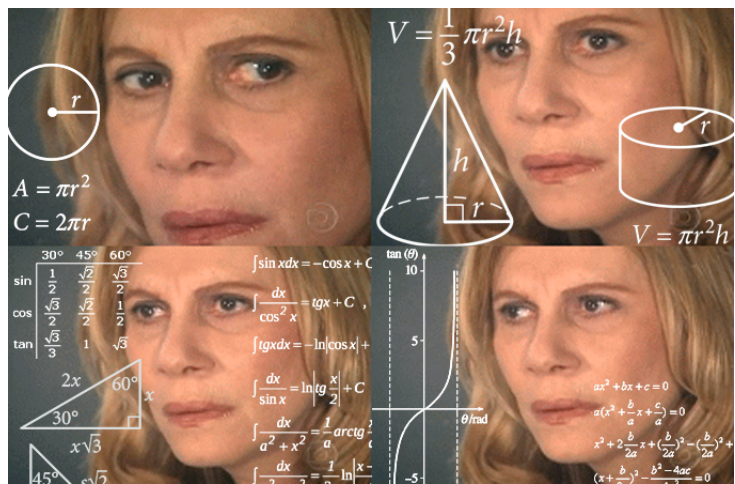


FIGURE 1 – Quand tu cherches la symétrie derrière le vecteur de Runge-Lenz.