DM 2 – à rendre mercredi 16 septembre **Correction**

Statique des fluides

Expérience de Jean Perrin

1 Une sphérule a un volume

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi {r_0}^3$$

et donc une masse

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi \rho_0 {r_0}^3 \,.$$

La résultante du poids $\vec{P}$ et de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_\mathrm{A}$ d'une sphérule s'écrit

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_\mathrm{A} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 {r_0}^3 \vec{g} - \frac{4}{3}\pi\rho_\mathrm{eau} {r_0}^3 \vec{g} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\vec{P} + \vec{\Pi}_\mathrm{A} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi(\rho_0 - \rho_\mathrm{eau}){r_0}^3}_{=m'} \vec{g}\,.}$$

Cette force résultante est bien formellement identique au poids d'une sphérule de masse apparente m'.

2 Raisonnons sur un volume V de gaz parfait de sphérules. D'après l'équation d'état d'un gaz parfait,

$$P^\star V = nRT_0 \,.$$

Les « molécules » du gaz sont des sphérules de masse apparente m', et l'échantillon en compte $n\mathcal{N}_\mathrm{A}$. Ainsi, tout se passe comme si la masse totale de gaz était

$$m_\mathrm{tot} = n\mathcal{N}_\mathrm{A}\, m' \,.$$

On en déduit

$$P^\star \frac{V}{m_\mathrm{tot}} = \frac{n}{m_\mathrm{tot}} RT_0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{P^\star}{\mu^\star} = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A} m'}}\,.$$

> *Quand on étudie un gaz (ou un équivalent comme ici) à l'échelle microscopique, il ne faut pas confondre la masse d'un échantillon de gaz et celle d'une molécule. Vouloir appliquer l'équation d'état des gaz parfaits à une molécule n'a pas plus de sens.*

3 Si un volume $\mathrm{d}\tau$ compte $\varphi(z)\,\mathrm{d}\tau$ sphérules de masse m', alors sa masse vaut $\mathrm{d}m = m'\varphi(z)\,\mathrm{d}\tau$. On en déduit

$$\mu^\star = m'\,\varphi(z) \qquad \text{et} \qquad P^\star = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\varphi(z)\,.$$

D'après la relation de la statique des fluides,

$$\frac{\mathrm{d}P^\star}{\mathrm{d}z} = -\mu^\star g \qquad \text{soit} \qquad \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + m' g\varphi = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} m' g}{RT_0}\varphi = 0\,.}$$

4 On identifie la longueur caractéristique

$$\delta = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A} m' g}\,.$$

Les solutions de cette équation sont alors de la forme

$$\varphi(z) = A\,\mathrm{e}^{-z/\delta} \qquad \text{avec} \qquad A = \text{cte}\,,$$

et en identifiant avec la condition limite en $z=0$,

$$\varphi(z{=}0) \underbrace{=}_{\text{CL}} \varphi_0 \underbrace{=}_{\text{expr}} A$$

d'où on déduit

$$\boxed{\varphi(z) = \varphi_0\,\mathrm{e}^{-z/\delta}\,.}$$

5 Le nombre de sphérules contenues dans la tranche située à l'altitude z vaut

$$N(z) = \varphi(z) \times Se\,.$$

Ainsi,

$$N_1 = N(z{=}0) = \varphi_0\,Se \qquad \text{et} \qquad N_2 = N(z{=}h) = \varphi(z{=}h)\,Se = \varphi_0 Se\,\mathrm{e}^{-h/\delta}\,.$$

On en déduit

$$\frac{N_2}{N_1} = \mathrm{e}^{-h/\delta} \qquad \text{soit} \qquad \ln\frac{N_2}{N_1} = -\frac{h}{\delta} \qquad \text{et} \qquad \ln\frac{N_1}{N_2} = +\frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} m' g h}{RT_0}$$

d'où on déduit finalement

$$\mathcal{N}_\mathrm{A} = \frac{RT_0}{m'gh}\ln\frac{N_1}{N_2}\,.$$

Numériquement, on trouve

$$m' = 2{,}2\cdot 10^{-17}\,\mathrm{kg} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}7\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}}$$

ce qui est **cohérent** avec la valeur actuellement tabulée $\mathcal{N}_\mathrm{A} = 6{,}0\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$.

6 La densité de sphérules varie notablement sur les hauteurs de l'ordre de

$$\delta = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_\mathrm{A} m' g} = 18\,\mathrm{\mu m}\,.$$

Comme les tranches sont d'épaisseur $e = 1\,\mathrm{\mu m} \ll \delta$, supposer la densité de sphérules uniforme est une **hypothèse raisonnable**.

7 Pour améliorer la précision du résultat, il faut **reproduire l'expérience** $N \gg 1$ fois, puis considérer la **moyenne** des valeurs mesurées. L'incertitude sur la valeur de $\mathcal{N}_\mathrm{A}$ sera reliée à l'**écart-type** de la série de valeurs mesurées.

Un verre qui tourne ... et qui déborde ?

8 Le fluide n'est pas statique dans $\mathcal{R}_0$ ... or en PT on ne sait qu'étudier des fluides immobiles. La force d'inertie d'entraînement est la célébrissime « force centrifuge » que l'on ressent par exemple dans une voiture en train de tourner.

9 ▷ Système : particule fluide de volume $\mathrm{d}\tau$;

▷ Référentiel : $\mathcal{R}$ lié au verre ;

▷ Bilan des forces :
- → poids : $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{pes} = -\rho\,\mathrm{d}\tau\,g\,\vec{e}_z$;
- → résultante des forces de pression : $\mathrm{d}\vec{F}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$;
- → force d'inertie d'entraînement : $\mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{ie} = \rho\omega^2 r\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e}_r$.

▷ La particule fluide étant à l'équilibre,

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau - \rho\,\mathrm{d}\tau\,g\,\vec{e}_z + \rho\omega^2 r\,\mathrm{d}\tau\,\vec{e}_r = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\,. \end{cases}}$$

10 Intégrons successivement les trois dérivées partielles. En projection sur $\vec{e}_\theta$,

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{donc} \qquad P(r,\theta,z) = f(r,z)\,,$$

où la fonction f est une « constante partielle » par rapport à θ, c'est-à-dire une fonction de r et z seulement. En projection sur $\vec{e}_z$,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = -\rho g \qquad \text{d'où} \qquad f(r,z) = -\rho g z + g(r)\,,$$

avec g une fonction de r seulement. Enfin, en projection sur $\vec{e}_r$,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = \rho\omega^2 r \qquad \text{d'où} \qquad g(r) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + A$$

où A est une (vraie) constante. En regroupant, il vient

$$P(r,\theta,z) = f(r,z) = -\rho g z + g(r) = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + A$$

On trouve A en se plaçant au point de l'interface air-eau situé sur l'axe. Par continuité de la pression,

$$P(r{=}0, z_0) \underbrace{=}_{\text{CL}} P_0 \underbrace{=}_{\text{expr}} -\rho g z_0 + 0 + A \qquad \text{soit} \qquad A = P_0 + \rho g z_0\,.$$

En remplaçant et en factorisant,

$$\boxed{P(r,\theta,z) = P_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\,.}$$

11 En tout point de l'interface on a $P(r,z) = P_0$, soit

$$\rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + P_0 = P_0$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$\boxed{z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\,.}$$

C'est un paraboloïde de révolution. Il est remarquable que la masse volumique du fluide d'intervienne pas du tout ici : de l'eau ou de l'huile donnerait la même surface.

12 On découpe par la pensée l'eau contenue dans le verre en couronnes cylindriques d'épaisseur $\mathrm{d}r$ infinitésimale. La couronne d'eau cylindrique comprise entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ a une hauteur d'eau $h(r) = z_0 + \omega^2 r^2/2g$. Au premier ordre en $\mathrm{d}r$, son volume vaut

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \underbrace{\pi(r+\mathrm{d}r)^2 h}_{\text{volume cylindre extérieur}} - \underbrace{\pi r^2 h}_{\text{volume cylindre intérieur}} \\
\mathrm{d}V &= \cancel{\pi r^2 h} + 2\pi r\,\mathrm{d}r\,h + \underbrace{\cancel{\pi(\mathrm{d}r)^2 h}}_{\text{2e ordre}} - \cancel{\pi r^2 h} \\
\mathrm{d}V &= 2\pi r h\,\mathrm{d}r\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, le volume d'eau contenu dans le verre vaut

$$V = \int_0^R 2\pi r\left(z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)\mathrm{d}r = 2\pi z_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\pi\omega^2}{g}\frac{R^4}{4}\,.$$

Introduisons la hauteur initiale h_0 telle que $V = \pi R^2 h_0$. Tant que le verre ne déborde pas, son volume est constant, donc

$$\pi R^2 h_0 = \pi R^2 z_0 + \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} \qquad \text{soit} \qquad h_0 = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \qquad \text{d'où} \qquad z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Le fond est visible à partir de la vitesse angulaire ω_{fond} pour laquelle $z_0 = 0$, soit

$$h_0 - \frac{\omega_{\text{fond}}^2 R^2}{4g} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{\text{fond}} = \sqrt{\frac{4gh_0}{R^2}}\,.$$

Sur le bord du verre, la hauteur d'eau est maximale et atteint

$$z_{\max} = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Le verre déborde à partir de la vitesse angulaire $\omega_{\text{déb}}$ pour laquelle $z_{\max} = H$, soit

$$z_0 + \frac{\omega_{\text{déb}}^2 R^2}{2g} = H \qquad \text{donc} \qquad h_0 + \frac{\omega_{\text{déb}}^2 R^2}{4g} = H \qquad \text{d'où} \qquad \omega_{\text{déb}} = \sqrt{\frac{4g}{R^2}(H - h_0)}\,.$$

Le premier phénomène à avoir lieu est celui pour lequel la vitesse limite angulaire est la plus faible. En simplifiant les expressions,

$$\frac{\omega_{\text{déb}}}{\omega_{\text{fond}}} = \sqrt{\frac{H - h_0}{h_0}} = \sqrt{\frac{H}{h_0} - 1}$$

Ainsi, $\omega_{\text{fond}} > \omega_{\text{déb}}$ si $H/h_0 - 1 < 1$ soit $H < 2h_0$. Il est possible de voir le fond du verre avant qu'il ne déborde à condition qu'il soit initialement rempli à moins que la moitié.