BLAISE PASCAL
PT 2020-2021

DM 2 – à rendre mercredi 16 septembre

Statique des fluides

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec vos cours et TD ouverts est **chaudement recommandé** : un DM est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, **n'hésitez pas à me poser des questions**, à la fin d'un cours ou par mail.

Flasher ce code pour accéder au corrigé

I - Expérience de Jean Perrin

Une des premières mesures du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A$ est due à Jean Perrin au début du XX^e siècle grâce au développement de puissants microscopes optiques et appareils photographiques. L'expérience utilise une résine végétale, nommée gomme-gutte, qui a la propriété de se dissocier en petites billes sphériques de rayon inférieur à 1 µm lorsqu'elle est diluée dans l'eau. Les billes sont appelées sphérules et la « solution » obtenue est appelée suspension. En utilisant des résines plus ou moins sèches, il est possible de faire varier le diamètre des sphérules de façon relativement contrôlée. Jean Perrin a constaté que lorsqu'une suspension était versée, par exemple dans une éprouvette, et après une phase transitoire, la couleur n'était pas uniforme. Ses observations au microscope ont montré que la densité de sphérules de gomme-gutte était plus élevé en bas de l'éprouvette qu'en haut. Pour une étude quantitative, Jean Perrin utilisait une cuve parallélépipédique de très faible épaisseur permettant d'observer les sphérules directement au travers de la cuve, voir figure 1.

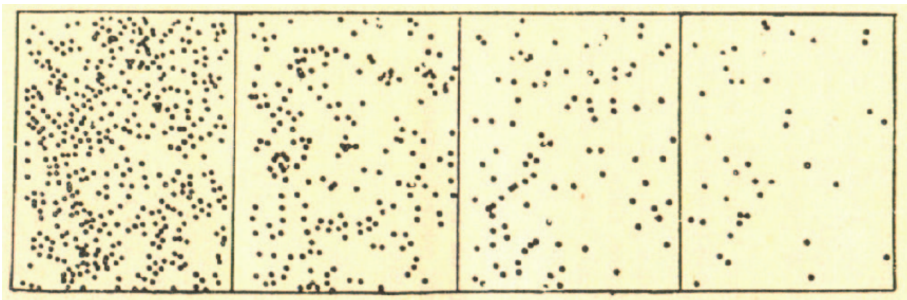


Figure 1 – **Résultats expérimentaux.** Dessins de Jean Perrin faits à partir de quatre photographies, prises à des hauteurs variant de 10 µm. Le dessin le plus à gauche correspond à la position la plus basse.

Dans tout l'exercice, on note (Oz) l'axe vertical ascendant, et on suppose qu'en régime permanent les grandeurs utiles ne dépendent que de z.

1 - Outre son poids, une sphérule est également soumise à la poussée d'Archimède exercée par l'eau. Montrer que l'effet combiné du poids et de la poussée d'Archimède est équivalent à celui du poids d'une sphérule de masse apparente

$$m' = \frac{4}{3}\pi(\rho_0 - \rho_{\text{eau}})r_0^3\,.$$

Comme le diamètre des sphérules est très faible, elles sont soumises à l'agitation thermique et suivent donc un mouvement aléatoire (mouvement brownien). Ainsi, il y a une très forte analogie entre le mouvement des sphérules de gomme-gutte dans l'eau et celui des molécules d'un gaz dans le vide. On modélise donc la suspension de gomme-gutte par un gaz parfait de température $T_0 = 293\,\text{K}$ uniforme en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, dont les molécules seraient des sphérules toutes identiques de masse m' évoluant dans le vide.

2 - Justifier en expliquant précisément le raisonnement que la pression apparente $P^\star$ dans le gaz parfait de sphérules et sa masse volumique apparente $\mu^\star$ vérifient

$$\frac{P^\star}{\mu^\star} = \frac{RT_0}{\mathcal{N}_A m'}\,.$$

3 - On note $\varphi(z)$ la densité volumique de sphérules à l'altitude z, c'est-à-dire $\varphi(z)\,\mathrm{d}\tau$ est le nombre de sphérules contenues dans le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ situé à l'altitude z. Montrer que φ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} m' g}{RT_0}\varphi = 0\,.$$

4 - Résoudre cette équation en notant $\varphi_0 = \varphi(z=0)$. Identifier une longueur caractéristique δ.

Grâce à son dispositif optique, Jean Perrin était capable de compter le nombre de sphérules contenues dans des fines tranches de section S égale à celle de la cuve et d'épaisseur $e \simeq 1\,\mathrm{\mu m}$. À une hauteur choisie comme origine $z = 0$, Jean Perrin compte 200 sphérules dans la tranche qu'il observe au microscope. À la hauteur $h = 40\,\mathrm{\mu m}$ il n'en compte que 17.

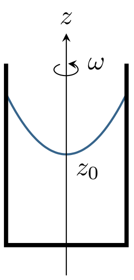
5 - En supposant que la densité volumique de sphérules φ peut être considérée uniforme à l'échelle d'une tranche, en déduire une valeur expérimentale du nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_\mathrm{A}$.

6 - L'hypothèse de densité uniforme sur une tranche est-elle raisonnable ? Un argument quantitatif est attendu.

7 - Comment améliorer la précision du résultat et estimer l'incertitude sur la mesure réalisée ?

Données :
- ▷ Rayon d'une sphérule : $r_0 = 0{,}30\,\mathrm{\mu m}$;
- ▷ Masse volumique de la gomme-gutte : $\rho_0 = 1{,}2\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à $293\,\mathrm{K}$;
- ▷ Masse volumique de l'eau : $\rho_\mathrm{eau} = 1{,}0\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ à $293\,\mathrm{K}$;
- ▷ Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}3\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$.

II - Un verre qui tourne ... et qui déborde ?



Un verre contenant de l'eau est mis en rotation autour d'un axe Oz vertical à la vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$.

On étudie l'équilibre hydrostatique du fluide dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au verre, qui est donc en rotation par rapport au référentiel terrestre, et n'est de ce fait pas galiléen. On admet alors que l'étude de l'équilibre hydrostatique se mène comme en référentiel galiléen, à ceci près qu'il faut ajouter au bilan des actions mécaniques une pseudo-force appelée force d'inertie d'entraînement qui tient compte du caractère non galiléen de $\mathcal{R}$. Dans le cas présent, la densité volumique de force s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{f}_\mathrm{ie} = \rho\,\omega^2\,r\,\overrightarrow{e}_r\,.$$

On note z_0 l'ordonnée du point de l'interface air-eau appartenant à l'axe de rotation du verre. On rappelle par ailleurs que la résultante des forces de pression sur une particule fluide est équivalente à une force volumique de densité $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$.

Donnée : en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$.

8 - Pourquoi est-il nécessaire de mener l'étude dans le référentiel tournant $\mathcal{R}$ au lieu du référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$? Il s'avère que vous avez déjà expérimenté la force d'inertie d'entraînement dans votre vie quotidienne : dans quelles circonstances ?

9 - En appliquant le théorème de la résultante cinétique à une particule fluide, établir les trois équations vérifiées par les dérivées partielles de la pression par rapport à chacune des variables r, θ et z.

10 - Montrer que le champ de pression au sein du verre s'écrit

$$P(r,\theta,z) = P_0 + \rho g(z_0 - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\,,$$

avec P_0 la pression atmosphérique.

11 - Déterminer l'équation de l'interface eau-air sour la forme $z = f(r)$.

12 - (Question difficile facultative) On augmente progressivement la vitesse de rotation ω. Peut-on voir le fond du verre avant qu'il ne déborde ?

> ***Indication :*** *On pourra chercher un découpage mésoscopique astucieux permettant d'exprimer le volume d'eau contenu dans le verre lorsqu'il est en rotation. Sans surprise, la réponse dépend de la hauteur du verre H et la hauteur d'eau initiale h_0.*