LPXX – Bilan de grandeur physique en système ouvert

17 juin 2021

Oui
Mr C

Nicolas Barros & Abel Feuvrier

I'm a rocket man
Rocket man, burning out his fuse up here alone

Elton John, Rocket Man

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- *La LP d'Etienne*, **Etienne Pinard** ⟶ Go sur son site j'espère
- *Compétences prépas PC PC**, **Stéphane Olivier** ⟶ Cours de référence d'Etienne. p127 pour la thermo, p132 pour les diagrammes, p318 Bilans de masses et de quantité de mouvement
- *J'intère PC PC**, **Sanz** ⟶ Chapitre 1 la thermo, chapitre 11 la méca

Prérequis

- Débit massique
- Principe fondamental de la dynamique
- Conservation de la quantité de mouvement
- Premier principe de la thermodynamique

Expériences/Codes/Animations

- Un ptit machin marrant avec des fusées ?

Table des matières

1 Bilan de masse **2**
- 1.1 Présentation . . . 2
- 1.2 Plan de bataille . . . 2

2 Bilan d'énergie **3**
- 2.1 Bilan . . . 3
- 2.2 Application : frigo . . . 4

3 Bilan de quantité de mouvement **5**
- 3.1 Principe du bilan . . . 5
- 3.2 Une application : la fusée . . . 6
- 3.3 Bonus : équation de Tsiolkovski . . . 6

Introduction

Un système est un ensemble de points isolé par la pensée sur lequel on applique des lois physiques. On fait ça depuis qu'on fait de la physique. Plus précisément, le pfd, les lois de la thermo, sont des lois physiques qui s'appliquent à des systèmes fermés : on a rien fait avec des systèmes ouverts. Mais certains systèmes intéressants (réacteurs ouverts en industrie, voitures, corps humain) sont des systèmes ouverts. Aujourd'hui, on va voir comment faire de la physique avec ces systèmes quand même.

1 Bilan de masse

1.1 Présentation

On balance le schéma de la figure 1, en justifiant qu'on ne perd pas en généralité avec nos tuyaux : on va faire un bilan, donc les mécanismes qui font que de la masse entre ou sort ne nous intéressent pas.

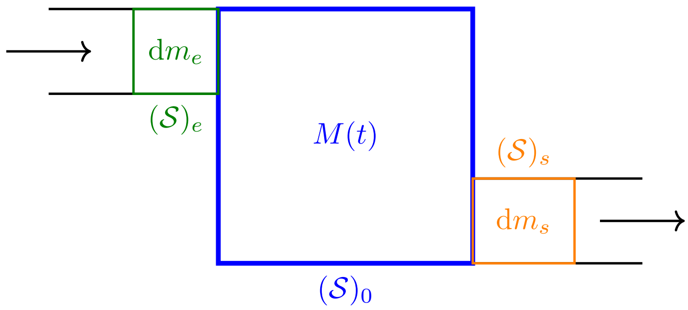

Figure 1 – Dispositif générique pour un bilan de masse

On a sur ce schéma :

- un système ouvert $(\mathcal{S})_0$, contenant une masse $m(t)$, qui est le système qui nous intéresse.
- un petit système $(\mathcal{S})_e$ qui correspond à la masse qui va entrer dans $(\mathcal{S})_0$ entre t et $t + \mathrm{d}t$. Cette masse vaut, par définition du débit massique d'entrée : $\delta m_e = D_{m,e}\mathrm{d}t$.
- un petit système $(\mathcal{S})_e$ qui correspond à la masse qui va sortir de $(\mathcal{S})_0$ entre t et $t + \mathrm{d}t$. Cette masse vaut, par définition du débit massique de sortie : $\delta m_s = D_{m,s}\mathrm{d}t$.

1.2 Plan de bataille

C'est toujours le même, mais il marche.

Quelle loi physique on connaît sur la masse ? Elle est conservée pour un système fermé, c'est même la définition d'un système fermé. Donc pour faire de la physique avec les lois qu'on connaît, il faut trouver un système fermé. On va le définir entre t et $t + \mathrm{d}t$. Notre système, c'est :

- À t : $(\mathcal{S})_0 + (\mathcal{S})_e$
- À $t + \mathrm{d}t$: $(\mathcal{S})_0 + (\mathcal{S})_s$.

On a notre système fermé, on lui applique la loi physique qui concerne la grandeur d'intérêt. Ici on s'intéresse à la masse $m(t)$ donc on applique la conservation de la masse, qui donne :

$$\text{masse du système}(t) = \text{masse du système}(t + \mathrm{d}t) \tag{1}$$

On réécrit cette relation en faisant apparaître la grandeur qui nous intéresse :

$$m(t) + \delta m_e = m(t + \mathrm{d}t) + \delta m_s \tag{2}$$

ce qui donne, en explicitant et en faisant tendre $\mathrm{d}t$ vers 0 :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = D_{m,e} - D_{m,s} \tag{3}$$

On a notre bilan en système ouvert. On interprète :

- La variation, c'est ce qui entre - ce qui sort. Si ce qui entre > ce qui sort la masse augmente, et inversement.
- La masse de notre système n'est pas forcément conservée, on a bien un système ouvert.
- en régime permanent la dérivée s'annule, d'où $D_{m,e} = D_{m,s} = D_m$ et $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$: si la masse ne varie pas, ce qui entre = ce qui sort. Il y a alors conservation de la masse, mais le système $(\mathcal{S})_0$ n'est pas fermé pour autant !
- Le bilan n'est "que" une manière astucieuse d'utiliser des lois physiques **qui s'appliquent aux systèmes fermés** (ça bouge pas).

Ce résultat va nous servir pour d'autres bilans, sur des grandeurs autre que la masse mais qui y sont liées.

2 Bilan d'énergie

2.1 Bilan

On reprend le même schéma que pour la partie précédente, en introduisant les pressions P et les altitudes z en entrée et en sortie. On fera notre bilan en régime permanent : les grandeurs thermodynamiques en jeu ne dépendent donc pas du temps. De plus, on a déjà établi qu'en régime permanent, on a $D_{m,e} = D_{m,s}$ donc $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$.

On reprend le même système fermé entre t et $t + \mathrm{d}t$ que pour le bilan précédent.
Pour la loi physique, on s'intéresse à l'énergie donc on va appliquer le premier principe à notre système. Il s'écrit :

$$\Delta\left(E_c + E_p + U\right) = W_u + W_{\text{forces pressantes}} + Q \tag{4}$$

avec W_u le travail utile. 0n va traiter chaque terme à part.

On a, en utilisant l'extensivité de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t) = E_c((\mathcal{S})_s)(t + \mathrm{d}t) + E_c((\mathcal{S})_0)(t + \mathrm{d}t) - E_c((\mathcal{S})_0)(t) - E_c((\mathcal{S})_e)(t) \tag{5}$$

Comme on est en régime permanent, les deux termes du milieu s'annulent, et on obtient :

$$\Delta E_c = frac12\delta m(v_s^2 - v_e^2) \tag{6}$$

On peut étendre ce raisonnement à E_p et U, ce qui donne finalement la nouvelle écriture du terme de gauche du premier principe :

$$\Delta\left(E_c + E_p + U\right) = \Delta(v^2 + gz + u)\delta m \tag{7}$$

Pour les forces pressantes, on a :

$$W_{\text{forces pressantes}} = -P_s \mathrm{d}V_s + P_e \mathrm{d}V_e = \left(\frac{P_s}{\rho_s} - \frac{P_e}{\rho_e}\right)\delta m = \Delta\left(\frac{P}{\rho}\right)\delta m \tag{8}$$

Pour les deux autres termes, on va introduire les puissances correspondantes :

$$\begin{cases} W_u = P_u \mathrm{d}t \\ Q = P_{th}\mathrm{d}t \end{cases} . \tag{9}$$

ce qui nous donne, en rassemblant tout :

$$\Delta\left(v^2 + gz + u + \frac{P}{\rho}\right) D_m = P_t h + P_u \tag{10}$$

Il est plus pratique de travailler avec des grandeurs massiques, et on préfère avoir seulement des grandeurs énergétiques à gauche, on va donc introduire le débits correspondant aux transferts d'énergie utile et aux transferts thermiques :

$$\begin{cases} P_u = w_u D_m \\ P_{th} = q D_m \end{cases} . \tag{11}$$

Les grandeurs u et q correspondent à l'énergie fournie par unité de masse qui traverse le système. On a donc finalement :

$$\Delta(e_c + e_p + h) = q + w_u \tag{12}$$

C'est une version "massique" du premier principe. On l'appelle **premier principe industriel**. On va voir tout de suite pourquoi.

2.2 Application : frigo

Un frigo est une machine thermique. À l'intérieur, un fluide caloriporteur [1] s'écoule dans un circuit fermé en transportant de la matière et de l'énergie d'une partie à l'autre. Le fluide, au cours d'un cycle, passe par plusieurs sous-machines, qui sont donc des systèmes ouverts : un compresseur (cp), un condenseur (cd), un détendeur (dt) et un évaporateur (ev). Ce circuit est représenté sur la figure 2.

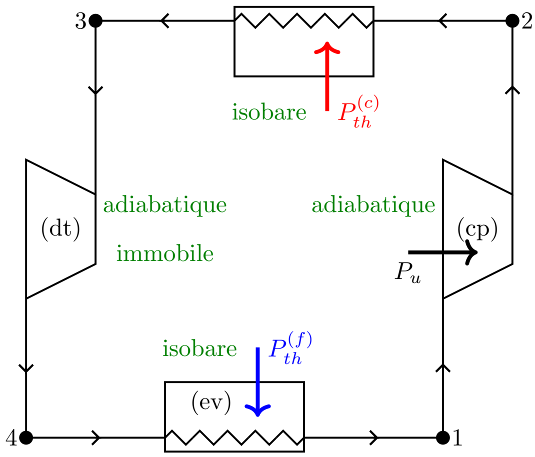

Figure 2 – Récapitulatif de la structure du frigo

Le fonctionnement du frigo est le suivant :

- Le fluide, sous forme de vapeut saturante en 1, est comprimé dans (cp) avec un taux de compression de r ; cette opération élève sa température.
- Le fluide, à haute température en 2, se refroidit dans le (cd) de manière isobare jusqu'à atteindre la température du milieu au contact ; dans l'opétation, elle cède au milieu une puissance $P_{th}^{(c)}$.
- Le fluide, toujours à haute pression en 3, se détend dans (dt), qui est une enceinte adiabatique sans partie mobile ; on obtient en sortie un fluide diphasé.
- Le fluide diphasé en 4 complète sa transition de phase (changement d'état liquide/vapeur) en prélevant dans (ev) une puissance thermique $P_{th}^{(f)}$ au milieu à refroidir.

On cherche l'efficacité frigorifique e de ce circuit. Cette dernière est définie par $e = p_{th}^{(f)}/P_u$.
Pour trouver e, on va se servir d'un outil qu'on étudiera plus en détail plus tard : le diagramme pression/enthalpie (ou diagramme de Mollier)(dans le dossier).
Données numériques : $r = 5.10$, $D_m = 4.5$ kg/min, $T_f = -10$ °C, $T_c = 70$ °C, $T_m = 30$ °C.

On va utiliser le premier principe industriel pour les quatre parties du cycle. On va donc faire un bilan des pressions et enthalpies pour les différentes transformations.

- (cp) : On a $P_2/P_1 = r$ par défintion de r. Le premier principe industriel donne $h_2 - h_1 = P_u/D_m$ grâce à l'adiabaticité.

1. typiquement du fréon, ou dichlorodifluorométhane

- (cd) : Isobare donc $P_2 = P_3$. $P_{th}^{(c)}$ ne nous intéresse pas.
- (dt) : Le premier principe donne, grâce à l'adiabaticité et à l'absence de travail mécanique : $h_4 - h_3 = 0$ (détente de Joule-Kelvin ou Joule-Thompson).
- (ev) : Le premier principe industriel donne, grâce à l'absence de travail mécanique : $h_1 - h_4 = P_{th}^{(f)}$.

On a donc :

$$e = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}. \tag{13}$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver les points correspondant à 1, 2 et 4 sur le diagramme.

- vapeur saturante à $T = T_f$: $P_1 = 2.2$ bar et $h_1 = 348$ kJ/kg.
- $P_2 = rP_1 = 11.2$ bar à $T = T_c$: $h_2 = 388$ kJ/kg.
- $P_3 = 11.2$ bar à $T = T_m$: $h_3 = h_4 = 228$ kJ/kg.

D'où finalement $e = 3$. On interprète (c'est pas un rendement).

3 Bilan de quantité de mouvement

3.1 Principe du bilan

✍ Compétences Prépas PC PC* p320, LP d'Etienne

On continue, selon le même principe que la conservation de la masse, en attachant). On attache au système ouvert $(\mathcal{S})_0$ un système fermé $(\mathcal{S})^*$, et on applique dans ce système fermé la loi de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\frac{d\vec{P^*}}{dt} = \vec{F} \tag{14}$$

Reprenons nos 4 étapes :

- On passe du système ouvert $(\mathcal{S})_0$ au système fermé $(\mathcal{S})^*$
- Par extensivité de la quantité de mouvement, on écrit la quantité de mouvement $\vec{P^*}$ dans le système fermé $(\mathcal{S})^*$ aux instants t et t+dt, en faisant apparaître la quantité de mouvement dans le système ouvert $\vec{P}$:

$$\vec{P^*}(t+dt) = \vec{P}(t+dt) + \delta m_2 \vec{v_2} \tag{15}$$

$$\vec{P^*}(t) = \vec{P}(t) + \delta m_1 \vec{v_1} \tag{16}$$

- On passe à la différentielle :

$$d\vec{P^*} = \vec{P^*}(t+dt) - \vec{P^*}(t) = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) + \delta m_2 \vec{v_2} - \delta m_1 \vec{v_1} \tag{17}$$

- Enfin on divise par dt, et on voit apparaître les débits massiques dans les sections d'entrées et de sorties et le taux de variation de la quantité de mouvement du système ouvert :

$$\frac{d\vec{P^*}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + D_{m2}\vec{v_2} - D_{m1}\vec{v_1} \tag{18}$$

On peut à présent réutiliser la loi de la quantité de mouvement. Cependant cette expression est en général pas exploitable car on ne connaît pas la viariation de quantité de mouvement dans le système ouvert -on a pas les détails. On s'en sort -dans le cadre du programme- en supposant qu'on a un écoulement stationnaire dans le système ouvert. De plus nous avons déjà établi la conservation du débit massique dans ces hypothèses, ce qui nous permet d'obtenir l'expression du bilan de quantité de mouvement dans un système ouvert :

$$D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = \vec{F} \tag{19}$$

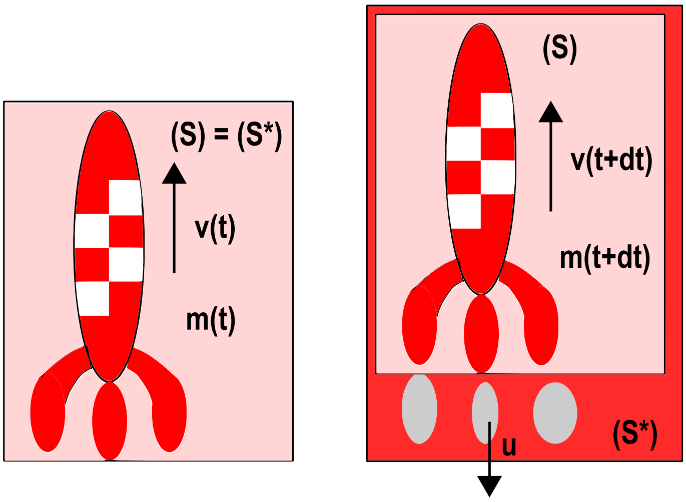

Figure 3 – La fusée et son contenu forment un système ouvert S. Le système fermé S* est constitué de S à l'instant t, et du système S(t+dt) ainsi que des gaz ejectés à l'instant t+dt. On note m(t) la masse de la fusée à l'instant t, v sa vitesse, u la vitesse d'ejection-supposée constante- des gaz

3.2 Une application : la fusée

✍ LP d'Etienne

Une fusée est en mouvement dans un référentiel supposé galiléen, soumis à des forces externes $\vec{F}$ Elle ejecte des gaz avec un débit massique D_m constant, et une vitesse relative $\vec{u}$ constante, u = 4 km/s. m_0 = 134t, dont 100 d'ergols (le carburant).

Nous nous poserons 3 questions à son sujet :

- Comment évolue la vitesse de la fusée ?
- Quel est le débit massique minimal pour que la fusée décolle ?
- Quelle est la durée de fonctionnement du réacteur ?

On commence par appliquer notre dernier résultat dans le référentiel terrestre. La seule force $\vec{F}$ à laquelle est soumise le système est donc le poids. v_1 est nul, car rien ne rentre dans la fusée, et on a $\vec{v_2} = \vec{v} + \vec{u}$, d'où :

$$\vec{F} - D_{mg}(\vec{v} + \vec{u}) = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{20}$$

Mais c'est la vitesse, et non la quantité de mouvement qui nous intéresse ici ! On explicite $\frac{d\vec{P}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{P} \tag{21}$$

Or $\frac{dm}{dt} = D_{m1} - D_{m2} = -D_{mg}$

On a donc les termes en $\vec{u}$ qui vont se compenser gentiment :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - D_{mg}\vec{u} \tag{22}$$

Force fictive, la poussée. La fusée décolle si la fusée compense son poids, ici $D_{mg} > \frac{m_0 g}{u} = 329kg/s$.

A ce rythme, on peut faire l'AN : on épuise l'ergol au bout de pas longtemps (5min, odg ok)

3.3 Bonus : équation de Tsiolkovski

✍ Compétences Prépas PC PC* p343, Equation de Tsiolkovski

Et si on veut aller plus loin ? Bah déjà dans l'équation juste au dessus c'est un $m = m(t)$ et $D_{mg} = -\frac{dm}{dt}$, et $\vec{F} = \vec{P} = m(t)\vec{g}$ on obtient en divisant par m et en projetant selon l'axe vertical :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{m}\frac{dm}{dt} \tag{23}$$

Si on se place dans l'espace vide loin de toute force d'attraction, l'intégration de cette équation différentielle permet d'obtenir l'équation de Tsiolkovski, considérée comme l'équation fondamentale de l'astronautique.

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m(t)} \tag{24}$$

Y a plein d'interpretations marrantes sur wikipedia. On peut également imaginer un code python.

Conclusion

En s'appuyant seulement sur des lois physiques déjà connues et s'appliquant à des systèmes fermés, on a pu faire de la physique avec des systèmes ouverts.