

Résonance paramétrique

par R. MOREAU,

I.P.R. Bordeaux

7, allée du Moulin-de-Cazau, 33170 Gradignan.

I. INTRODUCTION.

Nous nous proposons de montrer, sur des exemples, que certaines résonances de caractère paramétrique sont connues de chacun de nous, même si nous ne les avons pas identifiées comme telles.

On appelle résonance paramétrique le processus qui consiste à agir périodiquement sur l'un au moins des paramètres qui déterminent la fréquence propre d'un oscillateur, pour engendrer puis entretenir des oscillations dont il est le siège.

Typiquement, si la pulsation propre de l'oscillateur est ω_0 , on montre que la manière la plus efficace d'amplifier ses oscillations en modulant périodiquement l'un de ses paramètres consiste à effectuer cette modulation à la pulsation $2\omega_0$. Ce faisant, bien sûr, on doit, de l'extérieur, fournir plus d'énergie à l'oscillateur que celle qu'il consomme dans ses parties dissipatives.

On pourra trouver une étude générale de ces phénomènes dans l'ouvrage de mécanique de L. LANDAU et L. LIFCHITZ, ou, exposée de manière plus simple mais plus fragmentaire, dans le cours de mécanique de BERKELEY.

Notre ambition est d'indiquer une expérience de base extrêmement simple qui permet de contrôler, expérimentalement, l'ensemble des résultats de l'étude théorique, puis de montrer comment tous les professeurs de physique ont effectué des expériences de résonance paramétrique : d'abord, quand ils étaient enfants, en se balançant, puis, plus tard, en effectuant l'expérience de MELDE.

Nous proposerons également une étude théorique très succincte, réduisant les calculs au maximum, en admettant qu'il est possible de faire varier brusquement les paramètres considérés, et en focalisant notre attention sur les problèmes énergétiques.

II. EXPERIENCE.

Considérons le montage représenté sur la fig. 1.

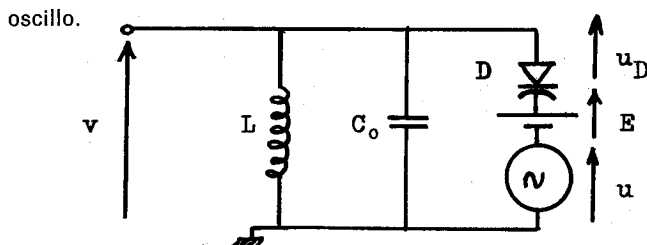


Fig. 1

L est l'inductance (de l'ordre de 1 mH) d'une bobine H.F. usuelle. (Par exemple inductance H.F. moulée de marque DELAVAN, distribuée par TEKELEC ; ou de marque C.L.O. ; ou bobine réalisée à partir d'un pot en ferrite de LA RADIOTECHNIQUE, etc.). Choisissons $L = 1$ mH. C_0 est la capacité totale d'un ensemble comprenant un petit condensateur de capacité 100 ou 200 pF, la capacité équivalente de la bobine, la capacité d'entrée de l'oscillographe, celle des fils, etc.

Supposons que l'on ait ainsi $C_0 = 300$ pF.

D est une diode varicap. Lorsque la tension u_D aux bornes d'un tel élément est constamment négative, et comporte une composante continue $U_D < 0$ et une partie variable u_d , elle est en fait équivalente à une capacité C_1 dont on peut faire varier la valeur en modifiant la « polarisation » U_D .

En réalité, ici, trois ou quatre diodes du type BA 102, ou BB 204, etc., montées en parallèle, peuvent être nécessaires.

E est la f.é.m. d'une pile ordinaire dont on peut parfaitement négliger la résistance interne. Cette f.é.m. sert à polariser la diode varicap. On peut, afin de favoriser le passage du courant alternatif, disposer en parallèle sur les éléments de pile utilisés, un condensateur de 47 nF par exemple. On peut également réaliser E en plaçant en série plusieurs petits accumulateurs au cadmium-nickel ou en utilisant une alimentation stabilisée variable. On choisira E entre 3 et 5 V.

La tension $u(t)$ est fournie par un générateur de fréquence réglable.

Les tensions u , v et u_D sont liées par la relation (1) :

$$v = u + u_D + E.$$

Si l'on pose, comme précédemment, $u_D = U_D + u_d$, on obtient une double égalité entre grandeurs alternatives d'une part, et composantes continues d'autre part :

$$\begin{cases} v = u + u_d \\ U_D = -E. \end{cases}$$

Lorsque l'amplitude de la tension v est faible, ce qui est le cas du démarrage des oscillations, on peut écrire :

$$u_D = -E - u(t).$$

La tension aux bornes de D est donc modulée autour de la valeur $-E$ et la capacité C_1 varie donc autour de la valeur γ_1 correspondant à $u_D = -E$. (Nous supposons que γ_1 égale 30 pF correspondant à $E = 4,5$ V).

Or, tant que la tension u_D reste inférieure à un seuil voisin de 0,7 V, la capacité C_1 de la diode varicap diminue lorsque u_D diminue, et *vice versa*. En particulier si u_D est négative, C_1 diminue lorsque la valeur absolue de u_D augmente ; ces propriétés sont résumées par l'expression :

$$C_1 = \frac{\Gamma}{(V_s - u_D)^m},$$

l'exposant m variant entre 2 et 3 selon le type de jonction utilisé (abrupte, linéaire...).

En appliquant la tension $u(t)$, on module donc la pulsation propre ω_0 du système, telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L(C_0 + C_1)}.$$

Remarque.

Lorsque, sous l'action du signal modulant $u(t)$, d'amplitude fixe U , la tension $v(t)$ se mettra à croître, la tension u_D pourra devenir positive, puisque $u_D = -E - u + v$. Or, lorsque u_D atteint 0,6 ou 0,7 V, la diode D conduit et met le circuit oscillant en court-circuit. L'amplitude maximale de $v(t)$ sera donc de l'ordre de $E + U$.

Mesures préliminaires.

Pour observer le phénomène de résonance paramétrique, il faut connaître la fréquence propre f_0 du circuit en l'absence de modulation, de manière à n'explorer ensuite qu'une faible bande de fréquences autour de la fréquence $2f_0$, on peut, sans cela, traverser la plage de résonance sans s'en apercevoir.

Avant de réaliser le montage de la fig. 1, par conséquent, il faut, avec les mêmes éléments, réaliser le montage de la fig. 2, qui permet de mesurer la fréquence f_0 correspondant au circuit résonnant parallèle constitué par L et $(C_0 + \gamma_1)$.

On veillera pour cela, en agissant sur l'amplitude de u_G , à ce que la tension v reste assez faible (inférieure à 1 V) de manière à ce que la capacité C_1 de la diode D ne varie pas trop autour de la valeur γ_1 . On notera f_0 avec précision. Ici, on aurait par exemple $f_0 = 277,1$ kHz.

Dans cette phase préliminaire, on peut également mesurer avec assez de précision la valeur du facteur de qualité Q du circuit, et les variations ΔC_1 de la capacité variable pour un certain nombre de valeurs de u_D .

Ainsi, en faisant varier E de 4,5 V à 2 V, ce qui correspond à une variation de la valeur moyenne de u_D de $-4,5$ V à -2 V, on pourra constater, par exemple, que la fréquence de résonance passe de 277,1 à 262,3 kHz. On en déduit la valeur du rap-

port $\frac{dC_1}{C}$, égal à $-2 \frac{df_0}{f_0}$, soit, ici 0,11. La capacité C_1 a donc augmenté de 36 pF.

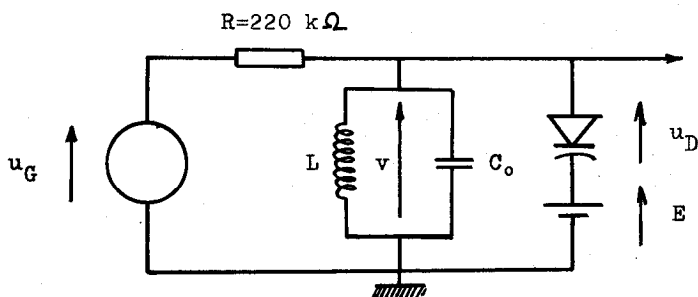


Fig. 2

On vérifie de même qu'en augmentant E , cette capacité diminue. Ainsi, avons-nous trouvé une diminution de 12 pF en augmentant E de 4,5 V à 7 V. Les mesures de C_1 ou de ses variations peuvent être fondées, comme nous venons de le voir, sur des mesures de fréquences de résonance, mais on peut également procéder par substitution : pour toute tension E , on repère la fréquence de résonance f_0 correspondante. On remplace alors l'ensemble (diode varicap, générateur E) par un condensateur variable que l'on ajuste pour retrouver la résonance à la même

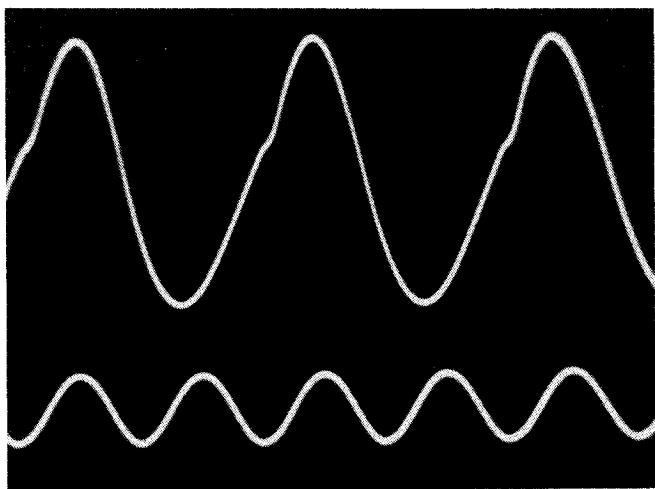
fréquence. Il suffit alors de mesurer la capacité C_1 de ce condensateur.

Dans notre exemple, C_1 varie de $C_m = 18$ pF pour $E = 7$ V, à $C_M = 66$ pF pour $E = 2$ V, en passant par la valeur $\gamma_1 = 30$ pF pour $E = 4,5$ V.

Expérience proprement dite.

Revenant au montage de la fig. 5, on constate que si la fréquence de la tension sinusoïdale $u(t)$ est égale à $2f_0$, et si son amplitude U est suffisante, (de l'ordre de 2 V pour une bobine ordinaire), on obtient aux bornes du circuit résonnant une tension sinusoïdale $v(t)$ de fréquence f_0 . (C'est cette génération de sous-harmonique qui est remarquable).

Nous avons vu que l'amplitude V de cette tension s'ajuste de manière à ce que la diode D devienne périodiquement conductrice : ainsi, en régime permanent, les pertes du circuit oscillant sont égales à la puissance fournie par le générateur modulant.



Photographie n° 1 montrant la tension excitatrice $u(t)$, de fréquence $2f_0$, et la tension de résonance $v(t)$, de fréquence f_0 (fig. 1). La distorsion visible sur $v(t)$ peut être réduite ou accrue en modifiant les caractéristiques de $u(t)$.

Visualisation de la phase transitoire.

Il est intéressant de voir la phase transitoire pendant laquelle croît l'amplitude des oscillations.

Il faut pour cela que la tension $u(t)$ soit constituée de trains de sinusoïdes. Si l'on dispose d'un générateur de fonctions capable

de fournir de tels signaux, soit de manière autonome, soit par association avec un autre générateur fixant la période des trains, il suffit de synchroniser la base de temps de l'oscilloscope sur le signal porte pour observer le phénomène.

Si l'on ne dispose pas d'un tel générateur, le montage ci-après, facile à réaliser, donne des résultats très satisfaisants.

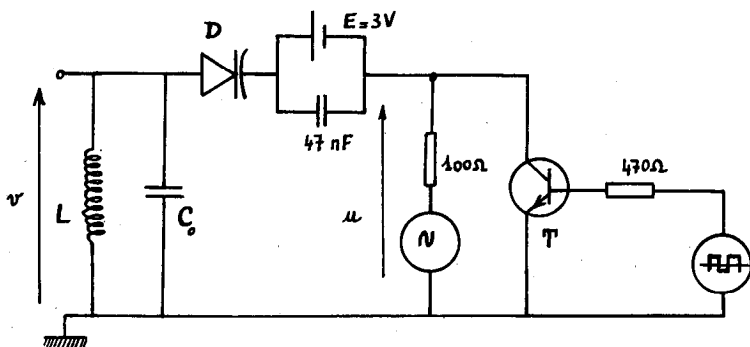
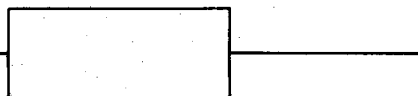


Fig. 3

La fréquence du générateur de signaux carrés qui commande le transistor T est de l'ordre de 200 Hz ; quand le transistor T ne conduit pas, la tension modulante $u(t)$, de fréquence $2f_0$, est pratiquement égale à la f.é.m. du générateur ; quand le transistor est saturé, la tension $u(t)$ est nulle. L'amplitude des signaux carrés doit être assez grande pour saturer le transistor ; on doit synchroniser l'oscilloscope sur ces signaux. Le transistor T est quelconque (exemple : 2N2911). La capacité de 47 nF, mise en parallèle sur la pile constitue un shunt parfait pour la composante alternative du courant.

Observations.

enveloppe du signal $u(t)$
de fréquence $2f_0$.



enveloppe du signal $v(t)$
de fréquence f_0 .

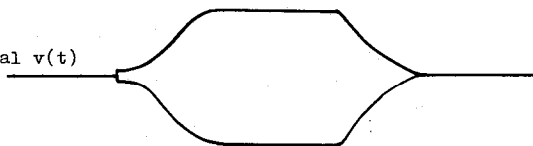
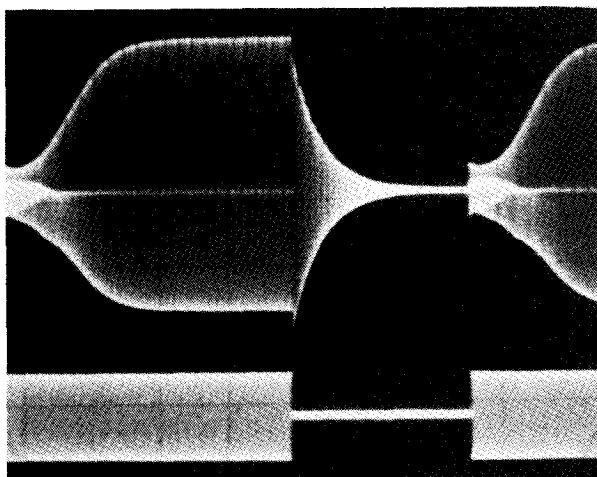
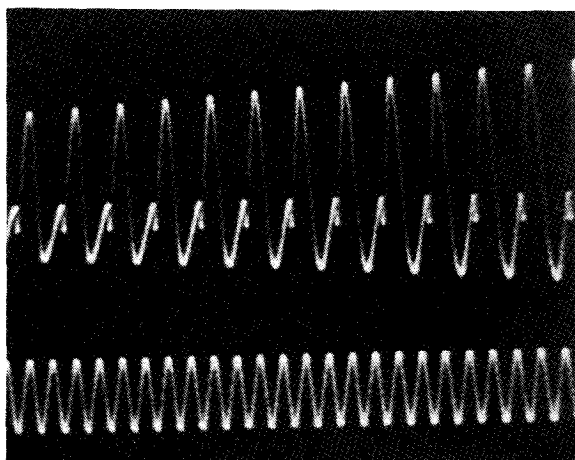


Fig. 4



Photographie 2 a) Le phénomène global.



Photographie 2 b) Un détail de la phase de croissance.

Photographies n° 2 montrant les régimes transitoires d'établissement et de disparition des oscillations.

On note :

a) l'existence d'un seuil pour l'amplitude de la tension excitatrice $u(t)$, de fréquence $2f_0$, qui, lors du démarrage des oscillations, est pratiquement la seule à moduler C_1 ;

b) les oscillations de résonance paramétrique (génération de sous-harmonique) peuvent s'établir même si la fréquence de $u(t)$ est différente de $2f_0$. Mais il faut que la différence soit faible.

Il faut en outre que l'amplitude U de $u(t)$ soit supérieure à un seuil d'autant plus élevé que la fréquence d'excitation est différente de $2f_0$;

c) la croissance des oscillations, au début, semble bien exponentielle. On modifie cette croissance en agissant soit sur l'amplitude, soit sur la fréquence de $u(t)$.

Toutes les observations concordent avec la théorie. En particulier, si la fréquence de $u(t)$ vaut $2f_0 + \varepsilon$, et si pendant la phase de croissance des oscillations, la tension $v(t)$ a la forme :

$$v(t) = V \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot t + \varphi \right],$$

le coefficient α doit être une fonction décroissante de U et décroissante de ε^2 .

Le caractère non linéaire du phénomène apparaît encore dans le fait que la courbe de résonance $V(f)$, à $U = \text{c}^{\text{te}}$, n'a pas la même allure selon qu'elle est décrite suivant les fréquences croissantes ou décroissantes (fig. 5).

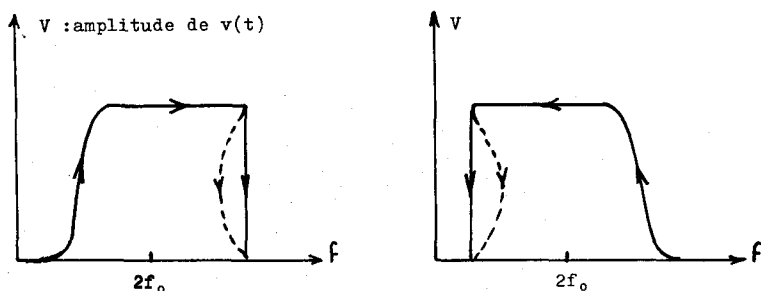
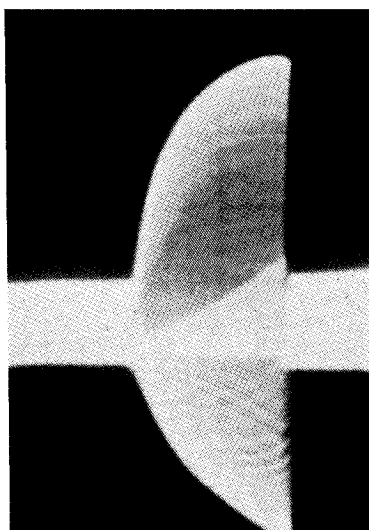


Fig. 5

Pour être visible, ce phénomène suppose que l'on dispose d'un générateur dont la fréquence soit continûment variable, et contrôlée par une tension que l'on applique en même temps sur la voie horizontale de l'oscillographe (wobulateur). Cependant, il est encore décelable en utilisant un générateur ordinaire dont on fait varier manuellement la fréquence.



Photographie n° 3 illustrant la fig. 5. La résonance est ici obtenue par fréquence croissante. La fréquence de balayage est très faible ; la résonance paramétrique cesse brusquement. Par fréquence décroissante, sans être forcément celui qui est décrit sur la fig. 5, le phénomène est différent. On diminue la plage de résonance en diminuant l'amplitude de la tension excitatrice $u(t)$.

Critique de cette expérience.

Les critiques que l'on peut formuler sont de trois ordres :

a) En l'absence d'oscillations paramétriques, la tension $v(t)$ n'est pas nulle.

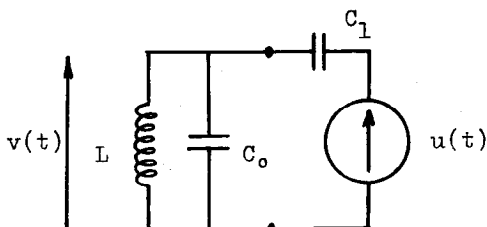


Fig. 6

La fig. 6, où l'on a fait abstraction de la tension continue E , montre que si $\bar{Z}$ est l'impédance du circuit bouchon (L, C_0), on a

$$\frac{\bar{V}}{\bar{U}} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} + 1/j C_1 \omega}.$$

Au voisinage de la fréquence $2f_0$, on a donc sensiblement

$$\frac{V}{U} = \frac{4 C_1}{3 C_0}.$$

La tension $v(t)$ comporte donc toujours, du fait du montage, une petite composante à la fréquence $2f_0 + \epsilon$ de modulation, et, lors du démarrage des oscillations, la tension modulatrice n'est pas $u(t)$, mais $u(t) - v(t)$, tension qui est légèrement plus faible.

C'est cette tension $v(t)$ résiduelle qu'on observe dans la toute première phase du démarrage des oscillations de résonance paramétrique, comme le montre la fig. 4 où l'enveloppe du signal $v(t)$ ne part pas de zéro. D'autre part, comme cette tension parasite a une fréquence égale à $2f_0$, alors que le signal qu'on désire observer possède la fréquence f_0 , il y a, lors du démarrage des oscillations, un peu de distorsion.

Pour atténuer ce défaut, il faut diminuer le rapport $\frac{C_1}{C_0}$, mais cela provoque une diminution du taux de modulation $\frac{\delta C_1}{C}$ et nous allons voir que ce dernier doit être supérieur à $\frac{\pi}{Q}$, Q étant le facteur de qualité du circuit.

C'est donc, en dernier ressort, de la qualité du circuit que dépend l'importance de ce défaut, et l'on comprend que l'amplification paramétrique se pratique dans le domaine des micro-ondes (masers paramagnétiques), où les coefficients de qualité des cavités résonnantes utilisées sont de l'ordre de 10^4 .

b) La résonance paramagnétique peut se manifester pour des fréquences d'excitation égales à $\frac{2f_0}{n}$.

Un simple coup d'œil à la fig. 6 suffit à comprendre que dans le cas de notre expérience, si la fréquence du signal $u(t)$ est égale à f_0 , la résonance classique masquera tout à fait l'aspect paramétrique. De même, le fait d'observer une tension $v(t)$ de fréquence f_0 alors que le signal excitateur $u(t)$ est sinusoïdal et de fréquence $f_0/2$, par exemple, ne prouve pas qu'il s'agit d'une résonance de caractère paramétrique, car la présence de la diode D suffit à créer des harmoniques qui peuvent provoquer la résonance classique du circuit oscillant.

c) Lorsque, sous l'action de la tension excitatrice $u(t)$, la tension $v(t)$ comporte une composante notable à la fréquence f_0 ,

la modulation de la capacité C_1 , due à la tension u_d , devient en quelque sorte double : à la première modulation, voulue, due à $u(t)$, s'ajoute une automodulation, indésirable, due à $v(t)$ et qui a lieu à la fréquence f_0 . (Nous avons vu que les tensions $u_d(t)$, $u(t)$ et $v(t)$ sont liées par la relation $u_d = -u + v$).

En régime permanent, donc, où l'amplitude de $v(t)$ dépasse nettement celle de $u(t)$, l'entretien des oscillations prend un caractère complexe. Ce dernier défaut accentue quelque peu le caractère non linéaire que revêt le phénomène pur... celui des livres.

Cette critique, nécessaire, peut-être incomplète, n'enlève rien au caractère spectaculaire de l'expérience, très facile à réaliser, et dont le caractère essentiel est bel et bien l'aspect paramétrique.

III. QUELQUES CONSIDERATIONS QUANTITATIVES.

1° Cas de la résonance paramétrique électrique décrite précédemment.

On suppose qu'il est possible de moduler la capacité C du circuit (fig. 7), sans influencer sur la tension $v(t)$: nous avons vu que ce cas, transposé en hyperfréquences, peut être pratiquement réalisé, et même en basse fréquence (1 MHz), si l'on dispose d'un circuit ($L \approx 100 \mu\text{H}$, $C_0 \approx 250 \text{ pF}$) de très bonne qualité ($Q \approx 100$), on peut avec l'expérience précédente, s'approcher beaucoup de cette hypothèse.

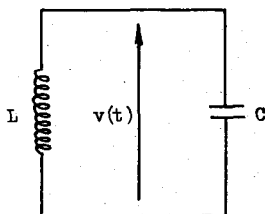


Fig. 7

Nous supposons de plus que la modulation s'effectue de manière brusque, en faisant passer, périodiquement, la capacité C de la valeur $C_0 + C_{1M}$ à $C_0 + C_{1m}$, puis en revenant à $C_0 + C_{1M}$, etc.

Comme la variation de capacité a lieu brusquement, on peut considérer qu'elle est réalisée à charge constante.

Supposons que la capacité diminue :

$$C_{1M} - C_{1m} = \delta C > 0.$$

Si, au moment où survient cette diminution de capacité, la charge n'est pas nulle, l'énergie électrostatique W_s du condensateur est augmentée de la quantité :

$$\delta W_s = d \left(\frac{q^2}{C} \right) = - \frac{q^2}{C^2} \cdot dC = W_s \cdot \frac{\delta C}{C}.$$

(Si cette diminution brusque était effectuée mécaniquement sur un condensateur plan, il faudrait, pour diminuer C , tirer sur les plaques, et donc fournir un travail mécanique).

Par contre, si l'on revient à la valeur maximale $C_0 + C_{1M}$ au moment où la charge est nulle (ainsi, donc que la tension $v(t)$, cette transformation peut être effectuée sans aucun transfert d'énergie.

On voit que pour augmenter périodiquement l'énergie de l'oscillateur, il faut diminuer C aux instants où l'énergie électrostatique W_s est maximale (c'est-à-dire aux instants où $v(t)$ est extrême), et augmenter C aux instants où $W_s = 0$, qui sont les instants de passage par zéro de la tension $v(t)$.

Bien que le raisonnement ne fasse apparaître que des variations d'énergie électrostatique, c'est, bien évidemment, l'énergie électrique totale (électrostatique et électromagnétique) qui est accrue à chaque diminution de la capacité C .

Cela donne pour la tension $v(t)$, le graphe de la fig. 8, qu'à la composante parasite de $v(t)$ près, dont nous avons déjà parlé en ce qui concerne le régime sinusoïdal, on relève bien expérimentalement.

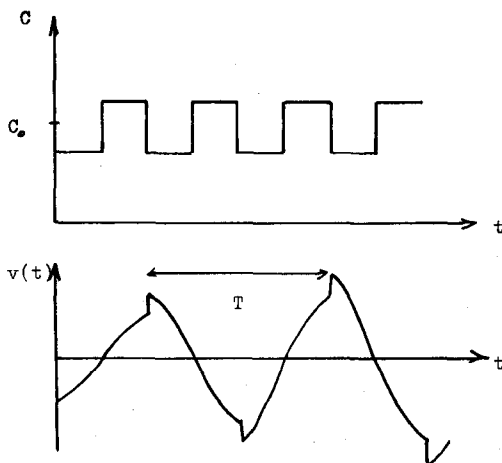


Fig. 8

Pour observer cet oscillogramme, synchroniser la base de temps sur un signal synchrone du signal porte, et n'en différer que par un retard réglable.

On observera, en même temps que la tension $v(t)$, non pas les variations de la capacité C , mais celles de la tension $u(t)$; or, les variations de ces deux grandeurs sont de signes opposés, en effet, pour que C diminue, par exemple, il faut que $|u_D|$ augmente, or $u_D = -E - u$; il faut donc que u augmente.

Existence d'un seuil.

On sait que le facteur de qualité Q d'un circuit est lié à ses pertes par la relation :

$$Q = \frac{\omega_0}{(\delta\omega)_{3\text{ db}}} = 2\pi \cdot \frac{W \text{ (énergie emmagasinée)}}{w \text{ (énergie perdue par période)}}$$

Si, comme sur la fig. 8, les apports d'énergie ont lieu deux fois par période, aux instants où toute l'énergie du système est électrostatique, les oscillations iront en croissant si l'apport

extérieur $2W \cdot \frac{\delta C}{C}$ est supérieur aux pertes par période, soit $\frac{2\pi}{Q} \cdot W$.

On doit donc avoir, dans ce cas : $\frac{\delta C}{C} > \frac{\pi}{Q}$. Il est facile

de mesurer Q , C et δC ; il est donc possible de savoir à l'avance si l'expérience réussira ou non. Par exemple, pour :

$$C = C_0 + \gamma_1 = 330 \text{ pF} \quad \text{et} \quad Q = 30,$$

on devra prévoir $\delta C > 35 \text{ pF}$. Si l'on a choisi des diodes varicap dont la capacité peut varier de 20 pF entre -2 et -7 V , on doit pouvoir obtenir la résonance paramétrique en mettant deux de ces diodes en parallèle, en les polarisant par une pile de 4,5 V, et en appliquant une tension $u(t)$ d'amplitude U voisine de 2,5 V.

L'expérience se prête bien à une modulation en créneaux, mais les oscillations paramétriques sont plus pures si le signal modulant est sinusoïdal.

En supposant que la modulation correspondante de la capacité C soit sinusoïdale (ce qui n'est pas le cas), et d'excursion δC , on peut retrouver les résultats de la théorie exposée par exemple dans le LANDAU et qui concernent le cas d'une modulation sinusoïdale, de la manière suivante :

Une modulation en créneaux d'excursion δC comporte un premier harmonique d'excursion $\delta' C = \frac{4 \cdot \delta C}{\pi}$; si donc, on remplace la modulation en créneaux par une modulation sinusoïdale, il faut augmenter la modulation de la capacité de manière à ce que, si $\delta' C$ représente la différence $C_{1M} - C_{1m}$, on ait :

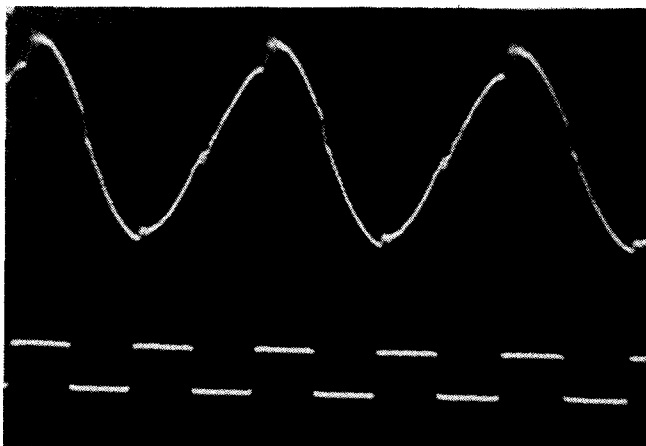
$$\frac{\delta' C}{C} > \frac{4}{Q}.$$

L'expérience montre bien qu'il faut augmenter le seuil de modulation quand on passe d'une modulation en créneaux à une modulation sinusoïdale.

Si l'une des conditions précédentes est réalisée, il est facile de montrer, puisque le bilan d'énergie par période :

$$\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\delta' C}{C} - \frac{2\pi}{Q} \right) \cdot W$$

fait apparaître un solde positif proportionnel à W , que la croissance de l'amplitude des oscillations est exponentielle.



Photographie n° 4 montrant l'entretien des oscillations paramétriques par une tension excitatrice $u(t)$ carrée. Les non linéarités du montage font que l'énergie d'entretien n'est plus apportée qu'une seule fois par période. Mais c'est bien au moment où l'énergie électrique de l'oscillateur LC est tout entière sous forme électrostatique.

2° Problème de la balançoire.

Nous reprenons ici un exercice proposé à la session 1981 de l'Agrégation de Sciences physiques et qui nous semble amusant.

On verra que sa résolution ressemble beaucoup au traitement précédent.

On considère un enfant sur une balançoire, qui s'agite de manière à prendre de l'élan. Il peut y parvenir en modulant périodiquement les paramètres du système que sont le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et la distance du centre de gravité à ce même axe.

On assimile donc le système à un solide dont le moment d'inertie par rapport à l'axe peut varier de J_1 à J_2 , et la distance du centre de gravité G à l'axe O , de la longueur l_1 à la longueur l_2 .

Là encore, on suppose que les variations simultanées de J et de l ont lieu de manière très brusque.

Considérons la variation du moment cinétique $\vec{\sigma}$ du système par rapport au point O de l'axe de rotation ; soit $\vec{R}$ la réaction de l'axe, et $\vec{P}$ le poids du système.

Soit dt la durée (très brève) pendant laquelle s'effectuent les variations de J et de l .

Le théorème du moment cinétique s'écrit ici :

$$d\vec{\sigma} = \mathcal{M}'_O(\vec{R}) \cdot dt + (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot dt.$$

Le deuxième membre de cette équation est nul lorsque dt tend vers zéro.

En effet, $\vec{R}$ étant la réaction de l'axe (schématisation valable en l'absence de frottements d'axe), son moment par rapport à cet axe est nul pour toute valeur de $\|\vec{R}\|$. D'autre part, puisque la norme du vecteur $\vec{OG} \wedge \vec{P}$ est finie, sa multiplication par un scalaire nul donne un vecteur nul : le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du système par rapport à O se conserve donc.

Remarquons qu'il n'en est pas de même de la quantité de mouvement totale $\vec{p}$ du système, qui, dans les mêmes conditions, satisfait à l'équation :

$$d\vec{p} = \vec{R} \cdot dt + \vec{P} \cdot dt.$$

Si le deuxième terme du second membre de cette équation est nul lorsque dt tend vers zéro, il n'en est pas de même du premier, car la réaction de l'axe est d'autant plus importante que la durée dt est plus courte.

Nous retenons donc de ce qui précède que le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation n'est pas affecté par les variations brusques de J et de l .

Dans ces conditions, l'énergie cinétique W_c passe de $\frac{\sigma^2}{2J_1}$ à $\frac{\sigma^2}{2J_2}$ lorsque J passe de J_1 à J_2 . Autrement dit, W_{c2} se déduit de W_{c1} par l'égalité :

$$W_{c2} = \frac{J_1}{J_2} \cdot W_{c1}.$$

On voit que pour accroître l'énergie cinétique de la manière la plus efficace possible, aux instants où il modifie J , l'enfant a intérêt à choisir ceux-ci de manière à ce que W_c y soit extrémale.

Au moment où la balançoire est en bas, W_c est maximale, il faut alors diminuer J ; on redonne au moment d'inertie sa valeur J_1 aux moments où l'énergie cinétique est nulle, c'est-à-dire quand la balançoire est en haut. C'est donc deux fois par période qu'il faut procéder aux modifications décrites précédemment.

Suivons un tel enfant « efficace » sur une demi-période :

A l'instant zéro, supposons qu'il soit en position basse (genoux fléchis), et que sa vitesse soit nulle (fig. 9 a).

Prenons comme état de référence de l'énergie potentielle celui de l'enfant à la position d'équilibre bas (genoux fléchis).

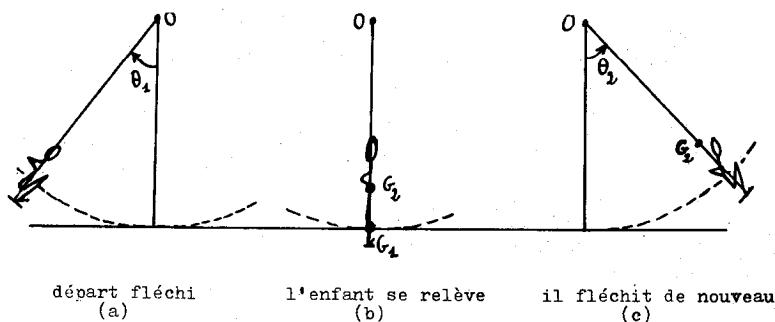


Fig. 9

A l'instant zéro, toute l'énergie mécanique du système est sous forme potentielle : $W_i = W_{pi} = Mg \cdot l_1 \cdot (1 - \cos \theta_1)$.

Au passage à la verticale, avant que l'enfant ne se relève, toute l'énergie mécanique est cinétique. Le fait de se relever

accroît celle-ci qui passe de $W_c = W_i$ à $\frac{J_1}{J_2} \cdot W_i$, et augmente aussi l'énergie potentielle qui, de zéro passe à $(l_1 - l_2) \cdot Mg$.

En fin de mouvement, toute l'énergie mécanique du système est sous forme potentielle, mais en se baissant, l'enfant perd :

$$Mg(l_1 - l_2) \cdot \cos \vartheta_2.$$

La nouvelle énergie mécanique au bout d'une demi-période vaut donc :

$$W_f = Mg(l_1 - l_2) \cdot (1 - \cos \vartheta_2) + \frac{J_1}{J_2} \cdot W_i.$$

Or, la quantité $Mg l_2 \cdot (1 - \cos \vartheta_2)$ est justement égale à l'énergie cinétique $\frac{J_1}{J_2} \cdot W_i$ qui a été transformée en énergie potentielle dans la deuxième partie du mouvement.

On a donc :

$$W_f = \frac{J_1}{J_2} \cdot W_i \left(1 + \frac{l_1 - l_2}{l_2} \right) = \frac{J_1 \cdot l_1}{J_2 \cdot l_2} \cdot W_i.$$

Là encore, si les variations de J et de l ont une amplitude constante, et si elles s'effectuent à la fréquence $2f_0$, l'énergie mécanique du système varie comme $W_i \cdot \left(\frac{J_1 \cdot l_1}{J_2 \cdot l_2} \right)^{2n}$ si n représente le nombre de périodes (supposées indépendantes de l'amplitude); cette variation est donc exponentielle.

3° Expérience de Melde.

Rappels.

Pour obtenir le mode de vibration d'une corde correspondant à un fuseau, on peut exciter celle-ci transversalement

(fig. 10 a) à la fréquence $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, ou encore longitudinalement à la fréquence $2f_0$ (fig. 10 b).

C'est ce dernier cas qui nous intéresse.

Mentionnons tout d'abord quelques faits expérimentaux qu'il est facile de mettre en évidence : l'expérience est aisément réa-

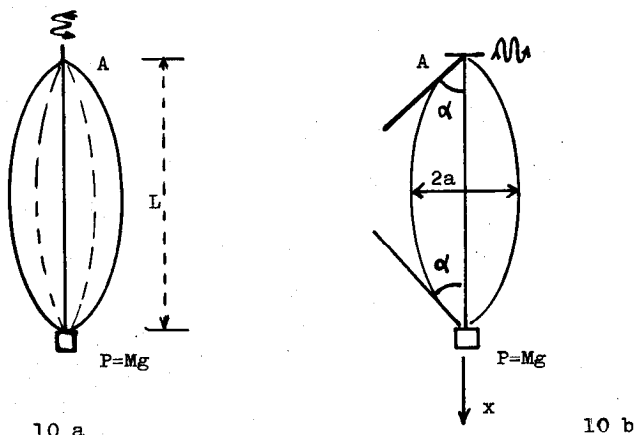


Fig. 10

lisable à l'aide d'un vibreur électrodynamique de type haut-parleur (un haut-parleur convient parfaitement).

La masse M dont le poids P tend le fil peut être prise de l'ordre de 50 g, et, pour une fréquence de la corde voisine de 50 Hz, sa vitesse est tout à fait négligeable devant celle du point A du vibreur. On peut donc négliger le mouvement de l'extrémité liée à M . On peut constater que l'expérience est très différente selon que le fil est peu extensible, ou au contraire, qu'il est très élastique.

Dans le cas où le fil est peu extensible (un fil de nylon entrant encore dans cette catégorie), l'expérience montre qu'une amplitude de déplacement du point A atteignant 1 mm, suffit amplement, généralement, pour obtenir un fuseau de belle amplitude.

On peut alors mettre en évidence un effet de seuil (en diminuant l'excitation du vibreur, la résonance cesse brusquement); on peut voir que l'étendue de la plage de résonance varie avec l'amplitude de l'excitation, et qu'elle est d'autant plus faible, autour de $2f_0$, que celle-ci est proche du seuil; on peut encore constater que le phénomène n'est pas linéaire car l'amplitude du fuseau n'est pas du tout proportionnelle à l'amplitude de l'excitation.

Bref, cette résonance présente tous les caractères d'une résonance paramétrique!

Dans le cas où le fil est très extensible (fil froncé dit « lastex », ou élastique de jokari, etc.), au contraire, on n'arrive pas à éta-

blir ce type d'oscillations, à moins de disposer d'un vibreur capable d'imposer des mouvements de grande amplitude (de l'ordre du centimètre). Ce résultat est, à première vue, d'autant plus surprenant que de tels fils très élastiques se prêtent bien (mieux que les autres, me semble-t-il) à la résonance classique avec excitation transversale.

Nous allons tenter de montrer que l'hypothèse du caractère paramétrique de la résonance, dans le cas où l'excitation est transversale, permet d'expliquer la différence de comportement entre fils peu extensibles et fils très élastiques.

Nous commencerons par évoquer un phénomène annexe qui est celui de l'allongement périodique de la corde, à la fréquence $2f_0$, dû au seul fait que celle-ci vibre en fuseau.

Si l'élongation d'un point d'abscisse x de la corde est telle que $y = a \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_0}\right) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$, il est facile de montrer que si la longueur de la corde est L_0 lorsqu'elle est rectiligne, sa variation en fonction du temps est donnée par l'expression :

$$L = L_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{\pi \cdot a}{2 L_0} \right)^2 \cdot \cos(2 \omega_0 \cdot t) \right]$$

Pour une corde de longueur $L_0 = 60$ cm vibrant en un fuseau de demi-largeur $a = 1$ cm (fig. 10 b), l'allongement total, obtenu deux fois par période est ainsi de 0,4 mm (toutes les parties de la corde ne s'allongent pas, la partie centrale, par exemple, ne contribue à l'énergie mécanique de la corde qu'en ce qui concerne l'énergie cinétique ; les extrémités, au contraire, qui ne peuvent acquérir que de l'énergie potentielle lorsque la corde s'allonge, emmagasinent de l'énergie lorsque la partie centrale n'en a pas).

Cet allongement, qui n'a pas d'influence notable sur la tension de la corde lorsque celle-ci est élastique (la théorie classique qui suppose la tension de la corde invariable, suppose donc implicitement que celle-ci est suffisamment extensible pour que cette hypothèse soit plausible), doit certainement être pris en considération lorsque la corde est peu extensible ; cependant, comme la phase de cette modulation est liée à celle du résonateur, elle ne peut jouer un rôle fondamental dans la résonance paramétrique.

Nous négligerons donc cette modulation pour ne nous intéresser qu'à la modulation de longueur imposée par l'excitateur.

Nous supposons donc que la tension F de la corde est partout la même.

Cherchons l'influence d'une variation dL de la longueur de la corde sur la pulsation de résonance $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ (l'idée de cette discussion, plus convaincante que celle que nous avons proposée initialement, est due à M. BURIE).

Les grandeurs μ et F sont liées à la longueur L de la corde :

$\mu = \frac{m'}{L}$, et, si la corde peut être considérée comme suffisamment élastique, sa longueur au repos étant l , $F = k \cdot (L - l)$.

D'où la relation :

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = -\frac{dL}{L} + \frac{1}{2} \frac{dL}{L} + \frac{1}{2} \frac{dL}{L-l}.$$

Ou encore :

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{l}{(L-l)} \cdot \frac{dL}{L}.$$

On voit bien que pour une corde très élastique, telle par exemple que sous l'action du poids P , la longueur de travail, L , soit égale au double de la longueur au repos l , on aurait alors :

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{L}.$$

Si, au contraire, la corde est très peu extensible, la modulation de la pulsation propre par une même modulation de la longueur L , est beaucoup plus importante. Supposons par exemple que, sous l'action du poids P , la corde ne s'allonge que du centième de sa longueur (ce qui, pour une corde de longueur $L_0 = 60$ cm, correspond à 6 mm). On aurait alors :

$$l \simeq L, \quad L-l \simeq \frac{L}{100}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\omega_0}{\omega_0} = 50 \cdot \frac{dL}{L}.$$

On voit donc que pour obtenir des oscillations paramétriques en excitant longitudinalement une corde, il faut, puisque le seul paramètre à prendre en considération, en fin de compte, est ω_0 , moduler beaucoup plus énergiquement la longueur d'une corde très extensible que celle d'une corde peu extensible.

Terminons ces quelques remarques par une dernière considération, mi-qualitative, mi-quantitative :

Nous avons vu, dans la discussion de notre expérience de résonance paramétrique électrique, que l'existence de pertes dans le circuit, conduisait à un effet de seuil de modulation.

Plus exactement, si Q est le facteur de qualité du résonateur, et si la pulsation propre de celui-ci est de la forme :

$$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot [1 + h \cdot \cos(2\omega_0 + \varepsilon) \cdot t],$$

il ne peut y avoir résonance paramétrique que si h est supérieur au seuil $\frac{2}{Q}$. (La relation que nous avons trouvée, soit $\frac{\delta C'}{C} > \frac{4}{Q}$,

est strictement équivalente, bien que dans un circuit oscillant, la pulsation propre ω_0 et la capacité soient liées par la relation $LC\omega_0^2 = 1$, parce que dans notre expression, $\delta C'$ représente l'excursion totale de capacité, c'est-à-dire le double de l'amplitude de la modulation sinusoïdale, alors que h correspond à l'amplitude relative de la modulation de ω_0^2).

Le facteur de qualité du résonateur constitué par le fil vibrant en un fuseau peut s'estimer facilement : si τ est la durée au bout de laquelle l'amplitude des oscillations libres est divisée par e (base des logarithmes népériens), on montre que Q est donné

$$\text{par la relation } Q = \frac{\pi\tau}{T_0}.$$

Si, par exemple, $f_0 = 50$ Hz, et si $\tau = 0,4$ s, le facteur de qualité Q est de l'ordre de 60. (Cette valeur est tout à fait convenable pour caractériser le facteur de qualité d'un résonateur mécanique courant).

Dans le cas de l'expérience de MELDE, la condition de résonance paramétrique : $\frac{d(\omega_0^2)}{\omega_0^2} > \frac{2}{Q}$, soit $\frac{d\omega_0}{\omega_0} > \frac{1}{Q}$, devient :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{L-l} \cdot \frac{dL}{L} > \frac{1}{Q}.$$

Avec les valeurs numériques que nous avons déjà utilisées ($Q = 60$, $L = 60$ cm), nous voyons que dans le cas d'une corde

peu extensible ($L-l \simeq \frac{L}{100}$), cette relation conduit à un seuil

d'excitation d'amplitude 0,2 mm, ou encore à une excursion de 0,4 mm, et, en fait avec un haut-parleur assurant une excursion de 1 mm on obtient une belle résonance sur une plage de plusieurs hertz autour de $2f_0$, de valeur voisine de 100 Hz.

Au contraire, pour une corde très élastique telle que $L = 2l$, on voit que le seuil d'excitation correspond à une amplitude de 1 cm, et c'est à peu près ce que l'on observe.

BIBLIOGRAPHIE

- M.-Y. BERNARD. — *L'amplification des petits signaux, la mise en œuvre des phénomènes paramétriques*. Conférence lors du Stage d'information sur les Sciences et Techniques spatiales. Rennes. 1969.
- LANDAU et LIFCHITZ. — *Mécanique*. Editions de Moscou. Chapitre 27 : *Résonance paramétrique*.
- KITTEL, KNIGHT et RUDERMAN. — *Cours de physique de Berkeley*. Armand Colin. Complément 3 au chapitre 7 : *Modulation des paramètres de l'oscillateur (amplification paramétrique)*, p. 229.
- SAUZADE. — *Electronique non linéaire*. Dunod Université. 1969. Chapitre 7 : *Phénomènes paramétriques et Masers*.
- HERVÉ. — *Electronique appliquée à la transmission de l'information*. Masson. 1981. p. 342.
- A.-A. KHARKEVITCH. — *Phénomènes non linéaires et paramétriques en électronique*. Monographie Dunod.
- WALSH. — *Parametric amplification*. International Science and Technology n° 17, p. 75 (mai 1963).
-