LP23 – Aspects analogiques et numériques du traitement du signal

17 juin 2021

Nicolas Barros & Abel Feuvrier

Oui
Mr C

Il y avait à l'académie des sciences un Fourier célèbre que la postérité a oublié et dans je ne sais quel grenier un Fourier obscur dont l'avenir se souviendra

Victor Hugo, Les Misérables, 'En l'année 1817'

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

- ✍ *J'intègre PSI-PSI**, **Cardini** ⟶ Le chapitre 5
- ✍ *Traitement du signal*, **Cottet** ⟶
- ✍ *Mathématiques pour la Physique*, **Appel** ⟶ La seule (?) leçon où ona le droit de l'ouvrir, autant en profiter un peu ?
- ✍ *Physique Expérimentale*, **FLTCD** ⟶ Si on a besoin de sortir la détection synchrone
- ✍ *Dico*, **Taillet** ⟶ Définitions

Prérequis

- ➢ Séries de Fourier
- ➢ Electrocinétique, Filtrage linéaire
- ➢ Notion d'OPPH
- ➢ Corde de Melde

Expériences

- Taper sur un diapason
- Taper sur un diapason avec masselote
- Détection synchrone : mesure d'un vitesse par effet Doppler

Table des matières

Introduction

La structure et le storytelling sont fortement repris des LP de corentin. pacary et yohann.faure

Chaque signal intrevenant en travaux pratiques se fait sous forme analogique -une tension une onde-, ou sous forme discrete (numérique, par exemple signal après aquisition et traitement). On cherche à définir des outils permettant d'analyser de tels signaux, et d'en extraire l'information utile.

☕

DIIIIING
Taper sur un diapason simple. Faire l'aquisition du spectre sous Latis

1 Analyse spectrale d'un signal

1.1 Série de Fourier

En 1810 [1], Joseph Fourier démontre qu'un signal périodique de fréquence $f = 1/T$ peut être décomposé en une série de fonctions harmoniques selon :

$$s_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2\pi n f t) + b_n \sin(2\pi n f t)\right) \tag{1}$$

Les séries $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont appelées **spectre** du signal.

On peut donner en expliquant un exemple simple déjà connu : la linéarisation $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)$. Pour généraliser un peu, on peut donner le spectre du triangle et du carré, avec déjà deux observations importantes :

> Les discontinuités de la dérivée d'un signal entraînent l'apparition d'harmoniques élevées (triangle). Les discontinuités d'un signal entraînent l'apparition d'harmoniques très élevées (créneau).

Enfin, un autre résultat qu'on voit sur la linéarisation du $\cos^2$ et qu'on admet pour le reste : on peut exprimer le spectre d'un signal à partir du dit signal, selon la formule :

$$\begin{cases} a_n = 2f \int_0^T s_f(t)\cos(2\pi n f t)\mathrm{d}t \\ b_n = 2f \int_0^T s_f(t)\sin(2\pi n f t)\mathrm{d}t \end{cases} . \tag{2}$$

On peut donc passer de l'un à l'autre sans rien perdre. Autrement dit :

> Le signal et son spectre contiennent exactement la même information.

Faire le spectre de notre signal de diapason. On voit bien qu'on a cette équivalence en information : on peut quasiment réduire notre signal acquis à "une sinusoide de fréquence f", et c'est exactement ce que nous donne sn développement en série de fourier. Faire la meme chose mais avec une masselote, le signal est plus compliqué, mais grâce à fourier on s'n sort ?

Traiter un exemple "mathématique" : le créneau. On sent bien comment on doit utiliser nos sinusoides de différentes fréquences pour reconstituer le créneau. On voit aussi qu'on va avoir un peoblème pour approcher les changements bruteaux : à un changement brutal en temporal doit correspondre un spectre étendu.

Physiquement, comment "voir" cette décomposition ? On peut peut-être s'en donner une première intuition en regardant le système de la figure , qui consiste en plusieurs cordes de Melde mises bout à bout. Les conditions aux limites de la corde de Melde correspondent ici à imposer une fréquence spatiale au signal. Les seules fréquences de la partie spatiale du signal pouvant alors apparaître sont alors des multiples de la fréquence spatiale imposée, ce qui illustre le résultat de Fourier : n'importe quel signal sur la corde est une somme d'harmoniques de la fréquence spatiale imposée. Nicolas dis-moi ce que t'en dis, j'essaye de mettre un peu de physique dans cette partie mais je sais pas si ça aide

1. à peu près

1.2 Transformée de Fourier et propriétés

Pour n'importe quel signal $s(t)$ de carré intégrable[2] (pas forcément périodique), on peut décomposer $s(t)$ en une somme continue de fonctions harmoniques, selon :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \tag{3}$$

qu'on peut inverser en :

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \tag{4}$$

De manière analogue à la sous-partie précedente, le signal $s(t)$ est donc complètement contenu dans le signal $\hat{s}(\nu)$ (et vice versa, la décomposition est unique). On appelle également $\hat{s}(\nu)$ le **spectre** de $s(t)$.

La transfomation $s(t) \longrightarrow \hat{s}(\nu)$ est appelée **transformée de Fourier**. La transformation $\hat{s}(\nu) \longrightarrow s(t)$ est appelée **transformée de Fourier inverse**.

1.3 Propriétés

On a des formules aller et retour bien définies : ces opérations sont linéaires et bijectives (à un signal correspond un spectre unique et vice versa).

On donne quelques exemples pour illustrer quelques propriétés (ce ne sont pas des démonstrations, mais dans l'esprit si) :

- TF d'un sinus = diracs. On retrouve bien le résultat de la première sous-partie, qu'on peut généraliser par linéarité : un signal périodique a un spectre discret.
- TF d'un dirac = fonction harmonique. Là aussi, par linéarité : un signal discret a un spectre périodique.
- TF d'un créneau = sinus cardinal : $\Delta t \propto 1/\Delta\nu$.

Pour la multiplication qui devient une convolution et vice versa, on peut le balancer je pense, sauf si t'as une vision instinctive du truc.

1.4 Bruit

Est-ce que ça bouge pas dans une autre partie ? Pour l'instant on est vachement matheux et le bruit c'est vachement physique je trouve. Ca pourrait être une sous-partie tampon du tonnerre en partie 3. Effectivement suis d'accord. On peut juste dire que la transformée de fourier permet également de caractériser les différents bruits, en plus des signaux informatifs ! blanc, rose, bleu..

1.5 S.L.I.T. (optionnel)

On a des outils puissants pour l'analyse d'un signal analogique. Mais on travaille pas avec des signaux analogiques sur nos ordis.

2 Conversion Analogique-Numérique

On se donne un signal analogique $s(t)$, on voudrait l'analyser avec un ordi. On va devoir le malmener de différentes manières.

2. ce qui sera toujours le cas en physique, on est pas des sauvages

2.1 Échantillonage

On peut pas stocker une quantité infinie d'information parce qu'on est pas le cerveau de Jamy. On va donc devoir prendre un nombre fini de photos et travailler avec. L'échantillonnage c'est la transformation $s(t) \longrightarrow \{s(t_k)\}_{k=1,2,\ldots,N}$. En pratique, on prend des points à intervalles réguliers : $t_k = k\tau$. Ce τ, on ne peut pas le choisir n'importe comment.

On peut illustrer Shannon avant de le balancer je pense. Le code de Yohann est très bien je trouve, ou alors on peut faire du diapason, ou du latis, ou un mix. Visualiser le problème dans le domaine temporel (c'est plus facile de voir qu'il y a un problème) et dans le domaine spectral (c'est plus facile de voir le problème, aliasing). À ajuster plus tard ?

En tout cas on arrive à la condition suivante pour ne pas perdre d'information : $f_e = \frac{1}{\tau} \geq 2f_{\max}$, avec $f_{\max}$ la plus haute fréquence du signal à traiter.

Pour un exemple dans la vie de tous les jours + odg, j'aime bien Yohann qui nous parle la fréquence max stockée par les CD de musique (41 kHz, pour être sûr).

On pourrait aussi parler du problème inverse : pour chopper les faibles fréquences, il faut un long temps d'acquisition. Là l'exemple de 3blue1brown est extra je trouve, ou alors les battements du diapason ! On est en plein dans le compromis $\Delta t/\Delta\nu$, ne pas hésiter à en remettre une couche.

Le compromis est donc entre les capacités de stockage de notre machine d'une part et la qualité de la restitution du signal d'autre part.

2.2 Quantification

C'est un peu le même problème mais sur l'axe y : on doit arrondir notre mesure.
En stockant sur N bits, on aura $2^N - 1$ valeurs possibles. Pour montrer comment on charcute le signal si on est pas assez précis on peut montrer un petit code de Yohann, ou se planter de format sur Latis (ça marche très bien et ça nous fait un odg en bonus).

Quantitativement, si m est notre pas de quantification, on peut estimer l'erreur faite en considérant que la grandeur analogique x, qu'on a mesurée en $x' = nq$ est présente de manière équiprobable dans l'intervalle $[(n-\frac{1}{2})q; (n+\frac{1}{2})q[$. Le théorème de Sheppard donne alors une relation entre les erreurs quadratiques moyennes de la valeur analogique et de son estimateur (ne pas prononcer le mot "estimateur" si on est pas chaud, "valeur quantifiée" c'est très bien) :

$$\mathbb{E}[x'^2] = \mathbb{E}[x^2] + \frac{q^2}{12} \tag{5}$$

On a donc un bruit supplémentaire, dû à la quantification des mesures. Attention, en parlant de variance etc, on ouvre une porte vers les variables aléatoires, qui est un univers vaste, sombre et plein de questions retorses.

Donc notre signal numérique est un signal analogique échantillonné et quantifié. Quelle influence ça va avoir sur son traitement ?

3 Traitement analogique d'un signal

3.1 Modulation/démodulation

Ici modulation en amplitude. Voir Duffait d'élec/MP23. Présenter l'aspect analogique et les côtés numériques : pour ne pas perdre d'info on doit avoir Shannon entre la porteuse et le signal (dans la pratique on prend $f_p \gg f_s$ mais c'est intéressant quand même je trouve), y a un coût en bande spectrale et en énergie (la porteuse se déplace pas toute seule).

Petite manip ? On sort finalement un GBF ?

3.2 Filtrage

C'est là qu'on voit la puissance de la TF.

Dans quelle mesure on a besoin de traiter les SLIT pour faire cette partie ? Dans quelle mesure on veut la faire proprement/quantitativement ? Sachant que c'est peut-être plus intéressant d'arriver à la sous-partie prochaine. On peut parler de l'utilité du filtrage pour niquer le bruit, pour éviter le recouvrement de spectre. On peut chanter un hymne à la gloire du mode HF de l'oscilloscope.

3.3 Application à la détection synchrone

Duffait d'élec/MP23. Permet de démoduler en amplitude.

Conclusion

Convertir un signal analogique en numérique a un coût. Il convient de savoir ce qu'on fait pour ne pas gaspiller d'énergie/mémoire/bande passante. Pour l'ouverture, on peut ouvrir plus loin sur le bruit, sur la modulation FM, sur l'entropie d'un signal si on s'appelle Nicolas...

4 Bonus

4.1 Remarque

Le titre complet de cette leçon était, jusqu'à 2020, "Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.", ce qui justifie l'accentuation mise sur la théorie de Fourier. Mais sans le "étude spectrale", il est possible de donner à la leçon une tout autre couleur. On peut parler d'estimateurs, de transmission de l'information, d'entropie de Shannon...

4.2 En vrac

Il est plus pratique de prendre un nombre de points n qui vaut une puissance de deux pour faciliter le boulot de l'algorithme de FFT (qui est en $\mathcal{O}(n\log(n))$). En gros, c'est parce que l'algo sépare les points pairs et impairs puis utilise des propriétés de la TF, j'ai pas tout compris mais ça marche bien.

Gaffe au vocabulaire : grandeur, valeur, signal, mesure... Perso je m'embrouille facilement, ne pas hésiter à lire vite fait le Taillet quelque part pendant les quatre heures.

Un petit tour sur cette page wikipédia (phénomène de Gibbs) peut être une bonne idée.

Sites intéressants :

- Le site de femto physique ici
- Animation sympa de falstad là

Aller voir le plan / les questions de chauch