

MP 31: RÉSONANCE

5 février 2021

Nicolas Barros & Abel Feuvrier

Correcteurs

ALEXANDRE ALLES & THOMAS GIBAUD

I'm pickin' up good vibrations
She's giving me the excitations (oom bop bop)

The Beach Boys, Good Vibrations

Niveau : CPGE

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Expériences d'optique*, Duffait

→ Pour le Fabry-Pérot ¹

À faire en préparation :

- allumer le laser en avance
- Diagramme de Bode du RLC
- Mesures d'amplitude relative en régime transitoire
- Mesures de λ , f pour 4-5 modes propres du tube de Kundt

Expériences

- 🔥 Étude du circuit RLC
- 🔥 Oscillations amorties du diapason
- 🔥 Tube de Kundt
- 🔥 Étude d'une cavité laser

Table des matières

1	Système à un degré de liberté : le bon gros RLC	2
1.1	Mesure de la fréquence propre	2
1.2	Mesure du facteur de qualité	2
2	Systèmes à plusieurs degrés de liberté	3
2.1	Tube de Kundt	3
2.2	Cavité Fabry-Pérot	4
2.2.1	Point théorique	5
2.2.2	La mesure en soi	7
3	Questions et Remarques	8

1. L'expérience décrite par Duffait n'est pas exactement celle qu'on fait, mais une fois qu'on a compris ce que Duffait raconte on peut plus facilement comprendre l'expérience proposée ici.

Introduction

On définit proprement la résonance et les grandeurs qu'on va manipuler (fréquence de résonance f_0 , facteur de qualité $Q = f_0/\delta f$ avec δf la bande passante à mi-hauteur). On va montrer que la résonance est un phénomène transversal (et se frotter à une grande gamme de facteurs de qualité par ordre croissant).

Dans notre cas, on ne manipulera que des systèmes linéaires : autant introduire tout de suite le diagramme de Bode et y faire apparaître f_0 et δf pour un système générique. On aura, pour chaque expérience, une entrée et une sortie bien définies.

Dans les différents systèmes considérés, on va "quantifier" la résonance : trouver f_0 et Q .

1 Système à un degré de liberté : le bon gros RLC

☞ euh

On l'aime, on le connaît, on sait faire la différence entre résonance en tension et résonance en intensité², on n'oublie pas les impédances d'entrée de l'oscillo/de sortie du GBF, et ça devrait ronronner.

Entrée = tension d'entrée, sortie = tension aux bornes de la résistance, comme sur le schéma REF.

On donne la fonction de transfert et l'allure du diagramme de Bode. Notre objectif est de trouver f_0 et Q .

Ne pas hésiter à recâbler le montage en live, ça fait joli et ça va très vite.

1.1 Mesure de la fréquence propre

On a déjà fait au préalable tous les points du diagramme de Bode sauf celui à la résonance. On voit bien qu'elle est là, mais comment déterminer précisément la fréquence de résonance ?



Détermination de f_0 par la méthode de Lissajous

On met l'entrée sur le canal 1, la sortie sur le canal 2, on passe en mode XY sur l'oscillo. La fonction de transfert nous dit qu'on a une droite (c'est-à-dire un déphasage nul entre entrée et sortie) seulement à la fréquence de résonance.



Détermination de f_0 par la méthode de Lissajous

☞ ref

☹ quelques secondes une fois que le montage est câblé

On trouve la fréquence de résonance en intensité du RLC série.

- entrée sur le canal 1 de l'oscillo, sortie sur le canal 2, mode XY
- On change la fréquence d'entrée jusqu'à avoir une droite sur l'oscillo
- La fonction de transfert nous dit qu'on est à $f = f_0$, qu'on peut trouver à quelques Hertz près.

Chouette, reste plus qu'à mesurer Q .

1.2 Mesure du facteur de qualité

Ça tombe bien, on vient de finir le diagramme de Bode, et on connaît précisément la hauteur du pic de résonance. On peut donc, en mesurant δf , trouver Q .



Première mesure de Q

On mesure δf sur le diagramme de Bode, on en déduit Q . Pas la peine de raffiner outre mesure, l'idée ici est de montrer que cette méthode n'est pas très précise. Elle permet cependant de faire valoir le diagramme de Bode. C'est vous qui voyez. Pour moi, si quelque chose doit sauter par manque de temps c'est ça.

2. Oui, j'avais oublié.

On trouve un truc moche.

On trouve un truc moche. Comment déterminer Q plus précisément ?



Détermination de Q par la méthode du décrement logarithmique

☞ euh

☹ pas trop longtemps

On veut trouver Q en se servant du régime transitoire du RLC soumis à un échelon de tension.

- On envoie un signal créneau qui laisse le temps au système de se relaxer (nous en revanche on a pas le temps, hop hop hop)
- On mesure à l'oscillo l'amplitude des pics d'oscillation (en pratique on en mesure un et on l'ajoute à ceux faits en préparation)
- En notant U_i l'amplitude du $i^{\text{ème}}$ pic, on trace $\ln\left(\frac{A_i}{A_1}\right)$ en fonction de i . On obtient une droite de coefficient directeur $2/Q$, on en déduit Q .

Pour faire apparaître les choses essentielles au milieu d'un pavé



Mais y a pas que le RLC dans la vie. Je suis né pour te connaître, pour te nommer : degré de liberté.

2 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Et comme on a pas le temps, on aura que des systèmes avec une infinité de degrés de liberté.

2.1 Tube de Kundt

Même refrain : on cherche f_0 et Q , pour quelques modes au moins. En passant, on va montrer que la résonance ça permet de faire des mesures sympas.

On présente la condition de propagation d'ondes dans le tube, c'est-à-dire la condition de résonance.

Remarque

Le tube de Kundt qu'on a au labo est très bien. Attention cependant à bien indiquer au jury où est le haut-parleur, et faire attention aux conditions aux limites : ici, les conditions aux limites rigides sont à un bout du tube d'une part et au fond des verres en plastique d'autre part ^a.

a. C'est mieux de s'en rendre compte avant la séance de question, c'est un copain qui m'a dit



Mesure de la célérité du son avec le tube de Kundt

☞ poly de TP

☹ 5 bonnes minutes

La résonance dans le tube de Kundt nous permet de "figer" les ondes. On peut alors facilement mesurer leur longueur d'onde pour différentes fréquences, ce qui nous permet de calculer la célérité c du son.

- Au départ on est pas forcément à une fréquence de résonance. On se place approximativement à un "ventre" de vibration.
- On change la fréquence jusqu'à un maximum.
- On déplace le micro jusqu'à un maximum.
- On affine la fréquence, puis le micro, puis la fréquence, etc., pour arriver à une fréquence de résonance, qu'on peut déterminer à quelques Hertz près. On note cette fréquence.

- On déplace le micro en relevant les positions x_i des noeuds. On trace $x_i = f(i)$: on obtient une droite de coefficient directeur $\lambda/2$, on en déduit λ .
- On ajoute cette mesure de couple (f, λ) à ceux faits en préparation.
- On trace $\lambda = f(1/T)$: on obtient un coefficient directeur c , à quelques m/s près.

Se placer à des grandes fréquences (>3000 Hz) pour avoir assez de noeuds. Pour les mesures de x_i , mesurer la longueur de micro qui dépasse du tube, c'est le plus simple.

On a trouvé plein de f_0 . Quid de Q ?

Détermination de Q pour un mode propre du tube de Kundt

⚡ euh

☹ jsp

On cherche à déterminer le facteur de qualité d'un mode propre du tube de Kundt en mesurant δf autour de ce mode propre.

- On se place à un ventre de vibration d'un mode propre du tube.
- On note l'amplitude de vibration U .
- On veut trouver les fréquences voisines pour lesquelles cette amplitude est divisée par $\sqrt{2}$. On change la fréquence jusqu'à arriver à ces valeurs, en ajustant le micro à chaque fois pour bien se placer à un ventre.
- La différence entre ces fréquences donne δf et on connaît f : on peut calculer Q . On arrive à quelques dizaines.

C'est déjà un gros Q . Mais on aime aussi les très gros Q .

2.2 Cavité Fabry-Pérot

⚡ Duffait, Expériences d'optique, pages 91 et suivantes

Le Fabry-Pérot dont on va chercher à quantifier la résonance est celui qui est intégré dans le laser qu'on utilise (y en a dans tous les lasers du labo à ma connaissance).

On rappelle le principe du Fabry-Pérot, sa transmittance en incidence normale en fonction de f (on en profite pour faire apparaître δf sur un graphe).

On utilise le Fabry-Pérot en incidence normale, on a donc un éclairage uniforme.

On définit l'intervalle spectral libre (ISL, free spectral range FSR en anglais) et la finesse³ F . On connaît déjà la fréquence propre (474 THz pour le laser He-Ne), on va donc chercher le facteur de qualité d'un mode du laser.

Pour mesurer δf , on va utiliser une tête d'analyse Fabry-Pérot (P17.20 et l'ampli P17.20/2 qui va avec), qui est un autre Fabry-Pérot, qu'on appellera "analyseur" par la suite. Il doit être de plus grande finesse et de plus grand intervalle spectral libre que celui qu'on cherche à analyser (on y reviendra), mais la propriété qui nous intéresse c'est qu'un de ses miroirs est relié à un cristal piézoélectrique dont on contrôle le déplacement.

Grâce à ces propriétés, en visualisant sur oscilloscope l'éclairement reçu par la photodiode en sortie de l'analyseur au cours du temps, on va pouvoir mesurer δf . On va faire un petit point théorique pour bien voir ce qui se passe, et on verra les mesures ensuite.

3. finesse qui se traduit en anglais par "finesse". Cocorico ?

2.2.1 Point théorique

(Ne pas tout détailler devant le jury, c'est juste qu'il me faudra un truc détaillé pour comprendre ce que je fais le jour J parce que c'est pas évident pour moi. Tous les graphes ont été faits avec une simu de mon cru, que j'ai essayé de rendre à peu près maniable et qui est sûrement sur mon site perso, open bar)

On se place d'abord pour à instant donné :

chaîne de mesure	milieu amplificateur du laser	FP du laser	FP analyseur	photodiode
spectre associé	étalé autour de f_0	peigne (ISL_l, F_l)	peigne (ISL_a, F_a)	à peu près constant

TABLE 1 – Chaîne de mesure et spectre associé

Le spectre du signal reçu par la photodiode est donc :

$$S_{\text{reçu}}(f) = \text{spectre du laser} \times \text{transmittance du FP du laser} \times \text{transmittance du FP analyseur}$$

Autrement dit, sur la figure 1, l'éclairement reçu est proportionnel au recouvrement entre les trois courbes ⁴ :

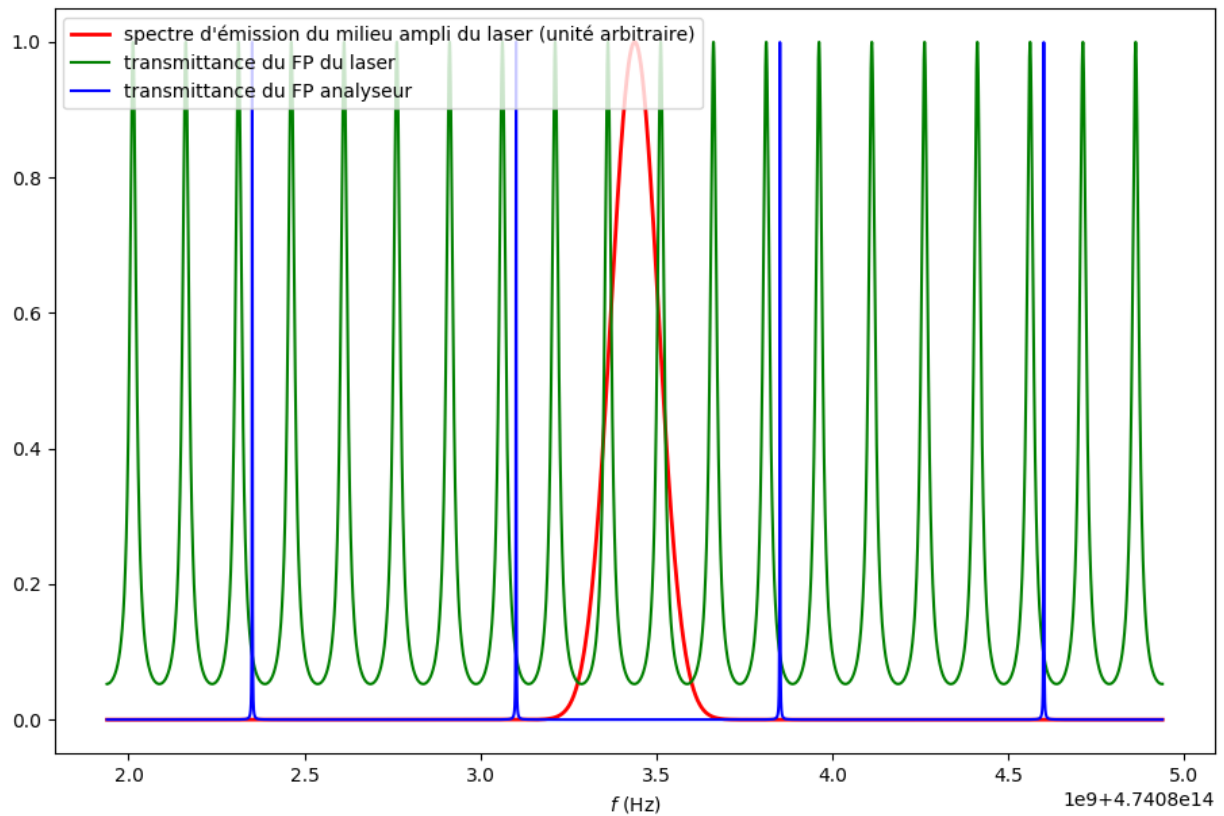


FIGURE 1 – Visualisation de ce qui se passe dans l'espace des fréquences à un instant donné

On peut voir deux choses :

- Seuls quelques modes du FP du laser sont excités par le milieu amplificateur du laser. En sortie du laser, on aura donc quelques pics, espacés de l'ISL du laser. Ici on verra deux modes ; il est possible d'en voir trois, mais guère plus ⁵.

4. Le spectre d'émission du milieu amplificateur du laser n'est pas connu a priori. On a supposé un profil gaussien, et on a fixé l'écart-type à partir des observations expérimentales : en sortie du FP du laser, on n'observait que deux-trois modes du même FP, l'étalement spectral du laser est donc de deux-trois ISL du FP du laser.

5. Si vous n'en voyez qu'un, vous allez rencontrer des problèmes ; un bon coup de sèche-cheveux sur le laser est alors préconisé.

- On n'aura un éclaircissement non nul en sortie de l'analyseur que si un pic de l'analyseur est superposé avec un pic du FP du laser, ce qui n'est pas le cas ici.

C'est ici que le cristal piézoélectrique entre en jeu : grâce à l'ampli P17.20/2, on va lui envoyer des créniaux en tension, ce qui va lui communiquer un mouvement rectiligne uniforme. Autrement dit, on modifie l'épaisseur de l'analyseur à vitesse constante.

En raisonnant sur la figure 1, ce déplacement va se traduire par une translation uniforme de la courbe bleue au cours du temps⁶. En pratique, au cours d'une période de déplacement, la courbe bleue se déplace de quelques ISL de l'analyseur ; donc, au cours d'une période de déplacement, quelques pics bleus passeront par la courbe rouge, et on aura un éclaircissement non nul. Le signal qu'on obtient sur l'oscilloscope a l'allure donnée en figure 2, qui donne la courbe pour une période.

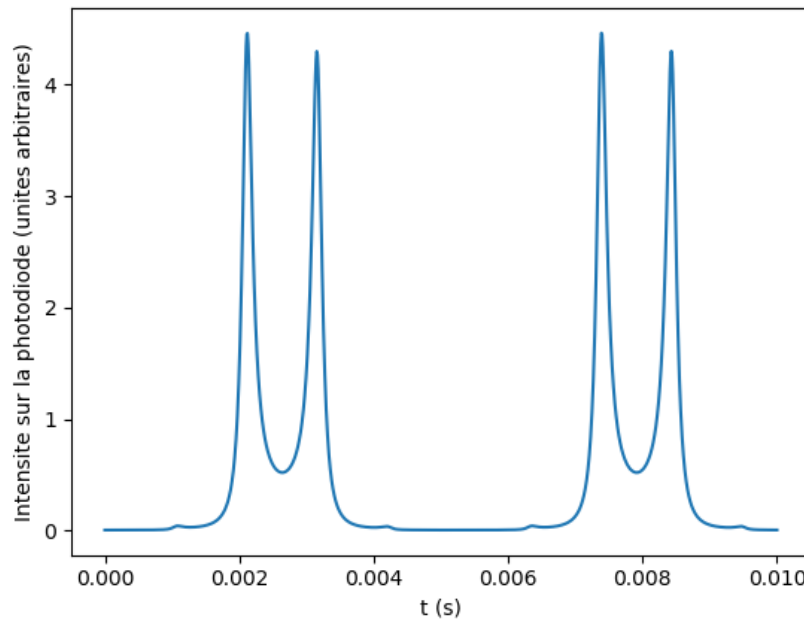


FIGURE 2 – Intensité reçue par la photodiode au cours d'une période

Comment interpréter ? En revenant sur la figure 1, on a vu que le déplacement du miroir est proportionnel au déplacement sur l'axe des fréquences de la courbe bleue. Cette courbe agit donc au cours du temps comme un "scanner", comme un balayage en fréquences⁷. Ainsi :

- le groupe de deux pics rapprochés correspond aux deux modes du FP du laser excités par le milieu amplificateur ;
- une répétition de ce groupe correspond au passage d'un pic bleu à travers la courbe rouge, c'est-à-dire à travers la plage de fréquences excitées par le laser.

Enfin, nous savons que ce balayage se fait à vitesse constante : donc **l'écart temporel entre deux pics sur la figure 2 est proportionnel à l'écart en fréquences entre ces pics**. Pour s'en convaincre, il faut faire "bouger" la courbe bleue de la figure 1 en gardant en tête que l'éclaircissement est proportionnel au recouvrement entre les trois courbes. Un petit script python doit traîner quelque part sur une de nos pages perso ENSL.

Or on connaît l'écart entre deux groupes de deux pics : il s'agit de l'ISL de l'analyseur. On a donc un étalonnage en temps, c'est-à-dire un étalonnage en fréquences, et on peut mesurer tous les écarts en fréquences Δf (correspondant sur la figure à un écart en temps Δt) sur la figure par proportionnalité, selon la formule :

$$\Delta f = \frac{\Delta t}{\Delta t(\text{ISL}(\text{analyseur}))} \text{ISL}(\text{analyseur})$$

6. Rigoureusement la courbe bleue ne va pas subir une translation mais une dilatation, mais en raisonnant sur un pic et en supposant le déplacement du miroir petit devant l'épaisseur originelle de l'analyseur on peut montrer que c'est une translation à l'ordre 1. De même, comme on change l'épaisseur, on change l'ISL ; mais ce changement est proportionnel au déplacement sur l'épaisseur originelle, donc négligeable à un bon paquet de chiffres significatifs, en tout cas plus que les deux qu'on a sur l'ISL (1.5 GHz pour la 17.20/2).

7. Contrairement au RLC, ce balayage en fréquence ne se fait pas en entrée du filtre, mais en sortie, et on obtient quand même les infos voulues. On pressent que ça a un prix : l'appareil de sortie doit être "plus fin" que l'appareil à analyser. Nous y reviendrons.

où $\Delta t(\text{ISL}(\text{analyseur}))$ est l'écart en temps entre deux familles de deux pics.

Vient le moment douloureux des incertitudes. Quelles en sont les sources ? On va commencer par lister quelques hypothèses qu'on a plus ou moins mises sous le tapis :

- Le deuxième FP a un ISL supérieur au double de celui du premier. Il s'agit en fait du critère de Shannon : dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, on a deux pics bleus dans la courbe rouge en même temps, il y a donc plusieurs familles de pics qui se mélangent sur l'oscillo, il y a donc une ambiguïté sur la mesure des différences de fréquences. Cette hypothèse est vérifiée a posteriori dans notre cas. Une fois qu'elle est vérifiée, elle n'induit pas d'incertitude.
- La finesse du deuxième $\gg$ celle du premier. (En toute rigueur on devrait comparer les δf , mais comme les ISL sont de même ordre de grandeur ça revient au même.) Autrement dit, les pics bleus sont beaucoup plus fins que les pics verts, donc le "scanner" résout très bien les pics verts. Cette hypothèse est nécessaire pour mesurer le δf du laser directement sur l'oscillo ; si elle n'est pas vérifiée, ça se complique. On l'a supposée vérifiée sans vraiment vérifier, peut-être qu'il y a des infos utiles là-dessus dans le manuel. On a supposé que les incertitudes induites étaient négligeables devant le reste.
- L'ISL de l'analyseur reste constant alors qu'on modifie son épaisseur. Sans surprise, cette hypothèse est vraie au à l'ordre 0 en déplacement relatif. Ce déplacement relatif étant de l'ordre de 10^{-7} d'après ma simulation, ça devrait pas poser de problème.

Donc les incertitudes semblent se réduire à la lecture sur l'oscillo : on s'en sort avec une propagation quadratique. De toute façon, on n'a que deux chiffres significatifs sur l'ISL de l'analyseur, qui conditionne tout ; mais c'est largement suffisant pour un calcul de facteur de qualité. À noter que le jury attend sûrement aussi une valeur de finesse et son interprétation (de la finesse et de la valeur).

2.2.2 La mesure en soi



Mesure du facteur de qualité et de la finesse de la cavité Fabry-Pérot d'un laser

✍ Duffait

⌚ 12 bonnes minutes

On veut mesurer l'intervalle spectral libre et la largeur à mi-hauteur du pic de transmittance de la cavité Fabry-Pérot en sortie d'un laser.

- On envoie le laser dans la tête d'analyse Fabry-Pérot P17.20 et on visualise sur un oscillo, grâce à l'ampli P17.20/2 la consigne du cristal, son déplacement, et surtout l'intensité reçue (les branchements sont dans la notice).
- On ajuste les réglages de l'oscillo pour zoomer sur une période.
- On mesure l'intervalle en temps entre deux familles de pics consécutives : cet intervalle en temps correspond à l'intervalle spectral libre de la tête d'analyse, donné par le constructeur.
- On a alors un étalonnage en fréquence. L'intervalle en temps entre les pics est proportionnel à leur écart en fréquence : on peut donc mesurer l'écart en fréquence entre deux pics de la même famille pour obtenir l'ISL du laser, et la largeur d'un pic pour obtenir δf .
- On en déduit la finesse $F = \frac{\text{ISL}(\text{laser})}{\delta f}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{f_0}{\delta f}$.

On obtient un facteur de qualité de l'ordre de 10^7 , un truc comme ça.

Conclusion

On a vu que la résonance est un phénomène transversal à pas mal de domaines de la physique (élec, acoustique, optique). On a manipulé des facteurs de qualité différents, qui peuvent servir à différentes fonctions.

Ouverture : La résonance existe aussi pour des régimes non linéaires !

3 Questions et Remarques

- Faire la fin de la manip pour obtenir le facteur de qualité du tube de Kundt.
- Le choix des manip couvre un champ large de la physique. Il est dommage de s'arrêter avant les derniers chiffres pour conclure sur les facteurs de qualité -par manque de temps-, alors que c'était le critère conducteur.
- Il n'est pas nécessaire de mener le calcul d'incertitude sur toutes les grandeurs. Par exemple : utile sur c pour comparer à la valeur tabulée, moins sur Q
- Attention à la définition de la bande passante : division de l'amplitude maximale par 2 ou $\sqrt{2}$?
- Quel est la méthode d'obtention de Q la plus précise ?
- Comment tracer rapidement un diagramme de Bode ? - Expliquer la méthode indiciale.
- Quelle est la différence entre fréquence propre et fréquence de résonance ?
- Sur le RLC : que se passerait-il en prenant la tension aux bornes de C ? Quelle fréquence de résonance ?
- Comment jouer sur le facteur de qualité ?
- On voit des oscillations sur la tension d'entrée affichée sur l'oscillo. Qu'est-ce ? Comment modéliser le générateur pour les expliquer ?
- Comment isoler l'entrée du circuit ? Quelle notion y a-t'il derrière ?
- Il est important de toujours comparer les valeurs mesurées à des valeurs tabulées si possible. Ici il fallait comparer à c .
- Quelle sont les conditions de résonance pour le tube de Kundt ?
- Quelle est la relation entre finesse et facteur de qualité ? Comment définit-on la finesse ?
- Quels critères influencent plus particulièrement le Q du tube de Kundt ?