Une présentation sommaire du livre "A=B" de M. Petkovšek, H. Wilf et D. Zeilberger

"A=B" pour les nuls

Nicolas Brisebarre
Laboratoire A2X
Université Bordeaux I
11 juin 1999

Origines

Soit $s \in \mathbb{C}$, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ définie pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$, on a

$$\zeta(2k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \underbrace{B_{2k}}_{\in \mathbb{Q}} \notin \mathbb{Q}$$

Théorème (Apéry, 1978).

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q}.$$

Construction de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ avec $|a_n/b_n - \zeta(3)| \to 0$ assez vite $\Rightarrow$ $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Soient

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \; a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$$

avec

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}.$$

On a $a_n \in \mathbb{Q}, b_n \in \mathbb{N}$.

Résultat clé : montrer que a_n et b_n satisfont

$$n^3 u_n - (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1} + (n-1)^3 u_{n-2} = 0.$$

Preuve : D. Zagier. Méthode du *creative telescoping*.

`[50] Develop computer programs for simplifying sums that involve binomial coefficients.`

Exercice 1.2.6.63 du livre "The Art of Computer Programming, Volume 1" de Donald E. Knuth.

Objectifs :

– Preuves automatiques (=par ordinateur) de certaines identités (A=B) vérifiables par l'utilisateur : montrer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

– Simplifications automatiques de certaines expressions : on se donne $f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et l'on obtient $f(n) = \binom{2n}{n}$.

Preuves automatiques d'identités hypergéométriques

Observation de D. Zeilberger (1982) : si l'on veut prouver une identité de la forme $f(n) = g(n)$, il suffit de

– Trouver une relation de récurrence satisfaite par $f(n)$.

– Montrer que $g(n)$ satisfait la même relation de récurrence.

– Vérifier que $f(n)$ et $g(n)$ coïncident en un nombre fini d'entiers consécutifs.

$\Longrightarrow$ Chercher des algorithmes pour établir des récurrences linéaires.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, on considère

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

où F est doublement hypergéométrique :

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \text{ et } \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{K}(n,k).$$

Exemple : $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

On dira qu'une fonction $f(n)$ est hypergéométrique si $f(n+1)/f(n) \in \mathbb{K}(n)$.

Exemples : $n!, 2^n$ mais pas $3^n + 1$.

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

Recherche d'algorithmes donnant une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux satisfaite par $f(n)$:

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0,$$

avec $a_j(n) \in \mathbb{Q}[n], j = 0, \ldots, J$.

Cas $J = 1$.

La méthode de Sœur Celine

Sœur Mary Celine Fasenmyer (1906-1996).

On se donne $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$ avec

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \text{ et } \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in \mathbb{Q}(n,k),$$

et $I, J \in \mathbb{N}$. On cherche une récurrence de la forme

$$\sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} \underbrace{a_{i,j}(n)}_{\in \mathbb{Q}[n]!!} F(n-j, k-i) = 0.$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{I} \sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n) F(n-j, k-i) = 0$$

i.e.

$$\sum_{j=0}^{J} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{I} a_{i,j}(n) \right)}_{\in \mathbb{Q}[n]} f(n-j) = 0.$$

Soit $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

```
>read(EKHAD):
>celine((n,k)->k*n!/(k!*(n-k)!),1,1);
The full recurrence is
b[3]*n*F(n-1,k)-(n-1)*b[3]*F(n,k)
+b[3]*F(n-1,k-1)*n == 0
```

On ignore $b[3]$.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Longrightarrow 2nf(n-1) - (n-1)f(n) = 0$$

d'où $f(n) = n2^{n-1}$.

Définition. *Une fonction $F(n,k)$ est dite hypergéométrique appropriée si*

$$F(n,k) = P(n,k)\frac{\prod_{i=1}^{uu}(a_in+b_ik+c_i)!}{\prod_{j=1}^{vv}(u_jn+v_jk+w_j)!}x^k$$

où x est une indéterminée, $P \in \mathbb{Q}[n,k]$, a_i, b_i, c_i, $u_j, v_j, w_j \in \mathbb{Z}$, uu et $vv \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Théorème Fondamental (Verbaeten, 1974). *Soit $F(n,k)$ un terme hypergéometrique approprié. La fonction F satisfait une relation de récurrence k-libre : il existe $I, J \in \mathbb{N}$ et des polynômes $a_{i,j}(n)$, $0 \le i \le I, 0 \le j \le J$ tels que*

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J} a_{i,j}(n)F(n-j,k-i) = 0.$$

De plus, on a des bornes explicites pour I et J.

L'algorithme de R. Gosper

Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k$, avec t_k hypergéométrique : $t_{k+1}/t_k \in \mathbb{K}(k)$.

Question : Existe-t'il z_k hypergéométrique tel que $z_{k+1} - z_k = t_k$? Si oui, $z_n = s_n + z_0$: forme "simple" pour s_n !

Gosper : – donne z_k s'il existe,
– assure sa non-existence sinon.

Exemples : Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} kk!$

```
In[1]:=<<gosper.m
In[2]:=GosperSum[k k!, k]
Out[2]=k!
```

qui signifie $z_k = k!$.

```
In[3]:=GosperSum[k k!, {k,0,n-1}]
Out[3]=-1 + n!
```

qui signifie $s_n = -1 + n!$.

Soit $s_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}$.

```
In[4]:=GosperSum[Binomial[n,k], {k,0,m}]
Out[4]=Sum[Binomial[n,k], {k,0,m}]
```

$\Longrightarrow$ il n'existe pas z_k hypergéométrique sur $\mathbb{Q}(n)$ $(z_{k+1}/z_k \in \mathbb{Q}(n)(k))$ tel que $z_{k+1} - z_k = \binom{n}{k}$.

Soit $s_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k}$.

```
In[4]:=GosperSum[(-1)^k Binomial[n,k],{k,0,m}]

         (-1)^m (-m+n) Binomial[n,m]
Out[4]=----------------------------
                     n
```

i.e. $s_m = (-1)^m \frac{n-m}{n} \binom{n}{m}$.

L'algorithme de D. Zeilberger (*Creative telescoping*)

Sœur Celine + R. Gosper.

Soit $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$. On cherche $(a_j(n))_{0\le j\le J} \in \mathbb{Q}(n), G(n,k) \in \mathbb{Q}(n,k)$, tels que

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k) \quad (1)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0}^{J} a_j(n) F(n+j,k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [G(n,k+1) - G(n,k)]$$

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(n,k+1) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(n,k)$$
$$= 0.$$

L'algorithme de Zeilberger fournit (1) et sa preuve : son certificat $R(n,k) = F(n,k)/G(n,k)$.

Soit $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ (associée à $\zeta(3)$).

```
>read(EKHAD):
>F:=(n,k)->binomial(n,k)^2 *binomial(n+k,k)^2:
>ct(F(n,k),2,k,n,N);
```

$(n+1)^3 - (17n^2+51n+39)(2n+3)N + (n+2)^3 N^2,$

$$\frac{-4(2n+3)(4n^2+12n+8+3k-2k^2)k^4}{(n+1-k)^2(n+2-k)^2} \qquad (2)$$

Ce qui signifie

$$(n+1)^3 F(n,k) - (17n^2+51n+39)(2n+3)F(n+1,k) + (n+2)^3 F(n+2,k) = G(n,k+1) - G(n,k), \qquad (3)$$

avec $G(n,k) = (2) \times F(n,k)$. $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (3) \Longrightarrow$

$$(n+1)^3 b_n - (17n^2+51n+39)(2n+3)b_{n+1} + (n+2)^3 b_{n+2} = 0$$

Montrer $f_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n} = f_2(n)$.

$$\begin{aligned} \text{ct} \;\Rightarrow\; & -(n+2)^2 f_1(n+2) + (7n^2+21n+16) f_1(n+1) \\ & + 8(n+1)^2 f_1(n) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ct} \;\Rightarrow\; & -(n+2)^2 f_2(n+2) + (7n^2+21n+16) f_2(n+1) \\ & + 8(n+1)^2 f_2(n) = 0. \end{aligned}$$

On a $f_1(0) = f_2(0) = 1$ et $f_1(1) = f_2(1) = 2$
$\Rightarrow f_1(n) = f_2(n)$.

Le phénomène WZ (H. Wilf-D. Zeilberger)

Donne des preuves succintes d'identités connues $+$ permet d'en découvrir de nouvelles.

Prouver $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k} 4^{n-k} = \binom{2n}{n}$ i.e.

$\displaystyle f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k) = 1$ avec

$$F(n,k) = \frac{(-1)^k \binom{n}{k}\binom{2k}{k} 4^{n-k}}{\binom{2n}{n}}.$$

Il suffit de montrer $f(0) = 1$ et $f(n+1) = f(n)$.

WZ : $F(n+1,k) - F(n,k) = G(n,k+1) - G(n,k)$ avec $G(n,k)$ explicite. $R(n,k) = G(n,k)/F(n,k)$: certificat WZ. Ici, $R(n,k) = \dfrac{2k-1}{2n+1}$.

L'algorithme Hyper (M. Petkovšek)

Soit

$$\sum_{j=0}^{J} a_j(n) f(n+j) = 0 \tag{4}$$

avec $a_j(n) \in \mathbb{Q}(n)$. Hyper donne toutes les solutions $f(n)$ hypergéométriques ($f(n+1)/f(n) \in \mathbb{Q}(n)$) de (4) et assure leur non-existence sinon.

Hyper : $\{\dfrac{f_1(n+1)}{f_1(n)}, \ldots, \dfrac{f_J(n+1)}{f_J(n)}\}$.

? solutions hypergéométriques $f_j(n)$ de

$9(n+2)f(n+2)-3(n+4)f(n+1)-2(n+3)f(n) = 0.$

```
In[1]:= << Hyper
In[2]:=Hyper[ 9(n+2) f[n+2]
       -3(n+4) f[n+1]
       - 2 (n+3) f[n] == 0,
       f[n], Solutions-> All]
         2 7+3n     1
Out[2]= {- ----, - -}
         3 4+3n     3
```

On a donc $\dfrac{f_1(n+1)}{f_1(n)} = \dfrac{2}{3}\dfrac{7+3n}{4+3n}$ i.e. $f_1(n) = \dfrac{3n+4}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $\dfrac{f_2(n+1)}{f_2(n)} = -\dfrac{1}{3}$ i.e. $f_2(n) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Solution générale $f(n) = \lambda f_1(n) + \mu f_2(n), \lambda, \mu \in \mathbb{Q}$.

Récapitulatif : réalisation du programme

"A=B", M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), on considère

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k)$$

où F est doublement hypergéométrique :

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} \text{ et } \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} \in K(n,k).$$

On voudrait savoir si f peut s'écrire ou non sous la forme d'une combinaison linéaire sur $\mathbb{K}$ de termes hypergéométriques $g(n)$: $g(n+1)/g(n) \in \mathbb{K}(n)$.

On considère donc

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(n,k).$$

1) Sous de bonnes hypothèses, il existe $J \in \mathbb{N}$, $P_0, \ldots, P_J \in \mathbb{K}[n]$ tels que

$$\sum_{0 \leq j \leq J} P_j(n) f(n+j) = 0. \tag{5}$$

L'algorithme de Zeilberger donne cette récurrence. Si elle est d'ordre 1 : terminé sinon

2) Connaissant (5), l'algorithme Hyper (M. Petkovšek) donne f sous la forme d'une combinaison linéaire sur $\mathbb{K}$ de termes hypergéométriques si une telle forme existe et nous assure de sa non-existence sinon.

Exemples :

1)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{3k+1}{k}\binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1}$$

```
>read(EKHAD):
>F:=(n,k)->binomial(3*k+1,k)
           *binomial(3n-3k,n-k)/(3*k+1):
>zeil(F(n,k),k,n,N);
```

$$-81(3n+2)(3n+4)(n+1)$$
$$+12(2n+3)(9n^2+27n+22)N$$
$$-4(2n+5)(2n+3)(n+2)N^2$$

Ce qui signifie

$$-81(3n+2)(3n+4)(n+1)f(n)$$
$$+12(2n+3)(9n^2+27n+22)f(n+1)$$
$$-4(2n+5)(2n+3)(n+2)f(n+2)=0.$$

```
In[1]:= << Hyper

In[2]:=Hyper[-81 (3n+2) (3n+4) (n+1) f[n]
        +12 (2n+3) (9n^2+27n+22) f[n+1]
        - 4 (2n+5) (2n+3) (n+2) f[n+2] == 0,
        f[n], Solutions-> All]

              27(1+n)   3(2+3n)(4+3n)
Out[2]= {-------, -------------}
              2(3+2n)   2(1+n)(3+2n)
```

Il existe λ et μ dans $\mathbb{Q}$ tels que

$$f(n) = \lambda 27^n / \left[(2n+1) \binom{2n}{n} \right] + \mu \binom{3n+1}{n}.$$

Or,

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{3k+1}{k} \binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1}.$$

On a donc trouvé (et prouvé !)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{3k+1}{k}\binom{3n-3k}{n-k}}{3k+1} = \binom{3n+1}{n}.$$

2)

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3$$

`zeil` nous donne

$$-8(n+1)^2 f(n)-(12+21n+7n^2)f(n+1)$$
$$+(n+2)^2 f(n+2)=0$$

```
In[1]:= << Hyper

In[2]:=Hyper[-8 (n+1)^2 f[n]
             - (12+21n+7n^2)f[n+1]
             + (n+2)^2 f[n+2] == 0,
             f[n], Solutions-> All]

Out[2]= {}
```

$f(n)$ n'est pas une combinaison linéaire sur $\mathbb{Q}$ de termes hypergéométriques.

Références

A=B, M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996.

Hypergeometric Summation, W. Koepf, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1998.

Decision procedure for indefinite hypergeometric summation, R. W. Gosper Jr, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **75**, 1978, 40-42.

Some generalized hypergeometric polynomials, M. C. Fasenmyer, Ph.D. Dissertation, University of Michigan, 1945.

Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, R. Apéry, Journées Arithmétiques de Luminy, Astérisque **61**, 1979, 11–13.

A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$, A. van der Poorten, Math. Intelligencer **1**, 1978, 195–203.