Une étude de deux problèmes diophantiens

Nicolas Brisebarre
Laboratoire A2X
Université Bordeaux I
25 septembre 1998

I) Sur les fonctions entières à double pas récurrent.

II) Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$.

Sur les fonctions entières
à double pas récurrent

Notation *Soit* $r \in \mathbb{R}^+$, $|f|_r = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$.

Théorème (Pólya, 1915)

Soit f *une fonction entière telle que*

– $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.

– $\limsup_{r \to +\infty} \dfrac{\log |f|_r}{r} < \log 2$.

Alors f *est un polynôme.*

Remarque $\log 2$ *optimale :* $z \mapsto 2^z$.

Travaux de Pólya, Hardy, Landau, Carlson et Pisot sur les fonctions entières telles que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ ou $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Théorème (Fukasawa, 1926 - Gel'fond, 1929)

Il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que si* f *est une fonction entière vérifiant :*

– $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$.

– $\displaystyle \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f|_r}{r^2} < \alpha$.

Alors f *est un polynôme.*

A. O. Gel'fond : Théorème vrai avec $\alpha = \pi(1 + e^{164/\pi})^{-2}/2 < 10^{-45}$.

L. Gruman (1979) : $\alpha = 0.0396$.

D. Masser (1980) : $\alpha \leq \pi/2e$.

F. Gramain (1981) : constante α optimale vaut $\pi/2e\,(\sim 0.57786...)$.

Lemme *Soient* α *et* β *deux nombres complexes linéairement indépendants sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction, bornée sur tout compact, vérifiant les deux équations fonctionnelles*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = \sum_{n=0}^{N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0$$

où les P_m *(resp.* Q_n*) sont des éléments non tous nuls de* $\mathbb{C}[z]$*. Alors la croissance de* f *est limitée par*

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log |f|_r}{r \log r} \leq C(\alpha, \beta, (P_m)_{0 \leq m \leq M}, (Q_n)_{0 \leq n \leq N}).$$

Définitions

– *Soit* f *une fonction entière, soit* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *on dit que* α *est un pas récurrent de* f *s'il existe* $P_0, P_1, \dots, P_M \in \mathbb{C}[z]$ *tels que*

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0.$$

– *Un polynôme exponentiel est une fonction entière de la forme* $\sum_{k=1}^{K} H_k(z) e^{\delta_k z}$ *avec* $H_k \in \mathbb{C}[z]$ *et* $\delta_k \in \mathbb{C}$ *pour tout* k. *On appelle fréquences du polynôme exponentiel les nombres* δ_k.

Remarque

Un polynôme exponentiel admet tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *comme pas récurrent (avec* $P_m \in \mathbb{C}$ *!).*

Question (D. Masser) : Soit f une fonction entière solution du système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le M} P_m(z)f(z+m\alpha) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le N} Q_n(z)f(z+n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\le m\le M}$ et $(Q_n)_{0\le n\le N}$ sont des suites finies de $\mathbb{C}[z]$, α et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. La fonction f est-elle nécessairement un polynôme exponentiel ?

Réponse : Non ! $z \mapsto \dfrac{e^z-1}{z}$ n'est pas un polynôme exponentiel et vérifie pour tout $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$(z+2\alpha)f(z+2\alpha)-(1+e^\alpha)(z+\alpha)f(z+\alpha)+e^\alpha zf(z) = 0.$$

On suppose $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Théorème (Gramain, 1991)
Si $P_m, Q_n \in \mathbb{C}, \forall m, n$, alors f est un polynôme exponentiel.

Théorème (Bézivin-Gramain, 1993)
Si $P_m, Q_n \in \mathbb{C}[z]$ avec $(P_0, Q_0) = 1$, alors f est un polynôme exponentiel.

Théorème (Bézivin-Gramain, 1996)
Si $P_m, Q_n \in \mathbb{C}[z]$ alors f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme

$$f(z) = \frac{P.E.}{H(z)} = \sum_{0 \le k \le K} a_k(z) e^{\delta_k z}$$

avec $H \in \mathbb{C}[z], a_k \in \mathbb{C}(z)$ et $\delta_k \in \mathbb{C}$.

Construction d'un polynôme H tel que Hf satisfait un système avec $(P_0^1, Q_0^1) = 1$.

Théorème (Bézivin-Gramain, 1996)
Soit f *une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\leq m\leq M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq N} Q_n(z)f(z+n\beta)=0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0\leq m\leq M}$ *et* $(Q_n)_{0\leq n\leq N}$ *sont des suites finies de* $\mathbb{C}[z]$ *et* α *et* $\beta\in\mathbb{C}$ *tels que* $\alpha/\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. *Alors,*

$$f=\frac{\textit{polynôme exponentiel}}{\textit{polynôme}}.$$

I) Le cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

II) Une autre approche du problème.

III) Un algorithme donnant la forme explicite des solutions dans le cas où $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

I) Le cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Théorème 1

Soient α, β *avec* $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *et* f *une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \le m \le M} a_m f(z + m\alpha) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \le n \le N} b_n f(z + n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $(a_m)_{0 \le m \le M}$ *et* $(b_n)_{0 \le n \le N}$ *sont deux suites finies d'éléments de* $\mathbb{C}$. *Alors* f *est un polynôme exponentiel.*

Preuve : Cas $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (Gramain, 1991) : (α, β) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^2$.

Cas $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha/\beta$ est dense dans $\mathbb{R}$.

La première équation du système nous donne

$$\left\{f(\cdot + m\alpha), m \in \mathbb{Z}\right\}_{\mathbb{C}} = \left\{f(\cdot + m\alpha), 0 \le m \le M-1\right\}_{\mathbb{C}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} V &= \left\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), m, n \in \mathbb{Z}\right\}_{\mathbb{C}} \\ &= \left\{f(\cdot + m\alpha + n\beta), \begin{array}{c} 0 \le m \le M-1, \\ 0 \le n \le N-1 \end{array}\right\}_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

$\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha/\beta$ dense $\Rightarrow$ il existe $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ qui tend vers 0.

Soit

$$g_m = \frac{f(\cdot + h_m) - f}{h_m} \in V.$$

g_m C.U. sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers f'.

$f' \in V \Rightarrow f^{(n)} \in V, \forall n \in \mathbb{N}$.

$dim_{\mathbb{C}} V$ finie $\Rightarrow$ $f, f', \ldots, f^{(dim_{\mathbb{C}} V)}$ sont $\mathbb{C}$-liées : il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{dim_{\mathbb{C}} V} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda_{dim_{\mathbb{C}} V} f^{(dim_{\mathbb{C}} V)} + \cdots + \lambda_1 f' + \lambda_0 f = 0.$$

La fonction entière f est bien un polynôme exponentiel.

Remarques

– *Le cas des coefficients constants est une conséquence d'un résultat de Gel'fond (Calcul des différences finies).*

– *J.-J. Loeb (Angers) : preuve du cas* $\alpha/\beta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *s'adapte aisément au cas des fonctions* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et par densité à celui des fonctions* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Corollaire 1

Soit f *une fonction entière solution du système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ *et* $(Q_n)_{0 \leq n \leq N}$ *sont des suites finies de* $\mathbb{C}[z]$ *et* α *et* $\beta \in \mathbb{C}$ *tels que* $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$*. Alors,*

$$f = \frac{\textit{polynôme exponentiel}}{\textit{polynôme}}.$$

II) Autre approche du problème

$\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.

$$f(z + M\alpha) = \sum_{0 \leq m \leq M-1} A_m(z) f(z + m\alpha)$$

avec $A_m = -P_m/P_M, 0 \leq m \leq M-1$ et

$$f(z + N\beta) = \sum_{0 \leq n \leq N-1} B_n(z) f(z + n\beta)$$

où $B_n = -Q_n/Q_N, 0 \leq n \leq N-1$.

$$\begin{aligned} & f(z + M\alpha + N\beta) \\ = & \sum_{0 \leq m \leq M-1} A_m(z + N\beta) f(z + m\alpha + N\beta) \\ = & \sum_{0 \leq n \leq N-1} B_n(z + M\alpha) f(z + M\alpha + n\beta). \end{aligned}$$

On obtient

$$\sum_{\substack{0\le m\le M-1\\0\le n\le N-1}} C_{m,n}(z)f(z+m\alpha+n\beta)=0.$$

avec

$$C_{m,n}(z)=A_m(z+N\beta)B_n(z+m\alpha)\\ \qquad -A_m(z+n\beta)B_n(z+M\alpha).$$

Critère

Si, pour tout couple d'entiers naturels (m,n) *tel que* $0\le m\le M-1, 0\le n\le N-1$, *les fractions rationnelles* $C_{m,n}(z)$ *ci-dessus sont nulles, alors,* f *est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.*

Soit (m,n) tel que $A_m B_n \neq 0$, $C_{m,n}(z) = 0$ implique

$$\frac{A_m(z+N\beta)}{A_m(z+n\beta)} = \frac{B_n(z+M\alpha)}{B_n(z+m\alpha)}.$$

Lemme 1 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha/\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, $A, B \in \mathbb{C}(z) \setminus \{0\}$ *telles que*

$$\frac{A(z+\beta)}{A(z)} = \frac{B(z+\alpha)}{B(z)}.$$

Alors il existe $a, b \in \mathbb{C}$, $R \in \mathbb{C}(z)$ *tels que*

$$A(z) = a\frac{R(z+\alpha)}{R(z)}, \; B(z) = b\frac{R(z+\beta)}{R(z)}.$$

De plus, a *et* b *sont uniques et* R *est unique à multiplication par un nombre complexe près.*

Il existe une fraction R de $\mathbb{C}(z) \setminus \{0\}$ et deux suites finies $(a_m)_{0 \leq m \leq M-1}$ et $(b_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ de $\mathbb{C}$ telles que

$$A_m(z) = a_m \frac{R(z+M\alpha)}{R(z+m\alpha)} \text{ et } B_n(z) = b_n \frac{R(z+N\beta)}{R(z+n\beta)}.$$

La fonction $g = f/R$ vérifie

$$\begin{cases} g(z+M\alpha) & = \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq M-1} a_m g(z+m\alpha), \\ g(z+N\beta) & = \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N-1} b_n g(z+n\beta). \end{cases}$$

Facilement, g est entière. Donc, $g = f/R$ est un polynôme exponentiel.

Remarque *En fait, ce critère s'applique pour toute* $f = g/P$ *où* g *est un polynôme exponentiel et* P *un polynôme. Soit* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, il existe* $a_0, a_1, \ldots, a_M$ *et* $b_0, b_1, \ldots, b_N$ *dans* $\mathbb{C}$ *tels que*

$$\sum_{m=0}^{M} a_m g(z + m\alpha) = 0, \quad \sum_{n=0}^{N} b_n g(z + n\beta) = 0.$$

On pose $P_m(z) = a_m P(z + m\alpha)$ *pour* $0 \leq m \leq M$ *et* $Q_n(z) = b_n P(z + n\beta)$*, pour* $0 \leq n \leq N$.

On a donc

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z + m\alpha) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z + n\beta) = 0, \end{cases}$$

Facilement, les fractions $C_{m,n}$ *sont nulles.*

Théorème 2 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tels que* $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, *soit* f *une fonction entière vérifiant*

$$\begin{cases} P_1(z)f(z+\alpha) + P_0(z)f(z) & = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z)f(z+n\beta) & = 0, \end{cases}$$

où $P_0, P_1, Q_0, \ldots, Q_N$ *sont dans* $\mathbb{C}[z]$ *avec* $P_0P_1Q_0Q_N \neq 0$. *Alors* f *est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme.*

Théorème 3 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tels que* $\alpha/\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, *et* f *une fonction entière vérifiant*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq M} a_m f(z+m\alpha) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N} b_n(z)f(z+n\beta) = 0, \end{cases}$$

où $a_0, \ldots, a_M \in \mathbb{C}$ *et* $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{C}[z]$ *avec* $a_Mb_N \neq 0$. *Alors* f *est un polynôme exponentiel.*

III) Détermination algorithmique des solutions

III.1) L'algorithme ($\alpha = 1$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \leq m \leq M} P_m(z) f(z+m) = 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leq n \leq N} Q_n(z) f(z+n\beta) = 0, \end{cases}$$

avec $(P_m)_{0 \leq m \leq M}$ et $(Q_n)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{C}[z]$ et $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On cherche une solution sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=1}^{K} x_k(z) e^{\delta_k z}$$

avec $x_k \in \mathbb{C}(z)$ et $\delta_k \in \mathbb{C}$.

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) \left[\sum_{k=1}^{K} x_k(z+m) e^{\delta_k m} e^{\delta_k z} \right] = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{K} \left[\sum_{m=0}^{M} P_m(z) x_k(z+m) e^{\delta_k m} \right] e^{\delta_k z} = 0.$$

La famille $\left(z \mapsto e^{\delta z}\right)_{\delta \in \mathbb{C}}$ est libre sur $\mathbb{C}(z)$: pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$\sum_{m=0}^{M} P_m(z) x_k(z+m) e^{\delta_k m} = 0. \tag{1}$$

De même, pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) x_k(z+n\beta) e^{\delta_k n\beta} = 0. \tag{2}$$

Étape 1 : Détermination des fréquences δ_k

On pose

$$d_1 = \max_{0 \leq m \leq M} \deg(P_m),\ a_m = \text{coeff}(P_m(z), z^{d_1})$$

et $d_2 = \max_{0 \leq n \leq N} \deg(Q_n),\ b_n = \text{coeff}(Q_n(z), z^{d_2})$.

On tire de (1)

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{P_m(z)}{z^{d_1}} \frac{x_k(z+m)}{x_k(z)} e^{\delta_k m} = 0.$$

$|z| \to +\infty \implies \sum_{m=0}^{M} a_m e^{\delta_k m} = 0$. De même, (2) implique

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{Q_n(z)}{z^{d_2}} \frac{x_k(z+n\beta)}{x_k(z)} e^{\delta_k n\beta} = 0.$$

$|z| \to +\infty \implies \sum_{n=0}^{N} b_n e^{\delta_k n\beta} = 0.$

Étape 2 : Détermination des fractions rationnelles $x_k(z)$

– Algorithme de S. Abramov donne $D \in \mathbb{C}[z]$ tel que le dénominateur de x_k divise D.

– $H = Dx_k \in \mathbb{C}[z]$ est solution de l'équation

$$\sum_{m=0}^{M} P_m^1(z) H(z+m) = 0 \qquad (1)$$

en posant $P_m^1 = e^{\delta_k m} P_m(z)/D(z) \in \mathbb{C}(z)$.

L'algorithme Poly (M. Petkovšek) donne les solutions H dans $\mathbb{C}[z]$ de (1).

On vérifie alors qu'on a bien

$$\sum_{n=0}^{N} Q_n(z) e^{\delta_k n\beta} \frac{H(z+n\beta)}{D(z+n\beta)} = 0.$$

Étape 3 : On a $x_1(z)e^{\delta_1 z}, \ldots, x_K(z)e^{\delta_K z}$ solutions. On cherche $\lambda_1, \ldots, \lambda_K \in \mathbb{C}$ tels que $f_{\lambda_1,\ldots,\lambda_K} = \lambda_1 x_1(z)e^{\delta_1 z} + \ldots + \lambda_K x_K(z)e^{\delta_K z}$ soit entière.

L'étape 2 donne $D \in \mathbb{C}[z]$ (dont on connaît les racines par construction) qui est un dénominateur commun aux x_k.

Résolution d'un système linéaire.

III.2) Cas où la deuxième équation est une équation différentielle

Théorème (Bézivin-Gramain, 1996)
Soit f *une fonction entière solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{0\le m\le M} P_m(z)f(z+m\alpha)=0, \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le N} Q_n(z)f^{(n)}(z)=0, \end{array}\right.$$

où $(P_m)_{0\le m\le M}$ *et* $(Q_n)_{0\le n\le N}$ *sont des suites finies de* $\mathbb{C}[z]$ *avec* $P_0P_MQ_0Q_N\neq 0$ *et* $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Alors,*

$$f=\frac{\textit{polynôme exponentiel}}{\textit{polynôme}}.$$

On injecte f sous la forme $\sum_{k=1}^{K} x_k(z)e^{\delta_k z}$ (avec $x_k \in \mathbb{C}(z)$ et $\delta_k \in \mathbb{C}$) dans l'équation différentielle.

Étape 1' : Détermination des fréquences δ_k

Résoudre

$$\sum_{m=0}^{M} a_m X^m = 0$$

$\Rightarrow$ J racines distinctes $x_1, \ldots, x_J$.

$$\sum_{n=0}^{N} b_n Y^n = 0.$$

$\Rightarrow$ L racines distinctes $y_1, \ldots, y_L$.

On intersecte un ensemble fini de classes modulo $2i\pi/\alpha\mathbb{Z}$ avec un ensemble fini de nombres complexes $\Rightarrow$ nombre fini de fréquences δ_k.

I) Sur les fonctions entières à double pas récurrent.

II) Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$.

Mesures d'irrationalité de $\log 2$ et $\pi/\sqrt{3}$

Définition *Soit* x *un nombre réel, on dit que le nombre réel* μ *est une mesure (effective) d'irrationalité de* x *si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, q_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \text{ (effectivement calculable) } :$$

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2\,, \quad q > q_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{\mu+\varepsilon}}\,,$$

ou, ce qui est équivalent, si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, C(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \text{ (effectivement calculable) } :$$

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2\,, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C(\varepsilon)}{q^{\mu+\varepsilon}}\,.$$

Remarques

– $\mu \geq 2$ car $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ *admet une infinité de solutions.*

– *Khintchine : presque tout réel admet* $\mu = 2$ *(non effective). Parmi ceux-là, on trouve les nombres algébriques (Th. de Roth, 1955). On a* $\mu = 2$ *effective pour les quadratiques (Liouville).*

– *Certains réels ne peuvent pas avoir une mesure d'irrationalité égale à* 2. *Ainsi les nombres de Liouville : ce sont des nombres réels* x *tels que pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, *l'inéquation* $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$ *admet une infinité de solutions.*

Exemples : $\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{-n!}$ *avec* $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$.

Remarque

– *On a des résultats partiels (effectifs !) sur certaines constantes transcendantes particulières.*

$\log 2$	π	$\pi/\sqrt{3}$
3.8913997 *Rukhadze (1987)*	8.016045 *Hata(1993)*	4.601579 *Hata(1993)*

$\zeta(2)$	$\zeta(3)$
5.441243 *Rhin-Viola (1996)*	7.3779564 *Hata (1998)*

Techniques de calculs de mesures d'irrationalité :

Soit (x, ρ) un couple fixé de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{Z} + i\rho\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = q_n x - p_n$.

Lemme 2 (G.V. Chudnovsky) *Supposons que*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |q_n|}{n} \leq \sigma, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log |\varepsilon_n|}{n} = -\tau$$

avec σ *et* $\tau \in \mathbb{R}^+$. *Alors,* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$, *il existe* $q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *effectivement calculable tel que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq |q|^{-\mu - \varepsilon} \text{ pour } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Lemme 3 (M. Hata) *Supposons*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |q_n|}{n} \leq \sigma, \quad \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log |\varepsilon_n|}{n} \leq -\tau$$

avec σ *et* $\tau \in \mathbb{R}^+$. *Si, de plus, la suite* (p_n/q_n) *vérifie une certaine condition technique,*

alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$, *il existe un entier* $q_0(\varepsilon) \geq 0$ *effectivement calculable tel que*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq |q|^{-\mu - \varepsilon} \textit{ pour } |q| > q_0(\varepsilon)$$

avec $\mu = 1 + \sigma/\tau$.

Remarque *Les mesures d'irrationalité sont toutes effectivement calculables.*

Les bonnes approximations $\varepsilon_n = q_n x - p_n$ proviennent de relations plus générales de la forme

$$E_n(z) = Q_n(z) f(z) - P_n(z)$$

avec $E_n(z) \in \mathbb{C}[[z]], P_n(z)$ et $Q_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ et $f(z)$ une fonction, $f(z_0) = x$.

Ici, $f(z) = \log(1 - 1/z)$. On a $f(-1) = \log 2$ et $f(e^{i\pi/3}) = i\pi/3$.

L'approche classique est celle des approximants de Padé : Alladi-Robinson (1980),

$$Q_n(z) = L_n(z) = \frac{1}{n!}(z^n(1-z)^n)^{(n)},$$

$$\mu(\log 2) = 4.623, \ \mu(\pi/\sqrt{3}) = 8.310.$$

Polynômes de Legendre généralisés

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geq -\min(m, m', m+m')$. On pose

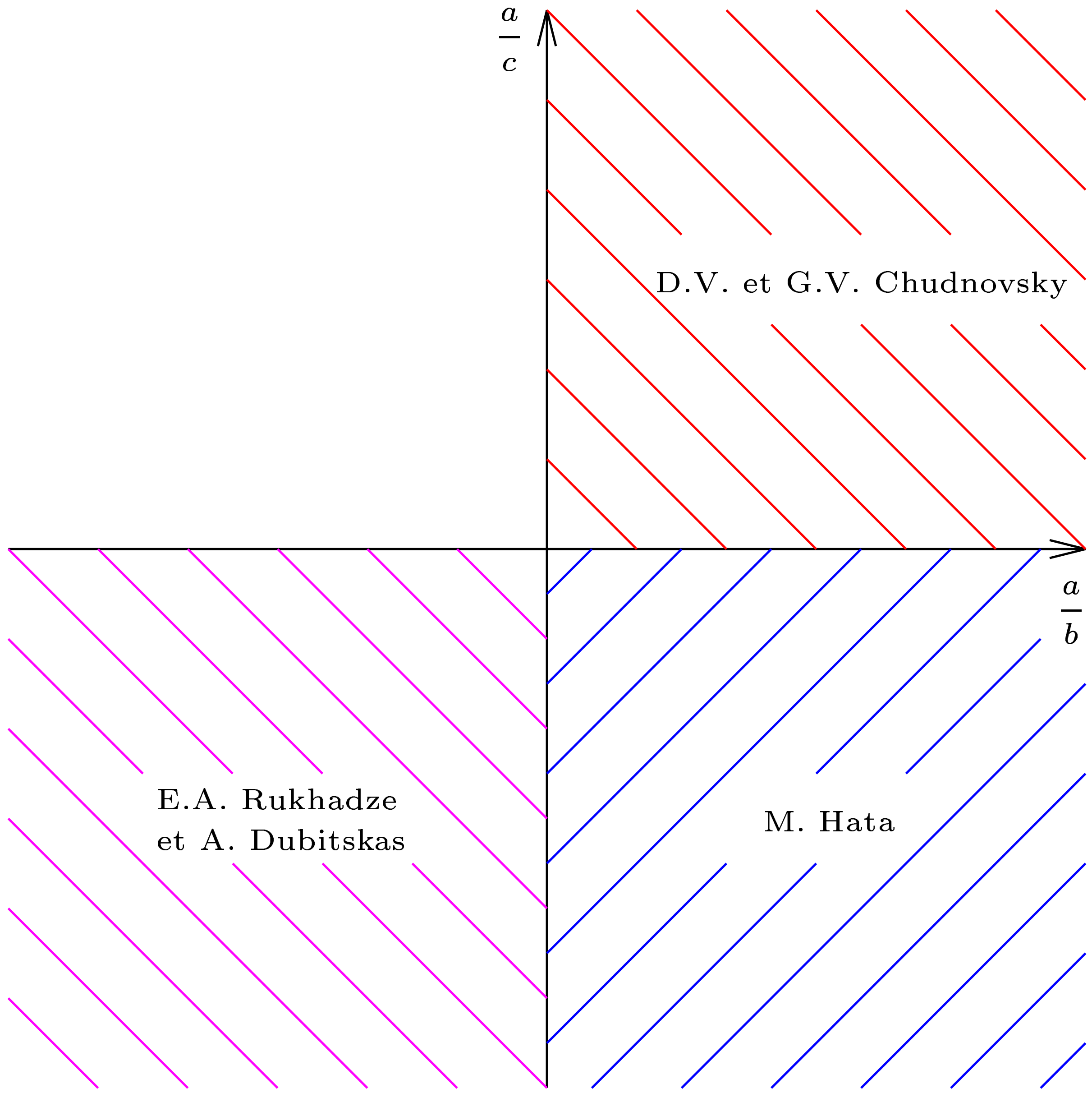
$$\begin{aligned} & P_{n,m,m'}(z) \\ &= \frac{1}{(n+m+m')!} \left(z^{n+m'}(1-z)^{n+m}\right)^{(n+m+m')} \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{m+j} \binom{n+m}{m+j} \binom{n+m+m'+j}{n+m+m'} z^j \end{aligned}$$

On suppose n, m et m' dans $\mathbb{N}$. Rukhadze et Dubitskas considèrent la classe $P_{n,-m,-m'}$. Hata utilise la classe $P_{n,m,-m'}$ et les Chudnovsky se servent de $P_{n,m,m}$.

Dans la suite, on considère $P_{an,bn,cn}(z)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a > -\min(0, b, c, b+c)$.

$$(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \longleftrightarrow (a/b, a/c) \in \mathbb{Q}^2.$$

$$P_{an,bn,cn}(z) : (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \longleftrightarrow (a/b, a/c) \in \mathbb{Q}^2$$



L'intérêt de ces polynômes est qu'ils ont un gros contenu.

Lemme 4 *Soient* a, b, c *trois entiers relatifs tels que* $a > -\min(0, b, c, b+c)$. *Il existe un diviseur commun* $d_{\frac{a}{b},\frac{a}{c},n}$ *des coefficients de* $P_{an,bn,cn}$ *tel que*

$$e\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right) := \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log d_{\frac{a}{b},\frac{a}{c},n} = \int_{E\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right)}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

où $E\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right)$ *est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts définie par*

$$\left\{x>0,\ 0<\{x\}+\left\{\frac{c}{a}x\right\}-1<1-\left\{\frac{b}{a}x\right\}<\{x\}\right\}.$$

Un algorithme de calcul de $e\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right)$

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $a > -\min(0, b, c, b+c)$.
On rappelle que

$$E\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right) =$$
$$\left\{x > 0,\ 0 < \{x\}+\left\{\frac{c}{a}x\right\}-1 < 1-\left\{\frac{b}{a}x\right\} < \{x\}\right\}.$$

On a la formule explicite

$$e\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right) = \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{N(a,b,c)-1}\left(\psi\left(y_2(m)\right)-\psi\left(y_1(m)\right)\right).$$

où ψ désigne la fonction digamma $\Gamma^{'}/\Gamma$ et $(y_1(m))_{0\leq m\leq N(a,b,c)-1}, (y_2(m))_{0\leq m\leq N(a,b,c)-1}$ sont deux suites finies d'éléments de $\mathbb{Q}$ construites à partir de a, b et c.

Relations entre les contenus des polynômes utilisés par Dubitskas, Hata, Rukhadze et Chudnovsky

Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b, c, b+c)$.

Posons $I(a, b, c) = a\, e\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}\right)$.
Soient ω_1 et $\omega_2 : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^3$,

$$\begin{aligned} \omega_1(a, b, c) &= (a+b, -b, c), \\ \text{et} \quad \omega_2(a, b, c) &= (a+c, b, -c). \end{aligned}$$

On a $< \omega_1, \omega_2 >= D_4$.

Lemme 5 *Nous avons, pour* $i = 1, 2$,

$$I(a, b, c) - I(\omega_i(a, b, c)) = \log\left(\frac{(a+b)^{a+b}(a+c)^{a+c}}{a^a (a+b+c)^{a+b+c}}\right).$$

En composant ω_1 et ω_2, nous obtenons

$$a\,e\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right) = (a{+}b{+}c)\,e\left(-\frac{a+b+c}{b},-\frac{a+b+c}{c}\right).$$

Cette dernière relation signifie que le gain arithmétique obtenu à l'aide des polynômes proposés par D. V. et G. V. Chudnovsky peut être obtenu à l'aide de ceux considérés par Rukhadze et Dubitskas.

Calculs de mesures d'irrationalité de $\log 2$

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$F_n(X) = \frac{1}{d_{\frac{a}{b},\frac{a}{c}}(an)} P_{an,bn,cn}(X) \in \mathbb{Z}_{an}[X]$$

où a, b et c sont trois entiers relatifs tels que $a > -\min(0, b, c, b+c)$.

On note d_{an} le p.p.c.m. de $(1, \ldots, an)$. Nous avons

$$J_n + F_n(-1)\log 2 = \int_0^1 \frac{F_n(x)}{1+x}\mathrm{d}x$$

avec

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n(-1)}{1+x}\mathrm{d}x \in \frac{\mathbb{Z}}{d_{an}}.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} F_n(-1) \,,$$

$$p_n = 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} \int_0^1 Q_n(x) F_n(x) \mathrm{d}x \\ - 2^{\gamma n} d_{(a+\beta+\gamma)n} J_n$$

$$\varepsilon_n = (-1)^{\beta n} d_{(a+\beta+\gamma)n} \int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n} F_n(x)}{1+x} \mathrm{d}x \,,$$

avec $\beta = \max(0, b), \gamma = \max(0, c)$

et $Q_n(X) \in \frac{1}{2^{\gamma n}} \mathbb{Z}_{(\beta+\gamma)n-1}[X]$.

On obtient $\varepsilon_n = q_n \log 2 - p_n$ avec $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$.

Étude du comportement asymptotique de q_n

La formule de Cauchy donne

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\frac{\log|q_n|}{n} &\leq a+\beta+\gamma(1+\log 2)-ae\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right)\\ &\quad+\min_{\rho>0}\log(u_{a,b,c}(\rho))\\ &=\sigma(a,b,c)\,.\end{aligned}$$

avec

$$u_{a,b,c}(\rho)=\rho^{-(a+b+c)n}(1+\rho)^{(a+c)n}(2+\rho)^{(a+b)n}.$$

Étude du comportement asymptotique d'ε_n

En intégrant $(a+b+c)n$ fois par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &= a+\beta+\gamma(1+\log 2) - ae\left(\frac{a}{b},\frac{a}{c}\right)\\ &\qquad + \max_{0\le x\le 1}\log\left(\frac{x^{a+c}(1-x)^{a+b}}{(1+x)^{a+b+c}}\right)\\ &= -\tau(a,b,c)\,.\end{aligned}$$

Liens entre les mesures d'irrationalité de $\log 2$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Rappel :

$$\begin{aligned} \omega_1(a,b,c) &= (a+b,-b,c), \\ \text{et } \ \omega_2(a,b,c) &= (a+c,b,-c). \end{aligned}$$

On a $<\omega_1,\omega_2>= D_4$.

Lemme 6 *Soient $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b$ et $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $a > -\min(b,c,b+c)$, nous avons*

$$\mu_{\omega_i(a,b,c)}(\log 2) = \mu_{(a,b,c)}(\log 2) \ \ \textit{pour} \ \ i = 1,2.$$

Toute mesure d'irrationalité de $\log 2$ trouvée à l'aide des polynômes de D. V. et G. V. Chudnovsky peut être retrouvée à l'aide de ceux de Rukhadze et de ceux considérés par Hata.

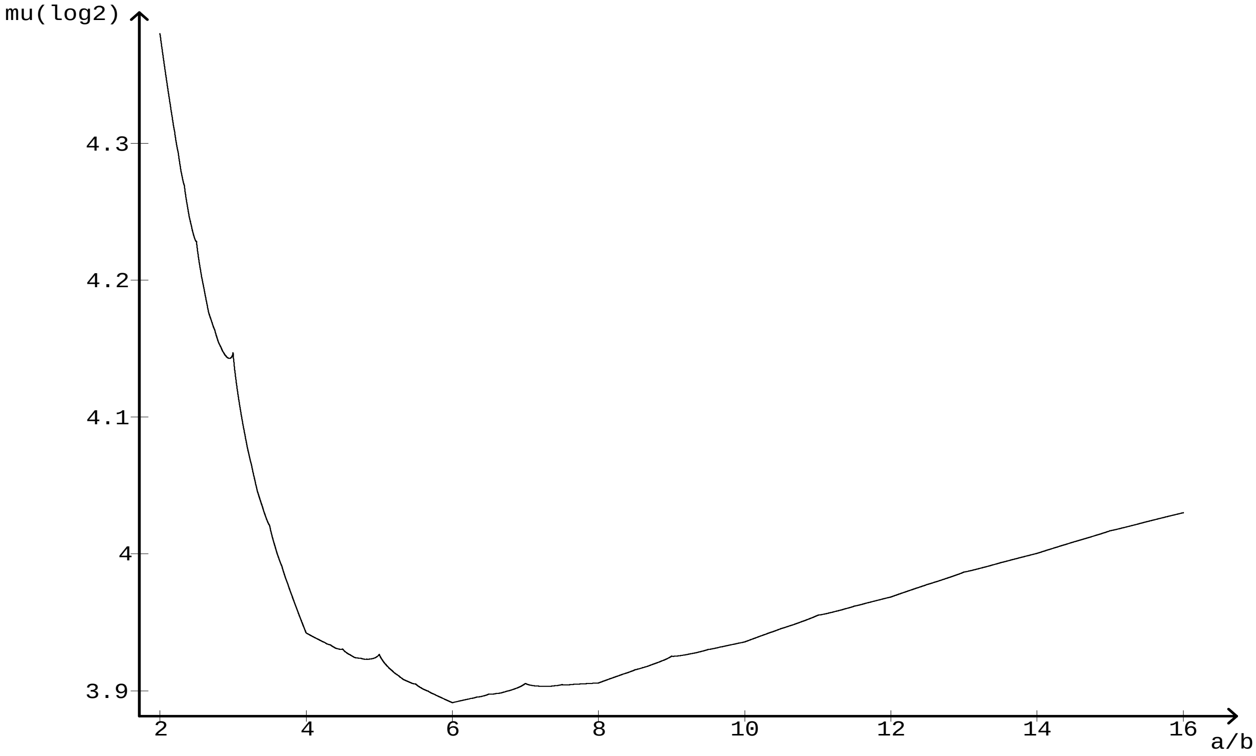


Fig. 1. Mesures d'irrationalité de $\log 2$ obtenues aux points $(\nu, \nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2, 16]$.

Résultats

Rukhadze (1987) :

$$\mu_{8,-1,-1} = 1 + \frac{\log(2\alpha) + \beta}{\log(\alpha) - \beta}$$
$$= 3,8913997...$$

avec $\alpha = 2^{-11}(153333125 + 7734633\sqrt{393})$ et $\beta = 8 - \pi(1/2 - \sqrt{2} - 2/\sqrt{3})$.

Hata (1990) : $\mu_{7,1,-1} = \mu_{8,-1,-1}$. Deux autres choix de paramètres donnent le même résultat : il faut considérer les triplets $(6,1,1)$ et $(7,-1,1)$.

? : les Chudnovsky (1993) annoncent une mesure d'irrationalité égale à 3.87 en considérant les polynômes $P_{an,bn,cn}$ avec a, b, c positifs.

Calculs de mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$

On a

$$J_n + F_n(e^{\frac{i\pi}{3}})\frac{i\pi}{3} = \int_0^1 \frac{F_n(x)}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}}\mathrm{d}x$$

avec

$$J_n = \int_0^1 \frac{F_n(x) - F_n(e^{\frac{i\pi}{3}})}{x - e^{\frac{i\pi}{3}}}\mathrm{d}x \in \frac{1}{d_{an}}(\mathbb{Z} + j\mathbb{Z})$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = i\,\sqrt{3}\,d_{(a+\beta+\gamma)n}F_n(e^{\frac{i\pi}{3}})\,,$$

$$p_n = 3\,d_{(a+\beta+\gamma)n}\left(\int_0^1 Q_n(x)F_n(x)\mathrm{d}x - J_n\right)$$

$$\varepsilon_n = 3d_{(a+\beta+\gamma)n}\frac{(e^{-\frac{i\pi}{3}})^{\beta n}}{(1-e^{\frac{i\pi}{3}})^{\gamma n}}\int_0^1 \frac{x^{\beta n}(1-x)^{\gamma n}F_n(x)}{x-e^{\frac{i\pi}{3}}},$$

avec $\beta = \max(0,b), \gamma = \max(0,c)$
et $Q_n(X) \in (\mathbb{Z}+j\mathbb{Z})_{(\beta+\gamma)n-1}[X]$.

On obtient $\varepsilon_n = q_n\pi/\sqrt{3} - p_n$ avec p_n, q_n dans $\mathbb{Z}+j\mathbb{Z}$.

Étude du comportement asymptotique de q_n et ε_n

Si l'on pose $g(\theta) = (\sin\theta)^{a+c}|\sin(\theta - \frac{\pi}{6})|^{a+b}$, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|q_n|}{n} &\leq a + \beta + \gamma + (2a+b+c)\log 2 \\ &\quad - ae\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\pi} \log(g(\theta)) \\ &= \sigma(a,b,c).\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log|\varepsilon_n| &\leq a + \beta + \gamma + (2a+b+c)\log 2 \\ &\quad - ae\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}\right) + \max_{0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}} \log(g(\theta)) \\ &= -\tau(a,b,c)\,.\end{aligned}$$

Liens entre les mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ données par les polynômes de Rukhadze, Dubitskas, Hata et Chudnovsky

Rappel :

$$\begin{aligned} \omega_1(a,b,c) &= \ (a+b,-b,c), \\ \text{et} \ \ \omega_2(a,b,c) &= \ (a+c,b,-c). \end{aligned}$$

On a $< \omega_1, \omega_2 >= D_4$.

Lemme 7 *Soient* $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b$ *et* $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *tels que* $a > -\min(b,c,b+c)$, *nous avons*

$$\mu_{(a,b,c)}(\pi/\sqrt{3}) = \mu_{\omega_1\omega_2(a,b,c)}(\pi/\sqrt{3}) \ \ \textit{pour} \ \ i = 1,2.$$

Toute mesure d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ trouvée à l'aide des polynômes de D. V. et G. V. Chudnovsky peut être retrouvée à l'aide de ceux utilisés par Dubitskas.

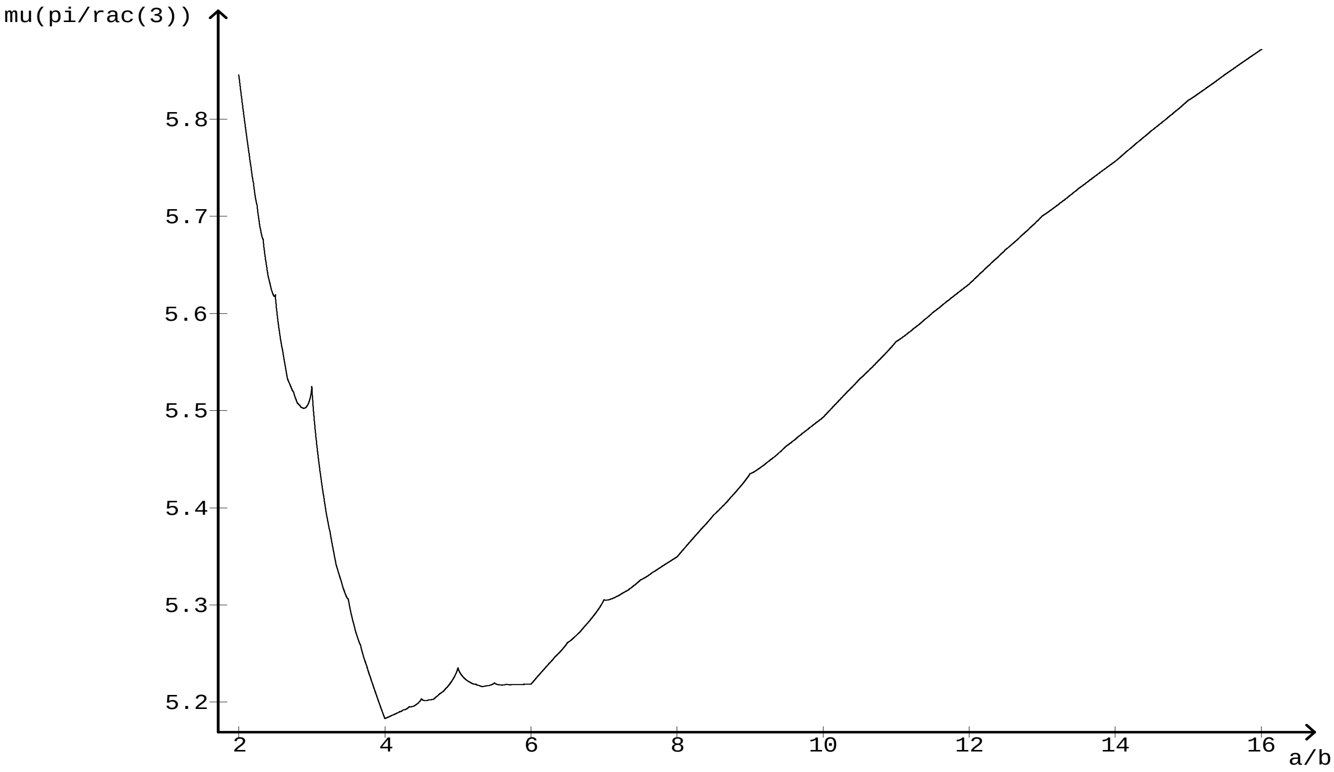


Fig. 2. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu,\nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [2,16]$.

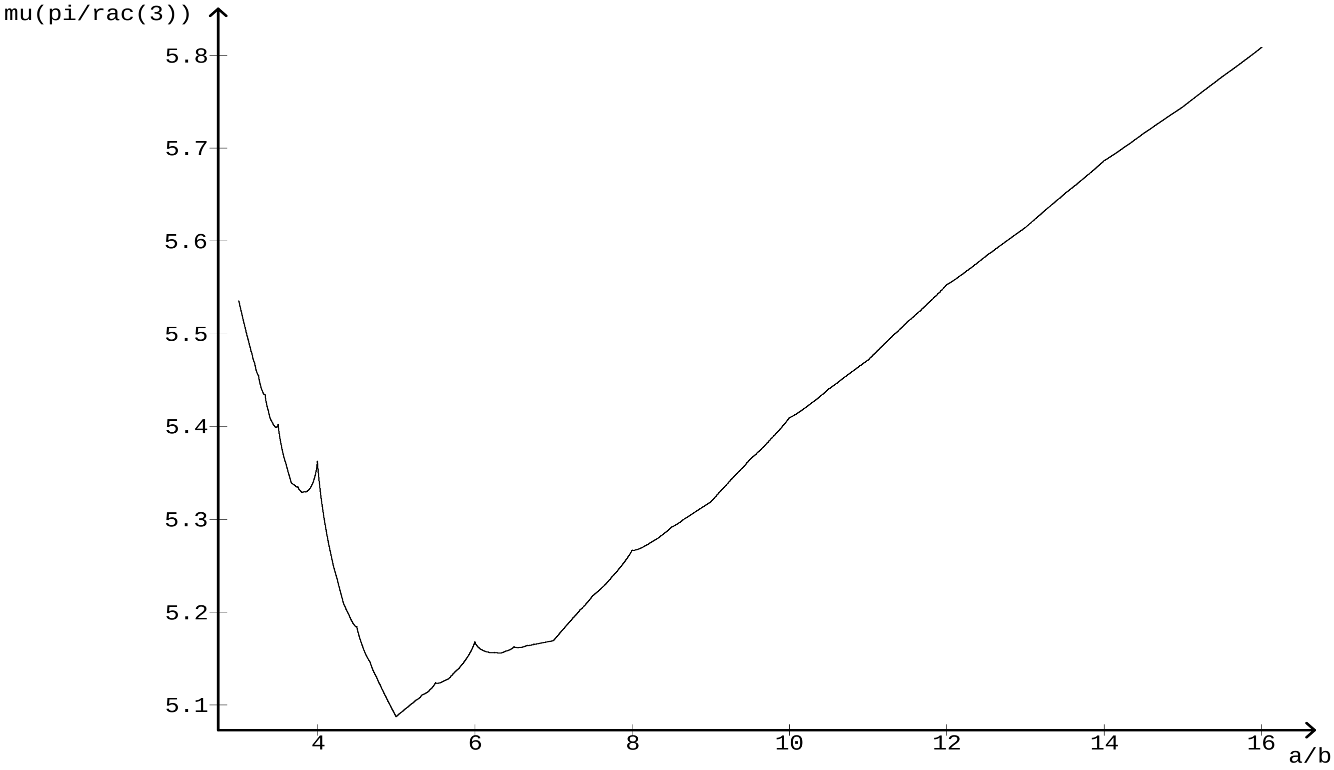


Fig. 3. Mesures d'irrationalité de $\pi/\sqrt{3}$ obtenues aux points $(\nu, -\nu), \nu \in \mathbb{Q} \cap [3, 16]$.

Résultats

Dubitskas (1987) : 5.516 (puis 5.20 en 1993) en considérant $(6,-1,-1)$. On a en fait

$$\mu_{6,-1,-1}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = 1+\frac{\log\alpha_1+\beta_1}{\log\alpha_1-\beta_1} = 5.18300789\ldots$$

avec $\alpha_1 = 362+209\sqrt{3}$

et $\beta_1 = 6-\pi(2\sqrt{3}/3-1/2)-\log(2^{-7}3^{-3}5^5)$.

Hata (1990) :

$$\mu_{5,1,-1}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = 1+\frac{\log\alpha_2+\beta_2}{\log\alpha_2-\beta_2} = 5.0874625\ldots$$

avec $\alpha_2 = 2^{-2}(1327+231\sqrt{33})$

et $\beta_2 = 6-\pi(2\sqrt{3}/3-1/2)$.

On a $\mu_{5,-1,1}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{5,1,-1}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$
et $\mu_{4,1,1}\left(\pi/\sqrt{3}\right) = \mu_{6,-1,-1}\left(\pi/\sqrt{3}\right)$.

? : les Chudnovsky (1993) annoncent une mesure d'irrationalité égale à 4.96 en considérant les polynômes $P_{an,bn,cn}$avec a, b, c positifs.

M. Hata (1993) : 4.6016