

I Questions de cours (15 pts)

Q.I.1 (2 pts) – Expliquez le principe de la *notation positionnelle en base β pour les entiers naturels*.

Soit $\beta \in \mathbf{N}$, $\beta > 1$, une base. Tout $n \in \mathbf{N}$ peut être représenté de manière unique par une expression de la forme

$$n = x_{p-1}\beta^{p-1} + x_{p-2}\beta^{p-2} + \dots + x_1\beta + x_0,$$

avec $x_i \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}$ et $p \in \mathbf{N}$. Les x_i sont les chiffres dans la notation positionnelle en base β de l'entier naturel n , et on note $n = (x_{p-1}x_{p-2} \dots x_1x_0)_\beta$.

Q.I.2 (1 pt) – Convertissez l'entier $(101101)_2$ vers son écriture en base 10, en utilisant la méthode de Horner. Détaillez vos calculs afin de montrer que vous suivez bien cette méthode.

$$1 \times 2 + 0 = 2$$

$$2 \times 2 + 1 = 5$$

$$5 \times 2 + 1 = 11$$

$$11 \times 2 + 0 = 22$$

$$22 \times 2 + 1 = 45.$$

$$\text{Donc } (101101)_2 = (45)_{10}.$$

Q.I.3 (1 pt) – On a vu en cours une définition possible pour le codage des *entiers relatifs en complément à 2 sur p bits* : donnez en une, en partant d'un code $c = (c_{p-1}, c_{p-2}, \dots, c_0)$ sur p bits.

On considère un code $c = (c_{p-1}, c_{p-2}, \dots, c_0)$ sur p bits. Si on regarde c comme le code d'un entier naturel en complément à 2 sur p bits,

$$(c_{p-1}c_{p-2} \dots c_1c_0)_{\bar{2}} = -c_{p-1}2^{p-1} + \sum_{i=0}^{p-2} c_i2^i.$$

Q.I.4 (2 pts) – Déterminez l'écriture du rationnel $(0,2)_{10}$ en base 2. Utilisez pour cela l'algorithme de conversion vu en cours, procédant par des multiplications successives par 2 : détaillez vos calculs.

Q.I.5 (1 pt) – De quelle forme est un *nombre flottant normalisé x à p chiffres de mantisse et d'exposant e* ?

Un *nombre flottant normalisé x à p chiffres de mantisse* est soit 0, soit un rationnel de la forme

$$x = (-1)^s \times (1, x_1 \dots x_{p-1})_2 \times 2^e,$$

avec

- $s \in \{0, 1\}$ le signe du flottant considéré ;
- $(1, x_1 \dots x_{p-1})_2$ est sa mantisse fractionnaire ;
- $e \in \mathbf{Z}$ est son exposant, qui est borné, i.e., $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$.

Q.I.6 (2 pt) On considère la fonction booléenne f définie par la table de vérité suivante :

x_0	x_1	x_2	$f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donnez l'OBDD représentant la fonction f en utilisant l'ordre (x_0, x_1, x_2) des variables. Réduisez ensuite cet OBDD. En déduire une formule sous forme normale disjonctive pour f .

Voir dans le cours.

Q.I.7 (2 pts) – On considère un *additionneur 1 bit complet* :

- entrées : deux bits à sommer a et b , et un bit de retenue entrante r_e ;
- sorties : un bit de somme s et un bit de retenue sortante r_s .

Donnez la table de vérité des sorties s et r_s en fonction des entrées a , b et r_e . Proposez ensuite des expressions logiques pour s et r_s en fonction des entrées a , b et r_e .

a	b	r_e	s	r_s
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

On constate que $s = \bar{a}(b \oplus r_e) + a(\overline{b \oplus r_e})$.

Comme de plus $x \oplus y = \bar{x}y + x\bar{y}$, on obtient $s = a \oplus (b \oplus r_e) = a \oplus b \oplus r_e$.

D'autre part, $r_s = \bar{a}br_e + a\bar{b}r_e + ab\bar{r}_e + abr_e = (\bar{a}b + a\bar{b})r_e + ab(\bar{r}_e + r_e) = (a \oplus b)r_e + ab$.

Q.I.8 (2 pts) Montrez comment construire une bascule flip-flop régie par le front montant de l'horloge, en utilisant deux verrous. Illustrez le fonctionnement de votre bascule par un chronogramme (précisez bien le nom des signaux que vous représentez).

Voir dans le cours.

Q.I.9 (2 pts) On veut construire un compteur 2 bits modulo 4, qui s'incrémente si son entrée $e = 1$, et qui conserve sa valeur si $e = 0$. Notons (q_1, q_0) le registre d'état, et $F : (q_1, q_0, e) \mapsto (F_1(q_1, q_0, e), F_0(q_1, q_0, e))$ la fonction de transition de l'automate.

- Donnez une représentation graphique de l'automate séquentiel (un cercle étiqueté par état, ...)
- Complétez la table de vérité suivante pour la fonction F :

q_1	q_0	e	$F_1(q_1, q_0, e)$	$F_0(q_1, q_0, e)$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

- Donnez des formules logiques « simples » pour $F_1(q_1, q_0, e)$ et $F_0(q_1, q_0, e)$.
- On veut implanter notre automate sous la forme d'un automate de Moore : donnez le schéma général de cette implantation. Annotez bien votre schéma, mais ne représentez l'implantation détaillée de F .

Voir dans le cours.

II Questions à réponses brèves (5 pts)

Il vous est demandé de répondre aux questions suivantes en une à deux lignes au plus.

Q.II.1 (0.5 pts) – Lorsqu'on effectue une opération arithmétique entre entiers naturels, et que l'on représente le résultat sur p bits, quel est le résultat obtenu ?

Le reste dans la division euclidienne du résultat exact par 2^p .

Q.II.2 (0.5 pts) – Quelle norme définit les différents formats flottants couramment disponibles ?

La norme IEEE-754.

Q.II.3 (0.5 pts) – Parmi les p bits de la mantisse d'un flottant normalisé, combien sont effectivement représentés dans le codage de ce flottant une machine ?

$p - 1$.

- Q.II.4** (0.5 pts) – Quel est le résultat de toute opération flottante dont l'un des opérandes est un NaN ?
Encore un NaN
- Q.II.5** (0.5 pts) – Quelles sont les applications possibles du codage BCD ?
En finances, là où il est nécessaire de pouvoir représenter exactement des rationnels en base 10.
- Q.II.6** (0.5 pts) – Combien de fonctions booléennes à n variables d'entrées et à une variable de sortie existe-t'il ?
La table de vérité d'une fonction booléenne à n variables d'entrées et une variable de sortie comporte 2^n lignes. Pour chacune de ces lignes, il y a deux valeurs possibles pour la sortie (0 ou 1) : il y a donc 2^{2^n} fonctions à n variables d'entrées et une variable de sortie.
- Q.II.7** (0.5 pts) – Comment se caractérise une formule booléenne sous forme normale conjontive ?
Il s'agit de la conjonction entre plusieurs disjonctions de littéraux.
- Q.II.8** (0.5 pts) – Citez toutes les fonctions booléennes à une variable d'entrée et une de sortie.
La constante 0, la constante 1, l'identité, la négation.
- Q.II.9** (0.5 pts) – Donnez le schéma d'un circuit n'utilisant que des portes NOT et présentant deux états stables distincts. Représentez ces deux états stables.
Voir le cours.
- Q.II.10** (0.5 pts) – Entre une mémoire SRAM et une mémoire DRAM, laquelle a le temps d'accès le plus long ?
La DRAM.