entiers → anneaux, corps fini $\mathbb{Z}/p$ → polynômes à coeffs dans A ($\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$, …, $\mathbb{Z}[i]$)

Espaces vectoriels sur un corps quelconque

[STA] Structures Algébriques

29 octobre 2025

EPITA

↓ quotients : corps fini de taille p^n

coeffs $\mathbb{Z}_p$, d° n

→ poly de d° $n-1$

← n coeffs de $\mathbb{Z}_p$

Bézout → inverser le polynôme

↪ corps de taille p^n

$p=2$ $n=32$

Table des matières

Définition et axiomes

$3x = 2 \rightarrow x = 2/3 \rightarrow$ il nous faut un corps

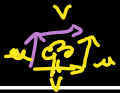
Définition

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel pour faire court) est un triplet $(V, +, \cdot)$ où

- V est un ensemble
- $+$ est une opération interne $V \times V \rightarrow V$ appelée ***addition***
- $\cdot$ est une opération externe $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ appelée ***multiplication par un scalaire***

tel que

1. $\forall u, v, w \in V, u + (v + w) = (u + v) + w$
2. $\exists 0 \in V, \forall v \in V, v + 0 = 0 + v = v$
3. $\forall v \in V, \exists -v \in V$ tel que $v + (-v) = -v + v = 0,$
4. $\forall v, w \in V, w + v = v + w.$



Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel pour faire court) est un triplet $(V, +, \cdot)$ où

- V est un ensemble
- $+$ est une opération interne $V \times V \to V$ appelée ***addition***
- $\cdot$ est une opération externe $\mathbb{K} \times V \to V$ appelée ***multiplication par un scalaire***

tel que

5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V, \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
6. $\forall v \in V, 1 \cdot v = v.$

Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition

Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel pour faire court) est un triplet $(V, +, \cdot)$ où

- V est un ensemble
- $+$ est une opération interne $V \times V \to V$ appelée ***addition***
- $\cdot$ est une opération externe $\mathbb{K} \times V \to V$ appelée ***multiplication par un scalaire***

tel que

7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
8. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V, \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$

Exemples

Exemple

1. Les génériques :
   - Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels [a] : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, ...
   - Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^E$ (E un ensemble quelconque) ...

$P+Q$

λP

suites à valeurs réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$i \in \mathbb{Z}_p \quad (i^k)_{k\in\mathbb{N}}$

$E \to \mathbb{K}$

f, g

E.V.

de $\mathbb{K}$

$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$

$(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$

de E.V. de $\mathbb{K}$

a. Que vous connaissez déjà !

Premiers exemples !

Exemple

1. Les génériques :
   - Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels [a] : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, ...
   - Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^E$ (E un ensemble quelconque) ...
2. Des choses que vous avez déjà croisées
   - Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
   - Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

$\theta \mapsto e^{i\theta}$

i, 1

$z+z'$

$\lambda . z$

$1, \sqrt{2}$

$u.1 + v.\sqrt{2}$

a. Que vous connaissez déjà !

Premiers exemples !

Exemple

1. Les génériques :
   - Les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels[a] : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$, ...
   - Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^E$ (E un ensemble quelconque) ...
2. Des choses que vous avez déjà croisées
   - Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$
   - Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
3. Des choses qui fatiguent :
   - Tout anneau qui contient un corps $\mathbb{K}$ comme sous-anneau est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur ce corps.

$\mathbb{K}$ "$\subseteq$" $A = \mathbb{K}[X]$

III

polynômes constants

a. Que vous connaissez déjà !

Espaces vectoriels sur des corps finis

Field = corps en anglais

Exemple

Sur $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$:

$$\underbrace{\mathbb{F}_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}\}}$$

Addition et multiplication :

$$\underbrace{\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}}_{\text{XOR}}, \quad \underbrace{\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}}_{\text{AND}}.$$

Ainsi :

$$(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}).$$

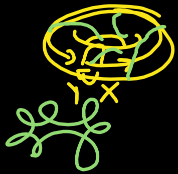
Espaces vectoriels sur des corps finis

Exemple

Sur $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$:

$$\mathbb{F}_2^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}\}.$$

$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$



Addition et multiplication :

$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{0}, \quad \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}.$$

Ainsi :

$$(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}).$$

Remarque

Tous les raisonnements de l'algèbre linéaire restent valides : l'important est que $\mathbb{F}_2$ soit un corps.

Bases

Familles libres, génératrices, bases

Définition

- Une famille est **libre** si aucune combinaison linéaire non triviale ne donne 0. Formellement, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre si :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0$$

- Elle est **génératrice** si toute combinaison linéaire d'elle engendre E. Formellement, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est génératrice si :

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$$

- Une **base** est une famille à la fois libre et génératrice.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition

La **dimension** de E est le nombre d'éléments d'une base.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition

La **dimension** de E est le nombre d'éléments d'une base.

Theorem

Pour un espace vectoriel, le nombre d'éléments d'une base est toujours le même. On l'appelle la dimension.

Dimension d'un espace vectoriel

base de $\mathbb{R}_n[X]$: $1, X, X^2, X^3, \dots, X^n$

Définition

La **dimension** de E est le nombre d'éléments d'une base.

Theorem

Pour un espace vectoriel, le nombre d'éléments d'une base est toujours le même. On l'appelle la dimension.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille canonique

$\rightarrow x \quad \nearrow y \quad \uparrow z$

$$B = ((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$$

est une base et la famille

$$B' = ((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$$

$\lambda(1,0,0) + \mu(1,1,0) + \nu(1,1,1) = (0,0,0)$

$= (\lambda+\mu+\nu,\ \mu+\nu,\ \nu)$

$\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$

$x \quad y \quad z$

est une autre base. Les deux ont 3 éléments. La dimension est donc 3.

$\boxed{\text{Applications linéaires}}$

Applications linéaires

Définition

Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Définition

Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si :

$$\forall u, v \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Exemple

$$f : \mathbb{F}_3^2 \to \mathbb{F}_3^2, \quad f(x,y) = (x+y, \bar{2}y, y+\bar{2}z)$$

est linéaire.

$f(x+x', y+y')$

$(x+y)^2 = x^2 + \underbrace{2xy}_{=0} + y^2$

dans $\mathbb{Z}_2$ x^2 est linéaire $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $x^2 = x$

$= x^2 + y^2$

$= x + y$

Représentation matricielle

e_i une base

$f(e_1), \dots, f(e_n)$ $\quad \forall x \ \exists x_1 \dots x_n$ tq $x = \sum x_i e_i$

$f(x) = f(\sum x_i e_i)$

$\underset{\text{lin } +}{=} \sum f(x_i e_i)$

$\underset{\text{lin. }}{=} \sum x_i f(e_i)$

Définition (Matrice d'une application linéaire — convention vecteurs-lignes)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, et soient

$$B = (e_1, \dots, e_n) \text{ une base de } E, \qquad B' = (f_1, \dots, f_m) \text{ une base de } F.$$

L'application linéaire $f : E \to F$ est représentée, dans les bases B et B', par une matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\boxed{[f]_B^{B'} = \begin{bmatrix} [f(e_1)]_{B'} \\ \vdots \\ [f(e_n)]_{B'} \end{bmatrix}.}$$

= vecteur ligne des coordonnées de $f(e_i)$ dans la base d'arrivée B'

Autrement dit, les **lignes** de A contiennent les coordonnées des images des vecteurs de la base B dans la base B', et la multiplication se fait à droite :

$$f(v) = vA.$$

$$(v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix} = \left(\sum v_i f(e_i)\right) = (f(v))$$

Représentation matricielle

Exemple

Si $f : \mathbb{F}_3^2 \to \mathbb{F}_3^3$, $f(x,y) = (x+y, \bar{2}y, y+\bar{2}x)$ et on prend les bases $B = \{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1})\}$ et $B' = \{(\bar{1},\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0},\bar{1})\}$, alors :

$e_1 = (\bar{1},\bar{0})$, $e_2 = (\bar{0},\bar{1})$

$$[f]_B^{B'} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} f(e_1) \\ f(e_2) \end{array} \end{array}$$

$f(e_1) = f((\bar{1},\bar{0}))$
$= (\bar{1},\bar{0},\bar{1})$

$f(e_2) = (\bar{1},\bar{2},\bar{2})$

On remarque :

$$f(\bar{1},\bar{0}) = (\bar{1},\bar{0})A = (\bar{1},\bar{0},\bar{1}) \qquad \text{et} \qquad f(\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{1})A = (\bar{1},\bar{2},\bar{2})$$

$f(x,y,z) = (2x+y+4z\,,\ x+3z)$ $\qquad \mathbb{F}_5^3 \to \mathbb{F}_5^2$

$$\begin{array}{l} f(1,0,0) = \\ f(0,1,0) = \\ f(0,0,1) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$B = (101,\ 020,\ 102)$ $\qquad B' = (10, 01)$

Wooclap ! $(\times\ 3)$

$$\begin{array}{l} f(101) = \\ f(020) = \\ f(102) = \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$102 = 001 + 101$

$f(102) = f(001) + f(101) = (4\ 3) + (1, 4)$

$\partial : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$

$P \to \dfrac{\partial P}{\partial x}$

$B = B' = (1, x, x^2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \partial 1 = 0 \\ \partial x = 1 \\ \partial (x^2) = 2x \end{array}$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

Un sous-ensemble $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** si :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u + v \in F,\ \lambda u \in F.$$

Sous-espaces vectoriels

Définition

Un sous-ensemble $F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** si :

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u + v \in F,\ \lambda u \in F.$$

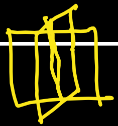
Exemple

$\langle (x,y,z) \mid (1,1,1) \rangle = 0$

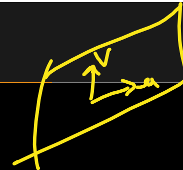
Dans $\mathbb{F}_2^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{F}_2^3 \mid \underline{x + y + z = \overline{0}}\}$$

est un sous-espace (un plan).



Sous-espaces : formes paramétriques et implicites



Deux manières de décrire un sous-espace

- **Forme paramétrique** : le sous-espace est décrit par des vecteurs générateurs

$$U = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_r).$$

dim r

Chaque élément $x \in U$ s'écrit $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r$ pour certains $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{K}$.

- **Forme implicite** : le sous-espace est défini comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires

$$U = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \cancel{A}x = 0\}.$$

dim = n-p

xA

$x(C_1 \dots C_p) = (0)$

$x \perp C_1, \dots, \perp C_p$ $= (\langle x|C_1\rangle, \dots, \langle x|C_p\rangle) = (x C_1, x C_2, \dots, x C_p)$

$\in \mathbb{K}$ $\in \mathbb{K}$

Example

On considère le sous-espace U de $\mathbb{R}^3$ qui correspond à la droite qui passe par le $(0,0,0)$ et le $(2,1,0)$. On cherche un générateur de U. On peut prendre le vecteur $(2,1,0)$. Donc,

$$U = \mathrm{Vect}((2,1,0)) \,.$$

Maintenant, on cherche des équations satisfaites par tous les points de U : on sait que $z = 0$ et que $x = 2y$. Donc

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e_z \perp U$

$(1,-2,0) \perp U$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

si $v \in U$ alors $v = (2u, u, 0)$

$\langle v \mid e_z \rangle = 2u \cdot 0 + u \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$\langle v \mid (1,-2,0) \rangle = 2u \cdot 1 - 2(1 \cdot u) + 0 \cdot 0 = 0$

EPITA

Enquête Wooclap !

Pivot de Gauss

U engendré par $u_1, \dots, u_r$

$\forall x \in U \quad x = \sum_i x_i u_i$

on cherche les vecteurs v tq $v \perp u_1 \dots u_r$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i v_i u_{1i} = 0 \\ \vdots \\ \sum v_i u_{ri} = 0 \end{array} \right.$$

On peut toujours passer d'équations paramétriques à implicites grâce à l'algorithme du pivot de Gauss. **Ici, chaque ligne représente un vecteur-ligne (et non une colonne) du système $xA = 0$.**

Algorithme du pivot de Gauss

Exemple

On veut réduire par pivot de Gauss la matrice augmentée (système homogène $Ax = 0$) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$A \qquad 0$

Étape 1 : Choix du pivot. On commence avec le premier coefficient non nul (2).

$$R_1 \leftarrow \frac{1}{2} R_1 \quad \text{(on divise, donc on suppose que l'on est dans un } \textbf{corps}\text{).}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Exemple

On veut réduire par pivot de Gauss la matrice augmentée (système homogène $Ax = 0$) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Étape 2 : Élimination sous le pivot.

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

La matrice est maintenant **échelonnée**.

Exemple

On veut réduire par pivot de Gauss la matrice augmentée (système homogène $Ax = 0$) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Étape 3 : Lecture des dépendances linéaires.

On résout $xA = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= -\tfrac{3}{2}x_3, \\ x_1 &= -2x_2 + x_3 = 3x_3 + x_3 = 4x_3. \end{aligned}$$

$$x = t(-2, -\tfrac{3}{2}, 1), \ t \in \mathbb{R}, \qquad \to \mathrm{Vect}\big((-2, -\tfrac{3}{2}, 1)\big).$$

$x_1 = 5x_3$
$x_2 = -2x_3$
$x_3 = x_3$

$x = x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

droite de vecteur directeur $(5, -2, 1)$

Enquête Wooclap !

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 & L_1 \\ \vdots & L_i \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0 & L_p \end{cases}$$

$a_{11} \neq 0$

$\forall i \geq 2 \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{L_1}{a_{11}} \cdot a_{i1}$

nlle L_i aura 0 pour coeff de x_1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3}x_3 + \frac{11}{7}x_4 \\ -7x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & \frac{11}{3} \\ -7 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (1)$

$0 \quad x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \quad (2)$

$(2)\ x_2 = -7x_3 + 5x_4$

$(1)\ x_1 = \frac{1}{3}(-2x_2 - x_3 - x_4)$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$0 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = 0$ $\quad a'_{22} \neq 0$

$\vdots$

$0 + a'_{p2}x_2 + \dots + a'_{pn}x_n = 0$

$a_{11}x_1$

$0 + a_{22}x_2$

0

$a_{pp}x_p$

$-7x_3 + 5x_4$

$x_1 = \frac{1}{3}(11x_3 - 11x_4)$

$x_{p-1} = f_{p-1}(x_{p+1}, \dots, x_n)$

$x_p = f_p(x_{p+1}, \dots, x_n)$

Cas particulier : noyau et image d'une application linéaire

Définition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On définit :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = xA = 0\}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\} = \{vA \mid v \in E\}.$$

Cas particulier : noyau et image d'une application linéaire

Définition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On définit :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = xA = 0\}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\} = \{vA \mid v \in E\}.$$

Propriétés fondamentales

- $\ker(f)$ est un sous-espace de E : c'est l'ensemble des vecteurs lignes dont les coordonnées satisfont les équations $xA = 0$.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A. Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$.

Cas particulier : noyau et image d'une application linéaire

Définition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On définit :

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = xA = 0\}, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\} = \{vA \mid v \in E\}.$$

Propriétés fondamentales

- $\ker(f)$ est un sous-espace de E : c'est l'ensemble des vecteurs lignes dont les coordonnées satisfont les équations $xA = 0$.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace de F : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A. Si $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$.

Theorem (du rang)

$$\boxed{\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(E)}.$$

EPITA

Conclusions

Conclusions

Ce qu'il faut retenir

- Les **sous-espaces vectoriels** permettent de décrire les structures internes d'un espace vectoriel : ils peuvent être donnés sous forme **paramétrique** (par des générateurs) ou **implicite** (par des équations linéaires).
- Les **représentations matricielles** traduisent les applications linéaires et leurs effets sur les coordonnées.
- Les notions de **noyau** (ker) et **image** (Im) sont centrales : elles relient équations et générateurs.

Conclusions

Ce qu'il faut retenir

- Les **sous-espaces vectoriels** permettent de décrire les structures internes d'un espace vectoriel : ils peuvent être donnés sous forme **paramétrique** (par des générateurs) ou **implicite** (par des équations linéaires).
- Les **représentations matricielles** traduisent les applications linéaires et leurs effets sur les coordonnées.
- Les notions de **noyau** (ker) et **image** (Im) sont centrales : elles relient équations et générateurs.

Perspective pour la suite

Ces outils (sous-espaces, matrices, noyaux et images) seront essentiels pour comprendre la structure des **codes linéaires correcteurs d'erreurs**.

That’s All Folks !