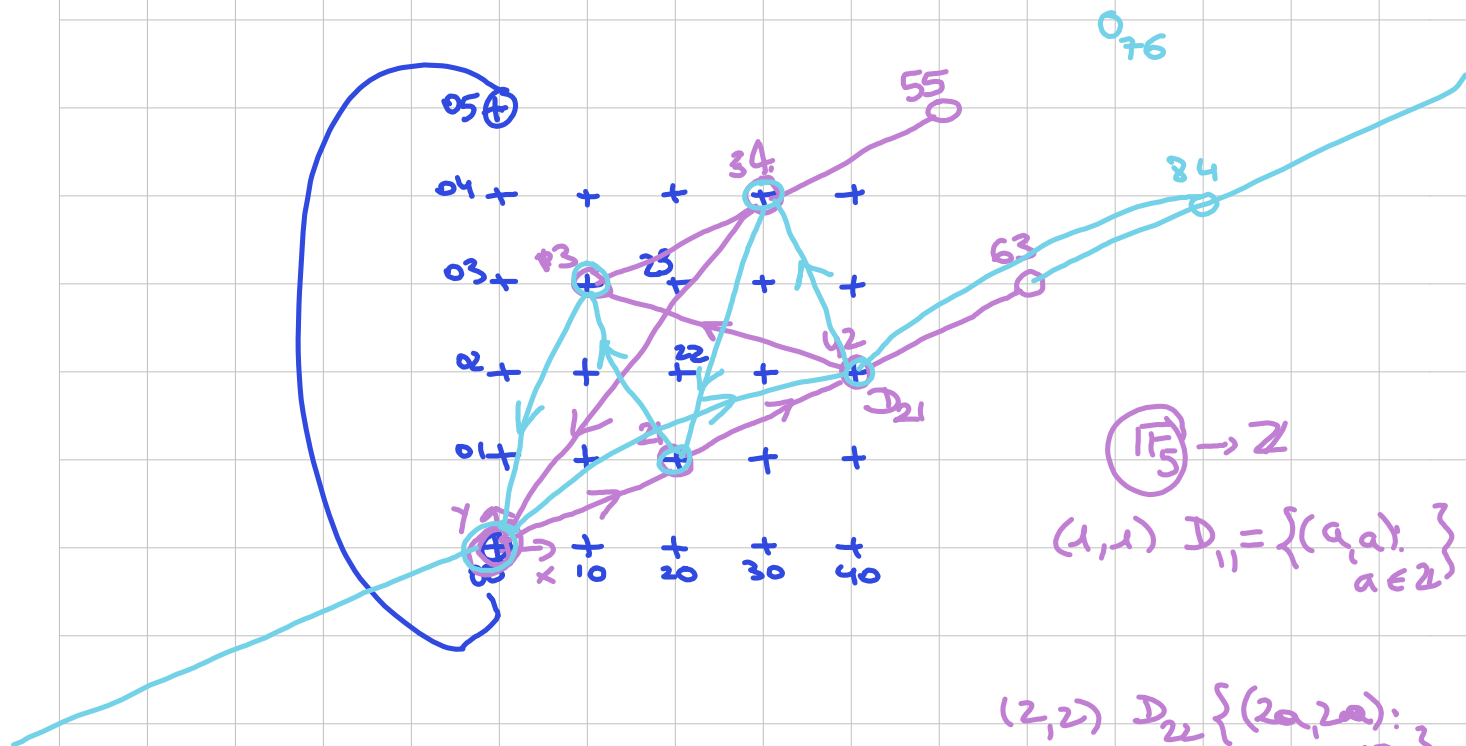


$$\mathbb{F}_5^2 \quad u = (u_1, u_2) \text{ où } u_i \in \mathbb{F}_5$$

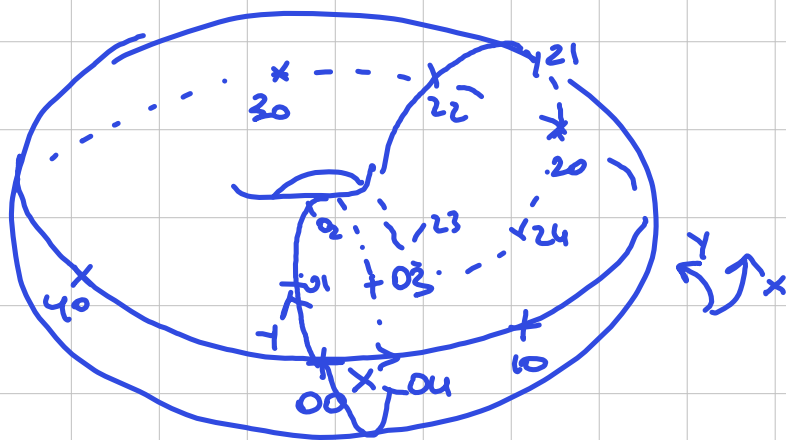


$$\mathbb{F}_5 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(1,1) D_{11} = \{(a, a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

$$(2,2) D_{22} = \{(2a, 2a) : a \in \mathbb{Z}\}$$

Dte vectorielle = celles qui passent par $(0,0)$



$\text{Dtes: } D_u = \{ \overset{\substack{\text{5 valeurs possibles} \\ \downarrow \\ \text{fixé}}}{a} \cdot u : a \in \mathbb{F}_5 \}$ pour $u \neq (0,0)$
 D_u passe par $(0,0)$ ($a=0$) et par u ($a=1$)

$\Rightarrow |D_u| \leq 5$ car il y a 5 valeurs possibles pour a
 $\text{Mq } |D_u| = 5$: Mq si $au = bu$ alors $a = b$
 $au = bu$ donc $au - bu = 0$
 $(a-b) \cdot u = 0$

$\text{Or } u \neq 0$ dc si $u = (u_1, u_2)$ on a $u_1 \neq 0$ ou $u_2 \neq 0$
 par exemple $u_1 \neq 0$ or $(a-b)u = ((a-b)u_1, (a-b)u_2)$

$$\text{dc } (a-b) \cdot u_1 = 0 \Rightarrow a-b = 0 \Rightarrow a=b$$

$\times u_1^{-1} \text{ (}\mathbb{F}_5 \text{ corps)}$

$\Rightarrow$ 5 vecteurs $a \cdot u$ pour $a \in \mathbb{F}_5$ sont tous distincts.

$$\Rightarrow |D_u| = 5 \quad \forall u \neq (0,0)$$

$\text{Pte: } \forall u \neq (0,0) \forall v \in D_u \setminus \{(0,0)\} \quad D_v = D_u$

Preuve: $v \in D_u$ donc $\exists a$ tq $v = a \cdot u$

$\text{mq } D_v \subseteq D_u$: Soit $w \in D_v \exists b \in \mathbb{F}_5 w = b \cdot v = b \cdot (a \cdot u)$
 $= (b \cdot a) \cdot u \in D_u$ ✓

$\text{mq } D_u \subseteq D_v$: Soit $w \in D_u \exists b \in \mathbb{F}_5 w = b \cdot u$

Comme $v \neq 0$, $a \neq 0$ donc a a un inverse d $\mathbb{F}_5$

$$v = au \Rightarrow a^{-1} \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot u) = (a^{-1} \cdot a) \cdot u = u$$

$$\text{or } w = b \cdot u = b \cdot (a^{-1} \cdot v) = (b a^{-1}) \cdot v$$

$\in \mathbb{F}_5 \quad \in D_v$ ✓

De $D_u = D_v$ ✓

Pte 1: $\forall u \neq 0 \quad |D_u| = 5$

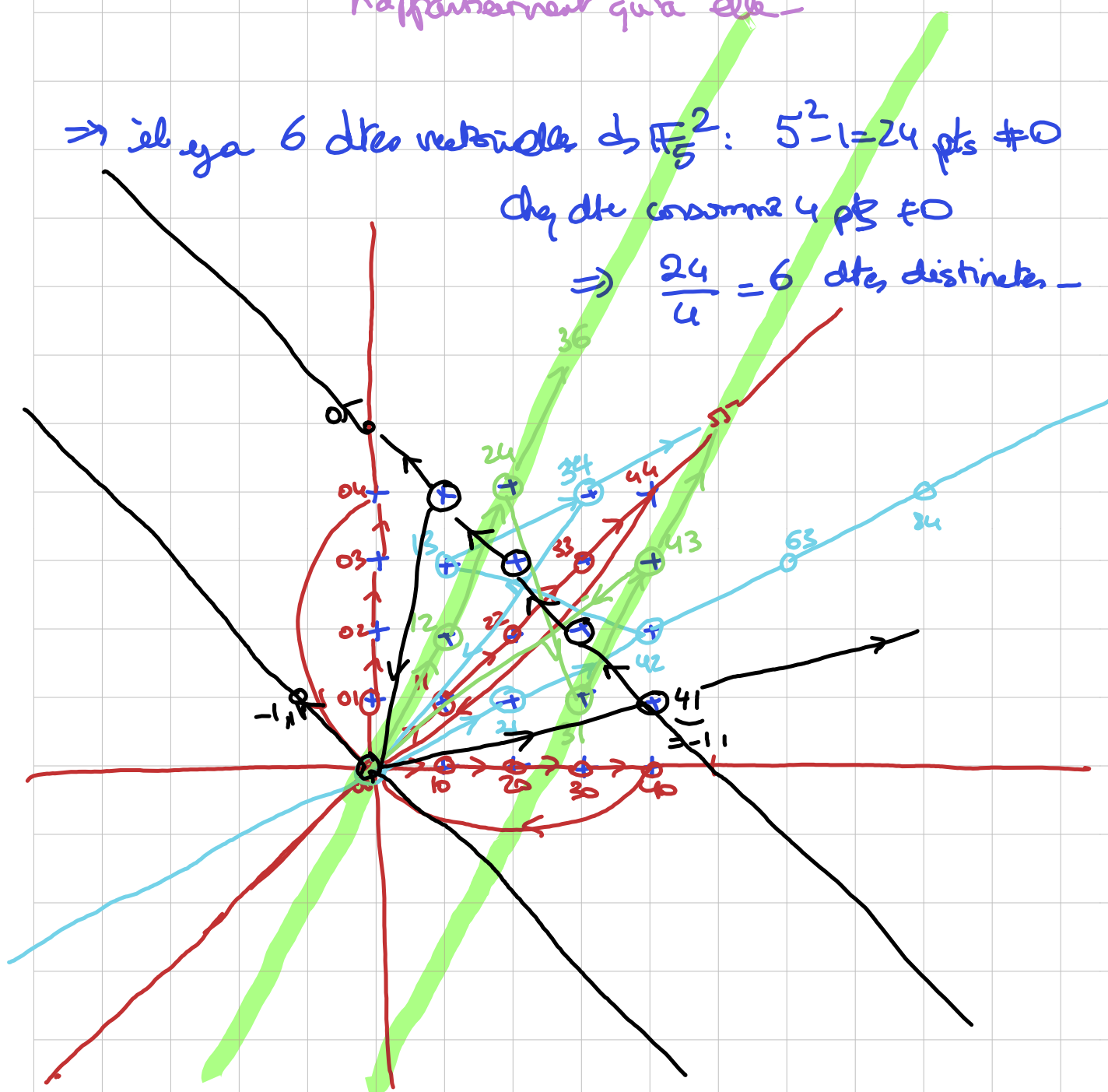
Pte: $\forall u \neq 0 \forall v \in D_u \text{ si } v \neq 0 \quad D_v = D_u$

Q: Chq des "concomme" 4 vecteurs $\neq (0,0)$ qui n'appartiennent qu'à elle-

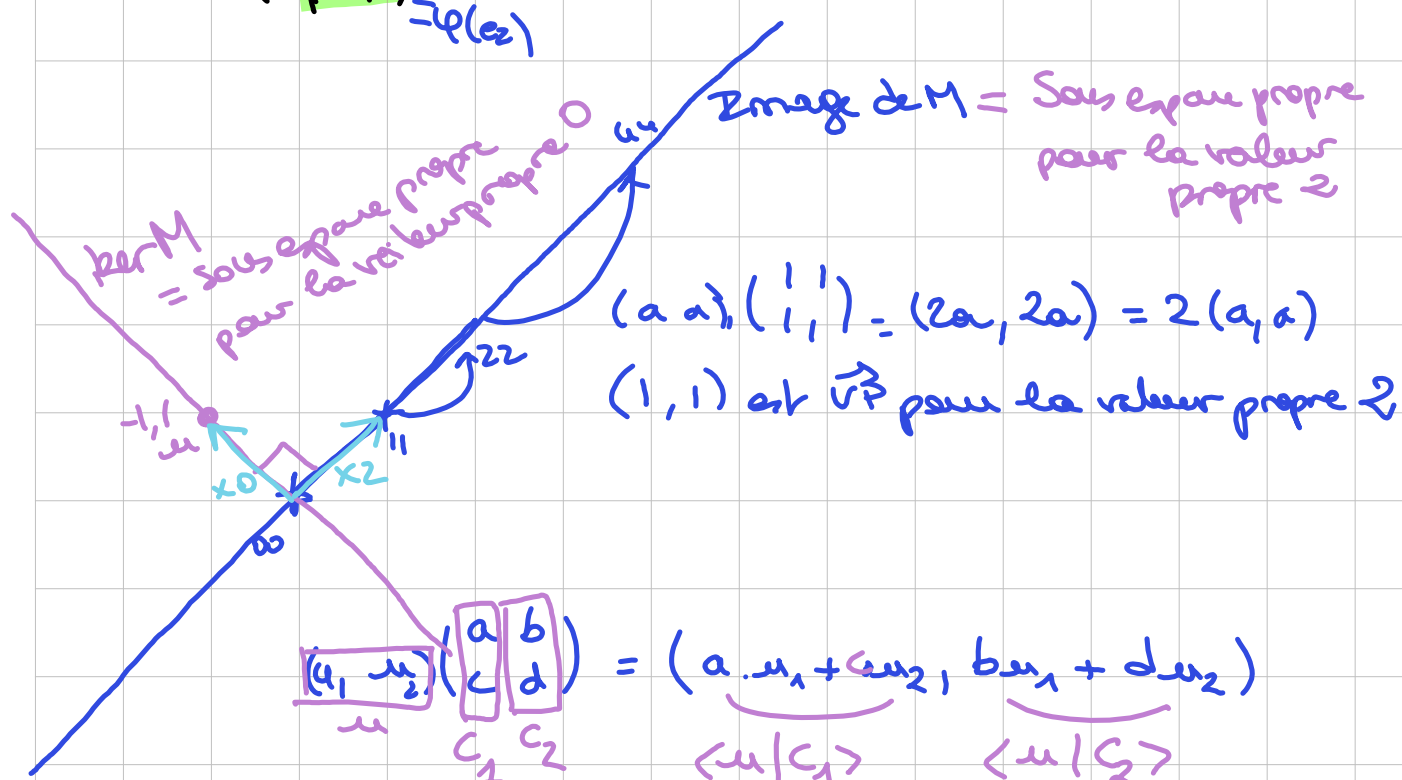
$\Rightarrow$ il y a 6 des vecteurs d $\mathbb{F}_5^2$: $5^2 - 1 = 24$ pts $\neq 0$

Chq des concomme 4 pts $\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{24}{4} = 6 \text{ des distinctes}$$



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{= \varphi(e_1)}{\text{à diagonaliser}} \text{ de } \mathbb{F}_2^2$$



$$uM = u \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\underbrace{\langle u | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{\langle u | c_1 \rangle}, \underbrace{\langle u | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}_{\langle u | c_2 \rangle})$$

$$\boxed{uM = 0 \text{ si } \langle u | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \text{ si } u \perp (1, 1)}$$

p.ex: $u = (-1, 1) \quad (-1, 1)M = (0, 0) = 0 \times (-1, 1)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{polynôme caractéristique: } \chi_M(x) = \det(M - xId)$$

soit $\lambda \in \mathbb{F}_2$ tq $\exists u \neq 0$ tq $uM = \lambda u \Leftrightarrow u(M - \lambda Id) = 0$

$$\Rightarrow M - \lambda Id \text{ n'est pas inversible}$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(M - \lambda Id) = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_M = \det(M - x \cdot Id) \text{ polynôme}$$

$$\chi_M = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 1 \\ &= 1 - 2x + x^2 - 1 \\ &= x(x-2) \end{aligned}$$

Les racines de χ_M sont 2 et 0

$$\text{tr } M = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$$

$$\boxed{uM = 2u}$$

Diagram illustrating the change of basis P to diagonalize M .

Matrix M is transformed to $P^{-1}MP$ via the change of basis P .

The matrix P is shown as $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, labeled "expressions de la base canonique".

The matrix $P^{-1}MP$ is shown as $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, labeled "image de u exprimée dans la base $(1, 1), (-1, 1)$ ".

$$u = u'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u'_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(u'_1 \ u'_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = u'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u'_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6=1 & 6=1 \\ 6=1 & 6=1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-ce qu'on peut diagonaliser M de $\mathbb{F}_2^2$?

$$\chi_M = \det(M - xId) = x(x-2) = x^2 \quad (\text{car } 2 \equiv 0 \text{ modulo } 2)$$

si M était diagonalisable, les 2 VP seraient 0

$$\text{donc } \exists P \quad M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ absurde}$$

$$(1, 0)M = (1, 1) \neq 0 \nmid \mathbb{F}_2$$