Algèbre bilinéaire sur un corps $\mathbb{K}$

Uli Fahrenberg *d'après* Bashar Dudin

Résumé

Cette feuille de travaux dirigés vise à vous donner un aperçu du comportement que vous pouvez attendre de l'algèbre linéaire sur un corps quelconque. En particulier, on s'attardera sur les questions d'algèbre linéaire sur un corps fini.

Table des matières

1 Réduction de formes bilinéaires sur $\mathbb{K}$

Cette section est consacrée à un tout petit peu de pratique concernant l'algorithme de réduction de Gauss. Il est d'utilité notamment dans l'étude des types de points critiques rencontrés lors d'une descente de gradient. C'est une situation classique en optimisation différentielle. Avant d'aborder une discussion courte sur la question de la réduction des formes quadratiques, on reparle de la question de forme bilinéaire.

$\phi(x+y, z) = \phi(x,z) + \phi(y,z)$

$\phi(\lambda x, z) = \lambda \phi(x,z)$

$\mathbb{K}$

Question 1-1 Donner, dans les bases canoniques, les matrices des formes bilinéaires suivantes :

1. La forme bilinéaire ϕ sur $\mathbb{K}^n$ définie par
$$\phi(X,Y) = X^T Y,$$
$M\phi = (\phi(e_i,e_j)) = (\langle e_i|e_j\rangle) = Id$ $\qquad x^t y = \sum_i x_i y_i$

2. La forme bilinéaire ψ sur $\mathbb{K}[X]_{\leq 2}$ définie par
base $= (1, X, X^2)$
$$\boxed{\psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)}$$
$M_\psi (\psi(e_i,e_j))_{i,j}$

3. La forme bilinéaire ρ sur $\mathbb{K}[X]_{\leq 2}$ définie par
$(1, X, X^2)$
$$\boxed{\rho(P,Q) = (P''Q + P'Q')(1).}$$

$\phi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j)$

$= \sum_i x_i \phi(e_i, \sum_j y_j e_j)$

$= \sum_i x_i \sum_j y_j \phi(e_i, e_j)$

$= \sum_{i,j} x_i y_j \boxed{\phi(e_i,e_j)}$

$$\boxed{M_\phi = (\overbrace{\phi(e_i,e_j)}^{\in \mathbb{K}})_{i,j}}$$

$\boxed{\phi(x,y) = x M_\phi {}^t y} = (x_1 \dots x_n)(\phi(e_i,e_j))\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$= (\sum x_i \phi(e_i,e_j))_j \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_j \sum_i x_i y_j \phi(e_i,e_j)$

$\psi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)\,Q(k)$

$M\psi_{ij} = \psi(X^i, X^j) = \sum_{k=0}^{2} k^i k^j = 0^{i+j} + 1^{i+j} + 2^{i+j} = 1 + 2^{i+j}$

$\uparrow$ ième vecteur base canonique $\quad \uparrow$ jème

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} \end{array} = M\psi$$

$\rightarrow \mathbb{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\geq 0 \quad {}^tP \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & & c \end{pmatrix} P \quad \geq 0$

${}^tP \begin{pmatrix} \sqrt{a} & & 0 \\ & \sqrt{b} & \\ 0 & & \sqrt{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & & 0 \\ & \sqrt{b} & \\ 0 & & \sqrt{c} \end{pmatrix} P$

${}^tX\,({}^tA.A)\,Y$

${}^t(AX)(AY)$

$\rho(P,Q) = (P''Q + P'Q')(1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$\rho(1,1) = 0$

$\rho(1,x) = 0 = \rho(1,x^2)$

$\rho(x,1) = 0$

$\rho(x,x) = (1)(1) = 1$

$\rho(x,x^2) = (0+2x)(1) = 2$

$\rho(x^2,1) = (2.1+0)(1) = 2$

$\rho(x^2,x) = (2.x + 2x.1)(1) = 4$

$\rho(x^2,x^2) = (2x^2 + 4x^2)(1) = 6$

${}^tPP \qquad P = (C_1 \ldots C_n)$

${}^tP = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{pmatrix}$

${}^tP.P = ({}^tC_i\, C_j)$

$\langle C_i | C_j \rangle = 1$ si $i=j$
$= 0$ sinon

$\Phi(X,Y) = X^tY = \sum x_i y_i$

$\mathbb{F}_2 \quad \Phi(X,Y) = \sum x_i y_i = 0$ ou 1 $\quad = 1$ si x et y ont un # de bits à 1 commun impair

$x_i y_i = 1$ si $x_i = y_i = 1$

Question 1-2 Discuter des propriétés de la forme bilinéaire ϕ question 1-1 suivant si $\mathbb{K}$ égal $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_2$.

Question 1-3 Trouver des bases orthogonales pour les formes bilinéaires symétriques à la fois sur $\mathbb{F}_5$ et sur $\mathbb{R}$ dont les matrices dans les bases canoniques sont données par

1. $\phi \; \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$ on cherche 2 vecteurs u, v tq $\phi(u,v) = 0$ et $u, v \neq 0$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{vp} = (1,1)$ pour $VP = 1$ $\quad \vec{vp} = (-1, 1)$ pour $VP = -1$

Dans chacun des cas donner la matrice de la forme bilinéaire dans la nouvelle base.

$u = (x, y)$ $\quad \phi(u,v) =$

$v = (z, w)$

$(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = xz + xw + yz + 3yw$

$\begin{array}{c|cc} & z & w \\ \hline x & 1 & 1 \\ y & 1 & 3 \end{array} = 1.xz + 1.xw + 1.yz + 3yw$

$\chi_\phi = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - X\,\mathrm{Id}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & 3-X \end{pmatrix}$

$= (1-X)(3-X) - 1$

$\phi(X,Y) = X M^t Y$ $\quad = X^2 - 4X + 2$

$= \lambda X^t Y = \lambda.(X^tY)$ $\quad = (X-2)^2 - 2$

$= 0$ si $X \neq Y$

$= \langle X | X \rangle$ si $X = Y$

X est un $\vec{vp}$ pour λ

$VP = 2 \pm \sqrt{2}$ $\quad (X-2)^2 = 2 \iff X = 2 \pm \sqrt{2}$

$(2+\sqrt{2})(x, y) = \quad (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (x+y,\ x+3y)$

$\begin{cases} (2+\sqrt{2})x = x + y \\ (2+\sqrt{2})y = x + 3y \end{cases}$ $\quad x = 1 \to y = 1+\sqrt{2}$

$(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \quad = 1 + 3 + 3\sqrt{2}$ $\quad (1, 1+\sqrt{2})$

$4 + 3\sqrt{2}$ $\quad (1, 1-\sqrt{2})$

$\underbrace{(1, 1+\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{(2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2})}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$(2+\sqrt{2},\ 4+3\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= 2+\sqrt{2} + (4+3\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$= \cancel{2} + \cancel{\sqrt{2}} + \cancel{4} - \cancel{6} + \cancel{3\sqrt{2}} - \cancel{4\sqrt{2}}$

$= 0$