Algèbre linéaire sur un corps $\mathbb{K}$

Uli Fahrenberg *d'après* E

Résumé

Cette feuille de travaux dirigés vise à vous donner un aperçu du comportement que vous pouvez attendre en l'algèbre linéaire sur un corps quelconque. En particulier, on s'attardera sur les questions d'algèbre linéaire sur un corps fini.

Table des matières

1 Applications linéaires sur un corps fini

On souhaite dans cette section vous familiariser avec les calculs et représentations des espaces vectoriels sur un corps fini. On se limite en un premier temps à la dimension 2 car c'est probablement le lieu où, dans le cas réel, votre imagination peut vous égarer.

Question 1-1

1. Représenter dans un plan le $\mathbb{F}_5$-espace vectoriel $\mathbb{F}_5^2$. ✓
2. Calculer le nombre de droites dans $\mathbb{F}_5^2$. Représenter celles-ci géométriquement sur votre dessin.
3. Calculer le nombre d'endomorphismes de $\mathbb{F}_5^2$. application linéaire d'un ev dans lui même
4. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{F}_5^2$ donné dans la base canonique par la matrice

   représenté par une matrice 2x2 à coefficient dans $\mathbb{F}_5$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \varphi(1\ 0) \\ = \varphi(0\ 1) \end{matrix}$$

   Diagonaliser φ. ✓
5. Que se passe-t-il si l'on considère l'endomorphisme ψ donné par la même matrice M dans les bases canoniques, mais sur $\mathbb{F}_2^2$? ✓

(e_i) base canonique

φ endomorphisme : $\longrightarrow$ matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} = \varphi(e_1) \\ = \varphi(e_2) \end{matrix}$

$a, b, c, d \in \mathbb{F}_5$

$e_i = (0 \dots 0\, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}\, 0 \dots 0)$ $\quad e_1 = (1,0)$ $\quad e_2 = (0,1)$

il y a autant de matrices que d'endomorphisme

il y a $\underbrace{5^4}$ matrices 2x2 à coeffs de $\mathbb{F}_5$

$= 625$ endomorphismes

$|Dte| = 5$ ① $|Plan| = 5$ ②

dim EV = "log cardinal d'un EV"

Question 1-2 On s'intéresse à deux exemples d'applications linéaires sur le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{F}_2[X]$.

1. Décrire le noyau de l'endomorphisme linéaire donné par la dérivée d'un polynôme.
2. Montrer que l'application $P \mapsto P^2$ est un endomorphisme linéaire sur $\mathbb{F}_2[X]$.

$\partial : P \mapsto P'$

$\ker \partial = \{P : \partial P = 0\} = \mathrm{Vect}(X^{2i}, i \geq 0)$

2 Se donner une sous-espace vectoriel

$P = \sum_i a_i X^i \quad \partial P = \sum_{i \geq 1} i\, a_i X^{i-1} = \sum_{i \geq 1, i \text{ impair}} \underbrace{i}_{=1 \text{ ds } \mathbb{F}_2} a_i X^{i-1} = \sum_{i \geq 1, i \text{ impair}} a_i X^{i-1}$

$= 0$ si i pair

$= 0$ ssi $\forall i$ impair $a_i = 0$

Représenter un sous-espace vectoriel d'un espace ambiant de manière réduite est essentiel dans les problématiques computationnelles. Ainsi, on aura tendance à représenter un tel espace « matriciellement » : comme l'image ou le noyau d'une matrice. Ces deux représentations sont duales et on est en mesure de passer de l'une à l'autre.

Question 2-3 On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{K}^3$ décrit par l'équation $x+y+z=0$.

1. Trouver des matrices G et H satisfaisant :
   — G est une matrice dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ d'image V
   — H est une matrice dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ de noyau V
   — $GH = 0$
2. Proposer une interprétation « géométrique » de la dernière relation.

$\ker \partial$ = l'ensemble des polynômes qui sont une somme de monomes de degré pair

Question 2-4 On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{K}^4$ décrit par ~~l'équation~~ le système d'équations

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$$

Trouver des matrices G et H satisfaisant des propriétés similaires à ce qui est attendu à la question 2-3

Q1-2.2 : mq $P \to P^2$ est linéaire ds $\mathbb{F}_2[X]$

$\forall P, Q \quad (P+Q)^2 = P^2 + \underbrace{2}_{=0} PQ + Q^2 = P^2 + Q^2$ ✓

$\forall a \in \mathbb{F}_2\ \forall P \quad (aP)^2 = \underbrace{a^2}_{= a \text{ ds } \mathbb{F}_2 = \{0,1\}} P^2 = a . P^2$ ✓

$\Big\}$ $P \to P^2$ est linéaire ds $\mathbb{F}_2[X]$

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 : \boxed{x+y+z=0}\}$

(i) _ $G \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tq $\operatorname{Im} G = V$ → $G =$ "générateur de V"

(ii) _ $H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ tq $\underline{\ker H = V}$ → $H =$ "forme implicite de V"

$u \in V$ ssi $u \in \ker H$

ssi $\underline{uH = 0}$

(iii) _ $GH = 0$

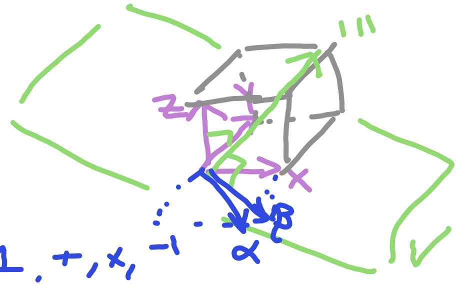
(ii) $u = (x\ y\ z) \in V$ ssi $x+y+z=0$ ssi $(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$ ssi $uH = 0$

$x.1 + y.1 + z.1$ ssi $\langle u \mid \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle = 0$ $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} H$

(ssi $\underline{u \perp (1\ 1\ 1)}$)

(i) $\operatorname{Im} G = V$ $\quad \operatorname{Im} G = \operatorname{Vect}(\underbrace{\text{lignes de } G}_{\in \mathbb{K}^3})$

$\underset{i}{(0 \dots 1 \dots 0)} \begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \\ \rule{2cm}{0.4pt} \end{pmatrix} \leftarrow L_i = L_i$



$\mathbb{K}, 0, 1, +, \times, -1$

$\begin{cases} (1\ -1\ 0) = \alpha \\ (1\ 0\ -1) = \beta \end{cases}$ $\quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \end{matrix}$

deux vecteurs libres $\in V$ donc comme $\dim V = 2$

$V = \operatorname{Vect}((1,-1,0)$ et $(1,0,-1))$

donc $V = \operatorname{Im} G = \operatorname{Vect}(L_1, L_2)$

(iii) $\forall u \in \mathbb{K}^2$ $\underset{\underset{\mathbb{K}^2}{\cap}}{u}.GH = 0$ $\quad$ pour $u \in \mathbb{K}^2$; $uG \in \operatorname{Im} G = V = \ker H$

donc $(uG).H = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\mathbb{K}^4$ $\quad V = \{ \underbrace{(x\,y\,z\,t)}_{=u} \in \mathbb{K}^4 . \left| \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x+y=0 \end{array} \right\}$

$= \begin{cases} z+t=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle u | \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \\ \langle u | \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \end{cases}$

dim ker H + dim Im H = dim Espace de départ

(ii) $u.H = (\langle u | c_1 \rangle, \langle u | c_2 \rangle \ldots)$

$u = x, y, z, t$

$H \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{K})$ $\quad \boxed{H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ $\quad uH = 0$ ssi $\begin{cases} z+t=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

(i) $\dim V = 2$ dans $\mathbb{K}^4$ $\quad \mathrm{Im}\, G = V \subseteq \mathbb{K}^4$

$G \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{K})$ $\quad G = \begin{pmatrix} \text{―} \\ \text{―} \end{pmatrix}$ ← image de $(1\,0)$ ← image de $(0,1)$

$\Updownarrow$

$L_1 = (1\,-1\,0\,0) \in V$
$L_2 = (0\,0\,1\,-1) \in V$ $\quad L_1, L_2$ forme une famille libre

$G = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \forall u \in \mathbb{K}^2 \quad uG \in \underbrace{\mathrm{Vect}(L_1, L_2)}_{\dim 2} \subseteq V$

$\Rightarrow = V$

(iii) $GH = 0$ car $\boxed{\mathrm{Im}\, G = \ker H}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{un autre } G} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{un autre } H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$