

ENS Lyon, année 2008/2009
Examen Milieux Granulaires

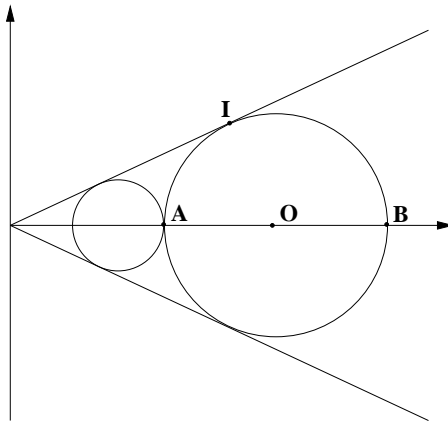
Durée : 3 heures

Les calculatrices et documents sont **interdits**.

Questions de cours

I. Rupture et modèle de Mohr-Coulomb

- I.1. Qu'est-ce qu'un test de compression biaxiale ?
- I.2. Donner la définition du matériau idéal de Mohr-Coulomb.
- I.3. La figure ci-dessous représente les cercles de Mohr à la rupture.
 - Quelles sont les grandeurs représentées en abscisse et en ordonnée ?
 - Que signifient les cercles ?
 - Quel est le sens physique de la pente des droites ?
- I.4. Quelle est la signification physique des points remarquables A, B, I, et O ?
- I.5. Expliquer sans calcul pourquoi un paquet de café sous vide est plus "rigide" qu'un paquet ouvert ?



II. Théorie cinétique de gaz granulaires

- II.1. Quelles différences fondamentales existe-t-il entre un gaz moléculaire et un gaz granulaire ?
- II.2. Qu'est-ce qui différencie deux théories cinétiques granulaires ?
- II.3. Expliquer succinctement le phénomène du démon de Maxwell granulaire.
- II.4. Rappeler sans justification les 3 équations maîtresses de la théorie cinétique des gaz granulaires denses et incompressibles (on ne donnera pas l'expression des coefficients de transport).

Problème

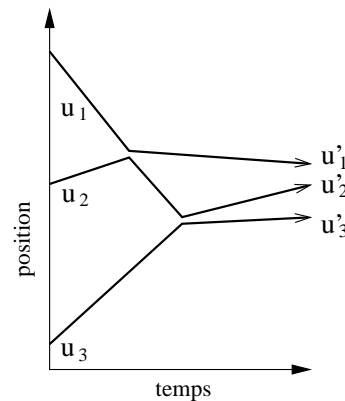
III. Effondrement inélastique d'une colonne de billes

Ce problème a pour but l'étude théorique d'une colonne unidimensionnelle de billes inélastiques identiques, sujet étudié numériquement au TD6. En dessous d'une valeur critique du coefficient de restitution e (valeur qui dépend du nombre de particules) on observe un effondrement inélastique où un nombre infini de collisions a lieu en un temps fini, conduisant au regroupement de toutes les particules. Pour des valeurs supérieures de e la colonne se disperse.

Résolution exacte pour $N = 3$

Nous allons dans cette première partie étudier le cas des trois billes et trouver la valeur critique du coefficient de restitution e en dessous de laquelle la colonne s'effondre et au dessus de laquelle elle se disperse.

Le schéma ci-contre montre un exemple de trajectoires dans lequel la première collision a lieu entre les billes 1 et 2. Une deuxième collision se produit ensuite entre les billes 2 et 3. Nous allons exprimer cette transformation sur les vitesses sous forme matricielle.



III.1. On rappelle que le coefficient de restitution e pour une collision entre deux billes i et j de masses et tailles identiques est défini par (où $*$ désigne les vitesses dans le référentiel barycentrique et $'$ les vitesses après la collision) :

$$\begin{cases} u_i^*{}' = -e u_i^* \\ u_j^*{}' = -e u_j^* \end{cases}$$

En déduire la relation suivante :

$$\begin{cases} u_i' = q u_i + p u_j \\ u_j' = p u_i + q u_j \end{cases}, \text{ avec } \begin{cases} p = (1 + e)/2 \\ q = (1 - e)/2 \end{cases}$$

III.2. En supposant que la première collision à lieu entre les billes 1 et 2, montrer qu'après les deux premières collisions, les vitesses s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}' = \mathcal{M} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

où \mathcal{M} est une matrice 3x3 que l'on exprimera en fonction de p et q .

III.3. Comment \mathcal{M} est-elle modifiée si la première collision a lieu entre les billes 2 et 3 ?

Quelle relation y a-t-il entre les valeurs propres de ces deux matrices ?

III.4. On peut montrer rigoureusement que l'effondrement se produit s'il existe au moins une valeur propre réelle λ telle que : $0 \leq \lambda < 1$.

Comment justifier ce résultat avec des arguments plus heuristiques ("avec les mains") ?

III.5. Nous allons chercher les valeurs propres de la matrice \mathcal{M} , solutions de : $\det(\mathcal{M} - \lambda I) = 0$.

Pour cela, exprimer le déterminant $\Delta(\lambda) = \det(\mathcal{M} - \lambda I)$ en fonction de p et q .

III.6. Montrer que $\lambda = 1$ est une racine évidente de Δ .

- III.7. Montrer alors que : $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda) \left(\lambda^2 - \lambda \frac{1 - 6e + e^2}{4} + e^2 \right)$
- III.8. A quelle condition sur e existe-t-il une valeur propre réelle $\lambda \neq 1$?
- III.9. Sous cette condition, montrer que les deux valeurs propres réelles non triviales ($\neq 1$) sont inférieures à $1/4$.
- III.10. Conclure sur la valeur critique du coefficient de restitution limitant l'effondrement dans le cas de trois billes.

Modèle du coussin sur un mur inélastique

On considère maintenant une colonne de N billes initialement au repos à l'exception de la première bille : $u_1 = -1$. Un mur inélastique (caractérisé par le même coefficient de restitution que les billes) est situé avant la dernière bille.

N.B. Les billes sont numérotées de la droite vers la gauche.

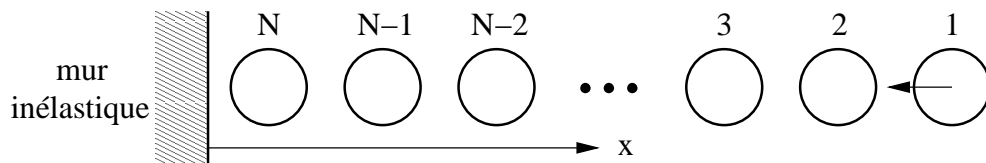


FIG. 1 – Colonne de billes limitée par un mur inélastique

Au cours d'une première phase (phase 1), l'onde impulsée par la première bille se déplace vers le mur. La $N^{ième}$ bille rebondit ensuite sur le mur. Enfin, l'onde remonte la colonne de billes au cours de la phase 2, jusqu'à atteindre la première bille. Les deux phases sont visibles sur la figure 2 qui donne les trajectoires des billes pour $N = 10$, et $e = 0.72$ (gauche) et $e = 0.76$ (droite).

Les billes inférieures constituent ainsi un "coussin" pour la première bille. Le but de ce modèle est de déterminer quand le coussin est suffisamment absorbant pour que la première bille se déplace en direction du mur à l'issue de la phase 2.

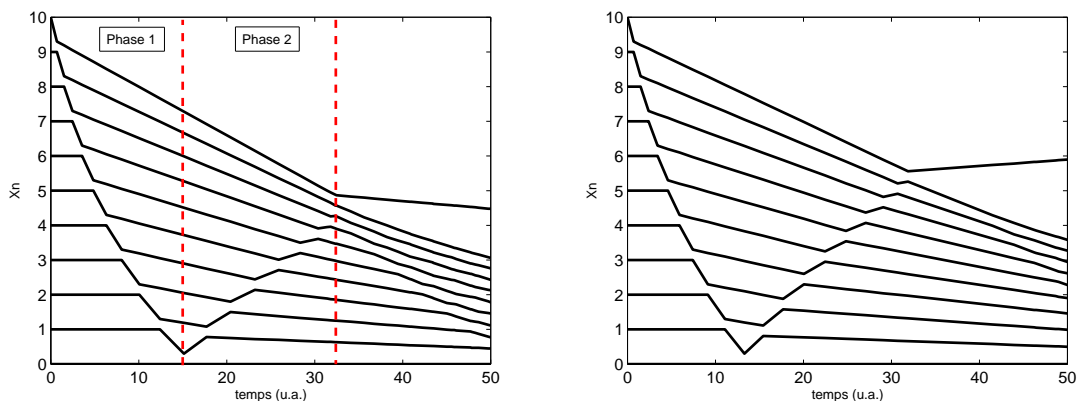


FIG. 2 – Trajectoires pour $N = 10$, et $e = 0.72$ (gauche) et $e = 0.76$ (droite)

- III.11. Justifier que à la fin de la phase 1 (juste avant la collision avec le mur), les vitesses s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{n < N} &= -q p^{n-1} \\ u_N &= -p^{N-1} \end{cases}$$

III.12. Exprimer u_N après la collision avec le mur (on ne remplacera pas p et q par leurs expressions).

III.13. Exprimer u_{N-1} , u_{N-3} et u_{N-5} à l'issue de la phase 2.

III.14. En remarquant que $u_1 = u_{N-(N-1)}$, montrer que u_1 à l'issue de la phase 2 vaut :

$$u_1 = e p^{2(N-1)} - q^2 \frac{1 - p^{2(N-1)}}{1 - p^2}$$

III.15. Nous allons considérer qu'il y a effondrement si à l'issue de la phase 2, $u_1 < 0$, et dispersion si $u_1 > 0$. Expliquer pourquoi ce critère n'est qu'une approximation.

III.16. Sous cette hypothèse, la transition entre effondrement et dispersion correspond donc à $u_1 = 0$. Montrer que cette équation équivaut à :

$$p^{2(N-1)} [e(1 - p^2) + q^2] = q^2$$

III.17. En déduire l'expression de la valeur critique de N_c :

$$N_c = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{1-e}{4}}{\ln \frac{1+e}{2}}$$

III.18. Calculer les valeurs limites de $N_c(e)$ quand $e \rightarrow 0$ et $e \rightarrow 1$.

Tracer l'allure de la courbe $N_c(e)$ et situer sur le graphe le domaine où la colonne est effondrée.

III.19. Considérons une colonne de N billes sans le mur inélastique (situation étudiée au TD6). Comment le modèle du mur inélastique permet-il de prédire la transition effondrement/dispersion dans le cas sans mur ?

Commentaire sur la valeur $N_c(e = 0)$?

III.20. Expliquer grâce aux questions précédentes comment déterminer la valeur critique exacte de e pour une colonne de 4 billes sans mur et montrer qu'elle vaut $e_4 = 3 - 2\sqrt{2}$.