Modèles de calcul - CC2

2 juin 2026

Exercice 1

Construire explicitement des fonctions récursives qui correspondent à :

1. le polynôme $p(x, y) = x^2 + 2xy + y + 1$;
2. la fonction signe(x), qui donne 0 si $x = 0$ et 1 si $x > 0$.

Vous pouvez utiliser les fonctions somme et produit vues en cours ou TD.

— $p(x, y) = ADD(MULT(x, x), ADD(MULT(2, MULT(x, y)), ADD(y, 1)))$, donc, plus explicitement :

$$\begin{aligned} p = ADD \circ \Big(& \underbrace{MULT \circ (\pi^2_1, \pi^2_1)}_{MULT(x,x)}, \\ & ADD \circ \big(\underbrace{MULT \circ (SUCC \circ SUCC \circ ZERO, MULT \circ (\pi^2_1, \pi^2_2))}_{MULT(2, MULT(x,y))}, \\ & \underbrace{ADD \circ (\pi^2_2, SUCC \circ ZERO)}_{ADD(y,1)} \big) \Big) \end{aligned}$$

— signe(x) satisfait les équations récursives

$$\begin{aligned} \text{signe}(0) &= 1 \\ \text{signe}(x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Soit $g = SUCC \circ ZERO$ la fonction constante 1 et $h(y, z) = ZERO \circ \pi^2_1$ la fonction qui prend deux entrée et renvoit la constante 0, alors

$$\begin{aligned} \text{signe}(0) &= g \\ \text{signe}(x + 1) &= h(x, \text{signe}(x)) = 0, \end{aligned}$$

donc la fonction signe(x) est obtenue par récursion primitive à partir de g et h.

Exercice 2

Décrire les ensembles des variables libres et des variables liées des λ-termes suivants :

1. $\lambda f.\lambda x.f(fx)$;
2. $f(\lambda x.fzz)$;
3. $(\lambda f.x)\lambda x.f$.

1. libres = $\varnothing$, liées = $\{f, x\}$,
2. libres = $\{f, z\}$ liées = $\{x\}$,
3. libres = $\{f, x\}$ liées = $\{f, x\}$.

Exercice 3

Calculer les substitutions suivantes :

1. $((\lambda f.\lambda x.f(fx))\lambda y.fy)\ [\lambda x.w/f]$;
2. $((\lambda x.fx)f)\ [\lambda w.wx/f]$.

1. La seule occurrence libre de f est celle toute à droite, il n'y a pas de conflits de variables, donc on a

$$((\lambda f.\lambda x.f(fx))\lambda y.fy)\ [\lambda x.w/f] = ((\lambda f.\lambda x.f(fx))\lambda y.fy)\ < \lambda x.w/f >= ((\lambda f.\lambda x.f(fx))\lambda y.(\lambda x.w)y).$$

2. Deux occurrences libres de f à remplacer par $\lambda w.wx$, la variable x est libre dans $\lambda w.wx$ mais liée dans le terme de gauche $\lambda x.fx$, donc il faut la renommer :

$$((\lambda x.fx)f)\ [\lambda w.wx/f] = ((\lambda y.fy)f)\ < \lambda w.wx/f >= (\lambda y.(\lambda w.wx)y)\lambda w.wx.$$