Modèles de calcul - TD2

Exercice 1 Premiers exemples de TM

Décrire des MTs sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ produisant, à partir d'un mot $w \in \Sigma^*$:

1. le mot wa (rajouter un a à la fin) ;
2. le mot $\sharp w$ (décaler chaque symbole d'une position).

Solution de l'exercice 1

Bon, sur la 1. il n'y a pas trop à dire. Sur la 2. on peut montrer deux manières de faire : d'abord avec deux rubans (on copie le mot entier sur le deuxième ruban, et après on écrase le premier), et après avec un seul ruban (à partir de la fin du mot, on bouge caractère par caractère).

Exercice 2 Successeur et prédécesseur binaire

Décrire des MTs sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ produisant, à partir d'un mot $w \in \Sigma^*$ représentant un entier n en notation binaire :

1. la représentation binaire de $n + 1$;
2. la représentation binaire de $n \dot{-} 1$ (prédécesseur tronqué).

Solution de l'exercice 2

Pour la 1. il faut considérer le cas de la retenue. Option 1 : écrire la retenue sur le deuxième ruban ; Option 2 : coder la retenue par des états. Pour la 2. c'est en gros le même genre de raisonnement.

Exercice 3 Langages non-réguliers

Décrire des MTs qui acceptent les langages non-réguliers suivants :

1. $\mathcal{L}_1 = \{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$;
2. $\mathcal{L}_2 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$;
3. $\mathcal{L}_3 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

où, pour un mot w, w^R indique le mot w renversé : si $w = w_1 w_2 \dots w_n$, alors $w^R = w_n w_{n-1} \dots w_1$.

Solution de l'exercice 3

Pour le 1. on rajoute d'abord un signe au début et à la fin du mot, puis on efface le premier et dernier caractère par des itérations successives, en rejetant à chaque itération si ces deux caractères ne coïncident pas ou si on ne trouve pas le dernier caractère (les signes rajoutés nous permettent de savoir quand on a fini d'explorer le mot dans les deux directions).

Le 2. est un peu plus compliqué, mais intéressant : on introduit d'abord des nouveaux symboles A, B ; par des itérations successives on remplace le premier et dernier caractère par leurs versions majuscules. À la dernière itération il y a deux possibilités : soit il reste un seul caractère au milieu qui reste à convertir, donc le mot à longueur impaire, et on le rejète ; soit il ne reste plus de caractères minuscules, et alors le mot a longueur paire et on a trouvé le début de la deuxième moitié du mot. On peut alors reconvertir en minuscule tous le caractères à la gauche du point milieu et il ne reste à vérifier, encore par des itérations successives ou en utilisant un deuxième ruban, que chaque a ou b dans la première moitié correspond bien à un A ou B dans la deuxième.

Pour le 3. il y a plusieurs façons de faire : on peut utiliser le deuxième ruban comme compteur pour la première suite de a, et puis pour la deuxième suite de b ; avec un seul ruban, on fait une première itération où on vérifie qu'il n'y a pas de a après des b (ce qui implique que le mot est de la forme $a^n b^m$) ; il ne reste alors à vérifier que $n = m$ en effaçant le premier et dernier caractère par des itérations successives (ou en utilisant un deuxième ruban).