

# Modèles de calcul - TD7

## Exercice 1 Fonctions PR de base

Étant donné une fonction  $f$  et un prédicat  $P$  primitifs récursifs, montrer que les fonctions ou prédicats suivants sont primitifs récursifs :

1.  $(a, b) \mapsto a \times b$
2.  $\text{pred}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$
3.  $(a, b) \mapsto a - b$  (avec par convention  $a - b = 0$  si  $b > a$ ).
4.  $(x, n) \mapsto \sum_{i=1}^n f(x, i)$  et  $(x, n) \mapsto \prod_{i=1}^n f(x, i)$ .
5.  $\exists k < n, P(x, i)$  et  $\forall i < n, P(x, i)$ .
6.  $(x, n) \mapsto \min\{i \leq n \mid P(x, i)\}$  (où ce minimum vaut 0 si l'ensemble est vide).

### Solution de l'exercice 1

1. On utilise le schéma de récurrence avec le cas de base  $a \times 0 = 0$  et  $a \times (b + 1) = a + (a \times b)$ . La fonction  $g$  est donc **zero** et  $h$  est  $+(\pi_1^3, \pi_3^3)$ , cad  $h : (a, b, acc) \mapsto a + acc$ .
2. Pareil, avec  $g = \text{zero}$  et  $h : (a, b, acc) \mapsto b$  est  $\pi_2^3$ .
3. Pareil, avec  $g = \pi_1^1$  et  $h = \text{pred} \circ \pi_3^3$ .
4. Il suffit de se rendre compte que pour des prédicats,  $\forall$  est un produit et d'appliquer la question précédente. Et  $\exists$  se fait directement par De Morgan.
5. Pareil, avec  $g = \text{zero}$  et  $h : (a, b, acc) \mapsto acc + P(a, b)$  est  $+(\pi_3^3, P(\pi_1^3, \pi_2^3))$ .
6. On a la définition récursive par cas suivante :

$$\begin{aligned} \mu(x, 0) &= 0 \\ \mu(x, n + 1) &= \begin{cases} \mu(x, n) & \text{si } \mu(x, n) = 1 \\ n + 1 & \text{si } \mu(x, n) = 0 \text{ et } P(x, n + 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

## Exercice 2 Nombres premiers

1. Montrer que les prédicats  $x = 0$  et  $x = y$  sont PR.
2. Montrer que le prédicat " $x$  divise  $y$ " est PR.
3. En déduire que le prédicat **estPremier** est PR, et que la fonction **prem** :  $n \mapsto n$ -ème nombre premier est PR.

### Solution de l'exercice 2

1.  $x = 0$  se définit via le schéma de récursion avec  $g = \text{succ} \circ \text{zero}$  et  $h = \text{zero}$ . Le prédicat  $x = y$  est équivalent à  $x - y = 0$  et  $y - x = 0$  (n'oubliez pas que  $x - y$  est tronqué à 0 quand  $x < y$ ).
2.  $x$  divise  $y$  signifie  $\exists z < y, x \times z = y$ . C'est un  $\exists$  borné, donc on sait faire via un produit (cf ex01).
3. **estPremier**( $n$ ) est équivalent à  $\forall i \leq n, i = 1 \vee i = n \vee i \nmid n$ . On sait faire des  $\vee$  et un  $\forall$  borné (cf ex01 again), donc c'est gagné. Pour la fonction **prem**, on fait une minimisation  $\min\{i, i > \text{prem}(n - 1) \wedge \text{estPremier}(i)\}$ . Notez qu'elle n'est pas bornée, donc ça montre seulement que **prem** est récursive. Pour montrer qu'elle est PR, il faut borner la minimisation, ce qui est ok car on sait que le  $n$ -ème nombre premier est compris entre le  $(n - 1)$ -ème et son double. La version PR est donc  $\min\{i < 2 \times \text{prem}(n - 1), i > \text{prem}(n - 1) \wedge \text{estPremier}(i)\}$ .