

# Modèles de calcul - TD8

## Exercice 1 Variables libres et liées

Décrire les ensembles des variables libres et liées des termes suivants :

- $\lambda x.y$
- $x\lambda x.y(\lambda y.x)$
- $\lambda x.x(\lambda y.\lambda z.zwx)$

### Solution de l'exercice 1

- VL =  $\{y\}$ , VLL =  $\{x\}$ ;
- VL =  $\{x, y\}$ , VLL =  $\{x, y\}$ ;
- VL =  $\{w\}$ , VLL =  $\{x, y, z\}$ ;

## Exercice 2 Termes identifiables

Dire si les termes sont identifiables ( $\alpha$ -équivalents), et si oui préciser la suite des renommages nécessaires :

- $\lambda x.y$  et  $\lambda y.x$
- $\lambda x.y$  et  $\lambda y.y$
- $\lambda x.y$  et  $\lambda z.y$
- $\lambda x.\lambda y.x$  et  $\lambda y.\lambda x.x$
- $\lambda x.\lambda y.x$  et  $\lambda y.\lambda x.y$
- $x\lambda x.y(\lambda y.x)$  et  $z\lambda z.y(\lambda y.z)$
- $x\lambda x.y(\lambda y.x)$  et  $x\lambda z.y(\lambda y.x)$
- $x\lambda x.y(\lambda y.x)$  et  $x\lambda z.y(\lambda x.z)$

### Solution de l'exercice 2

- non
- non
- oui
- non
- oui, avec le renommage  $\lambda x.\lambda y.x \equiv \lambda x.\lambda z.x \equiv \lambda y.\lambda z.y \equiv \lambda y.\lambda x.y$
- non
- non
- oui, avec le renommage  $x\lambda x.y(\lambda y.x) \equiv x\lambda z.y(\lambda y.z) \equiv x\lambda z.y(\lambda x.z)$ .

## Exercice 3 Substitution

Calculer les substitutions suivantes :

- $\lambda x.y[\lambda y.y/x]$
- $\lambda x.y[\lambda y.y/y]$
- $\lambda x.y[x/y]$
- $\lambda x.\lambda y.yx[x/y]$
- $\lambda x.\lambda y.zx[\lambda y.y/z]$
- $\lambda x.\lambda y.zx[\lambda x.xy/z]$

### Solution de l'exercice 3

Dans chaque cas, calculez d'abord la substitution naive correspondante :

- pas de renommage nécessaire,  $\lambda x.y[\lambda y.y/x] = \lambda x.y < \lambda y.y/x > = \lambda x.y$
- pas de renommage nécessaire,  $\lambda x.y[\lambda y.y/y] = \lambda x.y < \lambda y.y/y > = \lambda x.\lambda y.y$
- renommage  $\lambda x.y \equiv \lambda z.y : \lambda x.y[x/y] = \lambda z.y < x/y > = \lambda z.x$
- $y$  est liée :  $\lambda x.\lambda y.yx[x/y] = \lambda x.\lambda y.yx$
- pas de renommage :  $\lambda x.\lambda y.zx[\lambda y.y/z] = \lambda x.\lambda y.zx < \lambda y.y/z > = \lambda x.\lambda y.(\lambda y.y)x$
- renommage  $\lambda x.\lambda y.zx = \lambda x.\lambda w.zx : \lambda x.\lambda y.zx[\lambda x.xy/z] = \lambda x.\lambda w.zx < \lambda x.xy/z > = \lambda x.\lambda w.(\lambda x.xy)x$

### Exercice 4 Quelques calculs

Construisez des  $\lambda$ -termes qui calculent les fonctions suivantes et justifiez votre réponse :

- la fonction **XOR** sur les Booléens ;
- la fonction multiplication **MULT** sur les entiers ;
- le prédicat **ISZERO** des entiers vers les Booléens.

### Solution de l'exercice 4

Rappeler les constructeurs  $\mathbf{T} = \lambda x.\lambda y.x$ ,  $\mathbf{F} = \lambda x.\lambda y.y$ , **if**  $x$  **then**  $y$  **else**  $z := (xy)z$ .

- **XOR** =  $\lambda x.\lambda y.\mathbf{if} \ x \ \mathbf{then} \ (\mathbf{NOT}y) \ \mathbf{else} \ y = \lambda x.\lambda y.(x((y\mathbf{F})\mathbf{T}))y$ .

On peut calculer

$$(\mathbf{XOR} \ \mathbf{T}) \ \mathbf{F} \longrightarrow_{\beta}^* \mathbf{T}(\mathbf{FFT})\mathbf{F} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{FFT} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{T}.$$

$$(\mathbf{XOR} \ \mathbf{T}) \ \mathbf{T} \longrightarrow_{\beta}^* \mathbf{T}(\mathbf{TFT})\mathbf{F} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{TFT} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{F}.$$

$$(\mathbf{XOR} \ \mathbf{F}) \ \mathbf{T} \longrightarrow_{\beta}^* \mathbf{F}(\mathbf{FFT})\mathbf{T} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{T}.$$

$$(\mathbf{XOR} \ \mathbf{F}) \ \mathbf{F} \longrightarrow_{\beta}^* \mathbf{F}(\mathbf{FFT})\mathbf{F} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{F}.$$

Rappeler les entiers de Church  $\underline{n} = \lambda f.\lambda x.f^n x$ , le successeur **SUCC** =  $\lambda z.\lambda f.\lambda x.zf(fx)$  et l'opération d'itération **ITE**( $x, u, H$ ) :=  $(xH)u$ . Rappeler aussi la définition de l'addition par itération : **ADD** =  $\lambda x.\lambda y.\mathbf{ITE}(y, x, \mathbf{SUCC})$ .

- **MULT** =  $\lambda x.\lambda y.\mathbf{ITE}(y, \mathbf{0}, \lambda z.\mathbf{ADD}(x, z))$

Par exemple on peut calculer

$$\begin{aligned} (\mathbf{MULT} \ \underline{2}) \ \underline{3} &\longrightarrow_{\beta}^* \mathbf{ITE}(\underline{3}, \mathbf{0}, \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)) = (\underline{3} \ \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)) \ \underline{0} = (\lambda f.\lambda x.f(f^n)x \ \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)) \ \underline{0} \\ &\longrightarrow_{\beta}^* \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)(\lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)(\lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z) \ \underline{0})) \\ &\longrightarrow_{\beta}^* \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)(\lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)(\underline{2})) \\ &\longrightarrow_{\beta}^* \lambda z.\mathbf{ADD}(\underline{2}, z)(\underline{4}) \\ &\longrightarrow_{\beta}^* \underline{6}. \end{aligned}$$

- **ISZERO** =  $\lambda x.\mathbf{ITE}(x, \lambda x.\mathbf{F}, \mathbf{T}) = \lambda x.(x(\lambda x.\mathbf{F}))\mathbf{T}$ .

On peut calculer

$$\mathbf{ISZERO} \ \underline{0} \longrightarrow_{\beta} = (\underline{0} \ \lambda x.\mathbf{F})\mathbf{T} = ((\lambda f.\lambda x.x) \ \lambda x.\mathbf{F})\mathbf{T} \longrightarrow_{\beta} \mathbf{T},$$

$$\mathbf{ISZERO} \ \underline{2} \longrightarrow_{\beta} = (\underline{2} \ \lambda x.\mathbf{F})\mathbf{T} = (\lambda f.\lambda x.f(fx) \ \lambda x.\mathbf{F})\mathbf{T} \longrightarrow_{\beta} \lambda x.\mathbf{F}(\lambda x.\mathbf{F} \ \mathbf{T}) \longrightarrow_{\beta} \mathbf{F}.$$