Modèles de calcul - TD9

Exercice 1 Codage de l'exponentiel

Dans cet exercise on va identifier les termes $\lambda x.x$ et $\underline{1} := \lambda f.\lambda x.fx$ (on dit qu'ils sont η-*équivalents*).

Vérifier que la fonction EXP $:= \lambda n.n\underline{2}$ code effectivement l'exponentiel 2^n. Qu'est-ce qu'on peut dire de la fonction $\lambda x.xx$?

Solution de l'exercice 1

On considère séparemment les cas $n = 0$ et $n > 0$:

— $n = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{EXP}\underline{0} &\to_\beta \underline{0}\ \underline{2} = (\lambda f.\lambda x.x)\underline{2}\\ &\to_\beta \lambda x.x \simeq_\eta \underline{1}.\end{aligned}$$

— $n > 0$: par exemple, $n = 3$:

$$\begin{aligned}\mathrm{EXP}\underline{3} &\to_\beta \underline{3}\ \underline{2} = (\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))\underline{2}\\ &\to_\beta \lambda x.\underline{2}(\underline{2}(\underline{2}x))\\ &\to_\beta^* \lambda x.\lambda y.(\underline{2}(\underline{2}x))\Big((\underline{2}(\underline{2}x))y\Big)\\ &\to_\beta^* \lambda x.\lambda y.(\underline{2}x)(\underline{2}x)\Big((\underline{2}(\underline{2}x))y\Big)\\ &\to_\beta^* \lambda x.\lambda y.(\underline{2}x)(\underline{2}x)(\underline{2}x)(\underline{2}x)y\Big)\\ &\to_\beta^* \lambda x.\lambda y.(\lambda z.x(xz))(\lambda z.x(xz))(\lambda z.x(xz))(\lambda z.x(xz))y\\ &\to_\beta^* \lambda x.\lambda y.x^8y.\end{aligned}$$

Par rapport à $\lambda x.xx$: on peut voir de manière similaire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $\lambda n.n\underline{p}$ calcule l'exponentiel en base p, c'est-à-dire la fonction $\mathrm{EXP}_p(n) = p^n$. On en déduit alors que $\lambda x.x\underline{x}$ calcule la fonction $g(n) = \mathrm{EXP}_n(n) = n^n$.

Exercice 2 Codage de la minimisation

Soit G : int $\to$ int $\to$ Bool. En utilisant le point fixe de Church, construire un terme $M(G)$: int $\to$ Bool qui calcule $n \mapsto \min\{p \mid G(n,p) \to_\beta^* \mathrm{True}\}$.

Solution de l'exercice 2

On va définir une fonction F qui décrit le pas que l'on veut itérer.

$$F = \lambda f.\lambda n.\lambda p.\mathrm{if}\ Gnp\ \mathrm{then}\ p\ \mathrm{else}\ fn(\mathrm{SUCC}p).$$

On définit alors

$$M(G) := \lambda n.YFn\underline{0}.$$

Essayons :

— supposons que $G\underline{n}\underline{0} \to_\beta^*$ True. Alors

$$\begin{aligned}M(G)\underline{n} &\to_\beta YF\underline{n}\underline{0}\\ &\to_\beta F(YF)\underline{n}\underline{0}\\ &\to_\beta^* \mathrm{if}\ G\underline{n}\underline{0}\ \mathrm{then}\ \underline{0}\ \mathrm{else}\ YF\underline{n}(\mathrm{SUCC}\underline{0})\\ &\to_\beta^* \mathrm{if}\ \mathrm{True}\ \mathrm{then}\ \underline{0}\ \mathrm{else}\ YF\underline{n}(\mathrm{SUCC}\underline{0})\\ &\to_\beta \underline{0}.\end{aligned}$$

— supposons que $G\underline{n}\underline{2} \to_\beta^* \text{True}$ et que $G\underline{n}\underline{0} \to_\beta^* \text{False}$ et $G\underline{n}\underline{1} \to_\beta^* \text{False}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
M(G)\underline{n} &\to_\beta YF\underline{n}\underline{0} \\
&\to_\beta F(YF)\underline{n}\underline{0} \\
&\to_\beta^* \text{if } G\underline{n}\underline{0} \text{ then } \underline{0} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{0}) \\
&\to_\beta^* \text{if False then } \underline{0} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{0}) \\
&\to_\beta YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{0}) \\
&\to_\beta^* F(YF)\underline{n}\underline{1} \\
&\to_\beta^* \text{if } G\underline{n}\underline{1} \text{ then } \underline{1} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{1}) \\
&\to_\beta^* \text{if False then } \underline{1} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{1}) \\
&\to_\beta^* YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{1}) \\
&\to_\beta^* F(YF)\underline{n}\underline{2} \\
&\to_\beta^* \text{if } G\underline{n}\underline{2} \text{ then } \underline{2} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{2}) \\
&\to_\beta^* \text{if True then } \underline{2} \text{ else } YF\underline{n}(\text{SUCC}\underline{2}) \\
&\to_\beta \underline{2}.
\end{aligned}
$$