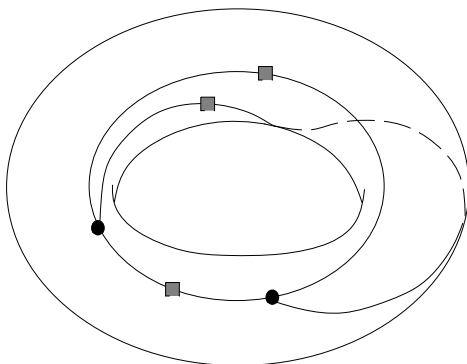


En effet, la fonction $\beta(X, Y) = X^2$ a une dérivée non nulle en tous les points pour lesquels $X \neq 0, \pm 1$ vu que dans ce cas, X est une bonne coordonnée sur la courbe! Au voisinage des trois points $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, Y est une bonne coordonnée mais alors, il est bien clair que la fonction $(X, Y) \mapsto X$ a une différentielle qui s'anule et donc β est aussi de différentielle nulle. Une analyse similaire peut être menée au voisinage du point à l'infini. Ceci montre que les points de ramification sont situés au dessus de $0, 1$ et ∞ . De plus, l'indice de ramification au dessus de 1 vaut 2 . L'autre tore complexe avec des automorphismes analytiques supplémentaires a pour paramètre modulaire $\tau = \exp(i\pi/3)$. Son équation est $Y^2 = X^3 - 1$. Une fonction de Belyi pour cette courbe est fournie par:

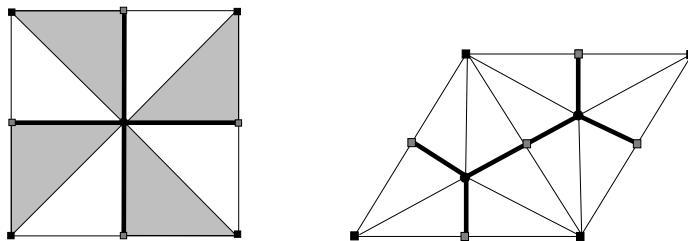
$$(7.50) \quad \beta(X, Y) = X^3$$

et le dessin d'enfant correspondant est:



Comme précédemment, sur la courbe $Y^2 = X^3 - 1$, en dehors des points $(1, 0)$, $(j, 0)$ et $(j^2, 0)$ où $j = \exp(2\pi i/3)$, la coordonnée X est une bonne coordonnée et donc clairement le seul point où la courbe est ramifiée correspond à $X = 0$, et donc à un zéro de la fonction β . Au dessus des trois autres points, nous pouvons exprimer la fonction β en termes de la bonne coordonnée Y , et elle est de la forme $\beta(Y) = 1 + Y^2$. En conséquence elle a une dérivée nulle et une valeur un. L'indice de ramification est deux. On conclut en analysant le cas du point à l'infini: β est une fonction de Belyi.

Dans les deux cas, il est amusant de visualiser les triangulations des tores que l'on peut obtenir¹³:



Enfin, nous laisserons le lecteur méditer sur les différentes manières de trianguler les tores.

7.5 Résolution du modèle de WZW jaugé.

Dans cette section, nous expliquons comment, à partir des considérations des chapitres 3, 5 et 6, il est possible de donner une "solution" complète et explicite du modèle de WZW jaugé défini dans

¹³Dans le second cas, nous n'avons pas colorié les différents triangles pour des raisons de temps.

cette section. Puis nous étendons ces considérations pour fabriquer à partir de toute théorie topologique tridimensionnelle obtenue selon le procédé du chapitre 6, une théorie topologique bidimensionnelle définie sur une catégorie de surfaces “taggées”.

7.5.1 Modèle de WZW jaugé.

Dans le chapitre 3, nous avons vu comment construire des actions effectives chirales pour le modèle de WZW. Malheureusement, ces actions chirales n'étaient pas invariantes de jauge. Nous allons voir comment définir deux actions invariantes de jauge à partir du modèle de WZW. L'une d'elle donne une théorie topologique bidimensionnelle qui s'identifie avec une réduction dimensionnelle de la théorie de Chern-Simons. Puis nous verrons comment définir des invariants topologiques associés aux dessins d'enfants. Enfin nous poserons quelques questions relatives à l'approche par les dessins d'enfants de l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et sa relation avec l'approche de la section 7.3.

Actions invariantes de jauge.

Il existe deux manières de fabriquer une action invariante de jauge non chirale à partir du modèle de WZW. L'une d'elle est décrite dans le livre de Polyakov [146] mais aussi dans [147]. Si on additionne les variations des actions $\Gamma[A]$ et $\bar{\Gamma}[\bar{A}]$ (définies par les équations 3.104 et 3.105) calculées en 3.106 et 3.107 et que l'on explicite le résultat, on obtient

$$(7.51) \quad \Gamma[hA] + \bar{\Gamma}[h\bar{A}] = \Gamma[A] + \bar{\Gamma}[\bar{A}] - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A(\bar{\partial}h)h^{-1}) - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}((\partial h)h^{-1}\bar{A}) - S_{WZW}[h] - S_{WZW}[h^{-1}]$$

Mais d'autre part, la formule de Polyakov-Wiegmann:

$$S_{WZW}[h] + S_{WZW}[h^{-1}] = \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(h^{-1}(\bar{\partial}h)h^{-1}(\partial h))$$

nous dit que

$$(7.52) \quad \int_{\Sigma} \text{Tr}(h^{\flat} A^{\flat} \bar{A}) = \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A}) + \int_{\Sigma} \text{Tr}((A(\bar{\partial}h)h^{-1}) + \bar{A}(\partial h)h^{-1}) + \int_{\Sigma} \text{Tr}(h^{-1}(\partial h)h^{-1}(\bar{\partial}h))$$

et donc

$$(7.53) \quad S[A, \bar{A}] = \Gamma[A] + \bar{\Gamma}[\bar{A}] + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A})$$

est invariante de jauge. Polyakov suggère que cette action n'est autre que celle d'un modèle de WZW mais avec une constante de couplage renormalisée.

Il existe toutefois une autre manière de fabriquer une action invariante de jauge.

$$(7.54) \quad S[g, A, \bar{A}] = S[g] - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(Ag^{-1}(\bar{\partial}g) - \bar{A}(\partial g)g^{-1}) + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A} - gAg^{-1}\bar{A})$$

et l'action effective $\Gamma[A, \bar{A}]$ déduite de l'action $S[g, A, \bar{A}]$ est invariante de jauge. Ce modèle est appelé le modèle de WZW jaugé [83].

Dans l'article [83], l'auteur montre que l'action effective $\Gamma[A, \bar{A}]$ se met sous la forme (voir formule 19 de la référence précédente):

$$(7.55) \quad e^{-\Gamma[A, \bar{A}]} = e^{-\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A})} \sum_{I, \bar{I}} \psi_I[A] \psi_{\bar{I}}[\bar{A}] h^{I, \bar{I}}$$

où les ψ_I et les $\psi_{\bar{I}}$ sont les blocs fonctionnels introduits en section 3.5 du chapitre 3. La matrice $(h^{I, \bar{I}})_{I, \bar{I}}$ commute avec toutes les transformations modulaires. En fait, il s'agit de la matrice du produit scalaire des états de la théorie de Chern-Simons. J'ai vu cette remarque pour la première fois dans [184].

Modèle de WZW jaugé et théorie de Chern-Simons.

En conséquence, il est facile de voir que le modèle de WZW jaugé est une théorie topologique dont on sait calculer toutes les observables. Soit $\mathcal{O}_K[A, \bar{A}]$ une observable associée à un graphe de Wilson décoré, il est évident que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \rangle &= \int \mathcal{D}[A, \bar{A}] e^{-\Gamma[A, \bar{A}]} \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \\ &= \sum_{I, \bar{I}} \int \mathcal{D}[A, \bar{A}] e^{-\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A})} \psi_I[A] \psi_{\bar{I}}[\bar{A}] h^{I, \bar{I}} \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \\ &= \text{Tr}_{H_{\Sigma}}(\widehat{\mathcal{O}}_K) \end{aligned}$$

où l'espace H_{Σ} est l'espace des états de la théorie de Chern-Simons sur Σ et où $\widehat{\mathcal{O}}_K$ est l'opérateur associé à la fonctionnelle des champs $\mathcal{O}_K[A, \bar{A}]$. En conséquence, nous interprétons cela comme la fonction de partition de $\Sigma \times S_1$ décoré par K plongé dans $\Sigma \times \{0\}$, de la théorie de Chern-Simons.

La limite $k \mapsto +\infty$.

Dans le cas où $k \mapsto +\infty$, l'action de la théorie de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$ se réduit à une intégrale plus simple. La limite $k \mapsto +\infty$ correspond pour la théorie de Chern-Simons à une limite classique¹⁴. En conséquence, à la limite $k \rightarrow +\infty$, l'intégrale fonctionnelle de Chern-Simons se réduit à une intégrale sur l'espace des modules des solutions classiques. Dans le cas de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$, les équations du mouvement s'écrivent:

$$F_{12} = 0 \quad F_{01} = F_{02} = 0$$

où nous notons x_0 la coordonnée le long du cercle S_1 et $x_{1,2}$ les coordonnées sur la surface Σ . Les classes d'équivalence de solutions de ces équations de courbure nulle modulo les transformations de jauge sont classées par les morphismes de $\pi_1(\Sigma_g \times S_1) = \mathbb{Z} \times \pi_1(\Sigma_g)$, à valeurs dans G , modulo l'action de G par automorphisme intérieur. Un tel morphisme φ est entièrement défini par un morphisme φ_g de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans G et un élément $h \in g$ de sorte que

$$(7.56) \quad \forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g), \forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi(n, \gamma) = h^n \varphi_0(\gamma)$$

Bien entendu, h commute avec tout élément de $\varphi_0(\pi_1(\Sigma_g))$. On introduit

$$\overline{\mathcal{M}}_{\Sigma_g} = \{A(z, \bar{z}) / F_A = 0\}$$

¹⁴Clairement, j'aurais pu noter $k = 1/h \dots$

qui n'est autre que l'espace sur lequel il faut intégrer pour calculer la fonction de partition du modèle de Higgs topologique bidimensionnel. Rappelons que celle-ci, pour $G = SU(2)$, est bien définie dès que le genre est strictement supérieur à 1 et qu'elle s'obtient par la formule

$$(7.57) \quad Z_H(\Sigma_g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{2(g-1)}}$$

On s'attend à ce que, à la limite $k \rightarrow +\infty$, la fonction de partition $Z_{CS}(k, g)$ de la théorie de Chern-Simons au niveau k sur Σ_g diverge. Bien sûr, il convient dans l'évaluation de $Z_{CS}(k, g)$ de bien faire attention aux points suivants:

- A k fini, on doit prendre en compte les fluctuations autour des configurations classiques. Formellement, nous écrivons

$$Z_{CS}(k, g) = \int_{\mathcal{M}_{\Sigma_g}} \mathcal{D}[A] \det' \left(\frac{ik}{4\pi} \nabla_A \right)^{-1/2}$$

où le déterminant doit être convenablement défini. Ce déterminant joue un rôle dans la manière dont $Z_{CS}(k, g)$ diverge.

- Le calcul de $Z_{CS}(k, g)$ est trivial d'après les considérations du chapitre 6:

$$(7.58) \quad Z_{CS}(k, g) = \left(\frac{k+2}{2} \right)^{g-1} \sum_{m=1}^{k+1} \left(\sin \left(\frac{\pi m}{k+2} \right) \right)^{2(1-g)}$$

J'aimerais pouvoir donner une interprétation claire du facteur divergent $Z_{CS}(k, g)/Z_H(\Sigma_g)$.

Cette analyse n'a pas été poussée plus loin en ce qui me concerne. En effet, il m'a semblé bien plus intéressant de se cantonner au cas $k < +\infty$ pour lequel *tout* est facilement calculable et où *toutes* les fonctions de partition sont *finies*. En un sens, le modèle de WZW jaugé est une "régularisation rationnelle" de la théorie de Higgs (qui est irrationnelle pour $SU(N)$). Nous allons donc maintenant abstraire la construction ci-dessus. Cela montrera qu'elle est considérablement plus générale que la simple "coïncidence" que nous venons d'exhiber entre le modèle de WZW jaugé sur une surface Σ et la théorie de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$.

7.5.2 Réduction dimensionnelle.

La procédure utilisée est extrêmement simple: à partir des données géométriques bidimensionnelles, on fabrique des données tridimensionnelles à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$. Puis on associe à nos données bidimensionnelles un invariant tridimensionnel!

Préliminaires géométriques.

La catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ permet de construire très simplement une catégorie $\mathbf{Ma}_{2,1}$ formée de surfaces décorées par des tags, au sens du chapitre 1, Appendice 1.B. Rappelons que l'on procède par analogie avec la définition de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ donnée au chapitre 5.

Objets Les objets de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ sont des cercles avec un certain nombre de points marqués et coloriés.

Morphismes Les morphismes de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ sont les surfaces Σ orientées décorées par un graphe trivalent K . Les bords sont paramétrés de sorte que les orientations induites sur $\partial\Sigma$ coïncident avec celles des objets entre lesquels on interpole, et les points de ces objets sont les images des points de $K \cap \partial\Sigma$ par les paramétrisations des bords.

Le graphe est colorié exactement de la même manière qu'un graphe de la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$.

Nous envoyons cette catégorie dans $\mathbf{Ma}_{3,1}$ de la manière suivante:

- Un cercle avec n points marqués est envoyé sur un tore avec n points marqués. L'orientation du tore est prise directe si et seulement si celle du cercle l'est.
- Soit $[\Sigma, K]$ un morphisme de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ qui interpole entre N_1 et N_2 qui, pour fixer les idées sont deux cercles. Nous désignons par $\varphi_{1,2}$ les paramétrisations des bords entrant $(\partial\Sigma)_1$ et sortant $(\partial\Sigma)_2$. Définissons sur le bord de $\Sigma \times S_1$:

$$(7.59) \quad \bar{\varphi}_1 : (x, \vartheta) \in (\partial\Sigma)_1 \times S_1 \mapsto (\varphi_1(x), \vartheta) \in (S_1 \times S_1)$$

$$(7.60) \quad \bar{\varphi}_2 : (x, \vartheta) \in (\partial\Sigma)_2 \times S_1 \mapsto (\varphi_2(x), \vartheta) \in (S_1 \times S_1)$$

L'orientation est définie par $\omega_\Sigma \wedge d\vartheta$ où ω_Σ est la forme volume définissant l'orientation de Σ . Définissons aussi $\bar{K} \subset \Sigma \times S_1 = K \times \{0\}$ dont le framing est pris selon S_1 : chaque ligne est un ruban dans la direction des $\vartheta \in S_1$ croissants. En conséquence, $[[\Sigma \times S_1, \bar{\varphi}_{1,2}], \bar{K}]$ interpole entre $N_1 \times S_1$ et $N_2 \times S_1$ comme prévu.

- Reste à régler le problème des coloriages: le coloriage de $\bar{K} = K \times \{0\}$ n'est autre que celui de K .

Il existe bien d'autres manières de réaliser cette opération. Nous pouvons choisir $f_n \in M_{1,n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et décider que si N_1 est un cercle avec n points marqués, alors

$$\bar{\varphi}_1(x, \vartheta) = f_n(\varphi_1(x), \vartheta)$$

Finalement, on définit une famille $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ de foncteurs de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ dans $\mathbf{Ma}_{2,1}$. Ceux-ci vérifient

$$(7.61) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\emptyset) = \emptyset$$

$$(7.62) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](S_1 \times [0, 1]) = (S_1 \times S_1) \times [0, 1]$$

$$(7.63) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_1 \cup N_2) = \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_1) \cup \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_2)$$

$$(7.64) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1) \cup \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_2)$$

$$(7.65) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\hat{\Sigma}) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[\widehat{(f_n)_n}](\Sigma))$$

$$(7.66) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\hat{N}a) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[\widehat{(f_n)_n}](N))$$

$$(7.67) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma[Y]) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma))_{[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](Y)]}$$

Le foncteur défini plus haut, ($f_n = \mathbf{1}$ pour tout n) sera noté $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ dans la suite. Il s'avère plus pratique à manipuler.

Définition de la théorie bidimensionnelle.

Définition 92 Si $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}_{3,1}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est une théorie topologique projective basée sur $\mathbf{Ma}_{3,1}$, alors on définit une théorie topologique bidimensionnelle (à priori projective) sur $\mathbf{Ma}_{2,1}$ par

$$(7.68) \quad \Phi_{2D} = \Phi \circ \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$$

Cette théorie dépend du foncteur $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ que l'on a choisi mais:

Théorème 79 Toutes les théories issues d'une même théorie tridimensionnelle par le procédé de la définition 92 sont équivalentes au sens de la définition 12 du chapitre 1.

Preuve: Comparons les théories issues de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ et $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(g_n)_n]$. Introduisons l'action $\rho_{g,n}$ du groupe modulaire $\mathcal{M}^*(g, n)$ sur $H_{g,n}$ dans la théorie tridimensionnelle. Pour fixer les idées, prenons Σ qui interpole entre $[S_i, m]$ et $[S_1, n]$:

$$(7.69) \quad \phi[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(g_n)_n](\Sigma)] = \rho_{1,n}(g_n \circ f_n^{-1}) \circ (\phi[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma)]) \circ \rho_{1,n}(g_n \circ f_n^{-1})^{-1}$$

et donc, les deux théories sont bien reliées par une TNLU. \square

Bien entendu,

Proposition 40 Deux théories tridimensionnelles équivalentes donnent naissance à des théories bidimensionnelles équivalentes.

Preuve: Si $\hat{T}_{1,n}$ désigne l'opérateur qui agit sur $H_{1,n}$ pour réaliser la TNLU entre Φ et Φ' , alors les théories déduites de ces deux théories tridimensionnelles par application de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ sont reliées par une TNLU définie par les opérateur \hat{T}_n agissant sur $H_{S_1,n}$:

$$(7.70) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{T}_n = \hat{T}_{1,n}$$

qui vérifie trivialement toutes les propriétés d'une TNLU. L'extension au cas de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ ne pose pas de problème au vu du théorème 79. \square

Finalement, comme l'équation 7.70 le montre, d'une part nous sommes capables d'associer à chaque TNLU entre deux TCT tridimensionnelles une TNLU entre les TCT bidimensionnelles associées et, d'autre part, la composition des TNLU au niveau tridimensionnel se traduit par la composition des TNLU associées au niveau bidimensionnel. En conséquence,

Théorème 80 Chaque $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ définit un foncteur entre les catégories $[\mathbf{Ma}_{3,1} \mapsto \mathbf{Sp}]$ et $[\mathbf{Ma}_{2,1} \mapsto \mathbf{Sp}]$.

Après ces résultats généraux, il est bon de revenir à des propriétés plus contrètes.

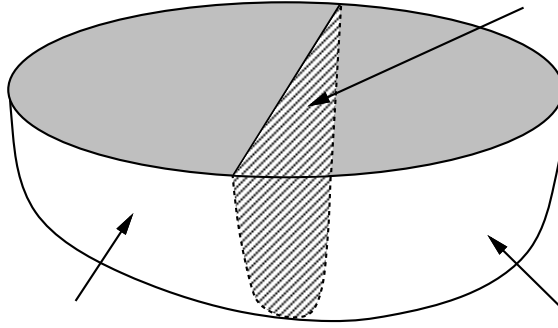
Quelques précisions.

Nous disposons aussi de l'expression explicite du cocycle de la théorie bidimensionnelle:

$$(7.71) \quad \mu_{2D}(\sigma_1, \sigma_2) = \mu_{3D}(\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1), \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_2))$$

Dans le cas des théories bidimensionnelles issues d'une solution des équations de Moore et Seiberg, l'expression se simplifie grandement. Nous considérons tout d'abord le foncteur $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$.

Considérons $\Sigma_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,1}}(\emptyset, N)$ et $\Sigma_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,1}}(N, \emptyset)$. Notons $\bar{\Sigma}_1$ et $\bar{\Sigma}_2$ leurs images respectives par $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$. Supposons pour simplifier que N soit un cercle¹⁵, le cocycle est donné par l'équation 6.40. Ces formules font apparaître des variétés quadridimensionnelles qui bordent $\bar{\Sigma}_1 \# (S_1 \times D_2)$, $(\widehat{S_1 \times D_2}) \# \bar{\Sigma}_2$ et $\bar{\Sigma}_1 \# \bar{\Sigma}_2$. Notons $Y_{1,2}$ des variétés quadridimensionnelles obtenues à partir de présentations par chirurgie de $\bar{\Sigma}_1 \# (S_1 \times D_2)$ et $(\widehat{S_1 \times D_2}) \# \bar{\Sigma}_2$. On fabrique très simplement une variété quadridimensionnelle bordant $\bar{\Sigma}_1 \# \bar{\Sigma}_2$ en retirant un $D_2 \times D_2$ à chacune des variétés $Y_{1,2}$ et en recollant le long de $D_2 \times S_1$ comme sur notre schéma:



Comme la signature de $D_2 \times D_2$ est triviale, on en déduit qu'il existe des présentations par chirurgie $[L_1, \bar{K}_1]$, $[L_2, \bar{K}_2]$ et $[L_{12}, \bar{K}_{12}]$ de $\bar{\Sigma}_1 \# (S_1 \times D_2)$, $(\widehat{S_1 \times D_2}) \# \bar{\Sigma}_2$ et $\bar{\Sigma}_1 \# \bar{\Sigma}_2$ respectivement telles que

$$(7.72) \quad \text{Sign}(L_1, \bar{K}_1) + \text{Sign}(L_2, \bar{K}_2) = \text{Sign}(L_{12}, \bar{K}_{12})$$

En conséquence, ceci montre qu'il n'y a pas de projectivité:

Proposition 41 *Si $[\mathbf{Ma}_{3,1}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est obtenue à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg, alors la théorie déduite par application de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ n'est pas projective.*

7.5.3 Formulation “IRF”.

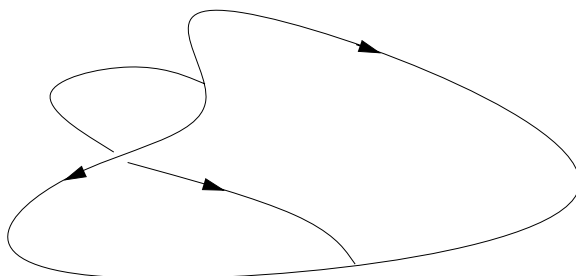
Le plus intéressant est qu'on dispose là aussi d'une formulation de type “IRF” (pour “Interaction Round the Faces”, voir [155]) pour calculer les fonctions de partition de surfaces taggées. Dans le cas d'invariants de nœuds dans S_3 , ceci résulte de nombreux travaux, mais nous pensons surtout à la vision synthétique de Witten qui a donné l'expression générale des poids de Boltzmann [192]. Notre but est de montrer que dans le cas bidimensionnel, des formules analogues existent.

Nous allons montrer que les fonctions de partitions se calculent par un modèle de type “IRF”. Les techniques utilisées sont très proches de celles employées par Witten dans [192] pour traiter le cas des invariants de nœuds et d'entrelacs dans S_3 . Nous commençons par examiner le cas d'une sphère S_2 taggée, puis nous passons au genre plus élevé.

¹⁵Pour le calcul des cocycles la décoration ne joue aucun rôle.

Calcul de fonctions de partitions sur la sphère.

Considérons donc un graphe trivalent plongé dans $S_2 \times S_1$. Nous nous intéressons à sa projection K sur $S_2 \times \{0\}$ que nous supposons régulière: c'est à dire ne présentant que des vertex trivalents ou des croisements. Nous colorions ce graphe de manière à en faire un tag K_C . Pour calculer la fonction de partition $Z[S_2, K_C]$, nous choisissons un point de $S_2 \setminus K$ que nous envoyons à l'infini. Dans ce cas, nous arrivons à une figure de ce type:

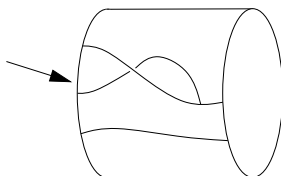


Exactement comme Witten dans [192], nous utilisons alors une méthode de matrice de transfert. Nous découpons la sphère en anneaux C_i sandwichés entre deux disques:

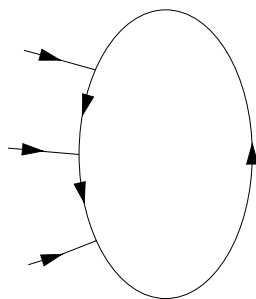
$$(7.73) \quad [S_2, K_C] = D_2 \# C_n \# \dots \# C_1 \# \hat{D}_2$$

Ceci revient à couper la variété $S_2 \times S_1$ en tranches de topologie $(S_1 \times S_1) \times [0, 1]$.

Examinons en détail ce qui se passe quand on coupe la sphère le long d'un cercle avec n points marqués:



Une base de H_n est fournie, au niveau de la théorie tridimensionnelle par



où $calC$ désigne le coloriage

$$[i_1, \dots, i_{n-1}; j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_n]$$

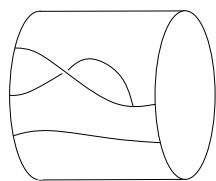
du graphe ci-dessus et dont la norme au carré est

$$(7.74) \quad \|\mathcal{C}\|^2 = \sqrt{\prod_{k=1}^n \frac{S_0^{i_k}}{S_0^0}}$$

La fonction de partition cherchée se met sous la forme:

$$(7.75) \quad Z_{2D}[S_2, K_C] = \sum_{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n} \phi_{3D}[\widehat{D_2 \times S_1}] \frac{|\mathcal{C}_1\rangle\langle\mathcal{C}_1|}{\|\mathcal{C}_1\|^2} \phi_{3D}[\mathcal{C}_2] \dots \phi_{3D}[\mathcal{C}_n] \frac{|\mathcal{C}_n\rangle\langle\mathcal{C}_n|}{\|\mathcal{C}_n\|^2} \phi_{3D}[D_2 \times S_1]$$

Il nous faut calculer les éléments de matrice $\langle\mathcal{C}_{j-1}|\phi_{3D}[\mathcal{C}_j]|\mathcal{C}_j\rangle$ dans la théorie tridimensionnelle. Avant ce calcul pénible, remarquons que les couleurs des lignes du graphe définissant la base de H_n fournissent un coloriage des composantes connexes de $S_2 \setminus K$:



Chaque ligne du graphe K est bordée par deux régions qui elles-aussi portent des indices de ligne. Le choix d'un terme dans la somme 7.75 correspond au choix d'une couleur de vertex posée sur une ligne de K , à la frontière entre deux régions de $S_2 \setminus K$. Si j, j' sont les couleurs de ces régions et i la couleur portée par la ligne de K , le vertex est de type $[j, i, j']$. Ceci motive la définition suivante:

Définition 93 *Un graffiti sur Σ est un tag $[K, \mathcal{C}]$ tracé sur Σ muni d'un coloriage de $\Sigma \setminus K$.*

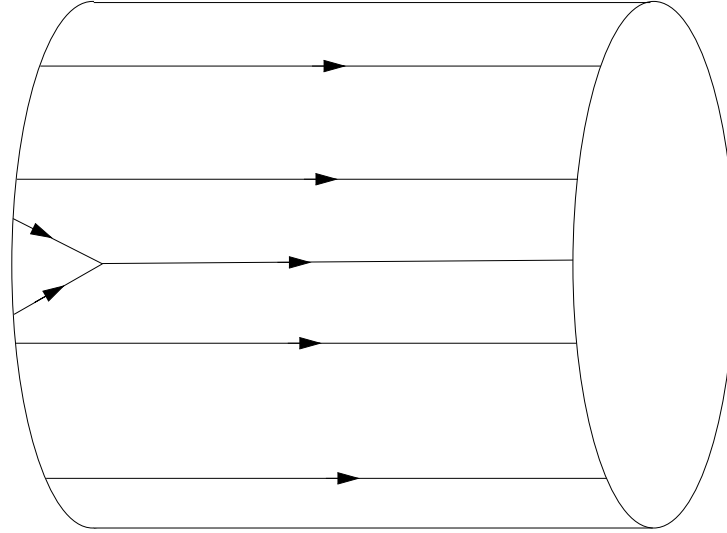
L'ensemble des graffitis basés sur un tag \mathcal{C} sera noté $\mathfrak{G}_{\mathcal{C}}$. L'ensemble des coloriages de vertex d'un graffiti g sera noté \mathcal{V}_g . Comme le montre un calcul explicite, il est clair que le quotient

$$\frac{\langle\mathcal{C}_{j-1}|\phi[\mathcal{C}_j]|\mathcal{C}_j\rangle}{\|\mathcal{C}_{j-1}\| \times \|\mathcal{C}_j\|}$$

ne dépend en fait que de l'événement qui se trouve dans le cylindre \mathcal{C}_j . En conséquence, sa contribution peut être vue comme celle d'une plaquette convenablement coloriée.

Pour éclairer notre propos, nous pouvons montrer comment évaluer ce quotient dans le cas où le

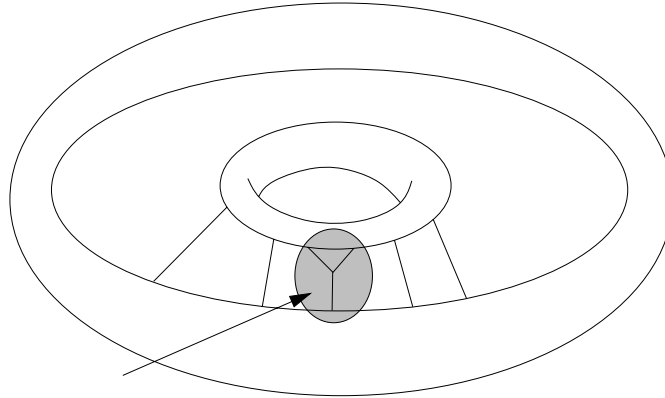
cylindre C_j contient un vertex:



L'élément de matrice qui nous intéresse est la fonction de partition calculée dans $S_2 \times S_1$ du graphe obtenu en saturant celui ci par des graphes en anneau. Nous notons $[p_1, \dots, p_n]$ les lignes internes et $[a_1, \dots, a_n]$ les vertex du graphe à une boucle avec comme pattes externes $[j_1, \dots, j_n]$. De même, nous notons $[p'_1, \dots, p'_{k-1}, p', p'_{k+2}, \dots, p'_n]$ les lignes internes et $[a'_1, \dots, a'_{k-1}, a', a'_{k+2}, \dots, a'_n]$ les vertex du graphe à une boucle de lignes externes $[j_1, \dots, j_{k-1}, j, j_{k+2}, \dots, j_n]$. Nous cherchons

$$Z_{3D}[S_2 \times S_1, \mathcal{G}_C \# K \# \mathcal{G}_{\hat{v}}]$$

que nous calculons en coupant le long d'une sphère S_2 avec quatre points marqués comme indiqué sur le dessin:



La partie située dans la boule délimitée par la sphère S_2 contribue par la fonction de partition d'un tétraèdre dans S_3 et tous calculs faits, nous obtenons pour notre élément de matrice:

$$(7.76) \quad \frac{\prod_{k=1}^n S_0^{j_k}}{(S_0^0)^{n/2-1}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{a} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix} \prod_{l \neq k} \delta_{a_l, a'_l}$$

La division par les normes fournit alors:

$$(7.77) \quad \frac{(S_0^0)^{3/4} \sqrt{S_0^{j_k} S_0^{j_{k+1}}}}{\sqrt{S_0^j}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{a} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

qui ne dépend que des couleurs au voisinage du croisement! Le lecteur est invité à analyser par lui-même les autres cas de figure. Finalement, chaque voisinage d'un croisement ou d'un vertex constitue une plaquette et la sphère S_2 est obtenue en recollant de telles plaquettes.

La fonction de partition se calcule donc grâce à :

$$(7.78) \quad Z[S_2, K_c] = \sum_{g \in \mathfrak{G}_c} \sum_{v \in \mathcal{V}_g} \prod_{\text{plaquettes}} W[\mathcal{C}, g, v]$$

où dans le produit sur les plaquettes, on fait le produit de tous les poids associés aux plaquettes convenablement coloriées. Il s'agit clairement d'une formulation de type "IRF" de notre théorie topologique. Les poids de Boltzmann obtenus pour cette théorie sont :

	$S_0^0 B_{p_k, p'_k}(+) \begin{bmatrix} a'_k & a'_{k+1} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$
	$\frac{(S_0^0)^{3/4}}{\sqrt{S_0^j}} \sqrt{S_0^{j_k} S_0^{j_{k+1}}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{a} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$

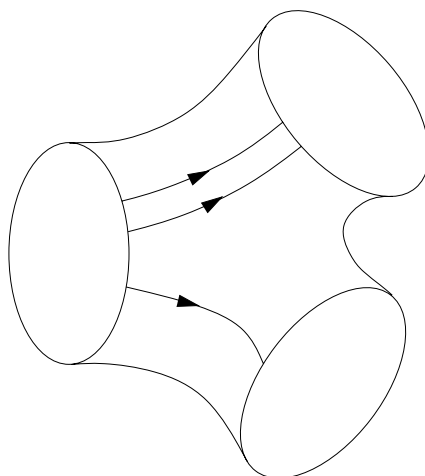
Bien entendu, on dispose d'une expression analogue quand le croisement se fait dans l'autre sens: la matrice $B(+)$ est remplacée par la matrice $B(-)$. Nous n'avons pas indiqué le cas où une ligne se coupe en deux mais le lecteur retrouvera le résultat sans difficultés. Deux remarques s'imposent :

- Le lecteur aura remarqué que l'expression du poids de Boltzmann associé au triangle n'est pas \mathbb{Z}_3 -invariante: en clair elle dépend de l'orientation du triangle.
- Le calcul de la fonction de partition ne se fait pas en utilisant une triangulation quelconque de la surface! Les plaquettes sont associées aux croisements et aux vertex du graphe. Il n'y a pas moyen de les choisir autrement.

Surfaces de genre plus élevées.

Le cas des surfaces de genre plus élevé pose quelques problèmes à cause des amplitudes avec changement de topologie. Il est facile de reprendre les raisonnements précédents pour se convaincre que sur une surface de topologie non triviale, la fonction de partition doit aussi se calculer par un modèle de type "IRF". Il suffit pour cela de choisir une fonction de Morse pour notre surface taggée et de découper en tranches ne contenant qu'un événement (croisement, vertex ou changement de topologie). Pour les tranches cylindriques, le travail a déjà été effectué. Mais il apparaît des tranches ayant la topologie d'une

sphère avec trois trous qui en plus servent “d’aiguillage” pour les lignes du tag:



Le calcul des éléments de matrice de tous ces aiguillages possibles ne me semble pas évident.

Il serait bien plus satisfaisant de disposer d’une méthode de calcul qui utilise une décomposition simpliciale de la variété: par exemple une triangulation. Malheureusement, le formalisme employé ici n’est pas adapté à ce travail. Il semble assez clair que si l’on formule la théorie à partir de triangulations, elle doit posséder des propriétés de localité très fortes (au sens de la functorialité bien évidemment). Je ne veux pas détailler ici mes essais infructueux pour contourner la difficulté que je viens de mentionner. Dans une formulation “simpliciale”, les briques de construction du modèle sont les opérateurs associés à des plaquettes (par exemple des triangles). On peut composer ces différents opérateurs pour fabriquer l’opérateur associé à une surface compliquée. Ceci présuppose que à chaque côté du triangle soit associé un espace des états, et que l’opération de recollement des triangles par leurs côtés corresponde à la contraction sur les espaces vectoriels correspondants. La localité à la frontière telle que je l’ai définie au chapitre 1 semble un tremplin bien agréable vers ce type de formulation. Je pense depuis longtemps formuler les théories tridimensionnelles que j’ai obtenu au chapitre 6 en ces termes mais j’ai tout d’abord tenté de voir ce qui se passait au niveau de la théorie bidimensionnelle.

Malheureusement, il s’avère que la théorie bidimensionnelle *n’est pas* locale à la frontière. Ceci provient du fait que nous ne disposons d’aucun moyen d’engendrer les états conformément à l’hypothèse de simplicité 3 du chapitre 5. L’idée qui apparaît alors la plus naturelle consiste à introduire un espace des états associé à un *segment* avec des points marqués. On définit alors des injections

$$(7.79) \quad \psi_{n,m} : H_{S_1, n+m} \longrightarrow H_{I,n} \otimes H_{I,m}$$

par un procédé combinatoire qui consiste à couper les graphes en anneaux en deux graphes en arbre¹⁶! Une base de $H_{I,n}$ est formé des graphes multipériphériques avec $n + 2$ pattes externes. En fait, il est bien clair que $\psi_{n,m}$ n’est pas surjective. Ceci évite le phénomène d’“explosion dimensionnelle” remarqué par J.M. Maillet dans son travail [125].

¹⁶Il pourra sembler étrange au lecteur que je n’ai pas envisagé ces développements dès le premier chapitre. Mais je ne disposais pas d’exemples explicites pour lesquels de tels objets puissent être définis lorsque j’ai mis au point l’axiomatique du chapitre 1.

J'ai commencé à approfondir les quelques indications précédentes. Toutefois, ce travail n'est pas encore assez avancé pour en parler ici mais il semble possible de reprendre l'axiomatique du chapitre 1 pour inclure le cas où les objets sont à bords.

Dans le même genre d'idées, j'ai amorcé une réflexion sur la notion de "théorie des champs relative" qui devrait permettre de traiter le cas d'une théorie des champs définie sur une catégorie de variétés de dimension D munies de plongements de variétés de dimensions inférieures. Les catégories $\mathbf{Ma}_{3,1}$ et $\mathbf{Ma}_{2,1}$ qui sont apparues dans cette thèse sont des exemples particulièrement simples de cette situation car les sous variétés sont unidimensionnelles et donc sans structure¹⁷. Mais si on veut étudier des théories où les insertions sont localisées sur des surfaces (par exemple), il peut être utile de s'autoriser des opérations géométriques différentes sur la variété contenante et sur sa "décoration", par exemple choisir différemment les difféomorphismes de recollement. Enfin, la motivation principale de ces explorations reste la mise au point d'un dictionnaire commun entre le travail de J.M. Maillet [125] et le mien. Enfin j'ai eu la surprise de constater que des idées similaires se trouvaient dans l'Esquisse...

7.5.4 Dessins d'enfants, tags et théorie de Galois.

On peut voir l'ensemble de tous les dessins d'enfants comme un modèle pour l'espace des modules des surfaces de Riemann sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Des résultats récents ont d'ailleurs été obtenus dans ce sens [170, Théorème 2.4.2]. Le lien avec la notion de découpe présentés en section 7.3 de ce chapitre n'est pas encore clair pour moi. C'est clairement un passage obligé pour aller plus loin. De bons articles de revue sont [171] et [163].

Bien entendu, la courbe algébrique associée à un dessin ne dépend que de la classe d'isotopie du plongement de 1-complexe qui définit le dessin. Il serait donc extrêmement intéressant de disposer d'invariants topologiques pour différencier les dessins.

Comme nous l'avons vu, les théories topologiques permettent de définir des invariants de tags, c'est à dire de graphes trivalents décorés. D'autre part, un dessin définit une triangulation de la surface et donc par passage au graphe dual, un graphe trivalent sur la surface. Par ce biais, nous définissons tout un ensemble d'invariants associés aux dessins d'enfants. Reste à savoir s'ils sont séparants, et dans quel sens. Enfin, un problème important à mon avis est le suivant:

Problème ouvert 10 *Existe-t'il un moyen de lire sur les invariants topologiques associés à un dessin d'enfant l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$? Si oui, est-elle reliée à l'action de ce même groupe sur les théories topologiques tridimensionnelles.*

Je n'ai pas encore la réponse à cette question mais le travail entamé dans les sections précédentes est clairement orienté dans ce but.

J'espère que le lecteur pardonnera l'aspect un peu elliptique de cette "conclusion". Je n'ai malheureusement pas eu le temps de l'explicitier autant que je l'aurais voulu. Bien des points que j'ai soulevés sont encore conjecturaux mais seul un travail précis permettra de lever un coin du voile sur ces questions. Dans l'introduction de cette thèse, j'ai insisté sur la complexité des problèmes touchant à la classification des théories invariantes conformes bidimensionnelles et à la construction d'une hypothétique théorie des cordes quantique. J'espère avoir convaincu le lecteur de la difficulté du problème mais aussi de l'amusement qu'on peut y trouver.

¹⁷Compliciter l'axiomatique ne sert donc à rien!