

qui vaut trivialement

$$\frac{1}{\sqrt{2}} S_{2N}(an)$$

Finalement, nous obtenons:

$$(6.47) \quad Z_{N,a}[L_{n,1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{(2N) \wedge n}{n}} (S_{2N}(a))^* S_{n \wedge (2N)} \left(\frac{an}{n \wedge (2N)} \right)$$

Nous disposons donc des fonctions de partition des espaces lenticulaires dans les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

6.6 Décompositions de Heegaard et Théorie des Champs.

Nous avons choisi d'utiliser les techniques de chirurgie pour définir nos fonctions de partition à partir des données de Moore et Seiberg. Néanmoins, d'autres approches existent. Dans cette section, nous utilisons la théorie des scindements de Heegaard pour calculer nos invariants topologiques. Dans le cas des variétés sans bord, les résultats utiles datent des années 30. Le cas des variétés avec bords a été traité par Motto dans sa thèse [134] et Crane [28] a essayé de prouver que l'on pouvait définir des fonctions de partition invariantes topologiques par ce biais. Les travaux de Motto étant trop récents pour que j'y aie eu accès assez tôt, je me contenterais ici de montrer que dans le cas des variétés sans bord, la théorie des scindements de Heegaard conduit effectivement à des invariants topologiques. Cette idée a été reprise indépendamment par Kohno dans le cas des théories de Chern-Simons $SU(2)$ [111].

Nous rappellerons tout d'abord les résultats géométriques de Heegaard et Singer [174], puis nous définirons la fonction de partition associée à un tel scindement. Nous montrerons que c'est un invariant topologique et nous expliciterons la connexion avec les invariants calculés par chirurgie.

6.6.1 Scindements de Heegaard.

Nous allons donner les définitions et propriétés géométriques des scindements de Heegaard. Ces scindements permettent de décrire une variété de dimension trois par un difféomorphisme. Toutefois, ce difféomorphisme n'est pas unique et nous décrirons explicitement tous les difféomorphismes associés à une même variété tridimensionnelle.

Définitions.

Les scindements de Heegaard sont définis par:

Définition 73 *Une décomposition de Heegaard de la variété M est une décomposition de la forme $M = H_1 \#_f H_2$ où $H_{1,2}$ sont deux tores pleins et f un difféomorphisme.*

Bien sûr, les tores pleins ont leur bord paramétré de la manière usuelle. Le genre du scindement est le genre de la frontière des tores pleins. Comme nous voulons définir des invariants topologiques, nous avons besoin d'une relation d'équivalence entre scindements de Heegaard:

Définition 74 *Deux scindements de Heegaard sont dits équivalents si et seulement si ils proviennent de la même variété de dimension 3.*

Notre motivation réside dans le théorème suivant [174]:

Théorème 64 (J. Singer) *Toute variété de dimension trois connexe compacte sans bord admet un scindement de Heegaard.*

Il est clair qu'une telle variété admet plusieurs scindements. Citons deux exemples:

- La sphère S_3 est l'union de deux boules B_3 . C'est une décomposition de genre 0. Mais $S_3 = T_1 \#_s \hat{T}_1$ nous donne une décomposition de genre 1.
- Soit h un difféomorphisme de Σ_g qui se prolonge en difféomorphisme d'un tore plein, alors si $M = T_g \#_f \hat{T}_g$, clairement $M = T_g \#_{h \circ f} \hat{T}_g$.

Le difféomorphisme peut être reconstruit à partir d'un diagramme dessiné sur la surface frontière des tores pleins. Plus précisément:

Définition 75 *Soit Σ_g , de genre g , bordant un tore plein H , un ensemble de g courbes tracées sur Σ_g est dit canonique si et seulement si on obtient une boule B_3 en coupant le tore plein H suivant ces courbes.*

Dans le cas d'un scindement de Heegaard de M , si Σ_g désigne la surface commune aux deux tores pleins, le diagramme qui code la manière dont on recolle les deux tores pleins est défini par:

Définition 76 *Le diagramme de Heegaard d'un scindement de Heegaard est formé de deux ensembles de courbes tracées sur Σ_g qui sont canoniques relativement aux deux tores pleins du scindement.*

Etant donné un scindement de Heegaard, il existe plusieurs diagrammes associés car il existe plusieurs choix d'ensembles de courbes canoniques sur une surface. Il suffit de regarder le cas du genre 2 pour s'en convaincre. Réciproquement, on peut chercher à reconstruire à partir d'un couple de g -uplets de courbes simples ne s'intersectant pas sur Σ_g , les scindements de Heegaard dont ils peuvent provenir. Nous allons aborder ce problème puis dans une section suivante donner un critère d'équivalence entre scindements de Heegaard. Nous passons par cet intermédiaire diagrammatique car c'est en ces termes que Singer a exprimé en 1933 son critère d'équivalence.

Diagrammes de Heegaard et difféomorphismes.

Nous reconstruisons un difféomorphisme par la procédure suivante: soit $(e_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ et $(f_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ les deux ensembles de courbes canoniques du diagramme de Heegaard, on cherche φ , difféomorphisme de Σ_g qui envoie e_i sur f_i pour tout i . L'existence et l'unicité sont résolues par les Lemmes suivants:

Lemme 26 *Il existe un difféomorphisme de Σ_g qui envoie un jeu de courbes sur l'autre.*

Preuve: Soient $N[e]$ et $N[f]$ les deux tores pleins construits à partir des ensembles de courbes canoniques, coupons les selon les courbes (e_i) et (f_i) . Cela donne deux ensembles de $2g$ cercles tracés sur des sphères S_2 . Notons $\epsilon_{1,i}$ et $\epsilon_{2,i}$ les cercles déduits de $N[e]$ et $\epsilon'_{1,2,j}$ ceux déduits de $N[f]$. Chacun de ces cercles $\epsilon_{1,2,i}$ borde un disque $D_{1,2,i} \subset S_2$ et nous venons de définir un difféomorphisme de $S_2 \setminus (\cup_i (\bar{D}_{1,i} \cup \bar{D}_{2,i}))$ sur $\Sigma_g \setminus \{(e_i)\}$. Ce difféomorphisme se prolonge par continuité de manière non injective mais surjective à la frontière des disques $D_{1,2,i}$: $\partial D_{1,i}$ et $\partial D_{2,i}$ sont envoyés sur e_i . Nous appelons Φ cette application continue. La même construction peut être effectuée à partir de $[S_2, \epsilon']$ et $[\Sigma_g, (f)]$;

elle donne naissance à Φ' . Mais il existe un difféomorphisme H de $[S_3, \epsilon]$ sur $[S_3, \epsilon']$ qui envoie $\epsilon_{1,j}$ sur $\epsilon'_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ sur $\epsilon'_{2,j}$ pour tout j . On peut de plus le choisir tel que pour tous $P \in \epsilon_{1,i}$ et $P' \in \epsilon_{2,i}$ tels que $\Phi(P) = \Phi(P')$, on ait $\Phi'(H(P)) = \Phi'(H(P'))$. En conséquence, nous en déduisons un homéomorphisme de Σ_g qui envoie (e_i) sur (f_i) pour tout i . \square

Lemme 27 *Les difféomorphismes qui laissent invariant un ensemble de courbes canoniques sur Σ_g peuvent être prolongés au tore plein sous-jacent.*

Preuve: Comme dans la démonstration précédente, un tel difféomorphisme de Σ_g permet de construire un difféomorphisme H de S_2 qui laisse fixe les cercles $\epsilon_{1,2,i}$ et même en fait les disques bordés par ces cercles point par point. La trivialité du groupe modulaire de la sphère [13] entraîne l'existence d'un chemin γ dans $\text{Diff}_+(S_2)$ qui relie h (atteint à $t = 1$) à 1_{S_2} (atteint à $t = 0$). En prenant $\gamma(t)$ sur la boule de rayon $(t + 1)/2$ et 1_{S_2} sur les sphères de rayon $0 < r < 1$, on définit un homéomorphisme de B_3 dont la restriction au bord est H . Comme H laisse fixe point par point les disques bordés par les cercles $\epsilon_{1,2,j}$, nous disposons bien d'un difféomorphisme du tore plein T_g dont la restriction au bord est le difféomorphisme dont nous sommes partis: il suffit de recoller les disques bordés par $\epsilon_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, g\}$. \square

En conséquence, on fabrique à partir d'un diagramme de Heegaard une classe de difféomorphismes. Si (e) et (f) désignent les deux jeux de courbes du diagramme, on note $K[(e), (f)]$ l'ensemble des difféomorphismes de Σ_g qui envoient (e) sur un jeu de courbes homotopes à (f) . Il suffit clairement de travailler dans les groupes modulaires.

Un scindement de Heegaard fournit plusieurs diagrammes. Toutefois,

Lemme 28 *Deux ensembles $K[(e), (f)]$ et $K[(e'), (f')]$ provenant de deux diagrammes de Heegaard issus d'un même scindement sont équivalents sous l'action à droite (respectivement à gauche) des difféomorphismes qui se prolongent à $N[e]$ (respectivement $N[f]$).*

Preuve: Considérons deux jeux de courbes canoniques (e) et (e') pour un même tore plein: T_g . Alors, nous savons qu'il existe un difféomorphisme h de Σ_g qui envoie e_j sur e'_j pour tout j . On lui associe un difféomorphisme de $[S_2, \epsilon]$ sur $[S_2, \epsilon']$ qui envoie deux points en correspondance sur les disques délimités par $\epsilon_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ sur deux points en correspondance sur $\epsilon'_{1,j}$ et $\epsilon'_{2,j}$. Nous prolongeons ce difféomorphisme à la boule B_3 en utilisant une fois de plus la trivialité du groupe modulaire de la sphère. Ceci permet de définir un difféomorphisme \hat{h} de $N[e] = T_g$ sur $N[e'] = T_g$ qui prolonge h .

Dans ce cas, si g est un difféomorphisme de Σ_g ,

$$g \in K[(e), (f)] \iff g \circ h^{-1} \in K[(e'), (f)]$$

où h^{-1} est prolongeable à $N[e]$. Le raisonnement est symétrique pour le changement de (f) en (f') . Ceci prouve le Lemme. \square

Ainsi, à partir d'un difféomorphisme, nous fabriquons un ensemble de diagrammes de Heegaard et nous venons de montrer comment déduire d'un diagramme de Heegaard une classe d'éléments du groupe modulaire de Σ_g . Il reste à déterminer dans quelle mesure deux difféomorphismes de Σ_g sont équivalents, au sens où ils définissent des scindements de Heegaard d'une même variété. Ce problème a été résolu par J. Singer en 1933.

Théorème de Singer.

Le résultat principal de Singer est un critère d'équivalence entre les scindements via les diagrammes associés [174]:

Théorème 65 (J. Singer) *Deux scindements de Heegaard sont équivalents si et seulement si on peut transformer les diagrammes de Heegaard de l'un en ceux de l'autre grâce à un nombre fini de transformations du type suivant et de leurs inverses:*

- *Mouvements à genre fixé: on passe de $[(e_i), (f_i)]$ à $(e'_i), (f'_i)]$ où (e_i) et (e'_i) sont deux ensembles de courbes canoniques pour le premier tore plein et (f_i) et (f'_i) sont deux ensembles de courbes canoniques pour le second tore plein.*
- *$g \mapsto g + 1$: on redessine le diagramme de départ sur les g premières anses de Σ_{g+1} et on pose $e_{g+1} = a_{g+1}$ et $f_{g+1} = b_{g+1}$.*

Pour aller plus loin, nous devons traduire cela en termes de difféomorphismes. Le lemme 28 montre que, dans le groupe modulaire, nous devons considérer une classe pour l'action à droite du groupe des difféomorphismes qui se prolongent au premier tore plein et à gauche de ceux qui se prolongent au second tore plein.

Dans les autres mouvements, le genre augmente. Nous gardons le même difféomorphisme sur les g premières anses et sur la dernière et nous prenons s qui envoie le cycle (a_{g+1}) sur le cycle (b_{g+1}) . Le recollement de ces deux difféomorphismes ne pose pas de problème car on peut, en composant par un difféomorphisme connexe à l'identité, fixer un disque sur la surface de genre g et sur le tore. Cela permet alors en recollant via le bord de ce disque de définir¹⁴ $\varphi \# s$ où $\varphi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$.

Introduisons alors la notion de groupe de Suzuki [176] au genre g . Soit $T_g \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_g)$ usuel, dont le bord est paramétré par $\varphi_g : \partial T_g \rightarrow \Sigma_g$, alors nous définissons le morphisme de restriction I_g par:

$$\begin{aligned} I_g : \text{Diff}_+(T_g) &\longrightarrow \text{Diff}_+(\Sigma_g) \\ f &\longmapsto \varphi_g \circ f|_{\partial T_g} \circ (\varphi_g)^{-1} \end{aligned}$$

Le groupe de Suzuki du tore plein T_g est alors $\text{Suz}(T_g) = \text{Im}(I_g)$. Nous formulons alors la proposition suivante:

Proposition 31 *Deux difféomorphismes φ_1 et φ_2 de Σ_{g_1} et Σ_{g_2} respectivement définissent des scindements de Heegaard équivalents si et seulement si ils sont reliés par un nombre fini de transformations suivantes et de leurs inverses:*

$g_1 = g_2$ Il existe $(h, h') \in S_{g_1}^2$ tels que

$$\varphi_2 = h \circ \varphi_1 \circ h'.$$

$g_2 = g_1 + 1$ On prolonge φ_1 par S :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \# s.$$

¹⁴On choisit un représentant de la classe modulaire de s qui laisse fixe un petit disque sur $S_1 \times S_1$ qui sert à faire le recollement avec Σ_g .

C'est sous cette forme que le théorème de Singer est utilisable pour définir des invariants topologiques à trois dimensions.

Remarque : Le contenu de la proposition 31 est d'ailleurs relativement intuitif: les mouvements à genre fixé peuvent être clairement réabsorbés dans chacun des tores pleins et le mouvement $g \mapsto g + 1$ pour $g = 0$ donne l'équivalence entre les scindements $S_3 = B_3 \sharp B_3$ et $T_1 \sharp_s T_1$ que nous avons déjà citée en exemple. \square

6.6.2 Fonction de partition associée à un scindement de Heegaard.

A chaque variété de dimension 3 sans bord, on associe un ensemble de difféomorphismes en genres variés. Mais d'un autre côté, toute solution des équations de Moore et Seiberg nous fournit une représentation projective des groupes modulaires en tout genre. Cela nous permet donc de définir la fonction de partition d'un difféomorphisme, ou plutôt d'un scindement de Heegaard. Il est alors facile de vérifier qu'elle est multipliée par une phase dans un des mouvements de Singer.

Fonction de partition d'un scindement de Heegaard.

Nous notons ρ_g la représentation projective de $\mathcal{M}(g, 0)$ dans $H_{g,0}$ obtenue à partir des données de Moore et Seiberg dont nous disposons. Dans ce cas, nous fixons \mathcal{G} un 1-squelette de T_g qui définit une base de $H_{g,0}$ comme dans la section 6.2.1. On pose, si \mathcal{C}_0 est le coloriage trivial de \mathcal{G} :

Définition 77 Soit $M = T_g \sharp_h \hat{T}_g$ un scindement de Heegaard de M de genre g , la fonction de partition de ce scindement est

$$Z_H[h] = \langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} | (\rho_g(h) | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}) \rangle$$

Bien sûr:

Proposition 32 Soit $h \in \mathcal{M}(g, 0)$, $\langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} | (\rho_g(h) | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}) \rangle$ ne dépend pas du squelette \mathcal{G} choisi.

Preuve : L'indépendance vis à vis de \mathcal{G} est triviale. En effet, une autre base se déduit de celle-ci par une succession de produits tensoriels d'applications F et B . Mais celles-ci laissent l'état $|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}\rangle$ invariant et donc cet état est un point fixe de toutes les transformations de dualité ce qui prouve notre assertion. \square

Invariance sous les mouvements de Singer.

Nous allons montrer que $Z_H[h]$ change d'une puissance de $\exp(2i\pi c/24)$ dans un mouvement de Singer. On notera $|\phi_g\rangle = |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}\rangle$ pour alléger.

Mouvements $g \mapsto g + 1$ Comparons

$$\langle \phi_g | \rho_g(h) | \phi_g \rangle \text{ et } \langle \phi_{g+1} | \rho_{g+1}(h \sharp_s) | \phi_g \rangle.$$

Il existe une isométrie de $H_{g+1,0}$ dans $H_{g,1} \otimes H_{1,1}$ et bien sûr, si ϕ désigne cette injection¹⁵:

$$(\phi \circ \rho_{g+1})(h \sharp_s) = (\rho_{g,1}(h) \otimes \rho_{1,1}(S)) \circ \phi$$

¹⁵Reliée à la localité à la frontière.

où h agit sur les g premières anses. Finalement:

$$\langle \phi_{g+1} | \rho_{g+1}(h \sharp s) | \phi_g \rangle = \frac{\langle \phi_1 | (S | \phi_1) \rangle}{S_0^0} \langle \phi_g | \rho_g(h) | \phi_g \rangle.$$

Comme $\langle \phi_1 | S | \phi_1 \rangle = S_0^0$, $Z_H[h]$ est invariant par ce mouvement de Singer.

Mouvements à genre fixé Nous avons besoin de l'action du groupe \mathcal{S}_g sur l'état $|\phi_g\rangle$. Elle est donnée par le résultat suivant:

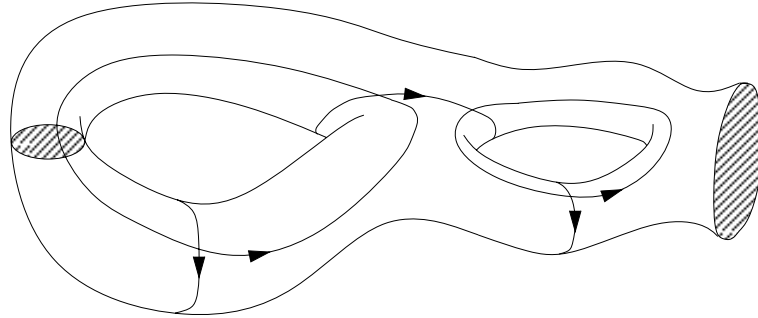
Lemme 29 *Nous avons:*

$$(6.48) \quad \forall f \in \frac{\text{Diff}_+(T_g)}{\text{Diff}_{+,0}(T_g)}, \quad \rho_g(i_g(f))|\phi_g\rangle = \exp\left(2\pi i \frac{n(f)c}{24}\right)|\phi_g\rangle$$

où $n(f) \in \mathbb{Z}$.

Preuve: La description d'un ensemble fini de générateurs du groupe de Suzuki $\text{Suz}(T_g)$ en termes de twists de Dehn¹⁶ due à Suzuki [176] permet par un calcul explicite de prouver le Lemme. Nous avons décrit au chapitre 3 comment étaient représentés les twists de Dehn. Nous ne donnerons pas ici la preuve complète du Lemme mais nous avons choisi un exemple qui illustre bien les raisonnements que l'on peut faire. Tous les détails se trouvent dans l'article de Suzuki [176] et les calculs sont excessivement simples. Nous utilisons également ses notations!

Parmi les générateurs de \mathcal{S}_g , $\Theta_{1,2}$ est un des plus complexes: on déplace la première anse le long du cycle (b_2) :



La décomposition en twists de Dehn est $T(b_2)T(\gamma)$ où $\gamma = (T(a'_2)T(b_2))(c_1)$ où $T(\gamma)$ désigne le twist de Dehn le long de la courbe γ orientée. Mais alors, $T(\gamma) = T(a'_2)^{-1}T(b_2)^{-1}T(c_1)T(b_2)T(a'_2)$. En termes de représentations, la projectivité de ρ_g introduit des puissances de $\exp(2i\pi c/24)$ que nous ne comptons pas en détail, mais chacun des twists $T(b_2)$, $T(a'_2)$ et $T(c_1)$ est facilement calculable. Dans chaque twist de Dehn, aucune ligne portant un indice non nul ne va apparaître et cela justifie la notation suivante (un peu abusive):

$$\begin{aligned} \rho_g(T(\gamma))|\phi_g\rangle &= T(T^{-1}S^{-1}T^{-1})T(TST)T^{-1}|\phi_g\rangle \\ \rho_g(T(b_2))\rho_g(T(\gamma))|\phi_g\rangle &= TSTS^{-1}TS|\phi_g\rangle \end{aligned}$$

et comme $TST = C(STS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}S$, $|\phi_g\rangle$ est invariant sous l'action de $\Theta_{1,2}$.

Les autres générateurs sont plus simples à étudier et sont laissés au lecteur. \square

¹⁶Définis dans le traité de Birman [13].

En conséquence,

Théorème 66 *A des puissances de $\exp(2i\pi c/24)$ près, $Z_H[h]$ est constant sur l'ensemble des scindements de Heegaard d'une variété à trois dimensions donnée.*

Cela montre que l'utilisation des scindements de Heegaard permet de définir des invariants topologiques pour des variétés sans bord ni décoration. On parle d'invariants de Heegaard associés à une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous allons maintenant faire le lien avec l'approche par chirurgie, tant au niveau géométrique qu'au niveau des invariants que ces deux méthodes permettent de calculer.

6.6.3 Lien avec la méthode chirurgicale.

Nous commencerons par montrer la relation entre, d'une part l'existence des scindements de Heegaard et le critère de Singer, et d'autre part le calcul de Kirby. Puis nous verrons que les invariants calculés par les techniques chirurgicales sont en fait identiques à ceux calculés grâce aux scindements de Heegaard à des puissances de $\exp(2\pi ic/24)$ près.

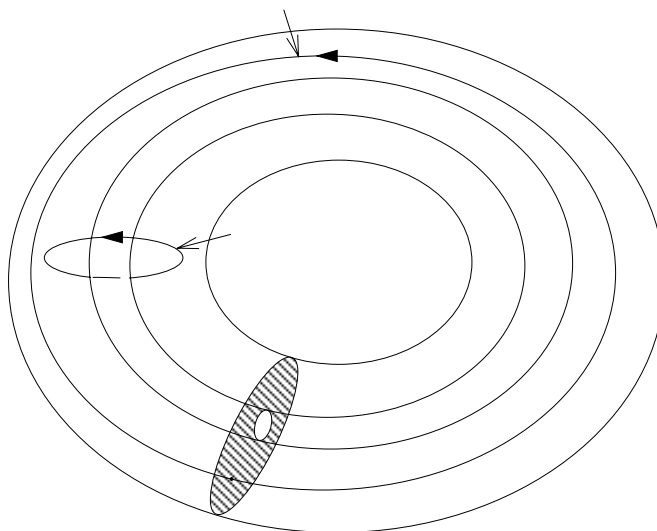
Relation géométrique entre scindements de Heegaard et chirurgie.

A partir de l'existence des scindements de Heegaard pour toute variété tridimensionnelle sans bord, on peut montrer que cette même variété admet une présentation par chirurgie. C'est d'ailleurs la méthode utilisée par Lickorish et Wallace pour prouver l'existence de telles présentations [122].

Pour arriver à ce résultat, remarquons que le groupe modulaire en genre g est engendré par les twists de Dehn le long des courbes (a_j) , (b_j) et (c_k) avec les conventions usuelles. Si nous savons trouver une présentation par chirurgie des cobordismes paramétrés $M(f)$ associés à chacun de ces difféomorphismes à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$, alors c'est gagné. En effet, pour tout $f \in M(g)$, $M(f)$ admet une présentation par chirurgie à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$ et comme \hat{T}_g se déduit par chirurgie de $S_3 \setminus T_g$, alors $M = T_g \#_f \hat{T}_g$ admet une présentation par chirurgie à partir de S_3 .

Pour commencer, plaçons nous en genre 1. On note $M(a)$ et $M(b)$ les variétés associées aux twists de Dehn selon (a) et (b) . Alors introduisons dans $\Sigma_1 \times [0, 1]$ les cycles (a) et (b) tracés dans ce cylindre

et parallèles aux cycles correspondants sur le tore Σ_1 :



Nous pouvons énoncer:

Théorème 67 *La variété $M(a)$ est obtenue par chirurgie à partir de $\Sigma_1 \times [0, 1]$ le long du cycle $-(a)$ muni du framing -1 . De même, $M(b)$ est obtenue par chirurgie le long de $-(b)$ avec le framing -1 .*

Preuve: Nous donnons l'idée de la preuve en laissant au lecteur le soin de compléter les détails. En effet, les techniques mises en œuvre sont abondamment utilisées dans l'Appendice 6.A.

Remarquons tout d'abord que les variétés obtenues sont bien des cylindres. En effet, de la même manière que nous avons obtenu la généralisation des mouvements de type K de Kirby dans le cas où des graphes trivalents étaient présents, nous pouvons ici étudier l'influence du retrait dans $\Sigma_1 \times [0, 1]$ de $-(a)$ (respectivement $-(b)$) munis du framing -1 . Le lecteur vérifiera que l'on obtient bien un cylindre à un changement de paramétrisation d'un des bords près. Il s'agit du bord interne pour $-(a)$ et externe pour $-(b)$. Cela signifie que les chirurgisées sont de la forme $M(f)$ pour un difféomorphisme f du tore. Trouver ce difféomorphisme n'est pas bien difficile. Regardons ce qui se passe pour (b) avec le framing 1.

Traçons un cycle (b) sur le tore intérieur, il est déplaçable sur le tore extérieur sans rencontrer le tore de chirurgie. Cela signifie que f le laisse invariant. Reprenons l'expérience avec un cycle (a) . Nous l'aménonons sur le tore extérieur à une petite boucle près qui s'enroule autour du tore de chirurgie. Cette boucle *au sein* du tore de chirurgie, c'est à dire *compte tenu du recollage via TS* , est homotope à $-(b_c)$. Mais dans $D_2 \times S_1$, (b_c) est homotope à $(b_c) - (a_c)$. Cette dernière courbe, ramenée dans la chirurgisée est homotope à (b) . Nous pouvons alors amener cette boucle sur le tore externe ce qui montre que l'on a $(a) + (b)$. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice représentant l'action du twist de Dehn selon (b) . Ceci montre que les cycles (a) et (b) tracés sur le tore extérieur sont décalés de $T(b)^{-1}$ par rapport aux mêmes cycles tracés sur le tore intérieur mais translatsés le long du cylindre. En conséquence, la chirurgie le long de (b) avec framing 1 produit $M(T(b)^{-1})$ ce qui prouve notre assertion (Ouf!).

Le lecteur reprendra le même raisonnement pour $M(a)$. \square

La situation en genre g n'est guère plus complexe. En effet, les twists de Dehn selon les cycles (a_j) (respectivement (b_j)) sont trivialement obtenus par chirurgie le long de $-(a_j)$ munie du framing -1 (respectivement $-(b_j)$ avec le même framing) dans $\Sigma_g \times [0, 1]$. Restent les twists de Dehn le long des cycles (c_k) . Le lecteur vérifiera que la chirurgie le long de $-(c_k)$ avec framing -1 dans Σ_g permet de retrouver $M(T(c_k))$.

Théorème 68 *Pour chacun des cycles (a_j) , (b_j) , et (c_k) , la variété $M(\gamma)$ est obtenue à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$ par chirurgie le long de $-(\gamma)$ avec framing -1 .*

Comme nous l'avons expliqué plus haut, cela prouve l'existence de présentations par chirurgie à partir de l'existence des scindements de Heegaard. Il est possible de prendre deux présentations par chirurgie de M fabriquées à partir de deux scindements de Heegaard de M qui diffèrent par un mouvement de Singer de type $g \mapsto g + 1$. En utilisant les mouvements de Kirby de type K , on relie très facilement ces présentations par chirurgie comme on pouvait s'y attendre.

Remarque : Il serait bien agréable de retrouver l'existence des présentations par scindement de Heegaard à partir de la chirurgie. Malheureusement ce problème est un peu plus difficile à résoudre. En effet, pour reconstruire un scindement de Heegaard, nous devons *bien choisir* la présentation par chirurgie utilisée. Prenons S_3 munie d'un entrelac L et de deux surfaces de genre g plongées, ne s'intersectant pas et n'intersectant pas L . Elles ne définissent pas par chirurgie un scindement de Heegaard de M_L , c'est à dire un découpage de M_L en $T_g \sharp M(f) \sharp T_g$! Si c'était le cas, il n'y aurait pas de plongement non trivial¹⁷ de Σ_g dans la sphère S_3 . Pour cette raison la reconstruction d'un scindement de Heegaard à partir des présentations par chirurgie d'une variété sans bord est au delà de ma compréhension actuelle.

J'ai appris récemment que ce problème était analysé par D. Bennequin et C. Mercat à Strasbourg. Un théorème sera donc peut-être disponible. \square

Equivalence des invariants de Heegaard et des invariants chirurgicaux.

Plaçons nous maintenant au niveau algébrique. Soit $M = T_g \sharp_f \hat{T}_g$ un scindement de Heegaard de M . A partir de ce scindement de Heegaard, nous savons définir une présentation par chirurgie de M et donc calculer $Z[M]$, fonction de partition de M dans la TTR définie précédemment. D'autre part, nous savons calculer $Z_H[M]$ à partir des représentations projectives des groupes modulaires en tout genre définies par la solution des équations de Moore et Seiberg dont nous sommes partis. Nous allons montrer que:

Théorème 69 *A une puissance de $\exp(2i\pi c/24)$ près, $Z_H[M]$ est égal à $Z[M]$.*

Preuve : Calculons par la présentation par chirurgie les opérateurs $\phi[M(a_j)]$, $\phi[M(b_j)]$ et $\phi[M(c_k)]$. Le cas du genre un est extrêmement instructif et suffit à donner l'essentiel de la preuve.

En genre 1, nous devons évaluer:

$$\langle \chi_j | (\phi[M(a)]^{-1} | \chi_i \rangle \text{ et } \langle \chi_j | (\phi[M(b)]^{-1} | \chi_i \rangle$$

Dans le premier cas, nous remarquons que:

$$[(T_1, C_i) \sharp_{T^{-1}} [\widehat{(T_1, C_j)}]] \simeq [(S_2 \times S_1, C_i, C'_j)]$$

¹⁷Ne définissant pas un tore plein et son complémentaire

où la ligne C'_j est parallèle à C_1 et donc à S_1 mais avec un framing modifié. Finalement, nous trouvons facilement :

$$(6.49) \quad \phi[M(a)]|\chi_i\rangle = e^{-2\pi ic/24}T^{-1}|\chi_i\rangle$$

ce qui montre que dans la théorie topologique construite précédemment, au difféomorphisme T est associé la matrice $\exp(2\pi ic/24)T$. De même, nous vérifions facilement que :

$$(6.50) \quad \phi[M(b)]|\chi_i\rangle = e^{-2\pi ic/12}(TST)^{-1}|\chi_i\rangle$$

À des phases près, nous retrouvons les matrices obtenues à partir de la représentation de Moore et Seiberg de M_1 . Le lecteur vérifiera sans difficultés que ces considérations s'étendent au genre g , toujours à des phases près. Cela n'est pas surprenant vu la projectivité des représentations considérées. La functorialité projective montre que $\phi[M(g)]$ calculé par chirurgie s'identifie avec ce que l'on obtient en suivant les prescriptions de Moore et Seiberg, à ces fameuses phases près.

En conséquence, comme $Z_H[M] = \langle T_g, \mathcal{G}_{c_0} | (\rho_g(f) | T_g, \mathcal{G}_{c_0}) \rangle$, cela nous montre que $Z_H[M]$ et $Z[M]$ sont égales à une puissance de $\exp(2\pi ic/24)$ près. \square

Remarque : L'origine de ces phases est relativement claire. Il faudrait pour les décrire parfaitement traiter convenablement le framing des variétés considérées. En particulier, le framing des différents tores pleins doit être précisé dans un scindement de Heegaard de même que la variété tridimensionnelle associée à un difféomorphisme. Comme je l'ai déjà mentionné, les problèmes techniques que cela pose ne sont pas tous résolus, du moins en ce qui me concerne. \square

6.6.4 Quelques extensions possibles...

L'extension la plus naturelle consiste à englober les variétés à bord. Nous souhaiterions définir les opérateurs invariants topologiques associés aux variétés à bord à partir des scindements de Heegaard sans faire référence à la chirurgie. C'est la voie suivie par Crane [28]. Nous ne donnerons ici qu'un aperçu des méthodes utilisées sans prétendre traiter ce problème. Le lecteur pardonnera le caractère moins pédagogique de cette section, contrepartie de sa concision.

Nous commencerons par donner les principaux éléments de la théorie des scindements de Heegaard des variétés à bords, puis nous discuterons le critère de Singer généralisé. Enfin, nous verrons comment ces concepts s'inscrivent dans la perspective de la théorie des champs.

Scindements de Heegaard de variétés avec bords.

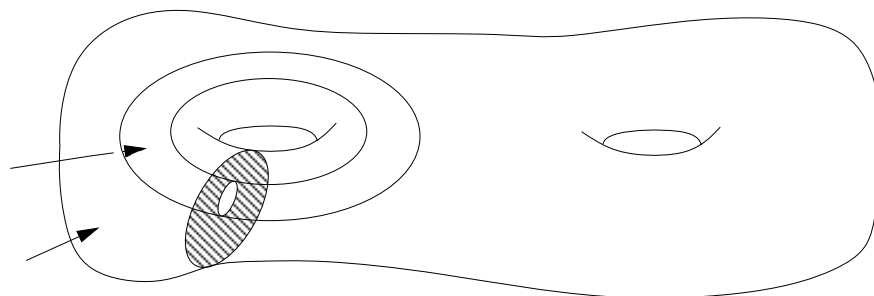
Nous souhaitons généraliser la notion de scindement de Heegaard pour un cobordisme interpolant entre N_1 et N_2 . Pour cela, nous devons d'abord étendre la notion de tore plein utilisée dans le cas des variétés sans bord. La notion correspondante est celle de corps de compression [134, Chapitre 3].

Un tore plein à g trous est obtenu en partant de Σ_g de genre g et en la plongeant trivialement dans \mathbb{R}^3 . Cette surface scinde \mathbb{R}^3 en une partie compacte et une partie non compacte. Le tore plein correspond à la partie compacte. Grossièrement, nous pouvons dire qu'il est obtenu "en remplissant l'intérieur" d'une surface de genre g . Pour obtenir un objet plus général, il suffit de faire ce remplissage partiellement. Ainsi, on part d'un tore plein et on évide un voisinage tubulaire d'un sous-graphe du 1-squelette de ce tore plein. La définition précise d'un corps de compression est donc la suivante :

Définition 78 *Un corps de compression est un cobordisme M entre N_- et N_+ appelés respectivement frontière interne et externe tel que N_- n'ait aucune composante connexe difféomorphe à une sphère et qui est obtenu en rajoutant à $N_- \times [0, 1]$ des 0 et des 1-poignées.*

Le lecteur vérifiera que cela correspond à l'image intuitive décrite précédemment et qu'un tore plein ordinaire est un corps de compression dont la frontière interne est vide et dont la frontière externe est une surface de genre g .

Mais nous devons considérer des cobordismes paramétrés en vue de l'application à la TQC. Nous devons traiter avec soin les positions et paramétrages des bords internes et externes des corps de compression. Dans ce cas, le corps de compression devient un cobordisme paramétré. Parmi tous les paramétrages choisis, certains peuvent être qualifiés de standards. Ils correspondent au cas où l'on part d'un tore T_g et on enlève des voisinages tubulaires de cycles (b_j) , éventuellement non disjoints. Les cycles (a) et (b) de la frontière interne¹⁸ sont alors obtenus trivialement à partir des cycles correspondants sur la frontière externe. Pour chaque topologie de surface interne N_1 et de surface externe N_2 et pour leurs positions relatives, nous définissons un corps de compression standard $W[N_1, N_2]$. Le schéma suivant aidera le lecteur à imaginer ce que peut être un corps de compression:



La notion de scindement de Heegaard est alors relativement triviale:

Définition 79 *Un scindement de Heegaard d'une variété M interpolant entre N_1 et N_2 est une décomposition de M en recollement de deux corps de compression W_1 et W_2 via leur bords externes:*

$$M = W_1 \sharp W_2$$

Et bien sûr, le lecteur trouvera dans la thèse de Motto [134, Chapitre 3, théorème 3.3] le résultat suivant:

Théorème 70 (M. Motto) *Toute variété de dimension 3 interpolant entre N_1 et N_2 et dont aucune composante connexe du bord n'est difféomorphe à S_3 admet un scindement de Heegaard.*

Il nous reste à traduire cela dans un langage adapté à la TQC. En utilisant des corps de compression standards, nous pouvons montrer que tout cobordisme paramétré connexe s'obtient en recollant deux corps de compression standards via un difféomorphisme:

$$M \simeq W[N_1, N_{int}] \sharp_f \widehat{W[N_2, N_{int}]}$$

Bien sûr, f n'est pas unique. On se rappelle que dans le cas sans bord, f était défini à droite comme à gauche à un élément du groupe du Suzuki près. Le même problème se rencontre ici et une des difficultés de cette approche est la définition précise de l'analogue du groupe de Suzuki dans le cas avec bords. Nous allons décrire maintenant les scindements de Heegaard d'une même variété.

¹⁸Qui en définissent le paramétrage.

Théorème de Singer généralisé.

Dans le cas sans bord, l'opération qui consistait à rajouter une anse à la surface et à prolonger le difféomorphisme par S jouait un rôle important. Nous parlerons ici de stabilisation pour la désigner: on rajoute simplement une anse au bord externe et on prolonge le difféomorphisme par S . Au niveau des corps de compression, on en prend la somme connexe avec un tore plein T_1 pour chaque corps. Cela définit aussi un scindement de Heegaard de la variété de départ.

Nous généralisons comme suit la notion de groupe de Suzuki:

Définition 80 *Soit $W[N_1, N_2]$ un corps de compression paramétré standard, le groupe de Suzuki associé à ce corps de compression est l'ensemble des difféomorphismes de N_2 qui se prolongent en un isomorphisme de $W[N_1, N_2]$. On le note $\text{Suz}(W[N_1, N_2])$.*

Dans ce cas, le théorème de Singer 65 se généralise comme suit [134, Chapitre 4, théorème 4.1]:

Théorème 71 *Deux scindements de Heegaard de M interpolant entre N_1 et N_2 sont nécessairement reliés par une suite finie de transformations du type suivant et de leurs inverses:*

- *Les deux scindements diffèrent par stabilisation.*
- *Les corps de compression $W[N_1, N]$ et $W[N_2, N]$ ne changent pas mais il existe $h \in \text{Suz}(W[N_1, N])$ et $h' \in \text{Suz}(W[N_2, N])$ tels que, si f est le difféomorphisme utilisé pour le recollement: $f' = h' \circ h \circ h$.*

C'est la généralisation immédiate du théorème de Singer original.

Et la Théorie des champs dans tout ça?

Tout ceci devrait nous permettre de définir une TTR à partir des scindements de Heegaard de variétés à bords. En effet, nous devons procéder par étapes:

- Nous devons définir les opérateurs associés aux corps de compression standards, de manière cohérente et sans aucune ambiguïté de phase.
- Cela permet de définir les opérateurs associés à une variété avec bords mais sans décoration grâce aux représentations projectives des groupes modulaires fournies par toute solution des équations de Moore et Seiberg. Bien sûr, l'opérateur associé ne doit pas dépendre du scindement de Heegaard choisi!

Remarquons que l'invariance par stabilisation est relativement triviale à vérifier mais que l'invariance sous l'action à droite et à gauche des groupes de Suzuki est plus difficile à appréhender. Comme nous ne disposons pas d'un ensemble de générateurs explicite pour ces groupes de Suzuki généralisés, il reste un peu de travail à faire. Le résultat naturel nécessaire est une généralisation triviale du théorème de Suzuki mais encore faut-il le prouver!

- Tout ceci doit être étendu aux variétés décorées. Ou bien, il faut revenir à la définition des valeurs moyennes d'opérateurs à partir de variétés sans bord. Je n'ai pas réfléchi de manière approfondie à ce problème et le lecteur comprendra que je ne puisse en dire plus.