4.6 Preuve par les équations de Moore et Seiberg.

Dans cette section, nous donnons une preuve qui utilise les résultats de Moore et Seiberg concernant l'invariance modulaire des théories rationnelles [132]. En un sens, cette démarche est plus rapide mais moins élémentaire que l'approche combinatoire. Nous commencons par rappeler le résultat général dont nous aurons besoin, puis nous l'appliquerons au cas des modèles $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

4.6.1 Le "petit" théorème de naturalité.

Nous allons rappeler les résultats obtenus par Moore et Seiberg [132], et par Verlinde, Verlinde et Dijkgraaf [44] concernant la forme générique de la fonction de partition sur le tore d'une théorie invariante conforme rationnelle. Les résultats que nous utilisons ici constituent ce que l'on peut appeler le "petit" théorème de naturalité:

Théorème 50 (G. Moore, N. Seiberg, R. Dijkgraaf, E. et H. Verlinde) *Si $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre de symétrie maximale d'une TICR, et $(\chi_i)_i$ les caractères de cette algèbre chirale sur le tore, alors il existe un automorphisme σ de l'algèbre de Verlinde relative à $\mathcal{A}$ tel que la fonction de partition de la TICR soit de la forme*

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_i \chi_i(\tau)\,\chi_{\sigma(i)}(\bar{\tau}) \tag{4.45}$$

Enfin, ce résultat est complété par la proposition suivante:

Proposition 20 *Si σ est un automorphmisme de l'algèbre de Verlinde de $\mathcal{A}$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall (i,j), \quad h_{\sigma(i)} &\equiv h_i \pmod 1 \\ S_{\sigma(i)}{}^{\sigma(j)} &= S_i{}^j \end{aligned}$$

alors $\sum_i \chi_i(\tau)\,\chi_{\sigma(i)}(\bar{\tau})$ est invariante modulaire.

Ces deux résultats montrent qu'en fait, le contenu en champs de la théorie ne dépend que des données de Moore et Seiberg une fois que l'on a identifié la symétrie maximale du modèle. Pratiquement ceci revient à identifier *tous* les opérateurs de dimension $(h,0)$ où $h\in\mathbb{N}$ et à considérer cet ensemble comme l'algèbre chirale maximale $\mathcal{A}$ du modèle. Nous allons voir une illustration de cette technologie dans le cas du modèle Gaussien rationnel. Rappelons brièvement la preuve de ces deux théorèmes.

Preuve du Théorème 50 : La preuve la plus simple a été donnée par E. et H. Verlinde et R. Dijkgraaf [44], nous nous contentons de la rappeler sans entrer dans les détails.

En considérant l'algèbre de symétrie maximale de la théorie, nous considérons tous les champs primaires dont une des dimensions h où $\bar{h}$ est nulle dans l'algèbre chirale. Du point de vue des multiplicités $N_{i,j}$ des champs primaires relativement à cette algèbre maximale, cela entraine que $N_{i,0}=N_{0,i}=\delta_{i,0}$. L'invariance selon S s'écrit en divisant par $S_0{}^0$

$$\frac{S_i{}^k}{S_0{}^0} N_k{}^j = N_i{}^k \frac{S_k{}^j}{S_0{}^0}$$

qui, spécialisé à $i=0$ devient

$$\frac{S_0{}^k}{S_0{}^0} N_k{}^j = \frac{S_0{}^j}{S_0{}^0}$$

Comme ${S_0}^i \geq {S_0}^0$ et ${N_i}^j \in \mathbb{N}$, cela montre qu'à j fixé un et un seul k n'annule pas ${N_k}^j$. En conséquence il existe une application $i \mapsto \sigma(i)$ telle que $N_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Elle vérifie de plus ${S_i}^j = {S_{\sigma(i)}}^{\sigma(j)}$ et ceci montre que σ est bijective. En remplacant dans la formule de Verlinde ${S_i}^j$ par ${S_{\sigma(i)}}^{\sigma(j)}$ nous voyons que $N_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)} = N_{i,j,k}$ et en utilisant le fait que les colonnes de S forment une base de $\mathbb{C}^n$, $\sigma(\hat{\imath}) = \widehat{\sigma(i)}$. En termes plus intrinsèques: σ définit un automorphisme de l'algèbre de Verlinde. $\square$

Preuve de la Proposition 20 : La condition $h_{\sigma(i)} \equiv h_i \pmod 1$ assure l'invariance sous la transformation modulaire T. L'autre condition assure l'invariance sous S. $\square$

Remarque : Nous n'avons pas cherché à utiliser le théorème de naturalité proprement dit car cela nécessiterait de connaître la forme explicite des matrices F et B du modèle. Nous n'avons pas eu le temps de les calculer. Toutefois, ceci ne pose aucune difficulté de principe. Par ce biais, nous pourrions accéder à toutes les algèbres de développement des produits d'opérateurs dans les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Bien entendu, un tel résultat n'est intéressant que s'il est *explicite*.

Dans le cas des théories associées à un produit de groupes cycliques, il est vraisemblable que vont apparaître des algèbres de développement en produit d'opérateurs qui ne sont pas obtenues comme produit tensoriel d'algèbres relatives aux différents facteurs du produit. Ceci prolonge les remarques faites dans l'Appendice 3.B du chapitre 3. $\square$

4.6.2 Cas d'un groupe abélien quelconque.

Dans notre cas, comme les règles de fusion définissent l'algèbre de groupe de G abélien, il est aisé de caractériser les extensions de l'algèbre chirale de départ $\mathcal{A}_0$. Nous pouvons voir les représentations de $\mathcal{A}_0$ comme indexées par les éléments de G. Les extensions de $\mathcal{A}_0$ correspondent aux sous-groupes de G formés d'éléments dont les champs primaires associés ont des dimensions entières. Soit H un tel sous-groupe, l'extension de l'algèbre chirale $\mathcal{A}_0$ est définie par

$$\mathcal{A}_H = \bigoplus_{h\in H} V_h.$$

Les représentations irréductibles de cette algèbre sont des représentations réductibles de $\mathcal{A}_0$ et sont de la forme

$$\bar{V}_g = \sum_{h\in H} V_{g+h}$$

où $g \in G$. Nous imposons que le développement du produit de ϕ_g et des $(\phi_h)_{h\in H}$ soit monovalué car dans la nouvelle théorie, les $(\phi_h)_{h\in H}$ comme ϕ_g font partie du contenu en champs du modèle et donc le développement à courte distance de deux tels champs ne doit faire apparaître que des puissances entières de la différence entre les positions (dans le plan complexe) des points d'insertion. Nous avons alors des relations de commutation entre les modes et cela définit les représentations de $\mathcal{A}_H$. Le champ primaire ϕ_g relativement à $\mathcal{A}_H$ est un champ primaire relativement à $\mathcal{A}_0$. L'ensemble des $g \in G$ vérifiant cette propriété de localité est un sous-groupe de G contenant bien sûr H. En effet, nous avons vu comment la dimension du champ ϕ_g s'exprimait en fonction de g dans la section 4.2: $h_g \equiv K(g,g)/2 \pmod 1$ où K est bilinéaire symétrique. Comme pour tout $h \in H$, $K(h,h)/2$ est entier, la condition de localité est $\forall h \in H$, $K(g,h) \in \mathbb{Z}$ qui définit un groupe $L_H(G)$ contenant H. Les représentations irréductibles de $\mathcal{A}_H$ sont indexées par les éléments du groupe quotient $G_H = L_H(G)/H$. Ce groupe décrit les règles de fusion relatives à $\mathcal{A}_H$. Finalement, si $\mathcal{A}_H$ est l'algèbre de symétrie maximale du modèle considéré, il existe σ automorphisme de G_H tel que $h_{\sigma(g)} \equiv h_g \pmod 1$ et la fonction de partition sur le tore est donnée par

$$Z = \sum_{\bar{g} \in G_H} (\sum_{h \in \bar{g}} \chi_h(\tau))(\sum_{k \in \sigma(\bar{g})} \bar{\chi}_k(\bar{\tau})).$$

Ceci classe les fonctions de partition invariantes modulaires de ces modèles.

4.6.3 Classification des invariants $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dans le cas de $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous pouvons ainsi redémontrer le théorème 49. Considérons une théorie $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de paramètre a; les dimensions des opérateurs sont données en 4.2 Nous allons d'abord examiner les différentes extensions possibles de l'algèbre chirale $\mathcal{A}_0$ puis classer les fonctions de partition invariantes modulaires.

Structure du modèle.

Pour tout diviseur α de N, il existe un et un seul sous groupe H_α de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'ordre α, c'est le groupe cyclique engendré par N/α. Les dimensions $(h_k)_{k \in H}$ sont entières si et seulement si

$$\frac{aN}{2\alpha^2} \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha | N$ est que N est premier avec a, cela donne en prenant en compte les conditions de parité sur a:

$$\alpha^2 | n \tag{4.46}$$

Supposons cette condition réalisée. L'algèbre chirale $\mathcal{A}_H$ existe et nous pouvons faire la théorie de ses représentations. La condition de localité pour un champ ϕ_n est

$$\frac{an}{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

et donc $\alpha | n$. Finalement,

$$L_{H_\alpha}(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha)\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \frac{L_{H_\alpha}(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}})}{H_\alpha} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha^2)\mathbb{Z}} \tag{4.47}$$

La dimension d'un champ primaire $\bar{\phi}_n = \phi_{n\alpha}$ par rapport à $\mathcal{A}_{H_\alpha}$ est modulo 1:

$$h_n = \frac{a\alpha^2}{2N} n^2.$$

La matrice S est donnée par:

$$S_n{}^m = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \exp{(2\pi i \frac{a\alpha^2 nm}{N})}$$

ce qui montre que nous disposons d'une théorie $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ de paramètre a.

Invariants modulaires.

L'algèbre de symétrie maximale de notre modèle est une extension de $\mathcal{A}_0$ que, pour fixer les idées, nous supposerons être $\mathcal{A}_{H_\alpha}$ construite dans la section précédente. Les invariants modulaires sont alors classés par les automorphismes σ de $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ qui vérifient[18]

$$\forall n \in \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha^2)\mathbb{Z}},\ h_n - h_{\sigma(n)} \equiv 0 \pmod 1.$$

Un automorphisme de $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ est défini par un inversible de l'anneau $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$, *id est* un nombre ω premier avec N/α^2. La condition d'invariance par T implique que $a(\omega^2-1)\equiv 0 \pmod{\frac{2N}{\alpha^2}}$. Compte tenu des conditions de parité sur a, cela donne:

$$\begin{aligned} \omega^2-1 &\equiv 0 \pmod{\frac{N}{\alpha^2}} \text{ Si } N \equiv 1 \pmod 2 \\ \omega^2-1 &\equiv 0 \pmod{\frac{2N}{\alpha^2}} \text{ Si } N \equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

ce qui signifie $\omega \in G_\alpha$ avec les notations de 4.5. Enfin, le Lemme 13 montre que la fonction de partition est de la forme Z_δ avec $\alpha(\delta)=\alpha$ et $\omega(\delta)=\omega$. Le théorème 49 est donc prouvé.

Remarque : Une telle preuve ne marche que parce que l'on travaille avec des groupes abéliens qui, pour parler très grossièrement, jouissent d'une stabilité par quotient de leur algèbre de groupe. Dans le cas des TICR générales ou plus simplement des TICR associées à un groupe non abélien, cette propriété est perdue comme par exemple dans la classification ADE des modèles $A_1^{(1)}$ de Cappelli, Itzykson et Zuber. □

4.7 Exemples.

Nous allons voir quelles fonctions de partition peuvent être réalisées par des modèles physiques. Ainsi, dans la classification ADE des modèles $A_1^{(1)}$ de Capelli, Itzykson et Zuber, les théories A (invariants diagonaux) correspondent au modèle de Wess, Zumino et Witten basé sur le groupe $SU(2)$ et la série D correspond aux modèles de WZW sur le groupe $SO(3)$, c'est à dire à un orbifold $\mathbb{Z}_2$ du modèle de WZW $SU(2)$ de départ. Nous allons examiner ce problème pour les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en considérant le cas du modèle gaussien rationnel puis celui des théories $A_N^{(1)}$ de niveau 1.

4.7.1 Modèle gaussien.

Nous avons calculé la fonction de partition du boson libre compactifié sur un cercle de rayon $R=\sqrt{2p/q}$ en 3.4.3. Nous savons que pour cette valeur du rayon, le théorie est rationnelle et que l'on peut exprimer sa fonction de partition comme combinaison sesquilinéaire des caractères de l'algèbre étendue $\mathcal{A}_N$ avec $N=2pq$. Les règles de fusion sont de type $\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$. Plus précisément, la fonction de partition est

$$Z_{p,q} = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{\frac{(pn+qm)^2}{4pq}} \bar{q}^{\frac{(pn-qm)^2}{4pq}}$$

qui se met sous la forme:

$$Z_{p,q} = \sum_{k\in\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}} \tilde{\chi}_k \overline{\tilde{\chi}_{\omega k}}$$

[18] C'est la condition d'invariance par T.

avec $\delta = p$, et ω défini comme précédemment. En conséquence, $Z_{p,q}$ est un des Z_δ. Ici $\alpha(p) = 1$, et nous voyons que $\mathcal{A}_{2pq}$ est bien l'algèbre de symétrie maximale de ce modèle.

Pour avoir d'autres fonctions de partition, il nous faut restreindre notre algèbre de symétrie, c'est à dire prendre une sous- algèbre par rapport à laquelle la théorie est encore rationnelle. Dans notre exemple, $\mathcal{A}_{2pqb^2}$ est une sous- algèbre de $\mathcal{A}_{2pq}$ engendrée par les opérateurs de vertex

$$Q_k(z) = \exp\left(ikb\sqrt{2pq}X(z)\right).$$

La théorie est rationnelle relativement à cette algèbre avec des règles de fusion $\mathbb{Z}/2pqb^2\mathbb{Z}$. Soit n un entier modulo $2pqb^2$, le caractère de la représentation n de $\mathcal{A}_{2pqb^2}$ est

$$\tilde{\chi}_n = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{l\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(n+2b^2pql)^2}{4b^2pq}}$$

et la fonction de partition du modèle gaussien s'exprime en fonction de ces caractères

$$Z_{p,q} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}/2pqb^2\mathbb{Z} \\ l\in\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}} \tilde{\chi}_{kb}\overline{\tilde{\chi}_{\omega kb+2pqlb}}$$

qui est un Z_δ avec $\delta = pb$. Le modèle gaussien le plus simple ne réalise donc pas toutes les fonctions de partition que nous avons obtenues.

4.7.2 Modèles $A_N^{(1)}$ de niveau 1.

Les modèles rationnels relativement à l'algèbre de Kac-Moody $A_N^{(1)}$ au niveau 1 ont des règles de fusion de type $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Gepner [85] a montré que le modèle de WZW associé au groupe $SU(N+1)$ correspondait à l'invariant diagonal $\delta = n$. Nous cherchons si les autres invariants peuvent être réalisés physiquement. A titre d'information:

- L'invariant correspondant à $\delta = 3$ pour l'algèbre $SU(9)$ au niveau 1 est la racine cubique de la fonction modulaire $j(\tau)$.
- En prenant l'aglèbre $SU(25)$ au niveau 1, nous obtenons un invariant qui est le carré du module de $\sum_{k\in<1,5>} \chi_{5k}(\tau)$. Cette théorie a pour charge centrale 24 et donc cette somme est affine en la fonction modulaire $j(\tau)$. En utilisant la dimension de l'algèbre $SU(25)$ et l'unicité du vide, nous identifions

$$\sum_{k=1}^{5} \chi_{5k}(\tau) = j(\tau) - 120$$

4.7.3 Modèles orbifold à la Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde.

Pour conclure, il nous a paru utile de faire le lien avec les travaux existants, notamment ceux de Dijkgraaf, Vafa, Verlinde et Verlinde (denotés par DVVV dans la suite) [45]. Notre but est de montrer que les résultats obtenus par ces auteurs sont parfaitement compatibles avec les nôtres dans le cas où ils se recoupent; c'est à dire quand les règles de fusion sont de type $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dans sa thèse [42], R. Dijkgraaf montre que les règles de fusion d'un orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sont de type groupe. Les orbifolds $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'une théorie holomorphe sont indexés par un entier a modulo N^2, pair dans le cas où N est également pair. L'algèbre de fusion est alors donnée par le groupe

$$\frac{\mathbb{Z}}{\frac{N^2}{N\wedge a}\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{(N\wedge a)\mathbb{Z}}$$

Ce groupe est cyclique si et seulement si $N^2/(N \wedge a)$ et $N \wedge a$ sont premiers entre eux, ce qui est le cas pour $a \wedge N = 1$. Dans ce cas, le groupe est $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$. Notons que N est impair car dans le cas N pair, nécessairement $2|(N \wedge a)$.

Choix de jauge et équivalence des théories.

Le travail de DVVV montre que, pour un modèle orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, les champs primaires relativement à la nouvelle algèbre chirale sont indexés par un double indice (A, α) où A indexe une classe de conjugaison dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (c'est à dire un élément du groupe), et α indexe une représentation de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (qui est le stabilisateur de chacun de ses éléments).

Dans ce cas, la loi de transformation des différents secteurs de la théorie est donnée par une phase $\sigma : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \to U(1)$:

$$S : \; \mathrm{m}\underset{\mathrm{n}}{\square} \quad \longrightarrow \sigma(n,m) \;\; \mathrm{n}\underset{\mathrm{-m}}{\square}$$

dont l'expression est donnée par:

$$\sigma(n,m) = \exp\left(2\pi i a m n/N^2\right) \tag{4.48}$$

où a est premier avec N. Bien entendu, nous devons pour chaque $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ faire un choix de représentant modulo N^2. Le lecteur vérifiera que changer de représentant: $n \mapsto n + Np_n$ revient à faire ce que DVVV appellent une transformation de jauge sur σ, c'est à dire

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'(n,m)}{\sigma(n,m)} &= \varepsilon_{p_n}(m)\varepsilon_{p_m}(n) \\ \varepsilon_{p_m}(n) &= \exp\left(2\pi i \frac{a p_n m}{N}\right) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Clairement une transformation de jauge au sens de DVVV est équivalente à un nouveau choix de représentants de chaque élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Pour faire des calculs explicites, nous fixons dès maintenant une indexation commode des représentations et une forme canonique pour σ: pout tout $A \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous notons $\bar{A}$ l'unique représentant de A dans $\mathbb{Z}$ qui est compris entre 0 et $N-1$. Avec cette notation:

$$\sigma(A,B) = \exp\left(2\pi i \frac{a\bar{A}\bar{B}}{N^2}\right) \tag{4.50}$$

$$\varepsilon_\alpha(A) = \exp\left(2\pi i \frac{a\alpha A}{N}\right) \tag{4.51}$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ indexe les différentes représentations du groupe cyclique d'ordre N.

Calcul des matrices S et T.

Nous partons de la forme canonique pour σ et l'indexation 4.49 pour les représentations de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la matrice S se met sous la forme[19]

$$S_{(A,\alpha)}{}^{(B,\beta)} = \frac{1}{N} e^{-2\pi i a (A-N\alpha)(B-N\beta)/N^2} \tag{4.52}$$

Ceci nous amène à introduire l'indexation suivante pour les éléments de $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \Psi :< 0, N-1 > \times \dfrac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{Z}}{N^2\mathbb{Z}} \\ (\bar{A}, \alpha) & \mapsto \bar{A} - N\alpha & \end{array}$$

Nous introduisons alors $\alpha(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{A+B} - \bar{A} - \bar{B}$ et clairement

$$\Psi(\bar{A}, \alpha) + \Psi(\bar{B}, \beta) = \Psi(-\alpha(\bar{A}, \bar{B}), \alpha + \beta)$$

En substituant dans la formule de Verlinde 3.223 l'expression 4.52 de la matrice S, nous obtenons une algèbre de fusion dont les constantes de structure valent 1 si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} \equiv 0 \pmod{N} \\ (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})/N \equiv \alpha + \beta + \gamma \pmod{N} \end{array} \right.$$

et sont nulles dans le cas contraire. En traduisant cette condition dans $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ via Ψ, nous obtenons

$$\Psi(\bar{A}, \alpha) + \Psi(\bar{B}, \beta) + \Psi(\bar{C}, \gamma) \equiv 0 \pmod{N^2}$$

Ainsi, le dictionnaire recherché entre l'approche DVVV et la nôtre n'est autre que Ψ! Pour être sûr de cette affirmation, nous devons également obtenir les matrices T. Comme l'ont montré DVVV, il existe $\psi :< 0, N-1 > \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que

$$e^{2\pi i h_{(\bar{A},\alpha)}} = \psi_{\bar{A}}\, e^{2\pi i a (2\alpha \bar{A} N - \bar{A}^2)/2N^2} \tag{4.53}$$

La condition $(ST)^3 = \mathbf{1}$ entraine que

$$\psi_{\bar{A}} \psi_{\bar{B}} = \psi_{\overline{A+B}}\, e^{i\pi a \alpha(\bar{A},\bar{B})/N} \tag{4.54}$$

Pour achever l'identification avec nos travaux sur les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous devons distinguer entre le cas a impair et le cas a pair.

a **pair:** La phase $\psi_{\bar{A}}$ disparaît puisqu'elle définit un morphisme de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est trivial par imparité de N. Clairement

$$h_{(\bar{A},\alpha)} \equiv -\frac{a(\Psi(\bar{A}, \alpha))^2}{2N^2} \pmod{1}$$

Ceci n'est autre que la formule 4.15.

[19]Nous utilisons dans ce chapitre la convention $(ST)^3 = \mathbf{1}$, pour se ramener à l'équation $(ST)^3 = C$, il suffit de changer S en $CS = S^*$ ce qui explique la différence entre l'expression 4.52 et celle apparaissant par exemple dans la thèse de R. Dijkgraaf. Le lecteur aura compris qu'il s'agit d'un point de détail.

a impair: Nous nous ramenons au cas précédent en décalant a de N^2. Notons $h_m^{(a)} = am^2/2N^2$ la dimension modulo 1 dans une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ donnée par la formule 4.15. Le décalage de a se traduit par l'identité

$$h_m^{(a+N^2)} \equiv h_m^{(a)} + \frac{am}{2} \pmod 1$$

En conséquence,

$$h_{\Psi(\bar{A},\alpha)}^{(a+N^2)} \equiv \frac{a(\Psi(\bar{A},\alpha))^2}{2N^2} + \frac{a(\bar{A}-\alpha)}{2} \pmod 1 \tag{4.55}$$

Dans le cas où a est impair, cette dimension coïncide avec celle obtenue par DVVV modulo 1 si et seulement si

$$\psi_{\bar{A}} = (-1)^{\bar{A}} \tag{4.56}$$

Mais nous savons que la seule contrainte sur ψ est donnée par

$$\psi_{\bar{A}}\psi_{\bar{B}} = \psi_{\overline{A+B}}\,(-1)^{(\overline{(A+B)}-\bar{A}-\bar{B})/N}$$

avec $\psi_0 = 1$. L'expression $(-1)^{\bar{A}}$ vérifie clairement cette identité. En considérant $\bar{A} \mapsto (-1)^{\bar{A}}\psi_{\bar{A}}$, nous construisons une application de $< 0, N-1 >$ dans $\{-1, 1\}$ qui définit un morphisme de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\{-1, 1\}$. En conséquence, ceci prouve l'unicité de $\psi_{\bar{A}}$. Finalement la dimension calculée par DVVV coincide avec celle d'une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ de paramètre $N^2 - a$. Finalement,

$$h_{(\bar{A},\alpha)} \equiv -\frac{a(\Psi(\bar{A},\alpha))^2}{2N^2} + \frac{\Psi(\bar{A},\alpha)}{2} \pmod 1 \tag{4.57}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer la charge centrale de ces modèles. Pour cela, nous fixons a modulo N^2 pair, alors:

$$e^{2\pi i c/8} = \frac{1}{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}} \exp{(2\pi i \frac{ak^2}{2N^2})} = S_{N^2}(a/2)$$

Cette somme de Gauss se calcule facilement en décomposant N en produit de facteurs premiers

$$N = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j}$$

tous impairs. Alors, la somme de Gauss devient par application du théorème 53 (voir page 267):

$$S_{N^2}(b) = \left(\frac{b}{N}\right)^2 S_{N^2}(1) = S_{N^2}(1) = 1$$

et nous obtenons finalement

$$\exp{(2\pi i \frac{c}{8})} = 1 \tag{4.58}$$

La charge centrale est donc un multiple de 8 comme nous l'avons vu au chapitre 3. Notre travail est donc parfaitement compatible avec les travaux de DVVV, et au niveau des matrices S et T, le “dictionnaire” entre ces deux approches est donné par:

Proposition 21 *Un orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'une théorie holomorphe, de paramètre a premier avec N est une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ de paramètre $-a$ quand a est pair et $N^2 - a$ quand a est impair. La “charge” modulo N^2 d'un champs indexé par $\bar{A}$ et α avec les notations employées ci-dessus est $\bar{A} - N\alpha$.*