

# Equations de Moore et Seiberg, Théories Topologiques et Théorie de Galois

By P. Degiovanni

Laboratoire de Physique Théorique ENSLAPP<sup>1</sup>  
ENSLyon, 46 Allée d'Italie,  
69007 Lyon, FRANCE  
E-mail: [degio@enslapp.ens-lyon.fr](mailto:degio@enslapp.ens-lyon.fr)

*Abstract.* We recall the construction of a three-dimensional projective topological field theory starting from a solution to Moore and Seiberg equations. The conjectural relation between Moore and Seiberg's equations and the second paragraph of the “Esquisse d'un programme” by A. Grothendieck is discussed. Then, following Grothendieck's ideas, we suggest how to translate  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 's natural action on  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, *)$  into an explicit action on a wide class of topological field theories deduced from two-dimensional rational conformal field theories.

The Introduction is in English and the main text in French.

## 1 English Introduction

This paper aims at pointing out some relationships between recent developments in Topological Field Theories, the classification program of Rational Conformal Field Theories and deep ideas expressed by A. Grothendieck in the “Esquisse d'un Programme” [33].

Our exposition does not pretend to be a definitive and complete mathematical theory since most of this wonderful story is still to be discovered. We would like to point out why, in our opinion, there is a deep connection between the world of Rational Conformal Field Theory and

---

<sup>1</sup>URA 14-36 du CNRS, associée à l'E.N.S. de Lyon, et au L.A.P.P. (IN2P3-CNRS) d'Annecy-le-Vieux

Grothendieck's one. In the end, the best advice we can give to the reader is to read the wonderful text by Grothendieck [33] and make up his own mind.

Conformal field theory was originally studied for a systematic description of isotropic universality classes in two dimensions [4]. A few years after their discovery, it became apparent that these theories were a prototype for the so-called geometrical quantum field theories [60][3]. A special class of them, called Rational Conformal Field Theories (RCFT), attracted special attention during the late eighties. It turned out that RCFTs provided very interesting representations of various modular groups. This was discovered firstly in genus one [10], and then in genus zero [63]. The important discovery of Verlinde [64] drew attention to this structure. Moore and Seiberg then produced an important synthesis of this subject [52][54][53]. In this work, they showed the importance of a few matrices associated with each Rational conformal field theory. These matrices have to satisfy polynomial equations, called the Moore and Seiberg's equations. It must be mentioned that these matrices can be computed as monodromy matrices of some holomorphic multivalued functions on moduli space: see [10] for the genus one case and [21][22] for the some examples in genus zero. In passing, one notices that the Moore and Seiberg matrices represent endomorphisms of spaces associated with the following values of  $(g, n)$ :

$$(0, 3) (0, 4) (1, 1)$$

and that Moore and Seiberg's equations involve endomorphisms of spaces associated with

$$(0, 5) (1, 2).$$

Other authors [31][56][28] also discovered independently the same structure but in a completely different context.

At the same time, Witten discovered from the point of view of Chern-Simons theory, a deep connection between Moore and Seiberg's data associated with any RCFT and three-dimensional topological theories [67]. More precisely, Chern-Simons theory associated with a compact, connected, Lie group  $G$  can be "solved"<sup>2</sup> using Moore and Seiberg's data associated with the Wess-Zumino-Witten model based on  $G$ . This mapping has been made more precise by many authors, for example [29][30][18]. It also became clear that Moore and Seiberg's equations could be obtained from the requirement of topological invariance [67][55]. In fact, this result can be proved partially: one has to impose a few hypotheses and to consider only *non projective* topological field theories. In this case, only solutions to Moore and Seiberg's equations with  $c \equiv 0 \pmod{8}$  can be recovered (see [16, Chapter 5]). On the other hand, it was expected that one could reconstruct a 3D TFT from any solution to Moore and Seiberg's equations. For example, topological invariants were defined by Kontsevitch in the case of undecorated closed manifolds [45] and also by Crane using Heegaard decompositions. The latter technique was used also by Kohno [43] with explicit use of some solutions to Moore and Seiberg's equations coming from the WZW model based on  $SU(2)$ . It was shown in [15] how to reconstruct a projective topological field theory from any solution to Moore and Seiberg's equations.

In a slightly different context, Reshetikhin and Turaev [57] defined Topological Field Theories (TFT) using Kirby's calculus and quantum groups. The quantum group is an example of a modular Hopf algebra, the representation theory of which provides us with a solution to Moore and Seiberg's equations. Other works were also based on the same point of view: [46][49].

---

<sup>2</sup>That is to say, any partition function, or any correlation function of any observable can be explicitly computed.

Besides this already widely spread work, Grothendieck developed between 1981 and 1985 an extremely ambitious research program summarized in [33]. One of the main proposal of this program was to develop a new understanding of the absolute Galois group of the field  $\mathbb{Q}$  (*i.e.*  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ) by interpreting it as a group of transformations of an appropriate combinatorial object. The third paragraph of [33] explains how this group acts on the set of all “children’s drawings” which were widely discussed during the International Conference on the theory of “Dessins d’enfants” (CIRM, Luminy, April 1993) organized by L. Schneps. This is a first combinatorial approach to this description of the Galois group. On the other hand, the second paragraph suggests that one should consider an important notion, called the Teichmüller tower. It is formed by the system of all moduli spaces  $\mathcal{M}_{g,n}$  of Riemann surfaces of any genus and with any number of punctures, together with a few fundamental operations such as the “sewing of surfaces”, the “forgetting of marked points” and so on... As explained by Grothendieck, all this structure is reflected on suitable families of fundamental groupoids (with respects to suitable families of base points).

Two fundamental conjectures appear in [33, Paragraph 2]:

- The reconstruction conjecture: the whole structure of the tower can be reconstructed from the two first floors (the floors are indexed by  $3g - 3 + n$ , which is the complex dimension of the corresponding moduli space). The first floor provides a “system of generators” and the second one, a “system of relations”. This gives the following values of  $(g, n)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Generators : } (0, 3) (0, 4) (1, 1) \\ \text{Relations : } (0, 5) (1, 2) \end{array} \right.$$

- The Galois action conjecture: The structure of the tower is rigid enough for  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  to act on its profinite completion, preserving all relations between the corresponding profinite groupoids.

Grothendieck then suggested that one should parametrize each element of the Galois group by one or several elements of the profinite completion of the free group with two generators<sup>3</sup>, subjected to certain relations. It is extremely important to find necessary and sufficient conditions for such elements to arise from the action of the absolute Galois group.

To our knowledge, these results remain conjectural, although some evidence for their validity exists.

Finally, reading the Esquisse made it clear that there is a deep relationship between Grothendieck’s unpublished work and Rational Conformal Field theory. In fact, this relationship is far from being established with all the rigor and precision suitable for this subject. The central object considered by Grothendieck – *i.e.* the Teichmüller tower – has, up to now, not been constructed<sup>4</sup>. Hence, none of its properties have been proved. Our purpose will be to explain or suggest how this story should go. A great deal of work will be necessary before this “philosophy” turns into a clean mathematical theory.

- For us, the starting point was noticing that Grothendieck’s values for  $(g, n)$  in his reconstruction conjecture for the tower were exactly the values relevant in Moore and Seiberg’s work.

---

<sup>3</sup>This is nothing but the algebraic fundamental group of  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  with respect to some base point, which is the moduli space for Riemann surfaces of genus zero with four ordered points on it.

<sup>4</sup>It is likely that various versions of the notion exist, depending on the framework – algebraic geometry, combinatorics ... – considered...

From this emerged the idea that solutions to Moore and Seiberg's equations define projective representations of the Teichmüller tower.

My opinion is that Moore and Seiberg's work needs to be settled on a firmer basis. A possible way of performing this would be to define the Teichmüller tower, then study its projective representations, and produce Moore and Seiberg's data from such representations. The so called completeness theorem [53, Appendix B] of Moore and Seiberg should then be the expression, in representation theory, of the reconstruction conjecture of Grothendieck [33, Paragraph 2].

Finally, starting from an axiomatic definition of a conformal field theory *à la* Segal, and an *intrinsic* definition – still to be found – of what a chiral algebra is, one should be able, first to define RCFTs, then to be able to *prove* that any RCFT should provide a projective representation of the Teichmüller tower. All these steps being completed, Moore and Seiberg's work could be considered as rigorously based.

- In the “Esquisse d'un programme”, Grothendieck explained that elements of the absolute Galois group  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  act as outer automorphisms of the tower itself. We were led to conjecture the existence of an action of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  on solutions to Moore and Seiberg's equations, or equivalently, on three dimensional topological field theories.

Of course, what remains to be done is to explore the consequences of this program for the study of three-dimensional geometry.

## Contents

In the first section, we recall the axiomatic formulation of topological field theory in the spirit of Atiyah [3], Segal [60][61] and [18]. Our presentation is a refined version of [16, Chapter 1] and [15] suitable for dealing with other ground fields than  $\mathbb{C}$ . In a second section, we describe Moore and Seiberg's equations. We have tried to present this subject in a more intrinsic way than in the original papers [53]. Nevertheless, our presentation is far from being satisfactory...

Then, we review the construction of a three-dimensional topological projective field theory [15] from solutions to Moore and Seiberg's equations. We've put the emphasis on representations of the modular groups that arise from these topological field theory. The proof of topological invariance using Kirby's calculus is also recalled.

The last section is devoted to the action of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  on a certain class of topological field theories. We inform the reader that it requires some familiarity with Conformal Field Theory. As explained above, we *suggest* that the translation on 3D TFTs of the action of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  discovered by Grothendieck [33] is nothing other than the number theory action on the matrix elements of the operators in the 3D TFT. Our reasoning is based on the computation of Moore and Seiberg's matrices from conformal blocks in RCFTs. Hence it relies on some hypotheses about these blocks:

- Coefficients of Moore and Seiberg matrices must be, in a suitable gauge, algebraic numbers (algebraicity hypothesis). This is a consequence of Moore and Seiberg's equations for  $S$ ,  $T$ , and  $\Omega(\pm)$  matrices but nothing general is known for the  $F$  matrix: the hypothesis can only be checked during explicit computations.
- Conformal blocks on the four-punctured sphere must have a Puiseux expansion near zero of a specific form (see page 64, this is the rationality hypothesis). We show that this hypothesis

is satisfied by minimal models with respect to the Virasoro algebra and by any non twisted Kac-Moody algebra associated with a finite dimensional simple Lie algebra over  $\mathbb{C}$ .

Let us mention that since no definition of a chiral algebra is available, we still do not know any good definition of RCFTs and therefore, we are not able to justify these hypotheses in a general framework!

Finally, we recall that such a Galois action has been considered in a slightly different context by Drinfel'd [24]. In his work, Drinfel'd described this Galois action by a pair  $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{F}_2$  satisfying particular conditions<sup>5</sup>. Equivalent results were also obtained by Y. Ihara in [35]. We shall make use of Ihara's point of view in section 5 of the present paper. These approaches follow Grothendieck's insight of describing elements of the absolute Galois group by outer automorphisms of the Teichmüller tower. Since a precise definition of the Teichmüller tower is still lacking, our strategy will be to rely on what is conjectured to be its representation theory – that is TFTs in 3D – and to try to translate this Galois action on the tower onto its representations. The surprise is that our final result is not expressed in terms of a pair  $(\lambda, f) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \widehat{F}_2$ . We find instead the number theory action on matrix elements of operators representing elements of the various modular groups. An important question is to understand the implications of this phenomenon. In our opinion, a (good) definition of the Teichmüller tower is necessary in order to firstly formulate Grothendieck's questions in a precise way, and then secondly to understand the connection between the various approaches.

## 2 L'axiomatique des théories topologiques.

Nous allons rappeler ici l'axiomatique utilisée pour décrire les théories topologiques. Cette présentation suit d'assez près celle qui est donnée dans [16, Chapitre 1] et qui est brièvement rappelée dans [15]. Toutefois, afin de pouvoir décrire l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur les théories topologiques, nous avons été amenés à modifier certains points. C'est cette version un peu améliorée que nous présentons ici. Il s'agit principalement de disposer de la notion de théorie topologique définie sur un corps  $K$  quelconque. Nous avons également étudié comment une théorie définie sur un corps  $K$  pouvait en fait être définie sur un sous corps  $k$  de  $K$ . Je me suis inspiré très fortement de [8, Chapitre II, §8].

Rappelons qu'une théorie géométrique n'est rien d'autre qu'un foncteur entre une catégorie de variétés et une catégorie d'espaces vectoriels. Nous commencerons donc par définir les catégories géométriques utilisées ici, puis nous donnerons la définition d'une théorie topologique à valeurs dans une catégorie de  $K$ -espaces vectoriels. Nous discuterons alors divers problèmes de rationalité. Finalement, nous verrons que si les objets de la catégorie d'espaces vectoriels considérés sont munis de  $k$ -structures – compatibles aux produits tensoriels et au dual en un sens que nous préciserons – alors, on dispose d'une action naturelle de  $\text{Gal}(K/k)$  sur la catégorie des théories topologiques rationnelles basées sur les catégories considérées.

---

<sup>5</sup>See equations (4.3), (4.4) and (4.10) of [24]

## 2.1 Catégories géométriques.

Je reprends ici les notations du chapitre 1 de [16]. Enfin, je me limiterai aux théories topologiques et rationnelles.

Une catégorie est définie par la donnée de ses objets et morphismes [50]. Ici, nous supposons que toutes les variétés considérées sont topologiques. En dimension deux et trois, les catégories topologiques, linéaires par morceaux et différentielles sont équivalentes [41] et c'est pourquoi nous nous permettrons d'employer des notions différentielles dans la suite de ce texte car nous nous limiterons à ces dimensions!

### 2.1.1 Définitions générales.

Les objets de **Ma** seront des modèles topologiques de variétés de dimension  $d - 1$  orientées, pas forcément connexes. Le renversement d'orientation est noté  $N \mapsto \hat{N}$ . Nous imposons que la variété vide (qui n'a qu'une orientation) soit un objet.

Suivant Milnor [51, Chapitre 1], nous considérons les triplets  $(M, \varphi, \varphi')$  où  $M$  est une variété dont le bord est une union disjointe de deux variétés  $\partial M_{\text{in}}$  et  $\partial M_{\text{out}}$ ; et  $\varphi : \partial M_{\text{in}} \rightarrow N$  et  $\varphi' : \partial M_{\text{out}} \rightarrow N'$  sont des difféomorphismes appelés paramétrisations de  $\partial M_{\text{in}}$  et  $\partial M_{\text{out}}$ . Nous supposons que l'orientation induite par  $M$  sur  $\partial M_{\text{in}}$  est envoyée par  $\varphi$  sur celle de  $N$ , et que l'orientation induite sur  $\partial M_{\text{out}}$  est envoyée par  $\varphi'$  sur l'*opposée* de celle de  $N'$ .  $N$  est appelée variété entrante et  $N'$  variété sortante. On dit aussi que  $M$  interpole entre  $N$  et  $N'$ . La donnée d'une paramétrisation du bord permet de recoller les variétés. Si  $M_1$  interpole entre  $N_1$  et  $N_2$  et  $M_2$  entre  $N_2$  et  $N_3$ , alors si  $g \in \text{Diff}_+(N_2)$ , on note  $M_1 \#_g M_2$  le recollé de  $M_1$  avec  $M_2$  selon  $(\varphi'_1)^{-1} \circ g \circ \varphi_2$ . Dans le cas  $g = \mathbf{1}_{N_2}$ , on note  $\#$  l'opération ainsi définie. Remarquons que la prescription choisie pour les orientations permet de munir  $M_1 \#_g M_2$  d'une orientation qui est compatible avec celles de  $M_1$  et  $M_2$ . Enfin, nous introduisons:

**Définition 1** Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés interpolantes entre  $N_1$  et  $N_2$ ,  $\varphi_{1,2}$  les paramétrisations des bords  $N_{1,2}$  de  $M$  (respectivement  $\varphi'_{1,2}$  pour  $N'_{1,2}$ , bords de  $M'$ ) et  $f$  un homéomorphisme de  $M$  sur  $M'$ . On dira que  $f$  est un isomorphisme entre les variétés interpolantes si et seulement si on a la compatibilité aux bords ( $\partial M_{1,2} = \varphi_{1,2}^{-1}(N_{1,2})$ ):

$$\varphi_{1,2} = \varphi'_{1,2} \circ f|_{\partial M_{1,2}}.$$

On notera  $M \simeq M'$  si  $M$  et  $M'$  sont isomorphes.

Ceci permet de définir la catégorie **Ma** grâce à ses morphismes. Par définition, les morphismes de  $N_1$  vers  $N_2$  sont les classes d'isomorphismes de triplets  $[M, \varphi_1, \varphi_2]$  interpolants entre  $N_1$  et  $N_2$ . La composition des morphismes est définie grâce au recollement  $\#$  des triplets  $[M, \varphi_1, \varphi_2]$ . On vérifie que  $\#$  est bien compatible à la relation d'isomorphisme et on note encore  $\#$  l'opération ainsi définie.

Il est judicieux de disposer des propriétés suivantes:

- L'union disjointe de deux morphismes est encore un morphisme qui est représenté par l'union disjointe de deux cobordismes. Si  $M \in \text{hom}(N_1, N_2)$  et  $M' \in \text{hom}(N'_1, N'_2)$  alors  $M \cup M' \in \text{hom}(N_1 \cup N'_1, N_2 \cup N'_2)$ .

- Si  $M \in \text{hom}(N_1, N_2)$  est représenté par  $[M, \varphi, \varphi']$ , on définit  $\hat{M}$  qui est représenté par  $[M, \varphi', \varphi]$  où l'on a renversé l'orientation. C'est encore un morphisme noté  $\hat{M} \in \text{hom}(N_2, N_1)$ .

### 2.1.2 Exemples

Nous allons construire explicitement des exemples de telles catégories, adaptés à nos besoins ultérieurs. Tout d'abord, nous commençons par rappeler quelques définitions combinatoires élémentaires, qui seront également utilisées dans la section 3.

**Préliminaires combinatoires** Dans la suite, nous noterons  $I$  un ensemble fini dont les éléments sont appelés indices de couleur, vérifiant les propriétés suivantes:

- On se donne une involution  $i \mapsto \hat{i}$  de  $I$ , avec au moins un point fixe noté 0.
- Pour chaque triplet  $(i, j, k) \in I^3$ , on dispose d'un ensemble  $[i, j, k]$  de cardinal  $N_{i,j,k}$ . Ses éléments sont appelés indices de vertex et on impose les conditions suivantes:
  - Pour chaque permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\{i,j,k\}}$  de l'ensemble à trois éléments  $\{i, j, k\}$ , on se donne  $\bar{\sigma}_{[i,j,k]}$  qui est une bijection de  $[i, j, k]$  sur  $[\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)]$ . De plus,
$$(2.1) \quad \forall (\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_{\{i,j,k\}}^2, \quad \bar{\sigma}'_{[\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)]} \circ \bar{\sigma}_{[i,j,k]} = (\overline{\sigma'\sigma})_{[i,j,k]}$$

De plus, nous supposons qu'il existe  $a \in [i, j, k] \mapsto \hat{a} \in [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$  telle que  $\hat{\hat{a}} = a$ .

L'existence de telles applications entraîne la symétrie de  $N_{i,j,k}$  en  $i, j$  et  $k$  et l'invariance par conjugaison simultanée des trois indices:  $N_{i,j,k} = N_{i,\hat{j},\hat{k}}$ .

- Nous imposons  $N_{i,j,0} = \delta_{i,j}$  et

$$(2.2) \quad \sum_n N_{i,j}^n N_{k,n}^l = \sum_n N_{i,k}^n N_{n,j}^l$$

Cela permet de définir pour tout graphe trivalent, la notion de coloriage. Rappelons ce que l'on entend par graphe trivalent orienté:

**Définition 2** *Un graphe trivalent est la donnée d'un ensemble  $S$  – de sommets – et d'un ensemble  $A$  – des arêtes orientées – et:*

- De deux applications  $\partial_{i,f} : A \rightarrow \mathcal{P}_{\leq 1}(S)$ , à valeurs dans l'ensemble des parties de  $S$  de cardinal inférieur à un<sup>6</sup>, telles que,  $\partial_i(a)$  soit vide si et seulement si  $\partial_f(a)$  est vide<sup>7</sup>. De plus, pour tout  $x \in S$ , on demande que le cardinal de  $\{a \in A, \partial_i(a) = x\}$  soit égal à trois ou un.

*Dans le premier cas, on parle de vertex, et dans le second, de sommet externe. Nous noterons  $E$  l'ensemble des sommets externes d'un graphe et  $V$  l'ensemble de ses vertex.*

<sup>6</sup> Si le cardinal est zéro, on dit que l'on a une ligne fermée.

<sup>7</sup> Cela supprime les arêtes sans bout.

– D'une involution sans point fixe  $i : a \in A \mapsto \hat{a} \in A$  telle que

$$\forall a \in A, \quad \partial_{i,f}(\hat{a}) = \partial_{f,i}(a)$$

Dans la suite, si  $s$  est un vertex du graphe  $\mathcal{G}$ , nous noterons  $A_s = \{a \in A, \partial_i(a) = s\}$  l'ensemble des arêtes orientées qui partent de  $s$ . Une circularisation du graphe est la donnée, pour chaque vertex  $s$ , d'une permutation d'ordre trois  $\omega_s$  de  $A_s$ . Enfin, si  $\mathcal{G} = [A, S, \partial_{i,f}, i]$  est un graphe orienté, on construit l'ensemble des arêtes non orientées de  $\mathcal{G}$  de la manière suivante:

**Définition 3** Une arête non orientée est une paire  $\{a, a'\} \in \mathcal{P}_2(A)$  telle que  $a' = \hat{a}$ . Si  $\tilde{A}$  désigne l'ensemble des arêtes orientées,  $\pi : A \rightarrow \tilde{A}$  définie par  $\pi(a) = \{a, \hat{a}\} \in \tilde{A}$ , est une surjection de degré deux exactement.

Enfin, un coloriage d'un graphe trivalent orienté  $\mathcal{G} = [A, S, \partial_{i,f}, i]$  n'est autre que:

**Définition 4** Soit  $\mathcal{G} = [A, S, \partial_{i,f}, i]$  un graphe trivalent orienté, un coloriage du graphe  $\mathcal{G}$  est la donnée

- D'une application  $i : A \rightarrow I$  telle que  $i(\hat{a}) = \widehat{i(a)}$  (en clair, changer l'orientation d'une ligne transforme sa couleur en la conjuguée).
- Pour chaque vertex  $v$  du graphe, et pour chaque ordre total  $\leq_{\mathcal{R}}$  sur  $A_v$ , on se donne un élément  $a_{\leq_{\mathcal{R}}} \in [i_v, j_v, k_v]$  où  $(i_v, j_v, k_v)$  sont les couleurs des trois arêtes orientées qui arrivent – i.e.  $\partial_f a' = v$  – en  $v$ , prises dans l'ordre  $\leq_{\mathcal{R}}$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_{A_v}$  opère sur l'ensemble des ordres totaux sur  $A_v$  et soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_{A_v}$ , on demande que

$$a_{\sigma \leq_{\mathcal{R}}} = \overline{\sigma}_{[i_v, j_v, k_v]}(a_{\leq_{\mathcal{R}}})$$

On appellera coloriage opposé d'un coloriage  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{G}$ , le coloriage obtenu en changeant tous les indices en leurs conjugués. Nous le noterons  $\hat{\mathcal{C}}$ .

Considérons maintenant  $\mathcal{G} = [A_{\mathcal{G}}, S_{\mathcal{G}}, \partial_{i,f}, i]$  et  $\mathcal{G}' = [A_{\mathcal{G}'}, S_{\mathcal{G}'}, \partial_{i',f'}, i']$  deux tels graphes. Donnons nous  $D$  une partie non vide de  $E_{\mathcal{G}}$  et  $j$  une injection de  $D$  dans  $E_{\mathcal{G}'}$ . Nous définissons un nouveau graphe, appelé le recollé de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  selon  $(D, j)$  comme suit:

- $S$  est l'union disjointe de  $S_{\mathcal{G}} \setminus D$  et de  $S_{\mathcal{G}'} \setminus j(D)$ . Sur l'union disjointe  $A_{\mathcal{G}} \sqcup A_{\mathcal{G}'}$ , on définit la relation d'équivalence  $\sim_j$  par:  $a \sim_j a'$  si et seulement si

$$(2.3) \quad \begin{cases} a = a' \\ \text{ou } (\partial_i a \in D \text{ et } \partial_f a' = j(\partial_i a)) \\ \text{ou } (\partial_f a \in D \text{ et } \partial_i a' = j(\partial_f a)) \end{cases}$$

et alors  $A = (A_{\mathcal{G}} \sqcup A_{\mathcal{G}'}) / \sim_j$ . Notons que  $i$  et  $i'$  définissent une involution sans point fixe sur l'union disjointe de  $A_{\mathcal{G}}$  et  $A_{\mathcal{G}'}$ , compatible à  $\sim_j$ . On en déduit une involution sans points fixe sur  $A$ .



- Nous définissons  $\partial_{i,f}$  sur  $A$  de la manière suivante:
  - Si  $a \in A$  est une classe de  $\sim_j$  de cardinal un,  $\partial_{i,f}(a)$  est le  $\partial_{i,f}$  de son représentant.
  - Si  $a \in A$  est une classe de  $\sim_j$  de cardinal deux:  $a = \{a_1, a_2\}$ , et si pour fixer les idées  $\partial_i(a_1) \in D \cup j(D)$ , alors on pose  $\partial_i a = \partial_i a_2$ . Si par contre  $\partial_i a_2 \in D \cup j(D)$ , alors on pose  $\partial_i a = \partial_i a_1$ . De même, on définit  $\partial_f a$ .

Ainsi, nous avons fabriqué un graphe que l'on note  $\mathcal{G}_{\sharp(D,j)}^{\mathcal{G}'}$ . Munissons  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  de coloriage au sens de la définition 4, ces deux coloriages permettent de définir un coloriage de  $\mathcal{G}_{\sharp(D,j)}^{\mathcal{G}'}$  si et seulement si:

$$(2.4) \quad \forall (a, a') \in (A_{\mathcal{G}} \sqcup A_{\mathcal{G}'}), \quad a \sim_j a' \Rightarrow i_a = i_{a'}$$

Le lecteur vérifiera que  $V_{\mathcal{G}_{\sharp(D,j)}^{\mathcal{G}'}} = V_{\mathcal{G}} \sqcup V_{\mathcal{G}'}$  et que l'on dispose bien d'un coloriage des vertex au sens de la définition 3. Enfin, si  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  sont à vertex circularisés,  $\mathcal{G}_{\sharp(D,j)}^{\mathcal{G}'}$  l'est trivialement.

**Catégories  $\mathbf{Ma}_{3,1}$**  Nous allons maintenant décrire les catégories  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  qui serviront à définir les théories topologiques tridimensionnelles.

Pour tout  $(g, n) \in \mathbb{N}^2$ , considérons  $\Sigma_{g,n}$  un modèle topologique de surface de genre  $g$  avec  $n$  points marqués ordonnés, muni des décorations suivantes:

- A chaque point marqué, on associe une demi-droite dans l'espace tangent à la surface au point considéré.
- On se donne une application de l'ensemble des points marqués dans  $I$  (coloriage des points marqués).

Les objets de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  sont les unions disjointes finies de telles surfaces décorées.

Afin de définir les morphismes, nous allons employer des cobordismes au sens de Milnor que nous allons "décorer". Pour cela, nous définirons la notion de plongement d'un graphe trivalent orienté, à vertex circularisés, colorié dans une telle variété. Dans le cas tridimensionnel, nous serons conduits à rajouter une structure supplémentaire appelée le framing. Enfin, nous munirons l'ensemble des cobordismes au sens de Milnor d'une relation d'équivalence. Les morphismes seront les classes d'équivalence pour cette relation.

Considérons alors:

- Une variété tridimensionnelle  $M$  dont le bord est difféomorphe à  $N_1 \cup N_2$ . Nous distinguons dans  $\partial M$  deux composantes  $\partial M_{\text{in}} \simeq N_1$  et  $\partial M_{\text{out}} \simeq N_2$  que nous appellerons entrantes et sortantes.
- Deux difféomorphismes  $\varphi_1$  (respectivement  $\varphi_2$ ) de  $\partial M_{\text{in}}$  (respectivement  $\partial M_{\text{out}}$ ) vers  $N_1$  (respectivement  $N_2$ ).

- Une orientation  $\mathcal{O}_M$  sur  $M$  telle que, si  $\mathcal{O}_{N_{1,2}}$  désignent les orientations de  $N_{1,2}$ ,  $\varphi_{1,2}$  assure la compatibilité entre l'orientation induite par  $\mathcal{O}_M$  au bord et  $\mathcal{O}_{N_{1,2}}$ :

$$(2.5) \quad \varphi_1 \in \text{Diff}_+([\partial M_{\text{in}}, \mathcal{O}_M], [N_1, \mathcal{O}_{N_1}])$$

$$(2.6) \quad \varphi_2 \in \text{Diff}_+([\partial M_{\text{out}}, \mathcal{O}_M], [N_2, \mathcal{O}_{N_2}])$$

- Un plongement d'un graphe trivalent orientés, à vertex circularisés, est défini par:

**Définition 5** Soit  $\mathcal{G}$  un graphe trivalent orienté à sommets circularisés, un plongement de ce graphe dans  $[M, (\Sigma_k, \varphi_k)_k]$  est la donnée de

- Une injection  $i_E : E \rightarrow \partial M$  qui met en bijection  $E$  et l'ensemble des points marqués sur  $\partial M$ .
- Une injection  $i_V : V \rightarrow M \setminus (\partial M)$ .
- Pour chaque arête orientée  $a \in A$  qui ne soit pas une ligne fermée, une application  $f_a : [0, 1]^2 \rightarrow M$  qui soit un difféomorphisme de  $[0, 1]^2$  sur  $f_a([0, 1]^2)$ .
- Pour une arête  $a$  qui est une ligne fermée –  $\partial_{i,f}(a) = \emptyset$  – il existe  $f_a : [0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \mapsto M \setminus \partial M$  telle que  $f_a([0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}))$  soit difféomorphe à  $[0, 1] \times S_1$ .

qui vérifient les conditions suivantes:

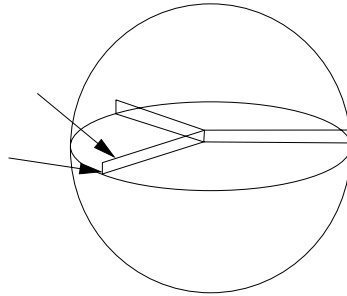
- Pour toute arête orientée  $a \in A$  qui ne soit pas une ligne fermée,  $f_a$  vérifie:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \forall (s, t) \in [0, 1]^2, f_{\hat{a}}(s, t) = f_a(s, 1 - t) \\ f_a(0, 0) = i_S(\partial_i(a)) \quad f_a(0, 1) = i_S(\partial_f(a)) \end{cases}$$

- Pour toute arête orientée  $a$  qui est une ligne fermée,  $f_a$  vérifie:

$$(2.8) \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \quad f_a(s, -t) = f_{\hat{a}}(s, t).$$

- Pour tout vertex  $v \in V$ , il existe  $U_v$ , voisinage de  $i_S(v)$  isomorphe à la boule ouverte unité dans  $\mathbb{R}^3$ , tel que via cet isomorphisme, le plongement soit du type suivant:



De plus, on demande que la permutation cyclique d'ordre trois induite par l'orientation de  $M$ , et  $(\partial_s f_a)(0, 0)$  sur les trois lignes  $(f_a(0, [0, 1]) \cap \partial U)_{a \in A_v}$  coïncide avec la circularisation en  $\omega_v$ .

- Soit  $a \in A$  telle que  $\partial_i(a) \in E$ , on impose que  $(d\varphi)(i_S(\partial_i a)).((\partial_s f_a)(0, 0))$  soit dans la demi-droite associée à  $\varphi(i_S(\partial_i a))$ .

- Pour tout couple  $(a, a')$  d'arêtes orientées telles que  $a \neq a'$  et  $a \neq \hat{a}'$ , on demande que  $f_a([0, 1] \times ]0, 1[) \cap f_{a'}([0, 1] \times ]0, 1[) = \emptyset$ . C'est la condition de plongement.
- Soit  $a$  telle que  $\partial_i a \in (\partial M)_{\text{in}}$ , alors la couleur de l'arête orientée  $a$  est celle du point marqué  $\varphi(i_S(\partial_i(a)))$ . De même, si  $\partial_f(a) \in (\partial M)_{\text{out}}$ , la couleur de  $a$  n'est autre que celle de  $\varphi'(i_S(\partial_f(a)))$ .

Ainsi, à chaque ligne de  $K$ , nous associons un ruban comme sur le schéma suivant:



Nous dirons que  $t \mapsto f_a(0, t)$  définit le plongement de l'arête  $a$  et que  $t \mapsto f_a(1, t)$  définit une courbe parallèle à cette arête (cf [27]). Bien entendu, il existe d'autres manières de définir le framing: on peut par exemple supposer que l'on se donne le plongement  $t \mapsto c_a(t) = f_a(0, t)$  de l'arête orientée, et qu'en chaque  $t \in [0, 1]$ , on dispose d'un vecteur tangent non nul à  $M$  en  $c_a(t)$ , qui n'est pas colinéaire à l'espace tangent à  $c_a([0, 1])$  en  $c_a(t)$ .

Pour être complet et aussi pour faire le lien avec d'autres travaux, nous considérons maintenant le cas du plongement d'un cercle<sup>8</sup> dans  $S_3$ , communément appelé un nœud. Dans à la philosophie ci-dessus, le framing d'un nœud est défini par une courbe parallèle à celui-ci.

Parmi tous les framings possibles et imaginables d'un nœud donné, il en existe un privilégié. En effet, considérons une surface (de Seifert) qui s'appuie sur le nœud considéré  $C$  [39, Chapitre 5], elle n'est pas unique car on peut lui rajouter une anse; mais en revanche, elle définit, à une isotopie près, une unique courbe  $C'_0$  parallèle à  $C$ . En conséquence elle fixe complètement le framing de  $C$ . Ce framing particulier est appelé le framing canonique ou encore framing zéro du nœud et les autres framings sont comptés relativement à celui-ci. Lorsque nous dirons qu'un nœud possède un framing  $n \in \mathbb{Z}$ , nous nous entendrons toujours que le nombre d'intersection<sup>9</sup> de  $C$  avec sa courbe parallèle  $C'$  est  $n$ .

Enfin, choisissons un plan de projection pour notre nœud. Le framing *normal* relativement à ce plan de projection est obtenu en utilisant un ruban orthogonal au plan de projection. Cette notion dépend clairement du plan de projection.

Le recollement de deux cobordismes paramétrés décorés par des graphes trivalents coloriés se définit naturellement. Considérons  $[M, (\Sigma_k, \varphi_k)_k, \mathcal{G}_C, (i_S, i_A)]$  et  $[M', (\Sigma'_l, \varphi'_l)_l, \mathcal{G}'_{C'}, (i'_S, i'_A)]$  deux tels cobordismes, interpolant respectivement entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$ , puis  $\mathcal{O}_2$  et  $\mathcal{O}_3$ , on définit

$$[M \# M', (\Sigma_m, \varphi_m)_m, (\mathcal{G} \# \mathcal{G}')_{C \# C'}, (i_S \# i'_S, i_A \# i'_A)]$$

qui interpole entre  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_3$ . On doit utiliser le recollement des graphes coloriés, à vertex circularisés. L'injection  $j$  et le domaine  $D$  sont donnés grâce à l'application de recollement entre  $M$  et  $M'$ . La

<sup>8</sup>Le graphe correspondant est décrit par  $S = \emptyset$ ,  $A = \{a, \hat{a}\}$ . Ce graphe est colorié par la donnée de  $i_A(a) \in I$ .

<sup>9</sup>Il s'agit du nombre d'intersection de Gauss. Il ne dépend pas de l'orientation de l'arête car l'orientation de la courbe parallèle  $C'$  est définie à partir de celle de  $C$ .

seule complication provient du framing mais grâce aux conditions de compatibilité au bord il n'y a aucun problème. Finalement, ceci permet de définir le recollement  $\sharp$  des cobordismes.

Enfin, nous considérerons deux tels cobordismes paramétrés comme isomorphes si et seulement si:

- Les cobordismes *à la* Milnor sont isomorphes.
- Si  $F \in \text{Diff}_+(M, M')$  désigne l'isomorphisme en question, alors nous avons  $\mathcal{G}_C = \mathcal{G}'_{C'}$ ,  $f'_S = F \circ f_S$  et  $f'_A = F \circ f_A$ .

Cette définition contient la notion d'isotopie ambiante relative des plongements de graphes trivalents orientés munis de framings. Les morphismes de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  sont par définition les classes d'isomorphismes de tels cobordismes paramétrés décorés. Le recollement entre cobordismes est compatible avec la relation d'isomorphisme. Ceci définit la composition des morphismes de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Les morphismes qui interpolent entre  $\emptyset$  et  $\emptyset$  sont les classes de variétés orientées compactes munies d'un plongement d'un graphe trivalent orienté, colorié et muni d'un framing.

Nous sommes maintenant prêts à définir les théories topologiques.

## 2.2 Théories topologiques définies sur un corps $K$ , et $k$ -structures pour les théories topologiques.

Dans [8], on trouve la définition d'une  $k$ -structure pour un  $K$ -espace vectoriel (Page 119, déf. 1). Ceci conduit naturellement à définir la notion de théorie topologique sur un corps  $K$  ainsi que la notion de  $k$ -structure pour une théorie des champs définie sur un corps  $K$ .

### 2.2.1 Théorie définie sur un corps $K$ .

**Définition 6** *Une théorie topologique définie sur une catégorie  $\mathbf{Ma}$  et à valeurs dans la catégorie  $\mathbf{Sp}_K$  des espaces vectoriels sur le corps  $K$  est définie par un foncteur contravariant  $\Phi_K$  de  $\mathbf{Ma}$  dans  $\mathbf{Sp}_K$  tel que, si on note  $H_N = \Phi(N)$  pour tout  $N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma})$ ,*

$$(2.9) \quad H_\emptyset = K$$

$$(2.10) \quad H_{\hat{N}} = H_N^*$$

$$(2.11) \quad \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M]) = \phi[M_Y]$$

$$(2.12) \quad H_{N_1 \cup N_2} = H_{N_1} \otimes H_{N_2}$$

$$(2.13) \quad \phi[M_1 \cup M_2] = \phi[M_1] \otimes_K \phi[M_2]$$

et  $H_N$  ne dépend que de la topologie de  $N$ .

Une remarque s'impose: on pourrait définir la notion de théorie des champs géométrique mais pas topologique sur un corps  $K$ . Toutefois, je ne crois pas que l'on puisse obtenir des exemples

intéressants en gardant des catégories  $\mathbf{Ma}$  “trop grosses”. Je fais allusion au fait que dans les théories conformes par exemple, ou dans la théorie de Yang-Mills en dimension deux, on peut rendre certaines fonctions de partition *transcendantes* en choisissant des variétés sans bords particulières. On se souvient par exemple de la fonction de partition de la théorie conforme associée au module du Moonshine:  $Z(\tau) = |j(\tau) - 744|^2$ . Il existe un tore de paramètre modulaire  $\tau$  (ce tore n’est pas défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ !) pour lequel  $j(\tau) = \pi + 744$  et donc pour lesquels la fonction de partition de cette théorie prend une valeur transcendante. Le même phénomène se produit dans le cas de la théorie de Yang-Mills bidimensionnelle à cause du facteur  $\exp(-\varepsilon^2 c_2^{(j)} \mathcal{A}/2)$  qui est en facteur des différents termes de la fonction de partition de la théorie de Higgs topologique [16, Chapitre 1].

Dans [15] et [16], on imposait au foncteur des conditions supplémentaires. Tout d’abord, le corps de base était  $\mathbb{C}$  et chaque objet de  $\mathbf{Sp}$  était un espace de Hilbert. Enfin, on imposait

$$(2.14) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}, \quad \phi[\hat{M}] = (\phi[M])^\dagger$$

Ces relations ne sont pas forcément préservées par l’action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . C’est pour cela que nous les avons relaxées ici.

Enfin, il existe aussi une version projective de ces axiomes. C’est celle qui nous servira pour les théories tridimensionnelles. La définition est alors la suivante:

**Définition 7** *Une théorie topologique projective définie sur une catégorie  $\mathbf{Ma}$  et à valeurs dans  $\mathbf{Sp}_K$  est définie par  $\Phi_K$  de  $\mathbf{Ma}$  dans  $\mathbf{Sp}_K$  tel que*

$$(2.15) \quad \phi[M_1 \# M_2] = \mu(M_1, M_2) \times \phi[M_2] \circ \phi[M_1]$$

où  $\mu(M_1, M_2) \in K$  vérifie la relation dite de cocycle

$$(2.16) \quad \mu[M_1 \# M_2, M_3] \times \mu[M_1, M_2] = \mu[M_1, M_2 \# M_3] \times \mu[M_2, M_3]$$

ainsi que la condition de compatibilité

$$(2.17) \quad \mu[M_1 \cup M_2, M_3 \cup M_4] = \mu[M_1, M_3] \times \mu[M_2, M_4]$$

Enfin, on impose également les relations 2.9 à 2.13 et  $H_N$  ne dépend que de la topologie de  $N$ .

Nous pouvons changer  $\phi[M]$  en  $\lambda[M] \times \phi[M]$  où  $\lambda[M]$  est une fonction qui à chaque morphisme de  $\mathbf{Ma}$  associe un élément de  $K$  non nul. Si on veut préserver la condition de cohérence 2.17, on doit imposer que  $\lambda[M_1 \cup M_2] = \lambda[M_1] \times \lambda[M_2]$ . Pour définir une nouvelle théorie topologique projective à partir de  $\phi$ , il suffit de poser

$$(2.18) \quad \phi'[M] = \lambda[M] \times \phi[M]$$

pour tout morphisme  $M$  de  $\mathbf{Ma}$ . Le cocycle se transforme selon:

$$(2.19) \quad \mu'[M_1, M_2] = \frac{\lambda[M_1 \# M_2]}{\lambda[M_1] \lambda[M_2]} \mu[M_1, M_2]$$

Le lecteur est renvoyé à [16, Chap. 1, Section 5] pour plus d’informations.

Nous allons maintenant définir à partir d'une théorie à valeurs dans  $\mathbf{Sp}_K$  une théorie à valeurs dans  $\mathbf{Sp}_L$  où  $L$  est une extension de  $K$ . Alors, pour la partie objet, on pose

$$(2.20) \quad \forall N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma}), \quad \Phi_L(N) = H_N \otimes_K L$$

et pour la partie morphisme

$$(2.21) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2), \quad \Phi_L(M) = \phi[M] \otimes_K \mathbf{1}_L$$

Si je note  $H'_N = \Phi_L(N)$ , alors il est bien clair que  $H'_{N_1 \cup N_2} = H'_{N_1} \otimes_L H'_{N_2}$ . En revanche,

$$H'_{\hat{N}} = H_N^* \otimes_K L = \mathcal{L}_K(H_N, K) \otimes_K L$$

mais cet espace n'est que plongé dans  $\mathcal{L}_L(H_N \otimes_K L, L)$ . Lorsque la dimension est finie, nous pouvons les identifier. C'est pour cette raison que l'on se limite ici aux théories rationnelles! Alors  $H'_{\hat{N}} = (H'_N)^*$ . Les autres propriétés sont triviales à vérifier.

**Proposition 1** *Si  $\mathcal{T}_K = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}_K, \Phi_K]$  est une théorie topologique rationnelle définie sur un corps  $K$ , alors*

$$(2.22) \quad \forall N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma}) \quad H'_N = H_N \otimes_K L$$

$$(2.23) \quad \forall M \in \text{hom}(\mathbf{Ma}) \quad \phi'[M] = \phi[M] \otimes_K \mathbf{1}_L$$

définit une théorie topologique qui est dite obtenue par extension des scalaires de  $K$  à  $L$ .

On notera  $\mathcal{T}_K \otimes_K L$  cette nouvelle théorie topologique. La définition des  $k$ -structures pour les TTR permet de faire le chemin inverse.

### 2.2.2 $k$ -structures pour les théories topologiques.

J'utilise les notations suivantes:  $(H, H')$  désigne un  $K$ -espace vectoriel  $H$  muni d'une  $k$ -structure définie par le sous- $k$ -espace vectoriel  $H'$ . Enfin  $\mathcal{L}_{K:k}((H_1, H'_1); (H_2, H'_2))$  désigne l'espace des applications linéaires  $k$ -rationnelles entre les espaces munis de  $k$ -structures  $(H_1, H'_1)$  et  $(H_2, H'_2)$ . Nous posons:

**Définition 8** *Soit  $\mathcal{T}_K = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}_K, \Phi_K]$  une théorie topologique rationnelle définie sur  $K$ , pour  $k \subset K$ , une  $k$ -structure sur  $\mathcal{T}_K$  est la donnée d'une  $k$ -structure sur chaque espace  $H_N$  telle que:*

$$(2.24) \quad H_{\hat{N}} = \mathcal{L}_{K:k}((H_N, H'_N); (K, k))$$

$$(2.25) \quad H'_{\emptyset} = k$$

$$(2.26) \quad H'_{N_1 \cup N_2} = H'_{N_1} \otimes_k H'_{N_2}$$

et de plus

$$(2.27) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2), \quad \phi[M] \in \mathcal{L}_{K:k}((H_{N_1}, H'_{N_1}); (H_{N_2}, H'_{N_2}))$$

On notera alors  $\phi_k[M]$  l'application  $k$ -linéaire de  $H'_{N_1}$  dans  $H'_{N_2}$  qui possède le même graphe que  $\phi[M]$ . Dans ce cas, il est clair qu'avec  $\Phi_k(N) = H'_N$ , nous définissons  $\mathcal{T}_k = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}_k, \Phi_k]$  qui est une théorie topologique rationnelle définie sur le sous-corps  $k$  de  $K$  et  $\mathcal{T}_K$  est obtenue à partir de  $\mathcal{T}_k$  par extension des scalaires de  $k$  à  $K$ .

On dira aussi que le système des  $k$ -structures vérifiant les identités 2.24 à 2.26 est compatible au dual, au vide et au produit tensoriel.

Il existe un critère très simple pour savoir si une théorie définie sur un corps  $K$  peut être munie d'une  $k$ -structure.

**Proposition 2** *Supposons que pour chaque  $N$ , objet de  $\mathbf{Ma}$ , on ait trouvé  $\mathfrak{B}_N$  une base de  $H_N$ , vérifiant les propriétés suivantes:*

$$(2.28) \quad \mathfrak{B}_\emptyset = \{\mathbf{1}_K\}$$

$$(2.29) \quad \mathfrak{B}_{N'} = (\mathfrak{B}_N)^* \text{ base duale de Kronecker}$$

$$(2.30) \quad \mathfrak{B}_{N_1 \sqcup N_2} = \mathfrak{B}_{N_1} \otimes \mathfrak{B}_{N_2}$$

alors,  $\mathcal{T}_K$  peut être munie d'une  $k$ -structure si et seulement si

$$(2.31) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2), \quad M_{\mathfrak{B}_{N_1}, \mathfrak{B}_{N_2}} \in M_{\dim(N_1) \times \dim(N_2)}(k)$$

Exactement comme précédemment, on dira que le système de bases  $\mathfrak{B}_N$  est compatible au vide, au dual et aux produits tensoriels.

Bien entendu, la totalité des résultats énoncés dans Bourbaki se transpose dans ce contexte:

- Il existe une notion de plus petit corps de rationalité: on se donne  $k \subset K$  (voir [8, Chapitre II, §6, n° 6])<sup>10</sup> et on a:

**Proposition 3** *Munissons tous les  $H_N$  de  $k$ -structures compatibles au dual, au vide et aux produits tensoriels, il existe alors un plus petit sous corps  $L$  tel que  $k \subset L \subset K$  et tel que  $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_L \otimes_L K$*

- Nous pouvons donner un critère de rationalité basé sur l'utilisation du commutant d'un sous-corps de  $K$  [8, Chapitre II, §6, n° 7]. Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $\text{End}_k(K)$ , le commutant de  $\mathcal{A}$ , noté  $L_{\mathcal{A}}$  est l'ensemble des éléments  $x$  de  $K$  tels que

$$(2.32) \quad \forall y \in K, \forall \varphi \in \mathcal{A}, \quad \varphi(xy) = x \cdot \varphi(y)$$

Ceci permet de définir  $\varphi_H$  si  $(H, H')$  est un  $K$ -espace vectoriel muni d'une  $k$ -structure: on identifie  $H$  avec  $H' \otimes_k K$  et on pose

$$(2.33) \quad \forall (x, \lambda) \in H' \times K, \quad \varphi_H(x \otimes_k \lambda) = x \otimes_k \varphi(\lambda)$$

C'est un endomorphisme du  $\mathbb{Z}$ -module  $H$ , ou encore un endomorphisme du  $k$ -espace vectoriel  $H' \otimes_k K$ . Alors, le critère de rationalité s'exprime ainsi:

**Proposition 4** *La théorie  $\mathcal{T}_K$  admet une  $L_{\mathcal{A}}$ -structure si et seulement si*

$$(2.34) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2), \forall \varphi \in \mathcal{A}, \quad \varphi_{H_{N_2}} \circ \phi[M] = \phi[M] \circ \varphi_{H_{N_1}}$$

---

<sup>10</sup>La notion de plus petit sous-corps de rationalité n'a de sens que relativement à cette paire

Si on choisit un système de bases  $(\mathfrak{B}_N)_{N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma})}$  compatible au vide, au dual et aux produits tensoriels, le critère de rationalité devient:

$$(2.35) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2), \forall \varphi \in \mathcal{A}, \quad \varphi(M_{\mathfrak{B}_{N_1}, \mathfrak{B}_{N_2}}(\phi[M])) = M_{\mathfrak{B}_{N_1}, \mathfrak{B}_{N_2}}(\phi[M])$$

Enfin, le plus intéressant est sans doute l'action des groupes de Galois sur les théories topologiques.

### 2.3 Action des groupes de Galois sur les théories topologiques rationnelles.

Dans cette section, je vais discuter l'action naturelle de  $\text{Gal}(K/k)$  sur les théories topologiques rationnelles basées sur le corps  $K$  et à valeur dans une catégorie de  $K$ -espaces vectoriels munis de  $k$ -structures compatibles au vide, au dual et au produit tensoriel. Considérons  $\mathcal{T}_K$  une théorie topologique rationnelle à valeurs dans  $\mathbf{Sp}_k \otimes K$ , catégorie d'espaces vectoriels munis de  $k$ -structures compatibles au vide, au dual et aux produits tensoriels... Alors, soit  $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ , et  $(H, H')$  une  $k$ -structure sur le  $K$ -espace vectoriel  $H$ , l'équation 2.33 permet de définir  $\sigma_{(H, H')} \in \mathcal{L}_k(H)$  qui est un endomorphisme du  $k$ -espace vectoriel  $H$ . Je pose donc

$$\forall N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma}), \quad T_N = \sigma_{(H_N, H'_N)}$$

qui associe à chaque objet de  $\mathbf{Ma}$  un isomorphisme de  $k$ -espace vectoriel de  $H_N$ . Si je définis maintenant  $\sigma(\Phi)$  de la manière suivante:

- Pour la partie objet: pour tout objet  $N$  de  $\mathbf{Ma}$ , on pose

$$(2.36) \quad \sigma(\Phi)(N) = \Phi(N)$$

- Pour la partie morphisme: si  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$ , on pose

$$(2.37) \quad \sigma(\Phi)[M] = T_{N_2} \circ \Phi[M] \circ T_{N_1}^{-1}$$

J'obtiens une nouvelle théorie des champs topologique rationnelle sur  $\mathbf{Ma}$ . En effet, remarquons que les propriétés imposées aux espaces  $H_N$  restent vraies. Notons  $\tilde{\phi}[M]$  l'application  $k$ -linéaire  $T_{N_2} \circ \phi[M] \circ T_{N_1}^{-1}$ . Examinons les propriétés que doivent vérifier les opérateurs  $\tilde{\phi}[M]$ :

- $\tilde{\phi}[M]$  est  $K$ -linéaire: en effet, c'est un morphisme pour l'addition mais si  $x \in H_{N_1}$ ,  $\lambda \in K$ , alors comme  $\sigma_H(\lambda \cdot x) = \sigma(\lambda) \cdot x$ , et comme  $\phi[M]$  est  $K$ -linéaire, le résultat est immédiat.
- $\tilde{\phi}[M_1 \# M_2] = \tilde{\phi}[M_2] \circ \tilde{\phi}[M_1]$  tout simplement en intercalant  $\sigma_H^{-1} \circ \sigma_H$ .
- $\tilde{\phi}[M_1 \cup M_2] = \tilde{\phi}[M_1] \otimes_K \tilde{\phi}[M_2]$ : en effet, utilisons pour cela des bases  $\mathfrak{B}_N$  de chacun des espaces  $H_N$  qui soient  $k$ -rationnelles et compatibles au produit tensoriel. Notons  $M^{(1)}$  et  $M^{(2)}$  les matrices de  $\phi[M_1]$  et  $\phi[M_2]$  dans ces bases. Alors,  $M^{(1)} \otimes_K M^{(2)}$  est la matrice de  $\phi[M_1] \otimes_K \phi[M_2]$  dans la base produit tensoriel. Comme  $\sigma$  est un morphisme de corps,  $\sigma(M^{(1)} \otimes_K M^{(2)}) = \sigma(M^{(1)}) \otimes_K \sigma(M^{(2)})$ . Mais la formule 2.37 montre que  $\sigma(M^{(1)})$  n'est autre que la matrice de<sup>11</sup>  $\tilde{\phi}[M^{(1)}]$  dans les bases  $\mathfrak{B}_{N_1}$  et  $\mathfrak{B}_{N_2}$ . En conséquence,  $\tilde{\phi}[M_1] \otimes_K \tilde{\phi}[M_2]$  et  $\tilde{\phi}[M_1 \cup M_2]$  ont les mêmes matrices dans les mêmes bases. Ils sont donc égaux.

---

<sup>11</sup>Pour fixer les idées,  $M^{(1)} \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$ .



- Soit  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1 \cup Y, N_2 \cup Y)$ ,  $\tilde{\phi}[M_Y] = \text{Tr}_{H_Y}(\tilde{\phi}[M])$ . Considérons une base  $k$ -rationnelle  $\mathfrak{B}_Y$  de  $H_Y$  et  $\mathfrak{B}_{1,2}$  des bases  $k$ -rationnelles de  $H_{N_{1,2}}$  respectivement. Par compatibilité des  $k$ -structures avec les produits tensoriels,  $\mathfrak{B}_{1,2} \cup \mathfrak{B}_Y$  sont des bases  $k$ -rationnelles de  $H_{N_{1,2} \cup Y}$ . Un calcul élémentaire sur les matrices montre que la relation désirée s'obtient à partir de 2.11 par application de l'élément  $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ .

A partir de  $\mathcal{T}_K$ , je fabrique donc  $\sigma(\mathcal{T}_K)$  définie par les formules 2.36 et 2.37. Ces deux théories des champs diffèrent par une transformation naturelle locale (donnée par  $N \mapsto T_N$ )  $k$ -linéaire. Mais toutefois, les théories  $\mathcal{T}_K$  et  $\sigma(\mathcal{T}_K)$  ne sont pas équivalentes au sens de [16, Chap. 1, déf. 12] en tant que théories des champs à valeurs dans la catégorie des  $K$ -espaces vectoriels.

Il est facile de définir la notion de transformation naturelle locale entre théories des champs au sens de la définition 6. On doit bien entendu supprimer l'axiome d'unitarité  $T_N^\dagger T_N = \mathbf{1}_{H_N}$ . Précisément:

**Définition 9** Une transformation naturelle locale entre les TTR  $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$  et  $\mathcal{T}' = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}', \Phi']$  est une transformation naturelle  $N \mapsto T_N \in GL_K(H_N)$  telle que:

$$(2.38) \quad T_\emptyset = \mathbf{1}_K$$

$$(2.39) \quad T_{N \cup N'} = T_N \otimes_K T_{N'}$$

$$(2.40) \quad T_{\widehat{N}} = {}^t(T_N^{-1})$$

Seule la propriété 2.40 demande quelques commentaires. Dans [16, Section 1.3.1], on montre cette identité en faisant appel au cylindre  $N \times [0, 1]$  muni de paramétrisations en  $N \times \{0\}$  et  $N \times \{1\}$  se déduisant l'une de l'autre par translation mais considéré comme un élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N \cup \widehat{N}, \emptyset)$ . Ceci donne sur  $\mathcal{E}_N = \text{Vect}_K((\phi[M])_{M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, N)})$ , l'identité  $({}^t T_{\widehat{N}} T_N)|_{\mathcal{E}_N} = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_N}$ . En conséquence, j'ai choisi d'imposer 2.40. On pourrait très bien laisser tomber cette propriété mais dans les théories tridimensionnelles déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg,  $H_N = \mathcal{E}_N$ ! Dans ce cas, qui est celui qui nous intéresse, la propriété 2.40 est vérifiée.

A partir de là, si  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sont deux théories topologiques rationnelles basées sur  $\mathbf{Ma}$  qui sont reliées par une TNL  $\mathbb{T} : N \mapsto T_N$  au sens de la définition 6 et  $\mathbf{Sp}_K = \mathbf{Sp}_k \otimes_k K$ , et si  $\sigma \in \text{Gal}(K/k)$ ,  $\sigma(\mathcal{T}_1)$  et  $\sigma(\mathcal{T}_2)$  sont reliées par une TNL  $\sigma(\mathbb{T}) : N \mapsto \sigma(T_N)$ . La seule chose à vérifier est que 2.40 est préservée sous  $\sigma$ . Là encore, il suffit de choisir  $\mathfrak{B}_N$  une base de  $H_N$   $k$ -rationnelle et  $\mathfrak{B}_{\widehat{N}}$  la base duale au sens de Kronecker sur  $H_{\widehat{N}}$ . Finalement, nous obtenons

**Théorème 1** Le groupe de Galois  $\text{Gal}(K/k)$  opère sur la catégorie des théories des champs topologiques rationnelles basées sur  $\mathbf{Ma}$  et  $\mathbf{Sp}_K = \mathbf{Sp}_k \otimes_k K$ .

### 3 Equations de Moore et Seiberg

Dans cette section, nous allons expliquer ce que sont les équations de Moore et Seiberg. Notre présentation ne prétend pas être définitive. Les articles originaux sur ce sujet sont [52, 53]. L'article de revue [55] est également utile.

## 3.1 Les graphes MS

Nous supposons disposer des données combinatoires présentées page 7, à savoir l'ensemble  $I$  des indices de couleur et les ensembles d'indices de vertex. Dans cette sous-section et les suivantes, les graphes considérés seront connexes.

### 3.1.1 Graphes MS

**Définition 10** *On appelle graphe MS (colorié) la donnée d'un graphe trivalent orienté  $\mathcal{G}$ , à vertex circularisés (colorié) au sens des définitions 2 (et 4), et d'un sommet externe  $e$  de ce graphe.*

Le type topologique d'un graphe trivalent est un couple  $(g, n) \in \mathbb{N}^2$  défini comme suit:

- $n$  est le nombre de sommets externes du graphe.
- Plongeons le graphe dans  $\mathbb{R}^3$ , le bord d'un voisinage tubulaire de l'image par le plongement du graphe est une surface compacte orientable sans bords. Son genre est indépendant du plongement choisi. Notons le  $g$ . Par abus de langage, on dira que le graphe est "de genre  $g$ ".

Un graphe de genre zéro est un arbre. Bien sûr, on dispose d'une notion naturelle d'isomorphisme entre graphes MS: c'est la notion d'isomorphisme entre les graphes trivalents orientés à vertex circularisés qui envoie le sommet externe marqué du premier graphe sur le sommet externe marqué du second graphe.

**Proposition 5** *Soit  $(\mathcal{G}, e)$  un graphe MS de type  $(g, n)$  avec  $n > 0$ , son groupe d'automorphismes est trivial.*

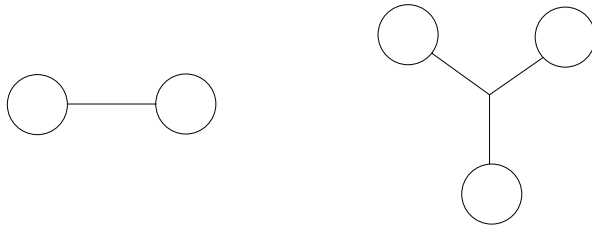
**Preuve:** Un tel automorphisme est défini par son action sur les sommets externes  $f_E \in \mathfrak{S}_E$ , les vertex  $f_V \in \mathfrak{S}_V$  et les arêtes orientées  $f_A \in \mathfrak{S}_A$ . Nous procédons par récurrence sur le nombre de vertex du graphe. Dans le cas  $(g, n) = (0, 3)$ , il suffit de remarquer que si  $h$  est une permutation d'un ensemble à trois éléments qui commute à un cycle d'ordre trois et qui stabilise un élément, alors  $h$  est l'identité.

Supposons maintenant que la proposition soit prouvée pour tous les graphes avec  $p \leq n$  vertex et considérons  $\mathcal{P} = (\mathcal{G}, e)$  un graphe MS avec  $n + 1$  vertex. Comme  $f_E(e) = e$ ,  $f_A$  stabilise les deux arêtes orientées qui ont comme extrémité  $e$ . En conséquence,  $f_V$  stabilise le vertex  $v$  (unique) qui est extrémité de ces deux arêtes. En utilisant le même argument que pour régler le cas du type topologique  $(0, 3)$ , nous montrons que  $f_A$  stabilise toutes les arêtes qui ont comme extrémité initiale ou finale ce vertex  $v$ . Considérons alors le graphe obtenu en retirant de  $\mathcal{G}$  le vertex  $v$  et en mettant aux arêtes libres ainsi créées des sommets externes. L'automorphisme  $(f_E, f_V, f_A)$  induit un automorphisme de ce nouveau graphe, qui laisse fixe les sommets externes que nous avons rajouté. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure<sup>12</sup>.  $\square$

---

<sup>12</sup>Le nouveau graphe peut ne pas être connexe mais alors les sommets externes rajoutés sont sur les deux composantes connexes du nouveau graphe et on applique deux fois l'hypothèse de récurrence.

Dans le cas d'un type topologique  $(g, 0)$ , il peut apparaître des groupes d'automorphismes non triviaux comme le montrent les exemples suivants:



qui ont comme groupes d'automorphismes respectifs  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Sur ce schéma, les circularisations en chacun des vertex correspondent à lire les arêtes arrivant ou partant de vertex selon le sens des aiguilles d'une montre. Sauf mention expresse du contraire, nous utiliserons toujours cette convention dans la suite de ce texte.

Avant de définir ce que sont les données de Moore et Seiberg, nous avons besoin de nous limiter à une sous-classe de graphes MS. Nous ne sommes arrivés à la caractériser de manière relativement intrinsèque que pour le genre zéro et le genre un. Dans les autres cas, nous nous limiterons à une classe restreinte arbitrairement, en vue de la construction des théories topologiques tridimensionnelles (voir page 37).

Soit  $\mathcal{P}$  un graphe MS, définissons  $f$  qui à une arête orientée  $a$  du graphe associe  $i(a)$  si  $\partial_f(a) \in E$  et, dans le cas contraire,  $\omega_{\partial_f(a)}(i(a))$  où  $\omega_v$  est la circularisation du vertex  $\partial_f(a)$ . L'application  $f$  est une bijection sans point fixe de l'ensemble des arêtes orientées du graphe sur lui même. Considérons quand  $n > 1$ , l'unique arête orientée  $a_0$  dont l'extrémité initiale est le sommet externe marqué de  $\mathcal{P}$ , et son orbite  $\mathfrak{D}_{\mathcal{P}}$  sous l'action de  $f$ . Cette orbite est une famille finie  $a_0, \dots, a_n$  d'arêtes orientées telles que  $a_{k+1} = f(a_k)$  et  $a_{n+1} = a_0$ .

Nous nous intéressons aux cas pour lesquels la suite des sommets  $\partial_i(a_k)_k$ , indexée par les éléments de l'orbite de  $a_0$ , recouvre la totalité de l'ensemble des sommets externes du graphe.

$$(3.1) \quad E \subset \{\partial_i(a_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$$

Cette propriété est compatible aux isomorphismes de graphes MS. Elle admet une interprétation géométrique très simple due à Ladegaillerie. A partir d'un graphe à sommets circularisés, on définit une surface à bords [47, paragraphe 3.2]. La propriété 3.1 signifie que les sommets externes sont tous sur la même composante connexe du bord de cette surface. Notons que chaque sommet externe est visité une seule fois. On obtient ainsi un ordre naturel sur l'ensemble des sommets externes.

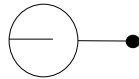
Dans certains cas, il existe un ordre naturel sur l'ensemble des vertex du graphe. C'est le cas lorsque la totalité des vertex sont inclus dans l'orbite  $\mathfrak{D}_{\mathcal{P}}$ . Nous ordonnons alors les vertex dans l'ordre où nous les rencontrons:  $(v_1, \dots, v_m)$ . Soit  $v$  un vertex du graphe, la première arête orientée rencontrée dans  $\mathfrak{D}_{\mathcal{P}}$  dont l'extrémité finale est  $v$  ainsi que la circularisation du vertex définissent un ordre sur les arêtes orientées d'extrémité initiale<sup>13</sup>  $v$ .

Bien entendu, il nous faut préciser à quelles conditions la propriété 3.1 est réalisée. Par récurrence sur le nombre de vertex, on montre que:

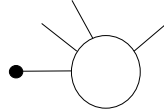
**Proposition 6** *Si  $\mathcal{P}$  est de type topologique  $(0, n)$  avec  $n \geq 3$ , alors il vérifie 3.1.*

<sup>13</sup>Ou finale, on transporte l'ordre grâce à  $i$ .

Les problèmes commencent à apparaître en genre un: le graphe suivant de type topologique  $(1, 2)$  ne vérifie pas la condition 3.1:



L'arête arrivant au sommet externe non marqué n'est pas dans l'orbite de l'arête arrivant ou partant du sommet externe marqué. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit le graphe multipériphérique de type  $(1, n)$  par:



On peut caractériser les graphes de type topologique  $(1, n)$  ( $n > 1$ ) qui vérifient 3.1:

**Proposition 7** *Les graphes MS de type topologique  $(1, n)$  vérifiant la propriété 3.1 sont obtenus à partir d'un graphe multipériphérique de genre un en recollant à certains de ses sommets externes un graphe en arbre.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition par récurrence sur le nombre de sommets externes  $n$ .

## 3.2 Découpes de graphes

Nous allons maintenant définir la notion de découpe d'un graphe trivalent à vertex circularisés. Elle généralise d'une manière agréable celle de recollement des graphes. Nous définirons ensuite celle de découpe d'un graphe MS. Puis nous montrerons comment à partir d'une découpe d'un graphe en composantes, un coloriage du graphe nous fournit un coloriage de chacune des composantes.

### Découpes de graphes trivalents à vertex circularisés

**Définition 11** *Soit  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  deux graphes trivalents à sommets circularisés, un plongement de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}'$  est la donnée de  $i_V : V \rightarrow V'$  injective et  $i_A : A \rightarrow A'$  telles que*

$$(3.2) \quad \forall a \in A, \quad i_V(\hat{a}) = \widehat{(i_V(a))}$$

$$(3.3) \quad \forall a \in A, \quad \partial_{i,f}(a) \in V \Rightarrow \partial_i(i_A(a)) = i_V(\partial_{i,f}(a))$$

$$(3.4) \quad \partial_{i,f}(a) = v \in V \Rightarrow \omega_v(i_A(a)) = i_A(\omega_{i_V(v)}(a))$$

Ces conditions assurent la compatibilité de  $(i_V, i_A)$  au changement d'orientation des arêtes, aux relations d'incidences dans le graphe, et aux circularisations des différents vertex. Il convient de remarquer que  $i_A$  n'est pas forcément injective.

**Définition 12** *Une découpe du graphe  $\mathcal{G}$  est la donnée d'une famille finie  $(\mathcal{G}_\alpha, i_\alpha)$  de graphes plongés dans  $\mathcal{G}$  tels que  $(i_\alpha^{(V)}(V_\alpha))_\alpha$  soit une partition de  $V$ .*

Les différents graphes  $\mathcal{G}_\alpha$  sont appelés les composantes de la découpe. Par exemple, si  $\mathcal{G}$  est un graphe, on pose  $i_V = \mathbf{1}_V$  et  $i_A = \mathbf{1}_A$ ,  $[(\mathcal{G}, (i_V, i_A)), \mathcal{G}]$  est une découpe de  $\mathcal{G}$ . On dit que c'est la découpe triviale de  $\mathcal{G}$ . Maintenant si  $f$  désigne un automorphisme du graphe  $\mathcal{G}$ , on notera  $\mathcal{D}_f$  la découpe  $[(\mathcal{G}, (f_V^{-1}, f_A^{-1})), \mathcal{G}]$ . Elle n'a qu'une composante. La découpe triviale est  $\mathcal{D}_{1_{\mathcal{G}}}$ .

Si  $\mathcal{G}$  est un graphe obtenu par recollement:  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \sharp_{(D, j)} \mathcal{G}_2$ , le lecteur construira une découpe de  $\mathcal{G}$  en deux composantes qui ne sont autres que  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$ . Si un graphe  $\mathcal{G}$  est connexe, alors pour toute découpe ayant  $N > 1$  composantes, chaque graphe  $\mathcal{G}_\alpha$  possède au moins un sommet externe.

**Isomorphismes de découpes et découpes emboîtées** Il est souhaitable de définir la notion d'isomorphisme entre découpes:

**Définition 13** Soit  $\mathcal{P} = [(\mathcal{G}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{G}]$  et  $\mathcal{P}' = [(\mathcal{G}'_\alpha, i'_\alpha)_\alpha, \mathcal{G}']$  deux découpes, on dira qu'elles sont isomorphes si et seulement si, il existe une bijection  $h$  entre les ensembles de composantes de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  un isomorphisme  $f$  de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{G}'$  et une famille  $f_\alpha : \mathcal{G}_\alpha \rightarrow \mathcal{G}'_{h(\alpha)}$  d'isomorphismes de graphes trivalentes à vertex circularisés tels que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \mathcal{G} \\ f_\alpha \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{G}'_{h(\alpha)} & \xrightarrow{i'_{h(\alpha)}} & \mathcal{G}' \end{array}$$

commutent<sup>14</sup>

Enfin, on utilisera la notion de découpe emboîtée:

**Proposition 8** Soit  $\mathcal{P} = [(\mathcal{G}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{G}]$  une découpe de  $\mathcal{G}$  et pour chaque  $\alpha$ ,  $\mathcal{P}_\alpha = [(\mathcal{G}_{\alpha, \beta}, i_{\alpha, \beta})_\beta, \mathcal{G}_\alpha]$  une découpe de  $\mathcal{G}_\alpha$ , si on pose  $j_{\alpha, \beta} = i_\alpha \circ i_{\alpha, \beta}$ , alors  $[(\mathcal{G}_{\alpha, \beta}, i_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}, \mathcal{G}]$  est une découpe de  $\mathcal{G}$ .

**Preuve:** En effet, pour chaque  $(\alpha, \beta)$ ,  $i_\alpha \circ i_{\alpha, \beta}$  définit bien un plongement de  $\mathcal{G}_{\alpha, \beta}$  dans  $\mathcal{G}$  et les  $j_{\alpha, \beta}^{(V)}(V_{\alpha, \beta})$  forment bien une partition de  $V$ .  $\square$

On dira que  $[(\mathcal{G}_{\alpha, \beta}, i_{\alpha, \beta})_{\alpha, \beta}, \mathcal{G}]$  est la découpe emboîtée de  $\mathcal{P}$  et des  $\mathcal{P}_\alpha$ . Elle sera notée  $[(\mathcal{P}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{P}]$ .

**Découpes et coloriage** Si  $\mathcal{C}$  est un coloriage de  $\mathcal{G}$ , et si  $\mathcal{P}$  est une découpe de  $\mathcal{G}$  de composantes  $(\mathcal{G}_\alpha)_\alpha$ , nous fabriquons canoniquement pour tout  $\alpha$ ,  $\mathcal{C}_\alpha$  qui est un coloriage de  $\mathcal{G}_\alpha$ . Notons  $j_a$  la couleur de l'arête orientée  $a$  du graphe  $\mathcal{G}$ .

- Soit  $a \in A_\alpha$  une arête orientée de  $\mathcal{G}_\alpha$ , on lui associe la couleur  $j_a^{(\alpha)} = j_{i_\alpha^{(A)}(a)}$ . Comme  $i(i_\alpha^{(A)}(a)) = i_\alpha^{(A)}(i(a))$ , nous avons  $j_{i(a)}^{(\alpha)} = \widehat{j_a^{(\alpha)}}$ .

<sup>14</sup> En tant que diagramme de morphismes de graphes. Cela signifie que la partie vertex et la partie arêtes orientées commutent.

- Soit  $v$  un vertex de  $\mathcal{G}_\alpha$ , l'ensemble  $A_v$  des arêtes de  $\mathcal{G}_\alpha$  issues de  $v$ , est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des arêtes orientées du graphe  $\mathcal{G}$  issues de  $i_V^{(\alpha)}(v)$ . En conséquence, à tout ordre total sur  $A_v$  est associé un ordre total sur  $A_{i_V^{(\alpha)}(v)}$ . De ce fait, nous pouvons colorier le vertex  $v$  comme dans la définition 4. Les propriétés imposées dans cette définition sont trivialement vérifiées.

En conséquence, cela montre qu'à tout coloriage  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{G}$ , la découpe  $\mathcal{P}$  permet d'associer des coloriations de chaque composante  $\mathcal{G}_\alpha$ .

## Découpage maximal

**Définition 14** *Un découpage maximal est un découpage dont toutes les composantes ont un type topologique  $(0, 3)$ .*

Les composantes d'un tel découpage sont canoniquement indexées par les vertex du graphe  $\mathcal{G}$ . Un découpage maximal est, modulo un réarrangement des composantes, de la forme  $[(\mathcal{G}_{0,3}^v, i_v)_{v \in V}, \mathcal{G}]$  où  $\mathcal{G}_{0,3}^v$  est la composante de type topologique  $(0, 3)$  dont le vertex est envoyé sur  $v \in V$ . Soient  $[(\mathcal{G}_{0,3}^v, i_v)_{v \in V}, \mathcal{G}]$  et  $[(\mathcal{G}_{0,3}^{v'}, i_{v'})_{v \in V}, \mathcal{G}]$  deux tels découpages, pour chaque vertex  $v \in V$ , il existe une permutation  $c_v$  de  $A_v$  commutant à  $\omega_v$  tel que, au niveau des arêtes orientées,  $i_{v'} = c_v \circ i_v$ .

**Cas des graphes MS** Nous pouvons également définir la notion de découpe d'un graphe MS en graphes MS.

**Définition 15** *Une découpe (maximale) d'un graphe MS est une découpe (maximale) du graphe trivalent sous-jacent, munie d'un choix d'un sommet externe pour chaque composante de la découpe.*

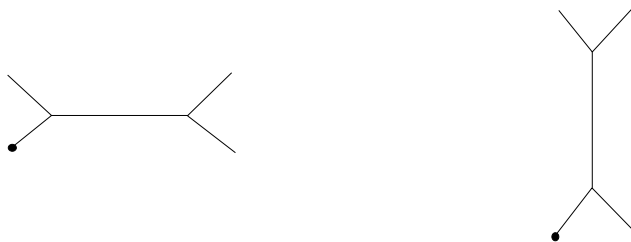
Nous emploierons la notation  $[(\mathcal{P}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{P}]$  pour une découpe du graphe MS en composantes  $\mathcal{P}_\alpha$ . Les notions d'isomorphisme de découpes et de découpe emboîtée sont trivialement définies en prenant dans la définition 13 des isomorphismes de graphes MS. Soit  $\mathcal{D}$  un découpage maximal d'un graphe MS  $\mathcal{P} = [\mathcal{G}, \epsilon]$ , et  $\mathcal{C}$  un coloriage de  $\mathcal{G}$ . Nous en déduisons un coloriage  $\mathcal{C}_v$  de chaque composante  $\mathcal{G}_v$  du découpage. Comme chaque composante est aussi munie d'une structure de graphe MS, cela nous définit, pour chaque composante, un ordre total sur l'ensemble des trois arêtes orientées issues du vertex. En conséquence, nous savons associer à chaque composante une unique couleur de vertex  $a_v$ .

Dans certains cas, il existe une découpe maximale de  $\mathcal{P}$  "naturelle". Ainsi, pour le type topologique  $(0, n)$  avec  $n \geq 3$ , nous disposons d'un ordre naturel sur l'ensemble des vertex de  $\mathcal{P}$ . Dans la suite de ce texte, lorsque nous ferons figurer des couleurs sur un vertex d'un graphe MS, nous supposerons qu'elles sont obtenues par l'algorithme que nous venons de décrire. Bien entendu, cela supposera un choix d'un découpage maximal du graphe MS considéré. Lorsque, comme dans le cas des types topologiques  $(0, n)$  un choix naturel existe, il sera sous entendu.

### 3.2.1 Mouvements $F$ sur les graphes

Un problème important est de savoir comment classer tous les graphes MS de type topologique donné à isomorphisme près. La réponse se trouve en partie dans l'article de Kohno [44, Lemme 1.2]. Toutefois, Kohno ne considère pas que les vertex des graphes sont munis de circularisations. Cela le conduit à identifier des graphes que nous ne considérons pas comme isomorphes. En vertu de la proposition 6, cette subtilité ne se manifeste pas en genre zéro. Elle apparaît pour le type topologique  $(1, 2)$ . Toutefois, le Lemme 1.2 de [44] s'adapte à nos besoins.

Pour comprendre comment sont classés les graphes, analysons quels sont les graphes MS possibles pour  $(g, n) = (0, 4)$ . Nous numérotions les sommets externes de 1 à 4 selon l'ordre déduit des circularisations et du choix d'un sommet externe particulier. Alors, il existe exactement deux graphes de type  $(0, 4)$ :



Il est entendu que les ensembles des sommets externes pour ces deux graphes sont identifiés via la numérotation de 1 à 4. On dira que ces deux graphes sont reliés par un mouvement de type  $F$ . Nous définissons les mouvements de type  $F$  pour des graphes de type topologique quelconque par:

**Définition 16** Soient deux graphes MS  $(\mathcal{G}, e)$  et  $(\mathcal{G}', e')$ , Nous dirons qu'ils sont reliés par un mouvement  $F$  si et seulement si ils sont isomorphes en tant que graphes MS à deux graphes MS dont les graphes trivalents sous-jacent sont de la forme:

$$\mathcal{G}_0 \sharp_{(D, i)} \mathcal{G}_{0,4} \text{ et } \mathcal{G}_0 \sharp_{(D, i)} (F \cdot \mathcal{G}_{0,4})$$

où  $\mathcal{G}_{0,4}$  et  $F \cdot \mathcal{G}_{0,4}$  désignent les graphes sous-jacents à deux graphes MS de de topologie  $(0, 4)$  qui diffèrent par un mouvement<sup>15</sup>  $F$ .

Enfin, on montre qu'il est légitime d'étudier l'action des mouvements  $F$  sur la classe des graphes MS vérifiant 3.1: si  $\mathcal{P}$  est un graphe MS vérifiant la condition 3.1, alors  $F \cdot \mathcal{P}$  la vérifie. En effet, un mouvement  $F$  ne change pas la surface associée à un graphe trivalent à sommets circularisés.

### 3.2.2 Le complexe $\mathfrak{Y}_{g,n}$

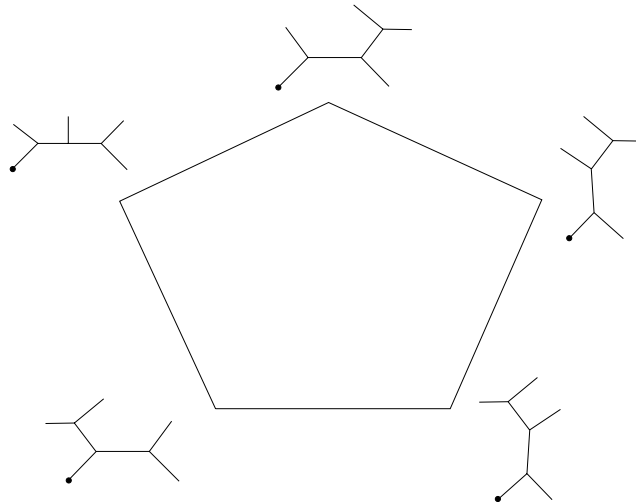
Dans [44], l'auteur utilise des graphes trivalents, dont les vertex ne sont pas circularisés, et dont l'ensemble des sommets externes est ordonné. La notion de mouvement de type  $F$  pour ces graphes se définit comme dans la section précédente. Pour chaque valeur du type topologique  $(g, n)$ , Kohno

<sup>15</sup>En conséquence, ils ont même ensemble de sommets externes, ce qui permet de dire que l'on ne change pas l'application de recollement  $j : D \subset E_{\mathcal{G}_0} \rightarrow E_{\mathcal{G}_{0,4}}$

introduit un complexe  $Y_{g,n}$  dont les sommets sont les graphes, les arêtes sont les mouvements de type  $F$  sur ces graphes. Il définit également des 2-cellules et il montre que  $Y_{g,n}$  est connexe et simplement connexe.

Dans cette section, nous allons construire des complexes  $\mathfrak{Y}_{0,n}$  et  $\mathfrak{Y}_{1,n}$ , les classes d'isomorphismes de graphes MS vérifiant la propriété 3.1 et dont les arêtes sont les mouvements de type  $F$ . Ce complexe jouera pour nous le rôle du complexe  $Y_{g,n}$  de Kohno.

**Les 2-cellules** Bien sûr, étant donné  $\mathcal{G}_i$  et  $\mathcal{G}_j$  deux graphes MS, il existe plusieurs suites finies de mouvements de type  $F$  permettant de passer de l'un à l'autre. Examinons le cas  $(g,n) = (0,5)$ : il existe exactement cinq classes d'isomorphisme de graphes MS de ce type topologique. La figure suivante montre des représentants de ces cinq classes ainsi que les mouvements  $F$  les reliant:



De la même manière que précédemment, nous considérons un graphe MS de type topologique  $(g,n)$  quelconque. Supposons – modulo un isomorphisme de graphes MS – que le graphe trivalent sous-jacent soit isomorphe à un recollement via une injection  $j$  de deux graphes  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{H}_1$  où ce dernier est de type topologique  $(0,5)$ . L'application de recollement permet de munir l'ensemble des sommets externes de  $\mathcal{H}_1$  d'un ordre total. On peut donc voir  $\mathcal{H}_1$  comme un graphe MS en choisissant un de ses sommets externes. Il existe cinq graphes MS, de graphes trivalents notés  $(\mathcal{H}_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 5}$  ayant même ensemble de sommets externes, et même sommet externe marqué, et reliés par des mouvements  $F$  comme dans la figure ci-dessus. Nous considérons alors les graphes  $\mathcal{G}_0 \#_{(D,j)} \mathcal{H}_\alpha$  qui sont reliés par des mouvements de type  $F$ . Nous dirons qu'ils forment les cinq sommets d'une 2-cellule de  $\mathfrak{Y}_{g,n}$ . Une telle 2-cellule sera dite du premier type ou pentagonale. Nous rajoutons comme 2-cellules (dites du second type) les polygones formés par une suite périodique d'arêtes  $f_1, \dots, f_n, f_{n+1} = f_1$  telles que  $f_k$  et  $f_{k+1}$  portent sur des paires de vertex d'intersection vide.

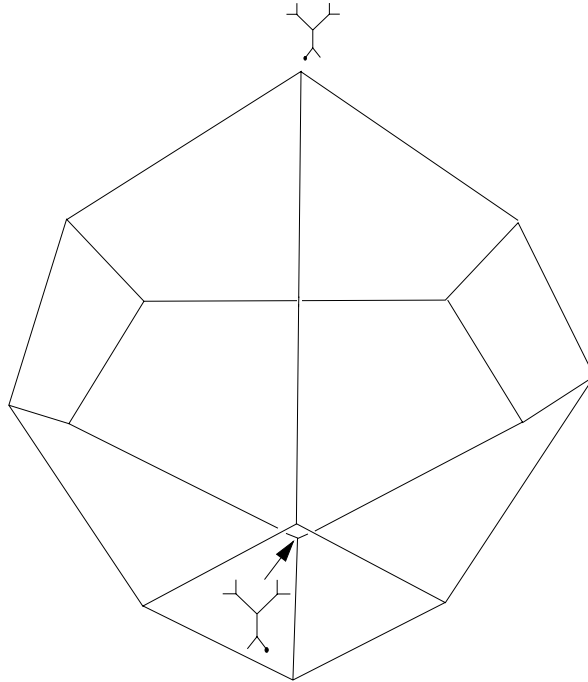
**Simple connexité du complexe, exemples** On montre alors:

**Théorème 2** *Les complexes  $\mathfrak{Y}_{0,n}$  et  $\mathfrak{Y}_{1,n}$  sont connexes et simplement connexes.*

Le cas du genre zéro est réglé par Kohno car les complexes  $\mathfrak{Y}_{0,n}$  et  $Y_{0,n}$  coïncident pour  $n \geq 3$ . C'est aussi une autre manière d'énoncer le théorème de cohérence de Mac-Lane [36, Page 58].

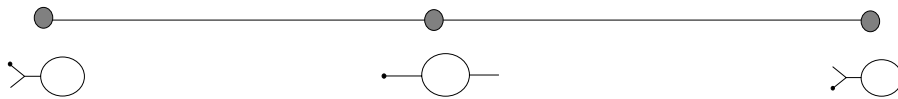


Un exemple instructif est fourni par le complexe  $(0, 6)$ . Le lecteur vérifiera qu'il existe exactement quatorze<sup>16</sup> graphes MS de type topologique  $(0, 6)$  et que le complexe est le suivant:



Nous avons indiqué deux graphes MS particuliers. Ce sont ceux qui ont un graphe trivalent sous-jacent avec un groupe d'automorphisme cyclique d'ordre trois. Ce graphe trivalent sous-jacent admet trois "sous-graphes" trivalents distincts de type topologique  $(0, 5)$ . Ceci explique qu'en ces deux sommets se rencontrent trois faces. Le complexe  $\mathfrak{Y}_{0,6}$  possède en tout six faces pentagonales du premier type, et trois faces carrées<sup>17</sup> du second type qui correspondent à deux mouvements de type  $F$  sur des couples de vertex distincts. Sa topologie est celle d'une sphère  $S_2$ : il est donc bien simplement connexe.

Un autre exemple instructif est fourni par les complexes  $\mathfrak{Y}_{1,n}$  pour  $n = 1, 2, 3$ . Dans le cas  $n = 1$ , il n'y a qu'un seul graphe de type topologique  $(1, 1)$  et donc pas d'arête ni de 2-cellule. Dans le cas  $n = 2$ , nous avons exactement trois graphes MS de type topologique  $(1, 2)$  et le complexe est:

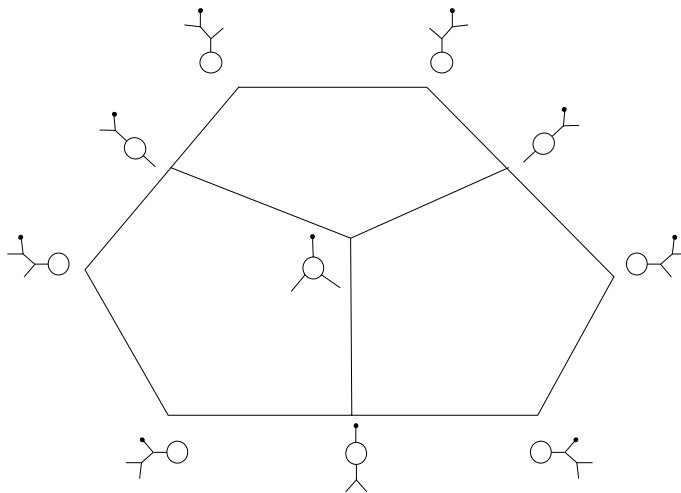


Il n'apparaît aucune 2-cellule sur cet exemple. Ce cas est l'analogue du cas  $(0, 4)$  en genre zéro. En revanche, pour  $n = 3$ , nous avons dix graphes MS de type topologique  $(1, 3)$ , et il apparaît

<sup>16</sup>Il est trivial de calculer une fonctionnelle génératrice du nombre de sommets de  $(\mathfrak{Y}_{0,n})_n$ , c'est  $z(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/2x$ . Nous obtenons ainsi directement le nombre de graphes  $(0, 6)$  qui vaut quatorze,  $(0, 7)$  qui vaut 42 etc

<sup>17</sup>Indispensables pour la simple connexité!

exactement trois 2-cellules pentagonales. C'est l'analogue du cas  $(0, 5)$  en genre zéro:



**Remarque:** Cette valeur du type topologique a été utilisée par R. Dijkgraaf et E. Verlinde dans [19] pour montrer la “formule de Verlinde”, c'est à dire l'identité suivante:

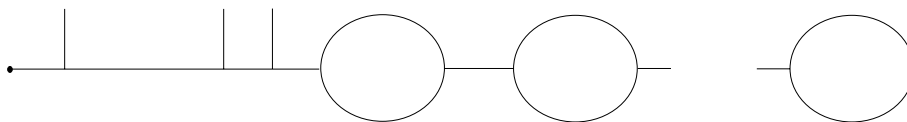
$$(3.5) \quad N_{i,j,k} = \sum_n \frac{S_i^n S_j^n S_k^n}{S_0^n}$$

qui relie la matrice  $S$  aux entiers  $(N_{i,j,k})_{i,j,k}$ .  $\square$

**Genre supérieur** En genre supérieur, nous nous contenterons de fixer un graphe MS particulier  $\mathcal{P}_{g,n}$  et de considérer  $\mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n})$  formé par la composante connexe de ce graphe.

Enfin, il est intéressant de remarquer que le nombre de coloriage d'un graphe de type topologique  $(g, n)$  fixé, sachant que l'on a fixé les couleurs des sommets externes, est indépendant du graphe. Ceci découle de la connexité de  $Y_{g,n}$ , de la condition 2.2 et de la symétrie des  $(N_{i,j,k})_{i,j,k}$  par permutation des trois indices.

Pour finir, introduisons une famille de graphes MS de type topologique  $(g, n)$  qui nous seront utiles par la suite. On appelle  $\mathcal{P}_{g,n}$  la famille, indexée par  $n \geq 2$  de graphes à  $n$  sommets externes et  $g$  boucles suivants:



où le point noir désigne le sommet externe marqué. Nous avons numéroté les sommets externes suivant l'ordre déduit des circularisations et du sommet marqué.

### 3.3 Les données de Moore et Seiberg

Considérons un graphe MS  $(\mathcal{G}, e)$ , notons  $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, e)}$  l'espace vectoriel engendré par les coloriage du graphe  $(\mathcal{G}, e)$ . Les données de Moore et Seiberg consistent en certains isomorphismes entre les

espaces  $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \varepsilon)}$  pour des graphes de types topologiques  $(0, 3)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Elles sont définies dans les sections 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.4.

Nous donnerons en section 3.3.3 un procédé pour construire à partir de ceux-ci des isomorphismes entre les autres espaces  $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \varepsilon)}$ . Cette construction s'appuie sur des injections entre l'espace  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  et un produit tensoriel  $\otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_\alpha}$  qui sont définies à partir d'une découpe  $[(\mathcal{P}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{P}]$  de  $\mathcal{P}$ .

A partir de là, il devient possible d'écrire les équations de Moore et Seiberg (section 3.3.5 et 3.3.6). Elles portent alors sur des isomorphismes entre espaces  $\mathcal{H}_{(\mathcal{G}, \varepsilon)}$  pour des types topologiques  $(0, 4)$ ,  $(0, 5)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, 2)$ .

### 3.3.1 La matrice $F$

Comme nous l'avons vu, il existe deux classes d'isomorphismes de graphes MS de type  $(0, 4)$ . Nous supposons qu'il existe un isomorphisme  $\mathcal{F}$  entre les espaces associés et on notera  $F$  la matrice de cet isomorphisme dans les bases associées aux coloriage. Moore et Seiberg emploient la notation suivante pour les éléments de matrice de  $\mathcal{F}$ :

$$(3.6) \quad \mathcal{F} \cdot \begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} l \end{array} = \sum_{q, c, d} F_{p, q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \xrightarrow{d} \quad \leftarrow k \\ \downarrow q \\ i \xrightarrow{c} \quad \leftarrow l \end{array}$$

### 3.3.2 Autres données de genre zéro

Il existe une seule classe d'isomorphisme de graphe MS de type  $(0, 3)$ : celle de  $\mathcal{P}_{0,3}$ . Nous numérotions les trois sommets externes dans l'ordre défini par la circularisation du vertex et le sommet marqué. Moore et Seiberg définissent un isomorphisme  $\mathcal{D}(\pm)$  de l'espace  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$  par la donnée de

$$(3.7) \quad \underline{\omega} : \bigsqcup_{(i, j, k) \in I^3} [i, j, k] \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

La donnée d'un indice de vertex  $a \in [i, j, k]$  spécifie un unique élément de la base considérée de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$ : il suffit de colorier les arêtes orientées issues des sommets numérotés 1, 2, 3 respectivement par  $i, j$  et  $k$  et le vertex par  $a$ . Notons  $\phi^{(a)}$  le vecteur de base associé. L'automorphisme  $\mathcal{D}(\pm)$  est défini par

$$(3.8) \quad \mathcal{D}(\pm) \cdot \phi^{(a)} = \underline{\omega}(a)^{\pm 1} \phi^{(\sigma_{23}(a))}$$

On dispose également de trois automorphismes  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in E}$  de  $\mathcal{H}_{0,3}$  indexés par les trois sommets externes du graphe considéré. Ils sont de la forme suivante: nous supposons qu'il existe une famille  $(\omega_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathbb{C}^*$  telle que  $\omega_0 = 1$  et  $\omega_i = \omega_i$ . Alors, si  $i_\alpha$  désigne la couleur de l'arête orientée aboutissant au sommet externe  $\alpha$ ,

$$(3.9) \quad \mathcal{R}_\alpha \cdot \phi^{(a)} = \omega_{i_\alpha} \phi^{(a)}$$

### 3.3.3 Transport des données $\mathcal{F}$ , $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}_\alpha$ sur les espaces $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$

Dans l'optique de [33, Paragraphe 2], il est crucial de pouvoir transporter les générateurs qui vivent dans le premier étage de la Tour de Teichmüller dans les étages supérieurs. Nous allons montrer ici que l'on peut définir des morphismes entre espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  pour des graphes MS  $\mathcal{P}$  de type topologique arbitraire à partir de morphismes correspondant à des types topologiques  $(g', n')$  d'étage  $3g' - 3 + n'$  inférieur. L'ingrédient essentiel de ces constructions est fourni par des injections linéaires de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  à valeurs dans un produit tensoriel de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_\alpha}$  que l'on construit à partir de découps du graphe MS  $\mathcal{P}$  [16].

**Morphismes entre espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$**  Nous avons vu en section 3.2 comment définir la notion de découpe d'un graphe trivalent à vertex circularisés. Nous avons vu qu'à chaque coloriage  $\mathcal{C}$  d'un tel graphe, une découpe de  $\mathcal{G}$  en composantes  $\mathcal{G}_\alpha$  permet d'associer un coloriage de chacune des composantes de la découpe. En conséquence, pour tout graphe MS  $\mathcal{P}$  et toute découpe  $\mathcal{D} = [(\mathcal{P}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{P}]$  en composantes  $\mathcal{P}_\alpha$ , nous posons

$$(3.10) \quad \psi_{\mathcal{D}} \cdot V_{\mathcal{C}} = \bigotimes_{\alpha} V_{\mathcal{C}_\alpha}$$

Le produit tensoriel est ordonné suivant l'ordre des composantes de la découpe. Ceci définit  $\psi_{\mathcal{D}}$  qui est une injection linéaire de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  dans  $\bigotimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_\alpha}$ . Ces applications possèdent la propriété suivante:

**Proposition 9** *Si  $\mathcal{D}$  est une découpe du graphe  $\mathcal{P}$  en composantes  $\mathcal{P}_\alpha$  et si  $\mathcal{D}_\alpha$  est une découpe de chaque  $\mathcal{P}_\alpha$  en composantes  $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$  alors,*

$$(3.11) \quad \psi_{[(\mathcal{D}_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \mathcal{D}]} = \left( \bigotimes_{\alpha} \psi_{\mathcal{D}_\alpha} \right) \circ \psi_{\mathcal{D}}$$

De plus, pour tout graphe MS  $\mathcal{P}$ , nous disposons d'une action naturelle du groupe  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  des automorphismes du graphe trivalent à vertex circularisés  $\mathcal{G}$  sous-jacent à  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ . En effet, si  $\mathcal{G}$  est le graphe sous-jacent au graphe MS  $\mathcal{P}$ , et si  $f$  est un automorphisme de  $\mathcal{G}$ , on note  $\psi_f$  l'application linéaire de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  associée à la découpe  $\mathcal{D}_f$  définie page 20. Clairement,  $\psi_f$  est bijective et de plus  $f \mapsto \psi_f$  fournit une représentation de  $\text{Aut}(\mathcal{G})$  dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ .

Dans le cas d'une découpe maximale (définition 14), nous tombons dans un produit tensoriel d'espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$ . Une découpe maximale associe à chaque coloriage de  $\mathcal{P}$  une suite ordonnée de couleurs de vertex:  $(a_v)_{v \in V}$ . Dans le cas où il existe un découpage maximal naturel de  $\mathcal{P}$ , nous noterons  $\psi_{\mathcal{P}}$  l'injection associée. Par exemple, avec les notations de Moore et Seiberg, nous avons:

$$(3.12) \quad \psi_{\mathcal{P}_{0,4}} \cdot \begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \xrightarrow{a} p \xrightarrow{b} l \end{array} = \phi^{(a)} \otimes \phi^{(b)}$$

et

$$(3.13) \quad \psi_{\mathcal{F}, \mathcal{P}_{0,4}} \cdot \begin{array}{c} j \xrightarrow{d} k \\ \downarrow q \\ i \xrightarrow{c} l \end{array} = \phi^{(c)} \otimes \phi^{(d)}$$

**Transport des isomorphismes** En utilisant les injections  $\psi_{\mathcal{D}}$ , nous allons transporter  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{D}(\pm)$  et les  $\mathcal{R}$  à divers espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ :

- A partir de  $\mathcal{D}(\pm)$  nous définissons  $\mathcal{D}_1(\pm)$ , isomorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$  sur  $\mathcal{H}_{F.\mathcal{P}_{0,4}}$  et  $\mathcal{D}_2(\pm)$ , automorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$ , par la commutation des diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}_{0,4}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \\ \downarrow \mathcal{D}_1(\pm) & & \mathcal{D}(\pm) \otimes \mathbf{1} \downarrow \\ \mathcal{H}_{F.\mathcal{P}_{0,4}} & \xrightarrow{\psi_{F.\mathcal{P}_{0,4}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}_{0,4}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \\ \downarrow \mathcal{D}_2(\pm) & & \mathbf{1} \otimes \mathcal{D}(\pm) \downarrow \\ \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}_{0,4}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \end{array}$$

Nous noterons également  $\mathcal{D}_{1,2}(\pm)$  les applications linéaires définies sur  $\mathcal{H}_{F.\mathcal{P}_{0,4}}$  en échangeant dans les diagrammes commutatifs  $\mathcal{P}_{0,4}$  et  $F.\mathcal{P}_{0,4}$ .

- On étend la définition de  $\mathcal{R}_\alpha$  à  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  où  $\mathcal{P}$  est un graphe MS de type topologique  $(g, n)$  avec  $n > 0$ . Si  $i_\alpha$  désigne la couleur associée à l'arête orientée aboutissant au sommet externe  $\alpha$ ,

$$(3.14) \quad \mathcal{R}_\alpha \cdot V_{\mathcal{P}_c} = \omega_{i_\alpha} V_{\mathcal{P}_c}$$

- Pour finir, si  $\mathcal{P}$  désigne un graphe MS de type topologique  $(g, n)$  avec  $3g - 3 + n > 1$ , alors en utilisant des morphismes  $\psi_{\mathcal{D}}$  convenables, on fabrique des isomorphismes entre  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  et  $\mathcal{H}_{F_{v_1, v_2}.\mathcal{P}}$  par commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{D}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}'} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}} \\ \mathcal{F}_{v_1, v_2} \downarrow & & \mathbf{1} \otimes \mathcal{F} \downarrow \\ \mathcal{H}_{F_{v_1, v_2}.\mathcal{P}} & \xrightarrow{\psi_{F_{v_1, v_2}.\mathcal{D}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}'} \otimes \mathcal{H}_{F.\mathcal{P}_{0,4}} \end{array}$$

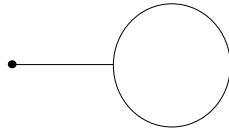
où  $\mathcal{D}$  désigne la découpe correspondant au recollement  $\mathcal{P} = F_{v_1, v_2}.\mathcal{P}'_{(D, j)}\mathcal{P}_{0,4}$  qui permet de définir le mouvement  $F$  considéré. De même  $F_{v_1, v_2}.\mathcal{D}$  correspond à  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'_{(D, j)}F.\mathcal{P}_{0,4}$ . Cette construction assure que si  $F_1 \dots F_n$  est une suite finie de mouvements  $F$  dont les arêtes associées bordent une 2-cellule du second type, alors, en notant  $(\mathcal{F}_k)_{1 \leq k \leq n}$  les isomorphismes associés à chacun des mouvements  $F_k$ , on a bien

$$(3.15) \quad \mathcal{F}_1 \circ \dots \circ \mathcal{F}_n = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{P}}}$$

### 3.3.4 Les matrices en genre un

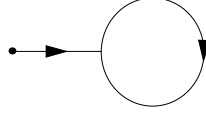
Les données nouvelles sont définies relativement au type topologique  $(1, 1)$ . L'écriture des équations de Moore et Seiberg nécessite l'introduction d'autres isomorphismes entre espaces associés à des graphes MS de type topologique  $(1, 0)$  et  $(1, 2)$  mais nous allons voir qu'il s'expriment en fonction des données introduites dans les sections précédentes.

**Type topologique  $(1, 1)$ .** Il existe une seule classe d'isomorphisme de graphe MS de type topologique  $(1, 1)$  dont représentant est décrit par:



Nous supposons l'existence de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  deux isomorphismes de l'espace associé à cette classe. Leurs propriétés seront décrites en section 3.3.6. Ici, nous nous contentons de poser les notations et nous montrons comment fabriquer d'autres isomorphismes entre certains espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  à partir de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ .

Leur matrices dans la base fournie par les coloriage du graphe seront notées  $S$  et  $T$ . Nous notons  $\phi_{1,1}^{(i,a)}$  le vecteur de base correspondant au coloriage



de  $\mathcal{P}_{1,1}$ . Moore et Seiberg introduisent la notation suivante pour les éléments de matrice de  $S$  et  $T$ :

$$(3.16) \quad \mathcal{S} \cdot \phi_{1,1}^{(i,a)} = \sum_{i',a'} S(j)_{(i,a)(i',a')} \phi_{1,1}^{(i',a')}$$

$$(3.17) \quad \mathcal{T} \cdot \phi_{1,1}^{(i,a)} = \sum_{i',a'} T(j)_{(i,a)(i',a')} \phi_{1,1}^{(i',a')}$$

Moore et Seiberg supposent que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  vérifient les deux propriétés suivantes:

- $\mathcal{S}$  préserve la couleur  $j$  de l'arête orientée dont l'extrémité initiale est le sommet externe de  $\mathcal{P}_{1,1}$
- Dans la base des  $\phi_{1,1}^{(i,a)}$ ,  $\mathcal{T}$  est diagonal et  $T_{(i,a)(i',a')} = \omega_i \xi \delta_{a,a'}$  où  $\xi$  est de module un. Dans la littérature des théories conformes,  $\xi$  est noté  $\exp(-2\pi ic/24)$  où  $c$  est appelé la charge centrale du modèle.

De même, on note  $\mathcal{C}$  l'automorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}}$  défini par la commutation de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}_{1,1}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \\ \mathfrak{c} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{b} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{P}_{1,1}}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \end{array}$$

où  $\mathfrak{b}$  est défini par son action sur  $\phi^{(a)}$  avec  $a \in [i, j, k]$  par

$$(3.18) \quad \mathfrak{b} \cdot \phi^{(a)} = \underline{\omega}(\sigma_{123}(a)) \phi^{(\sigma_{23}(a))}$$

Enfin, exactement comme dans le cas du genre zéro, nous pouvons définir des isomorphismes  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sur certains espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ . Ils dépendent d'un sous-graphe MS de type topologique  $(1, 1)$  de  $\mathcal{P}$ . Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les définitions correspondantes.

**Type topologique  $(1, 0)$ .** Il existe un seul graphe MS de type topologique  $(1, 0)$  à isomorphisme près. Il possède un groupe d'automorphisme d'ordre deux. Le graphe trivalent sous-jacent est défini par  $S = \emptyset$  et  $A = \{a, \hat{a}\}$ . Il n'y a pas de sommets externes. L'automorphisme non trivial envoie  $a$  sur  $\hat{a}$ . On note  $\mathcal{P}_{1,0}$  ce graphe.

Notons  $\chi_j$  l'état de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$  obtenu à partir du coloriage  $a \mapsto j$ . L'automorphisme  $a \mapsto \hat{a}$  de  $\mathcal{P}_{1,0}$  donne naissance à  $\mathcal{C} : \chi_j \mapsto \chi_{\hat{j}}$ , involution linéaire de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$ . Il existe une injection  $\mathfrak{J}$  de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$  dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}}$  qui envoie  $\chi_j$  sur  $\phi_{1,1}^{(j, t_j^{(1)})}$  où  $t_j^{(1)}$  est l'unique élément de  $[0, j, \hat{j}]$ . On définit alors  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{T}$  sur  $\mathcal{H}_{1,0}$  par les diagrammes commutatifs suivants<sup>18</sup>:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}} & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \\ \mathfrak{S} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{S} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}} & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}} & \xrightarrow{\mathfrak{T}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \\ \mathfrak{T} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{T} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}} & \xrightarrow{\mathfrak{T}} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \end{array}$$

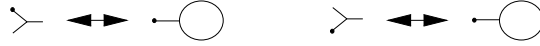
Moore et Seiberg notent  $S$  et  $T$  les matrices de  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{T}$  dans la base  $(\chi_j)_{j \in I}$ , et  $C$  la matrice de  $\mathcal{C}$ . Nous avons donc dans les notations de Moore et Seiberg,

$$(3.19) \quad \begin{cases} C_i^j = \delta_{i,j} \\ S_i^j = S(0)_{(i, t_i^{(1)})}^{(j, t_j^{(1)})} \\ T_i^j = T(0)_{(i, t_i^{(1)})}^{(j, t_j^{(1)})} \end{cases}$$

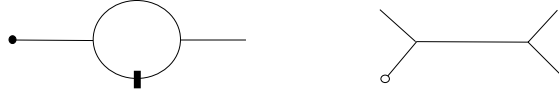
**Type topologique (1,2)** Le complexe  $\mathfrak{P}_{1,2}$  possède trois sommets:



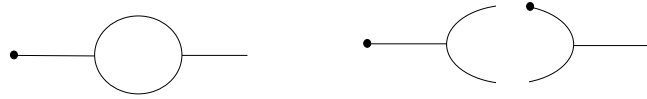
Notons  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_+$  et  $\mathcal{H}_-$  les espaces associés à ces trois graphes. Nous noterons  $\mathcal{D}_{\pm}$ ,  $\mathcal{D}_0$  et  $\mathcal{D}'_0$  les découpes de  $\mathcal{P}_{\pm}$  et  $\mathcal{P}_0$  respectivement qui correspondent aux recollements:



et pour  $\mathcal{D}_0$  et



et  $\mathcal{D}'_0$ :

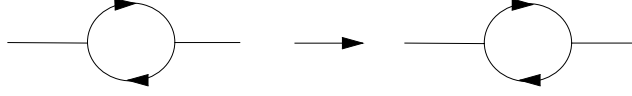


Nous notons

$$(3.20) \quad \begin{cases} \psi_+ : \mathcal{H}_+ \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \\ \psi_- : \mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}} \\ \psi_0 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}} \\ \psi'_0 : \mathcal{H}_0 \longrightarrow (\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}})^{\otimes 2} \end{cases}$$

<sup>18</sup>Rappelons que  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{T}$  laissent stables  $\mathfrak{J}(\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}})$  en vertu des contraintes imposées dans le paragraphe précédent.

les injections associées. De plus, le graphe  $\mathcal{G}_{1,2}^{(0)}$  sous-jacent à  $\mathcal{P}_0$  possède un automorphisme  $P$  d'ordre deux:



et nous lui associons  $\mathfrak{P}$  une involution de  $\mathcal{H}_0$ . On dispose également de

$$(3.21) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_+ : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_+ \\ \mathcal{F}_- : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_- \end{cases}$$

associées aux mouvements  $F$  qui permettent de passer de  $\mathcal{P}_0$  à  $\mathcal{P}_\pm$ . Grâce à  $\psi_{\pm,0}$  et à  $\mathfrak{P}$ , nous allons définir  $\mathcal{S}_\pm$ , deux isomorphismes de  $\mathcal{H}_\pm$  respectivement par  $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_{0,3}} \otimes \mathcal{S}) \circ \psi_\pm = \psi_\pm \circ \mathcal{S}_\pm$ . Introduisons maintenant  $\mathcal{T}_a$  et  $\mathcal{T}_b$  deux isomorphismes de  $\mathcal{H}_0$ :

- Pour  $\mathcal{T}_a$ , nous utilisons  $\psi'_0$  de  $\mathcal{H}_0$  dans  $(\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}})^{\otimes 2}$ . L'automorphisme  $\mathcal{T}_a$  est défini par la commutation du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{\psi'_0} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \\ \mathcal{T}_a \downarrow & & \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}} \otimes (\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_1^{-1}) \\ \mathcal{H}_0 & \xrightarrow{\psi'_0} & \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}} \end{array}$$

- Pour  $\mathcal{T}_b$ , nous commençons par envoyer  $\mathcal{H}_0$  dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$  au moyen de l'application injective  $\psi_0$ . Puis nous composons avec  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(-)$  (isomorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$  défini par l'équation 3.24), et nous revenons dans  $\mathcal{H}_0$ . Finalement  $\mathcal{T}_b$  est défini par:

$$(3.22) \quad \mathcal{T}_b \circ \psi_0 = \mathfrak{P} \circ \psi_0 \circ \mathcal{B}(+)$$

### 3.3.5 Equations de genre zéro

Les équations de genre zéro sont les traductions matricielles de quelques relations entre les morphismes que nous avons introduits. Ainsi, l'équation pentagone 3.26 consiste principalement à traduire le pentagone dans le complexe  $\mathfrak{D}_{0,5}$  en termes d'isomorphismes induits par  $\mathcal{F}$  sur les espaces vectoriels associés aux graphes MS de type  $(0,5)$ . De même, l'équation 3.27, dite hexagonale, est une condition de compatibilité entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{D}_{1,2}(\pm)$ :

$$(3.23) \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{D}_1(\pm) \circ \mathcal{F} = \mathcal{D}_2(\pm) \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{D}_2(\pm)$$

On définit  $\mathcal{B}(\pm)$ , deux isomorphismes de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$  par

$$(3.24) \quad \mathcal{B}(\pm) = \mathcal{D}_1(\pm) \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{D}_2(\pm)$$

dont la traduction matricielle n'est autre que 3.28. On impose aussi une condition de compatibilité entre  $\mathcal{D}$  et les  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha \in E_{\mathcal{P}_{0,3}}}$ :

$$(3.25) \quad \mathcal{D}(\pm)^2 = (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1^{-1})^\pm$$



Finalement, les équations de genre zéro telles que les ont écrites Moore et Seiberg dans [52] sont:

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad & F_{23}F_{12}F_{23} = P_{23}F_{13}F_{12} \\
(3.27) \quad & F(\Omega(\pm) \otimes \mathbf{1})F = (\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm)) \\
(3.28) \quad & B(\pm) = (\Omega(\mp) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))
\end{aligned}$$

La relation 3.25 se traduit, dans les notations de Moore et Seiberg, de la manière suivante: notons  $\omega_j = \exp(2\pi i h_j)$ , alors  $\underline{\omega}(a)$  où  $a \in [i, j, k]$  est de la forme

$$(3.29) \quad \underline{\omega}(a) = \varepsilon(a) \exp(i\pi(h_k + h_j - h_i))$$

où  $\varepsilon(a)\varepsilon(\sigma_{23}(a)) = \pm 1$ . Selon Moore et Seiberg,  $\varepsilon(a) = \varepsilon(\sigma_{23}(a))$  est un signe. Dans notre travail, afin de simplifier les calculs, nous supposons que ces signes ne sont pas présents. Toutefois, dans les exemples explicites, il faudra veiller à les rétablir si besoin est!!

### 3.3.6 Equations de genre un

Pour le type topologique  $(1, 1)$ , nous avons:

$$(3.30) \quad (\mathcal{ST})^3 = \mathcal{S}^2 = \mathcal{C}$$

$$(3.31) \quad \mathcal{C}^2 = \mathcal{R}_1^{-1}$$

Avec les notations de Moore et Seiberg,

$$(3.32) \quad (S(j)T)_{(i,a)}^3 \binom{i', a'}{i, a} = (\Theta_{ji}^i)_a^{a'}$$

$$(3.33) \quad (S(j))^2 = (S(j)T)^3$$

où  $(\Theta_{ji}^i)_a^{a'}$  est le facteur de phase présent dans l'équation 3.18.

La compatibilité entre 3.30, 3.31 et la relation entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  sur les espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}}$  via  $\mathcal{T}$  entraîne que dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$ :

$$(3.34) \quad \begin{cases} (\mathcal{ST})^3 = \mathcal{S}^2 = \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^2 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}} \end{cases}$$

Nous disposons ainsi d'une action linéaire de  $SL(2, \mathbb{Z})$ , qui est le groupe modulaire relatif au type topologique  $(1, 0)$ , sur l'espace  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,0}}$ .

La dernière identité est relative au type topologique  $(1, 2)$ :

$$(3.35) \quad \mathcal{S}_{\pm} \circ \mathcal{F}_{\pm} \circ \mathcal{T}_a \circ \mathcal{F}_{\pm}^{-1} \circ \mathcal{S}_{\pm}^{-1} = \mathcal{F}_{\pm} \circ \mathcal{T}_b \circ \mathcal{F}_{\pm}^{-1}$$

Nous laissons le soin au lecteur de traduire dans les notations de Moore et Seiberg cette identité, et de montrer que l'on retrouve ainsi la relation de genre un avec deux points qui apparaît dans [53].

### 3.4 Quelques conséquences des équations

Dans cette section, nous allons montrer quelques identités à partir des équations de Moore et Seiberg. Ces relations sont indispensables dans la construction d'une théorie topologique tridimensionnelle. Nous montrerons d'abord deux relations de compatibilité entre  $F$  et  $B(\pm)$ , puis nous obtiendrons explicitement les inverses de  $F$  et  $B(\pm)$ . Enfin, nous montrerons que  $B(\pm)$  satisfait à l'équation de Yang-Baxter quantique.

#### 3.4.1 Compatibilité entre $F$ et $B(\pm)$ , équations de Yang-Baxter.

**Relations fusion/entrelacement.**

**Théorème 3** *Les matrices  $F$  et  $B(\pm)$  vérifient:*

$$(3.36) \quad FB(\varepsilon) = (\mathbf{1} \otimes \Omega(-\varepsilon))F$$

$$(3.37) \quad P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12} = F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)$$

**Preuve:** Démontrons la relation 3.37. Invertissons la relation 3.28 entre  $F$  et  $B$  pour la remplacer dans le pentagone 3.26; nous obtenons alors

$$P_{23}\Omega_1(\varepsilon)B_{13}(\varepsilon)\Omega_3(-\varepsilon)F_{12} = F_{23}\Omega_1(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)\Omega_3(-\varepsilon)$$

Nous pouvons commuter  $\Omega_3(-\varepsilon)$  avec  $B_{12}(\varepsilon)$  et en simplifiant par les deux matrices  $\Omega(\pm\varepsilon)$ , nous obtenons 3.37.

En combinant la relation 3.28 et l'hexagone 3.27, nous obtenons l'identité 3.36:

$$\begin{aligned} FB(\varepsilon) &= F(\Omega(-\varepsilon) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\varepsilon)) \\ &= (\mathbf{1} \otimes \Omega(-\varepsilon))F \end{aligned}$$

□

**Equation de Yang-Baxter.**

**Théorème 4** *Les matrices  $B(\pm)$  vérifient l'équation de Yang-Baxter quantique:*

$$(3.38) \quad B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon) = B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)$$

**Preuve:** Le plus simple consiste à multiplier les deux membres à gauche par  $F_{23}$  et à utiliser l'identité 3.37. Ainsi, le membre de gauche devient:

$$(3.39) \quad \begin{aligned} F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon) &= P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12}B_{12}(\varepsilon) \\ &= P_{23}B_{13}(\varepsilon)\Omega_2(-\varepsilon)F_{12} \end{aligned}$$

et d'autre part, le membre de droite se réécrit:

$$\begin{aligned}
(3.40) \quad F_{23}B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon) &= \Omega_3(-\varepsilon)F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon) \\
&= \Omega_3(-\varepsilon)P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12} \\
&= P_{23}\Omega_2(-\varepsilon)B_{13}(\varepsilon)F_{12}
\end{aligned}$$

Les expressions 3.39 et 3.40 sont clairement égales! Ceci montre les deux équations de Yang-Baxter à partir du pentagone, des hexagones et de la relation entre  $F$  et  $B(\pm)$ .  $\square$

### 3.5 L'invariance de jauge des équations

Nous allons détailler une classe importante de transformations qui sont des symétries des équations de Moore et Seiberg et qui jouent un rôle important dans la recherche de solutions.

#### 3.5.1 Transformations de jauge

Les espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  associés à un graphe MS  $\mathcal{P}$  sont définis par la donnée d'une base dont les vecteurs sont indexés par les coloriage du graphe  $\mathcal{P}$ . Nous disposons de plus des injections  $\psi_{\mathcal{D}}$  associées aux découps maximaux de  $\mathcal{P}$ :  $\psi_{\mathcal{D}} : \mathcal{H}_{\mathcal{P}} \rightarrow \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$  qui relie les espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  aux espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$ . Une transformation de jauge consiste à multiplier les différents vecteurs de la base de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}$  par des nombres complexes non nuls. Précisément

**Définition 17** *Soit*

$$\begin{aligned}
\lambda : \bigsqcup_{(i,j,k) \in I^3} [i,j,k] &\rightarrow \mathbb{C}^* \\
a &\mapsto \lambda_a
\end{aligned}$$

*On définit une transformation de jauge  $\Lambda_{0,3}$  de paramètre  $\lambda$  par*

$$(3.41) \quad \forall a \in \bigsqcup_{(i,j,k) \in I^3} [i,j,k], \quad \Lambda_{0,3} \cdot \phi^{(a)} = \lambda_a \phi^{(a)}$$

Et à partir de là, nous définissons des changements de base dans tous les espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ :

**Définition 18** *Pour tout graphe MS  $\mathcal{P}$  et toute découpe maximale  $\mathcal{D}$  de ce graphe, on définit  $\Lambda_{\mathcal{D}}$  par la commutation du diagramme:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{D}}} & \otimes_{v \in V_{\mathcal{P}}} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}^{(v)} \\
\Lambda_{\mathcal{D}} \downarrow & & \downarrow \otimes_v \Lambda_{0,3}^{(v)} \\
\mathcal{H}_{\mathcal{P}} & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{D}}} & \otimes_{v \in V_{\mathcal{P}}} \mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}}^{(v)}
\end{array}$$

*Soit  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$  la base de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  dont nous sommes partis, nous définissons la base transformée  $\mathfrak{B}'_{\mathcal{P}} = \Lambda_{\mathcal{D}} \cdot \mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$ .*

Ceci fournit une famille de bases des différents espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  toutes compatibles avec les injections  $\psi_{\mathcal{D}}$ . Une solution des équations de Moore et Seiberg matricielles provient d'isomorphismes  $\mathcal{F}$  entre  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,4}}$  et  $\mathcal{H}_{F:\mathcal{P}_{0,4}}$ ,  $\mathcal{D}(\pm) \in GL(\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}})$ ,  $(\mathcal{R}_{\alpha})_{1 \leq \alpha \leq 3} \in GL(\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{0,3}})^3$  et  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  qui sont des isomorphismes de  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{1,1}}$ . Les matrices de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{D}(\pm)$  étant notées  $F$  et  $\Omega(\pm)$  dans les bases de départ, et celles de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  étant notées  $S$  et  $T$ , nous notons  $F'$ ,  $\Omega(\pm)'$ ,  $S'$  et  $T'$  les matrices de ces isomorphismes dans les bases transformées par  $\Lambda_{\mathcal{D}}$ . Elles sont données par:

$$(3.42) \quad F'_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_c \lambda_d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

et de même:

$$(3.43) \quad \Omega'(\pm)_a^b = \frac{\lambda_a}{\lambda_b} \Omega(\pm)_a^b$$

Et pour finir:

$$(3.44) \quad S'(j)_{(i,a)}^{(i',a')} = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a'}} S(j)_{(i,a)}^{(i',a')}$$

$$(3.45) \quad T' = T$$

La dernière équation est justifiée par le fait que  $\mathcal{T}$  est diagonale dans les bases choisies. De même, les matrices des  $\mathcal{R}_{\alpha}$  ne changent pas. Les équations de Moore et Seiberg 3.26 à 3.28 sont clairement invariantes de jauge. Par contre, la relation qui relie  $\underline{\omega}(a)$  aux  $(\omega_j)_{j \in I}$  ne l'est pas. On garde toutefois une invariance de jauge restreinte en supposant que

$$(3.46) \quad \begin{cases} \forall a \in [i, j, k], \forall \sigma \in \mathfrak{S}_3, & \lambda_{\sigma(a)} = \lambda_a \\ \forall a \in [i, \hat{i}, 0], & \lambda_a = 1 \end{cases}$$

Avec cela, les équations de genre un sont aussi invariantes de jauge et  $\lambda_{\mathcal{D}}$  ne dépend pas de la découpe maximale choisie mais seulement du graphe  $\mathcal{P}$ .

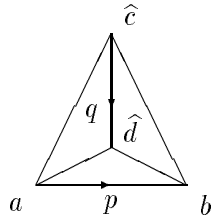
### 3.5.2 Symétrie tétraédrale

La symétrie tétraédrale est un ingrédient important dans la construction d'une théorie topologique tridimensionnelle à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous pouvons dire que:

**Définition 19** *On dira qu'une solution des équations de Moore et Seiberg possède la symétrie tétraédrale si et seulement si, modulo une transformation de jauge au sens de la définition 17 les coefficients des matrices  $F$  et  $S$  vérifient la propriété suivante: on peut associer à*

$$(3.47) \quad W_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{S_0^i S_0^j S_0^k S_0^l}}{S_0^0} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

le tétraèdre



de manière compatible à l'action du groupe des isométries le préservant.

Nous ne discuterons pas ici quelles sont les hypothèses qui permettent de s'assurer que cette propriété est vérifiée. Nous supposons que tel est le cas dans la suite de ce texte.

## 4 Théories tridimensionnelles

Dans cette section, nous rappelons comment à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg, nous construisons une théorie topologique basée sur une catégorie de variétés tridimensionnelles décorées par des graphes trivalents coloriés et munis de framings.

Nous nous contenterons de rappeler ici la méthode et quelques calculs simples. Nous détaillerons quelques points trop brièvement expliqués dans [15], comme la construction des représentations projectives des groupes modulaires, ainsi que la trivialité de ce cocycle en genre zéro.

### 4.1 Plan de la construction

Dans cette section, nous décrivons le cheminement de la preuve sans en donner les détails. Nous donnerons ensuite quelques exemples de calculs afin d'illustrer pourquoi nous avons bien défini des invariants topologiques. Nous partons d'une solution des équations de Moore et Seiberg au sens de la section 3. Nous supposons de plus que cette solution possède la symétrie tétraédrale – voir définition 19.

Nous allons définir la théorie topologique projective associée à ces données en donnant une prescription de calcul de tous les éléments de matrice associés à tous les morphismes de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Puis, nous vérifierons que cette prescription définit bien des invariants topologiques. Les éléments de matrice des opérateurs  $\phi[M]$  seront identifiés avec des fonctions de partition de variétés sans bord. Bien sûr, nous devons disposer d'une procédure pour calculer la fonction de partition d'une variété sans bord. Les techniques de chirurgie et le calcul de Kirby permettent de se ramener au cas de la sphère  $S_3$  avec un graphe trivalent décoré. Ce cas est traité par une méthode de matrice de transfert.

On montre que les axiomes d'une théorie des champs topologique projective sont bien satisfaits (définition 7). La functorialité projective est un des points cruciaux de la preuve. Comme nous allons le voir un peu plus loin, la procédure de calcul par chirurgie des invariants est *non-locale*: elle ne s'effectue pas en utilisant une décomposition de Morse. Mais du coup, la functorialité n'est plus du tout évidente!

#### 4.1.1 Espace des états associé à une surface.

Dans ce qui suit, le corps de base est  $\mathbb{C}$ . L'espace des états  $H_{g,n}$  sera défini à partir des espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  introduits dans la section précédente. Toutefois, on se limitera aux graphes MS dans la composante connexe du graphe  $\mathcal{P}_{g,n}$ . Chaque graphe définira une base de  $H_{g,n}$ . Les vecteurs de la base sont obtenus en faisant varier le coloriage du graphe. Nous introduirons également pour chacun de ces graphes  $\mathcal{P} \in \mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n})$  des tores pleins dont  $\mathcal{P}$  est un 1-squelette avec  $n$  pattes externes. De tels tores pleins, définis précisément plus loin, seront appelés des tores pleins standards. L'idée de base

consiste à associer à chaque tore plein standard de graphe MS sous-jacent  $\mathcal{P}$  un élément de la base associée à  $\mathcal{P}$ .

Il existe toutefois plusieurs choix de 1-squelette à type topologique fixé. Le choix d'un autre graphe définit un changement de base. A topologie donnée, le passage d'un graphe à un autre peut être décomposé en un nombre fini de mouvements élémentaires: les mouvements  $F$ . Nous leur associons les matrices  $F$ . Si  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont reliés par une succession de tels mouvements élémentaires, la matrice de passage  $P(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  associée sera le produit des matrices élémentaires correspondantes. En fait, le résultat ne dépend pas de la séquence choisie pour passer de  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{P}'$ . Elle est donc bien définie.

Nous définirons le produit scalaire sur  $H_N$  suivant les conventions de Witten [66]. Il faudra vérifier que ce produit scalaire est bien compatible avec l'interprétation en terme de recollement trivial:

$$\langle M_1 | M_2 \rangle = Z[M_2 \# \hat{M}_1]$$

avec  $|M_1\rangle = \phi[M_1].1$  pour  $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma)$  et  $\langle M_2| \in H_\Sigma^*$  pour  $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma, \emptyset)$ . De même, nous devons vérifier que l'introduction des matrices  $F$  pour représenter les changements de base est bien cohérente avec l'interprétation tridimensionnelle de  $F$ . Cette cohérence du formalisme utilisé est indispensable.

Nous imposerons enfin

$$H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}$$

pour définir  $H_\Sigma$  dans le cas où  $\Sigma$  n'est pas connexe. Nous posons  $H_\emptyset = \mathbb{C}$ .

#### 4.1.2 Construction des opérateurs

**Fonction de partition des variétés sans bord.** La cas de la sphère  $S_3$  est de loin le plus simple car nous disposons d'une fonction de Morse dont les sections à temps donné sont des sphères sauf pour deux valeurs critiques où elles se réduisent à un point. En conséquence, une méthode de matrice de transfert est aisément applicable. La définition de  $Z[S_3, K]$  – où  $K$  est un graphe trivalent décoré plongé dans  $S_3$  – par la méthode de la matrice de transfert est donnée dans la section 4.2. On montre que  $Z[S_3, K]$  ainsi calculé est un invariant topologique de graphes décorés dans  $S_3$  en suivant une méthode utilisée par Reshetikhin et Turaev dans le contexte des groupes quantiques [58]. Le cas des éléments de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  se ramène à celui de la sphère grâce au résultat suivant [48]:

**Théorème 5 (W.B.R. Lickorish et A.H. Wallace)** *Toute variété  $M$  de dimension trois compacte connexe orientable sans bord s'obtient par chirurgie à partir de  $S_3$ .*

Cela s'étend au cas des variétés décorées par un graphe trivalent au sens de la définition 5. La chirurgie est effectuée le long de tores: on se donne un entrelac de  $S_3$ , chaque composante étant munie d'un framing. Ce framing définit un difféomorphisme du tore. Pour effectuer la chirurgie, on prend des voisinages tubulaires de chaque composante de l'entrelac. Ce sont des tores pleins  $D_2 \times S_1$  que l'on retire et que l'on recolle ensuite via les difféomorphismes déduits des framing. Le détail de cette opération sera explicité en section 4.3.

Il existe différentes présentations par chirurgie d'une même variété. En l'absence de décoration, un critère d'équivalence entre deux présentations par chirurgie est dû à Kirby [40] ainsi qu'à Fenn et Rourke [27]. Il n'est pas difficile d'adapter ces travaux au cas d'une variété décorée. Ceci permet de prouver l'invariance topologique du nombre que nous avons associé à une variété sans bord décorée et constituera notre définition de la fonction de partition d'un élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  à partir d'une présentation par chirurgie.

**Variétés à bords.** A chaque morphisme  $M$  de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  n'interpolant pas entre  $\emptyset$  et  $\emptyset$ , nous associons un opérateur que nous définissons via ses éléments de matrice. Nous choisissons une base de chaque espace  $H_{g,n}$  intervenant dans le problème et un vecteur de chaque base; puis nous considérons la fonction de partition obtenue en saturant chaque composante connexe du bord d'un représentant du morphisme  $M$  avec le tore plein associé au vecteur précédemment choisi. Ce nombre ne dépend pas du choix du représentant de  $M$  grâce à l'invariance topologique. Pour l'interpréter comme un élément de matrice d'un opérateur, nous devons vérifier que ce procédé est bien covariant: si nous changeons une base par un mouvement élémentaire  $F$ , les éléments de matrice ainsi définis sont linéairement reliés via la bonne matrice<sup>19</sup>. Seule la functorialité dans  $S_3$  le long de  $S_2$  est utilisée pour obtenir ce résultat; mais c'est une conséquence directe du formalisme de matrice de transfert utilisé dans  $S_3$ . Intuitivement, les mouvements élémentaires sont locaux et ne vont donc pas interférer avec nos chirurgies. Nous pouvons donc associer un opérateur à chaque morphisme  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ .

**Functorialité projective.** On déduit la functorialité projective dans le cas où  $M_1 \sharp M_2$  appartient à  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  à partir de la functorialité pour des scindements particuliers de  $S_3$ . Ce Lemme relativement technique repose uniquement sur des calculs faits dans  $S_3$  en coupant selon des sphères. Ceci suffit pour justifier la functorialité projective en toute généralité.

Enfin, la propriété  $\phi[M_{[Y]}] = \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M])$  se déduit de l'invariance topologique et de la functorialité projective. Toute ces étapes étant menées à bien, on a fabriqué une théorie topologique projective à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous montrerons alors comment une telle théorie permet de fabriquer des représentations projectives des groupes modulaires.

## 4.2 Les invariants dans $S_3$

Nous allons rappeler brièvement comment définir les invariants de graphes trivalents, coloriés et avec framing dans  $S_3$ . La méthode utilisée repose sur l'utilisation de matrices de transfert.

Considérons un graphe  $K$  trivalent colorié plongé dans la sphère  $S_3$ . Choisissons un plan de projection régulier<sup>20</sup> et une fonction de Morse qui sépare les croisements, points de création et points d'annihilation de l'image du graphe  $K$  par le plongement ainsi que les vertex. Cela définit une décomposition du graphe en cylindres  $S_2 \times [0, 1]$  dont chacun contient un et un seul des événements représentés sur la figure 1.

Pour chacun de ces événements, nous construisons une tranche de topologie  $S_2 \times [0, 1]$ , qui possède  $n$  points marqués du coté entrant  $S_2 \times \{0\}$  et telle que la  $k$ -ème et la  $k + 1$ -ème ligne

<sup>19</sup>Si on agit sur les espaces sortants, on doit prendre la conjuguée hermitique.

<sup>20</sup>Aucun croisement triple n'apparaît dans la projection.

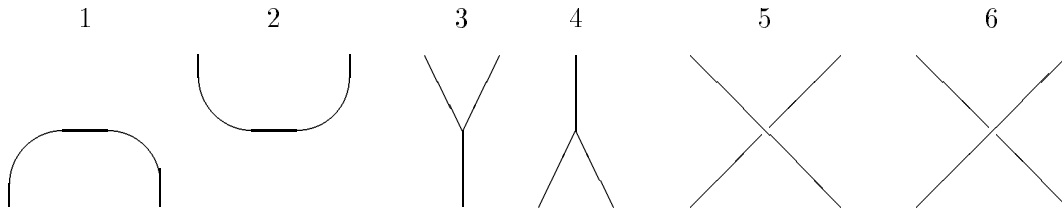
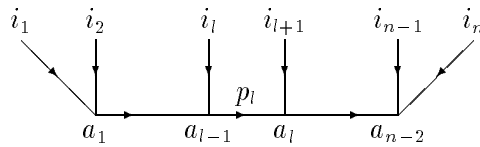


FIG. 1 - : Les différents événements élémentaires dans  $S_3$ .

soient reliées à l'événement considéré. Cette tranche sera notée  $C_p(k, k + 1)$  où  $p \in \{1, 6\}$  désigne l'événement considéré. A chacune de ces tranches, nous associons une matrice que nous allons maintenant définir.

#### 4.2.1 Matrices associées aux événements élémentaires.

Les matrices considérées sont rectangulaires. Si  $C$  est un cylindre et que  $K$  intercepte sa frontière en  $n$  points entrants et  $m$  sortants, alors  $\phi[C_p(k, k + 1)] \in \mathcal{L}(H_{0,n}, H_{0,m})$ . Nous choisissons la base de  $H_{0,n}$  correspondant au graphe multipériphérique:



Les matrices correspondant aux événements élémentaires sont alors:

**Création de paires:**  $C_1(k, k + 1)$  Nous créons une paire portant les indices  $k$  et  $\hat{k}$ . L'amplitude



est donnée par:

$$\phi[C_1(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a_{l-1} \quad a_l \quad \quad \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sum_{p, a} \sqrt{\frac{S_0^0 S_0^p}{S_0^{p_l} S_0^k}} \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad i_l \quad \hat{k} \quad k \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a_{l-1} \quad a \quad \hat{a} \quad a_l \quad \quad \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

**Destruction de paires  $C_2(k, k+1)$**  De la même manière, nous supprimons une paire de lignes et:

$$\phi[C_2(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad i_l \quad \hat{k} \quad k \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a_{l-1} \quad a \quad b \quad a_l \quad \quad \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{S_0^p S_0^k}{S_0^0 S_0^{p_l}}} \delta_{a, \hat{a}} \delta_{p_l, p'_l} \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a_{l-1} \quad a_l \quad \quad \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

**Vertex  $C_3(k, k+1)$  et  $C_4(k)$**  Deux cas doivent être distingués: la fusion de lignes et l'ouverture d'une ligne en deux. Dans le premier cas l'amplitude vaut:

$$\phi[C_3(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad j \quad k \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a \quad b \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{S_0^j S_0^k}{S_0^0 S_0^{i_l}}} F_{p, i_l} \left[ \begin{array}{c} a_l \quad \hat{a} \\ a \quad b \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad \quad \quad a_{l-1} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

et dans le cas de la scission d'une ligne  $i_l$  en deux indexées  $j$  et  $j'$ :

$$\phi[C_4(k)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 \quad a_{l-1} \quad a_{n-2} \end{array} \right. = \sum_{p,a,b}$$

$$F_{p,\hat{i}_l} \left[ \begin{array}{cc} \hat{a}_{l-1} & \hat{a} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad j \quad k \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 \quad a \quad b \quad a_{n-2} \end{array} \right.$$

où  $\alpha$  est l'indice du vertex.

**Croisements**  $C_{5,6}(k, k+1)$  Deux types de croisements sont possibles  $C_+(k, k+1) = C_5(k, k+1)$  et  $C_-(k, k+1) = C_6(k, k+1)$ . Ils sont reliés aux deux matrices  $B(-)$  et  $B(+)$ :

$$\phi[C_{\pm}(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 \quad a_{l-1} \quad a_l \quad a_{n-2} \end{array} \right. = \sum_{p,a,b}$$

$$B_{p_{l-1},p}(\pm) \left[ \begin{array}{cc} a_{l-1} & a_l \\ a & b \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_{l+1} \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_1 \quad a \quad b \quad a_{n-2} \end{array} \right.$$

#### 4.2.2 Définition de $Z[S_3, K]$ .

Tout d'abord, nous définissons la fonction de partition d'un plongement du graphe  $K$  avec un framing normal au plan de projection par:

**Définition 20** Soit  $K$  plongé dans  $S_3$ , et

$$[S_3, K] = B_3 \cup (\cup_{k=1}^n C_k) \cup B_3$$

la décomposition de Morse d'une projection régulière de  $K$ . La fonction de partition de  $S_3$  décorée par  $K$  muni du framing normal au plan de projection est donnée par:

$$(4.1) \quad Z[S_3, K] = S_0^0 \phi[C_n] \circ \dots \circ \phi[C_1]$$

Il ne reste plus qu'à examiner ce qui se passe dans un changement de framing. Supposons avoir choisi un plan de projection, notons  $n_j$  l'écart entre le framing de la ligne  $j$  et le framing normal au plan de projection, alors on pose:

$$(4.2) \quad Z[S_3, K] = Z[S_3, K_\perp] \prod_{l \text{ ligne}} \exp(2\pi i n_l h_{i_l})$$

où  $i_j$  désigne la couleur de la ligne  $j$ . On montre que cette prescription est bien invariante topologique. Le lecteur trouvera une preuve dans [16, Chapitre 6] ou encore dans [15]. La méthode utilisée est directement inspirée du travail de Reshetikhin et Turaev [58].

### 4.2.3 Quelques exemples.

A partir de là, il est facile de montrer que les données de Moore et Seiberg admettent une "interprétation" tridimensionnelle. Ainsi, nous rappelons [55][66]:

$$(4.3) \quad S(j)_{(i,a)(i',a')} = \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^j}} Z \left[ S_3, \begin{array}{c} \text{Diagram: A horizontal tube with a vertical tube attached to its right side. The horizontal tube has a left end labeled } i' \text{ and a right end labeled } a. \text{ The vertical tube has a top end labeled } \hat{j} \text{ and a bottom end labeled } i. \text{ Arrows indicate flow: } i' \rightarrow a \text{ and } \hat{j} \rightarrow i. \end{array} \right]$$

et de même,

$$(4.4) \quad F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \text{Diagram: A tetrahedron with vertices } a, b, p \text{ at the base and } \hat{c} \text{ at the top. Edges are labeled } q \text{ and } \hat{d}. \end{array} ]$$

$$(4.5) \quad B_{p,q}(+) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \text{Diagram: A square with vertices } a, b, \hat{c}, \hat{d}. \text{ Edges are labeled } p, q. \text{ Diagonals are present.} \end{array} ]$$

$$(4.6) \quad B_{p,q}(-) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \text{Diagram: A square with vertices } a, b, \hat{c}, \hat{d}. \text{ Edges are labeled } p, q. \text{ Diagonals are present, crossing at the center.} \end{array} ]$$

Enfin  $\exp(2\pi i h_j)$  est le facteur de phase associé à la torsion du framing d'une unité sur une ligne portant la couleur  $j$ .

### 4.3 Chirurgie

Nous allons ici rappeler ce qu'est une présentation par chirurgie d'une variété tridimensionnelle orientée, compacte et sans bords, éventuellement décorée par un graphe comme en section 2.1.2.

Dans  $N$  variété de dimension 3 sans bord, considérons un nœud  $C$  muni d'un framing. Le framing définit un plongement du tore plein  $D_2 \times S_1$  dans  $N$ . Sur  $D_2 \times S_1$  on dispose d'une notion naturelle de cycles  $(a_0)$  et  $(b_0)$ : un modèle du tore plein est

$$D_2 \times S_1 = \{(\rho e^{i\vartheta}, e^{i\varphi}); \rho \in [0, 1] \text{ et } (\vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

et  $(a_0)$  est la courbe  $\vartheta \mapsto (\exp(i\vartheta), 1)$ . De même,  $(b_0)$  est la courbe  $\varphi \mapsto (1, \exp(i\varphi))$ . Dans l'identification donnée par le framing de  $C$ ,  $(b_0)$  est envoyé sur une courbe parallèle à  $C$  notée  $C'$  et  $(a_0)$  est envoyé sur une courbe que nous noterons  $(a)$ . Alors, on définit la chirurgie le long de  $C$  munie d'une framing par [40]:

**Définition 21** *Soit  $C$  un nœud muni d'un framing dans  $N$ ,  $W$  un voisinage tubulaire de  $C$  diféomorphe à  $D_2 \times S_1$ , on le retire de  $N$  et on le recolle en recollant  $(a_0)$  sur  $C'$  courbe parallèle à  $C$  définissant le framing et  $(b_0)$  sur  $-(a)$ . La variété obtenue est appelée la chirurgisée de  $N$  selon  $C$ , notée  $N_C$ .*

La chirurgie selon un entrelac est une chirurgie selon chaque composante de l'entrelac effectuée avec des voisinages tubulaires ne s'intersectant pas. Bien sûr, la définition s'étend trivialement au cas où  $N$  est décorée par un graphe trivalent. Il suffit que les voisinages tubulaires que l'on utilise n'intersectent pas le graphe. Notre définition du framing par le plongement d'un ruban est parfaitement compatible avec la chirurgie: la chirurgisée d'une variété décorée par un graphe avec son framing est encore une variété décorée par un graphe muni d'un framing. Ainsi, le théorème 5 se généralise en

**Théorème 6** *Soit  $[M, K]$  une variété décorée par un graphe trivalent colorié  $K$ , il existe un entrelac  $L$  de  $S_3$  muni d'un framing et un graphe trivalent colorié plongé dans  $(S_3 \setminus L)$  et noté  $\bar{K}$  tels que par chirurgie le long de  $L$ ,  $[S_3, \bar{K}]$  devienne  $[M, K]$ .*

On montre également que le graphe combinatoire sous-jacent à  $\bar{K}$  est identique au graphe combinatoire sous-jacent à  $K$ . Par contre le plongement diffère! Si  $[M, K]$  est une variété tridimensionnelle décorée par  $K$ , nous dirons que  $[L, \bar{K}]$  est une présentation par chirurgie de  $[M, K]$  si et seulement si, par chirurgie le long de l'entrelac  $L$ ,  $[S_3, \bar{K}]$  devient  $[M, K]$ .

Toutefois, il est bien connu qu'il existe une infinité de présentations par chirurgie d'une même variété tridimensionnelle. La description, due à Kirby [40] et Fenn et Rourke [27] des relations entre toutes les présentations par chirurgie d'une variété donnée, s'étend au cas des variétés décorées par un graphe trivalent. Nous allons décrire ce résultat. Pour cela, nous définissons la notion de mouvement de type  $K$  sur une présentation par chirurgie  $[L, \bar{K}]$ :

**Définition 22** *Soit  $[L, \bar{K}]$  une présentation par chirurgie et  $C$  une composante non nouée de  $L$  ayant un framing  $\varepsilon = \pm 1$ , choisissons un disque  $D$  bordant  $C$ ; un mouvement de type  $K$  sur  $[L, \bar{K}]$*

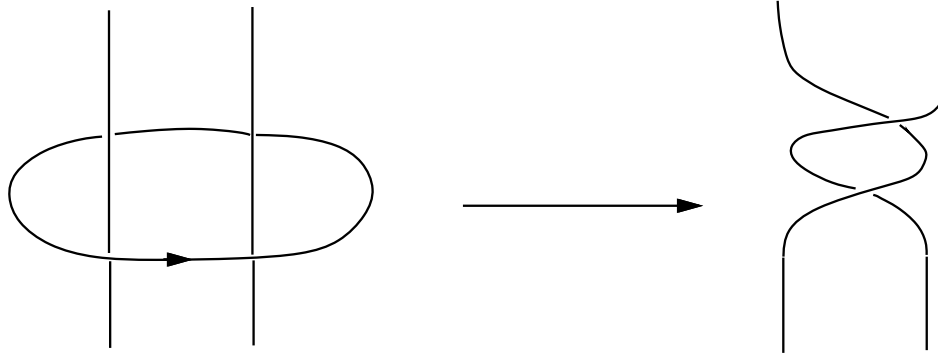


FIG. 2 - : Le mouvement  $K$  sur une composante de framing  $-1$ .

sur une composante  $C$  de  $L$  dont le framing est  $\varepsilon = \pm 1$  est obtenu en enlevant la composante en question, et en tournant toute ligne de  $L \setminus C$  et de  $\bar{K}$  qui perce un disque  $D_2$  de bord  $C$ , ainsi que leur courbes parallèles de  $-2\pi\varepsilon$ .

L'effet d'un tel mouvement est illustré sur la figure 2 où, pour simplifier, nous avons supposé que deux lignes seulement traversaient un disque bordé par  $C_{-1}$ . La prescription que nous avons donné pour les courbes parallèles à chacune des lignes considérées permet de connaître l'effet sur le framing.

Le choix du disque bordé par  $C$  est arbitraire. Changer ce disque produit une nouvelle présentation  $[L'_1, \bar{K}'_1]$  qui diffère de  $[L', \bar{K}']$  par une isotopie ambiante compatible aux colorriages et aux framing. En conséquence, cela ne pose aucun problème. Lorsque nous parlerons de mouvement de type  $K$ , nous nous entendrons qu'un choix de disque a été effectué.

Signalons que la partie "dure" de ce résultat remonte aux travaux de Kirby d'une part [40], et d'autre part à ceux de Fenn et Rourke [27] à la fin des années soixante:

**Théorème 7 (R. Kirby, R. Fenn et C. Rourke)** *Deux entrelacs  $L$  et  $L'$  constituent deux présentations par chirurgie d'une même variété de dimension trois orientable compacte et sans bords à isomorphisme près si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'isotopies dans  $S_3$  et de mouvements de type  $K$  ou de leurs inverses.*

L'extension au cas des variétés décorées par des graphes trivalents est explicitée dans [15] et [16, Appendice 6.A].

Dans la suite, nous aurons besoin d'une notion accessoire, qui est celle de mouvement de type  $\mathcal{O}_2$  [40]:

**Définition 23** *Soit  $[L, \bar{K}]$  une présentation par chirurgie, un mouvement de type  $\mathcal{O}_2$  sur une ligne  $C$  (de  $L$  ou de  $\bar{K}$ ) relativement à une composante  $C_j$  de  $L$  consiste à amener  $C$  près de  $C_j$  et, par somme connexe, à lui adjoindre courbe parallèle à  $C_j$ .*

La figure 3 explicite un tel mouvement. Parmi les mouvement de type  $K$ , nous appelons mou-

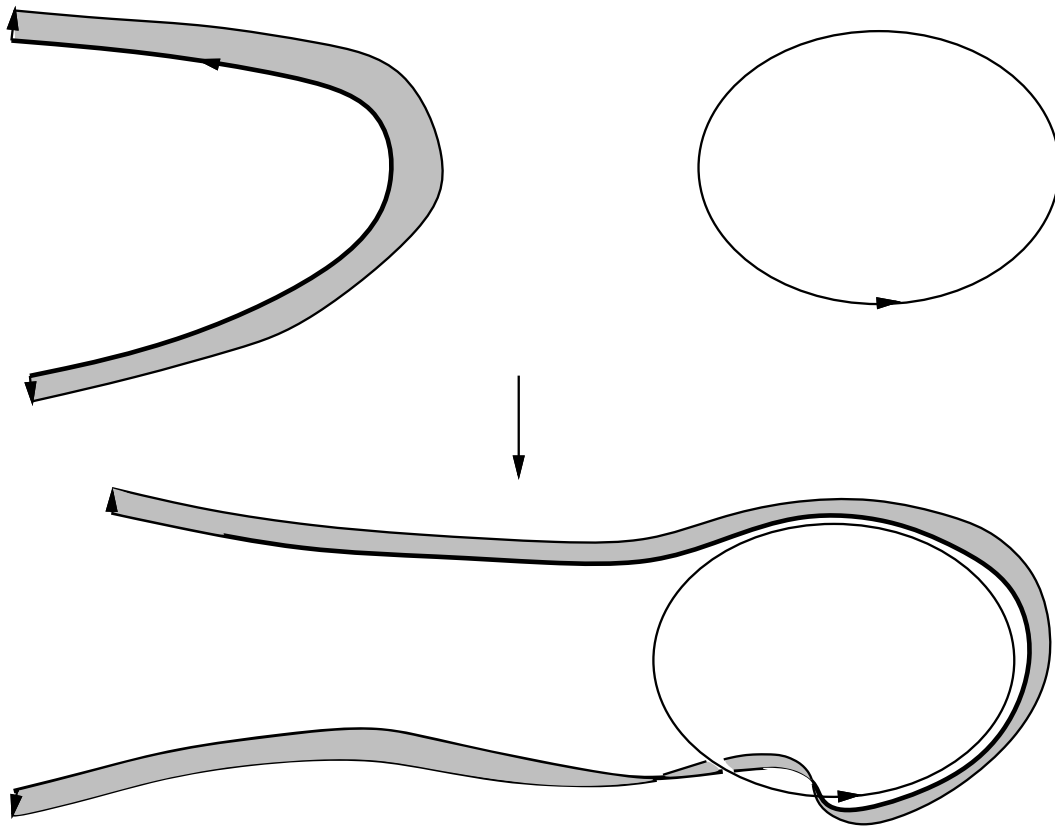


FIG. 3 - : Le mouvement de type  $\mathcal{O}_2$ .

vements de type  $K$  spéciaux<sup>21</sup>, ceux pour lesquels aucune ligne de  $L \setminus C$  ou de  $\bar{K}$  ne perce le disque bordant  $C$  que l'on a choisi. Dans ce cas, le mouvement consiste simplement à retirer la composante  $C$ . Il résulte des travaux de Kirby, Fenn et Rourke et de [16] que les mouvements de type  $\mathcal{O}_2$  relativement sur les lignes de  $L$  et de  $\bar{K}$ , et les mouvements de type  $K$  spéciaux permettent de réaliser tous les mouvements de type  $K$ .

#### 4.4 Quelques calculs d'invariants

La définition de la fonction de partition d'une variété  $M$  décorée par un graphe trivalent colorié  $K$  nécessite l'emploi de  $\sigma(L)$  que nous allons définir comme suit: si  $L$  est muni d'un framing, notons  $n_j$  le framing de la composante  $j$  de  $L$  et  $\langle L_i, L_j \rangle$  le nombre d'intersection<sup>22</sup> de la composante  $i$  avec la composante  $j$  de  $L$  ( $i \neq j$ ) et posons:

$$(4.7) \quad \begin{cases} L_{j,j} = n_j \\ L_{i,j} = \langle L_i, L_j \rangle \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

On note  $\sigma(L)$  la signature de la forme quadratique dont la matrice est  $(L_{i,j})_{i,j}$ . Si  $[L, \bar{K}]$  est une présentation par chirurgie, nous noterons  $\sigma(L, \bar{K})$  cette signature, qui bien sûr ne dépend que de  $L$ . Fenn et Rourke ont montré que

**Théorème 8** *Dans un mouvement de type  $K$  spécial portant sur un cercle non noué de framing  $\varepsilon = \pm 1$ , la variation de  $\sigma(L, \bar{K})$  est donnée par:*

$$(4.8) \quad \sigma(L', \bar{K}') = \sigma(L, \bar{K}) - \varepsilon$$

et dans un mouvement de type  $\mathcal{O}_2$  qui porte sur une ligne de  $L$  ou de  $\bar{K}$ ,

$$(4.9) \quad \sigma(L', \bar{K}') = \sigma(L, K)$$

La définition de la fonction de partition pour une présentation par chirurgie est alors:

**Définition 24** *La fonction de partition de la présentation par chirurgie  $[L, \bar{K}]$  est définie par:*

$$(4.10) \quad Z_s[L, \bar{K}] = e^{-2\pi i c \sigma(L, \bar{K})/8} \sum_C \left[ \prod_{k=1}^n S_{c_k}^0 \right] Z[S_3, L_C, \bar{K}].$$

où la somme porte sur tous les coloriages de  $L$ .

Pour que cela puisse servir de définition à la fonction de partition d'un élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  nous devons montrer que deux présentations par chirurgie de la même variété tridimensionnelle décorée à isomorphisme près ont la même fonction de partition.

La méthode consiste à montrer l'invariance par les mouvements de type  $K$  spéciaux et les mouvements de type  $\mathcal{O}_2$ . Un exemple permet de bien comprendre l'utilité du facteur de phase que

<sup>21</sup> Aussi appelés mouvements de type  $\mathcal{O}_1$  dans [40].

<sup>22</sup> Ceci suppose que l'on a orienté chacune des composantes. Toutefois, la signature que nous allons calculer ne dépend pas du choix des orientations!

nous avons introduit: considérons la sphère  $S_3$  qui peut s'obtenir par chirurgie le long de l'entrelac vide ou bien le long d'un cercle  $C_1$  non noué de framing 1. Dans ce cas, si nous notons  $\mathcal{Z}[L, \bar{K}]$  l'expression obtenue à partir de 4.10 en enlevant le facteur en  $\exp(2\pi ic/8)$ :

$$\mathcal{Z}[L, \bar{K}] = \sum_{\mathcal{C}} \left[ \prod_{k=1}^n S_{\mathcal{C}_k}^0 \right] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}],$$

alors

- Clairement  $\mathcal{Z}[\emptyset, \emptyset] = S_0^0$ .
- Et d'autre part:

$$\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = e^{2\pi ic/24} \sum_k (TS)_k^0 Z[S_3, C_k^{(0)}]$$

Mais  $Z[S_3, C_k^{(0)}] = S_0^k$  et donc  $\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = (STS)_0^0 \exp(2\pi ic/24)$ . En utilisant la relation  $(ST)^3 = C$ , il vient

$$\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = e^{2\pi ic/8} \mathcal{Z}[\emptyset, \emptyset].$$

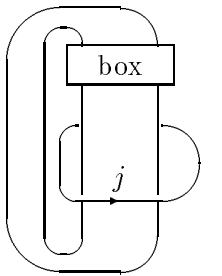
Les deux expressions obtenues diffèrent par un facteur  $\exp(2i\pi c/8)$ . Ceci montre l'utilité de cette phase.

Dans le cas général, nous appelons  $C_\varepsilon$  la composante de  $L$  de framing  $\varepsilon$  sur laquelle le mouvement de type  $K$  va porter. Nous allons calculer la fonction de partition de la présentation par chirurgie  $[L, \bar{K}]$  puis la fonction de partition de  $[L', \bar{K}']$  qui est déduite de  $[L, \bar{K}]$  par un mouvement de type  $K$  sur la composante  $C_\varepsilon$ .

**Mouvements de type  $K$ : Cas  $[L, \bar{K}]$**  Rappelons que la fonction de partition de la présentation par chirurgie  $[L, \bar{K}]$  est donnée par:

$$(4.11) \quad \mathcal{Z}[L, \bar{K}] = \sum_{\mathcal{C}_r} \sum_j \left( \prod_{C_i \neq C_\varepsilon} e^{2i\pi n_i h_{C_r, i}} S_0^{C_r, i} \right) S_0^j e^{2\pi i \varepsilon h_j} A_j[(L \setminus C_\varepsilon)_{C_r} \cup \bar{K}]$$

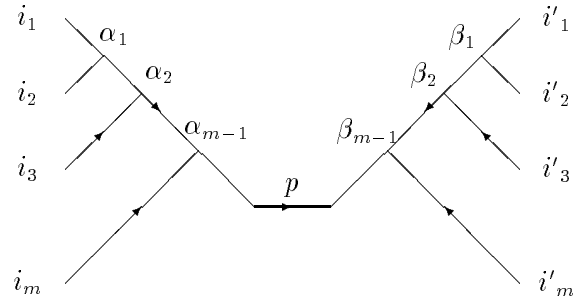
où nous avons séparé la somme sur les couleurs  $\mathcal{C}_r$  des composantes de  $L \setminus C_\varepsilon$  et la couleur  $j$  de  $C_\varepsilon$ . La définition de  $A_j[(L \setminus C_\varepsilon)_{C_r} \cup \bar{K}]$  est:

$$A_j[\mathcal{G}] = Z[S_3, C_j, \mathcal{G}] = Z[S_3, \text{box}, j]$$


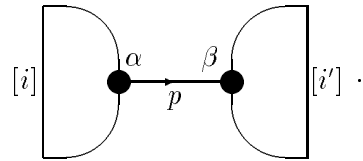
où la ligne portant la couleur  $j$  est supposée avoir un framing normal au plan de la feuille.  $\mathcal{G}$  représente toutes les lignes de  $\bar{K} \cup (L \setminus C_\varepsilon)$ . Nous supposons que  $m$  lignes passent à travers le disque



délimité par  $C$ . Afin de calculer  $A_j[(L \setminus C_\varepsilon)_{C_r} \cup \bar{K}]$ , nous introduisons une base commode de  $H_{0,2m}$ :



que par soucis de légèreté nous noterons<sup>23</sup>



De notre méthode de calcul dans  $S_3$ , nous déduisons

$$A_j[\mathcal{G}] = \sum_{p, \alpha, \beta} \frac{1}{\|\phi_{p, \alpha, \beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}] Z[S_3, \text{diagram}]$$

De plus, nous savons que

$$Z[S_3, \text{diagram}] = Z[S_3, \text{diagram}] \times \frac{S_p^j}{S_0^p}$$

Nous utilisons alors les calculs ci-dessus pour évaluer

$$\sum_j S_0^j A_j[(L \setminus C_\varepsilon)_{C_r} \cup \bar{K}] \exp(2\pi i \varepsilon h_j)$$

<sup>23</sup>Nous avons rappelé où circulent les indices  $(i_1, \dots, i_n)$  en portant le symbole  $[i]$  sur nos schémas.

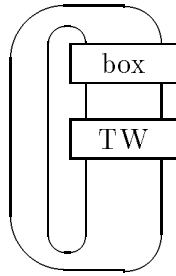
et grâce aux relations  $S^2 = (ST)^3 = C$ , nous obtenons pour cette quantité l'expression suivante

(4.12)

$$\sum_{p,\alpha,\beta} \frac{1}{\|\phi_{p,\alpha,\beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}] ] Z[S_3, \text{diagram}] \exp\left(2\pi i \varepsilon \left(\frac{c}{8} - h_p\right)\right)$$

The diagrammatic equation (4.12) shows two link diagrams. The left diagram is a link with a box labeled  $[i]$  and two vertices labeled  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$ . The right diagram is a link with a box labeled  $[i]$  and a box labeled  $\text{box}$ , with vertices labeled  $\alpha$  and  $\beta$ . The equation is multiplied by  $\exp\left(2\pi i \varepsilon \left(\frac{c}{8} - h_p\right)\right)$ .

**Mouvements de type  $K$ : Cas  $[L', \bar{K}']$**  Nous allons maintenant comparer  $\mathcal{Z}[L, \bar{K}]$  et  $\mathcal{Z}[L', \bar{K}']$ , où  $[L', \bar{K}']$  est déduite de  $[L, \bar{K}]$  par un mouvement de Kirby de type  $K$ . Par définition d'un tel mouvement, la composante  $C_\varepsilon$  est retirée et le graphe  $\mathcal{G}$  devient



La boîte  $TW$  contient les parties des lignes qui ont tourné. Nous calculons alors une nouvelle fonction de partition où les lignes qui passent dans la boîte ont un framing qui pointe vers le lecteur. Grâce à la base de  $H_{0,2m}$  précédemment utilisée, nous pouvons “détordre” les  $2m$  lignes qui passent à travers  $D$ : l'interversion de deux lignes arrivant à un vertex fait apparaître des facteurs de phases et finalement, l'expression associée au graphe ci-dessus est remplacée par:

$$\frac{1}{\|\phi_{p,\alpha,\beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}] ] Z[S_3, \text{diagram}] \exp\left(2i\pi\varepsilon\left(\sum_{l=1}^q h_{i_l} - h_p\right)\right)$$

The diagrammatic equation shows the replacement of the  $\text{TW}$  box with a sum over link diagrams. The left diagram is a link with a box labeled  $[i]$  and vertices labeled  $\hat{\alpha}$  and  $\hat{\beta}$ . The right diagram is a link with a box labeled  $[i]$  and a box labeled  $\text{box}$ , with vertices labeled  $\alpha$  and  $\beta$ . The equation is multiplied by  $\exp\left(2i\pi\varepsilon\left(\sum_{l=1}^q h_{i_l} - h_p\right)\right)$ .

Il ne reste plus qu'à rétablir les framings utilisés pour évaluer la fonction de partition de la présentation  $[L', \bar{K}']$  ce qui permet d'éliminer le facteur

$$\exp\left(2\varepsilon i\pi\left(\sum_{l=1}^q h_{i_l}\right)\right)$$

Finalement, nous retrouvons l'expression 4.12 à un facteur  $\exp(2\pi i c \varepsilon / 8)$  près. En conséquence,

$$(4.13) \quad \mathcal{Z}[L, \bar{K}] = \mathcal{Z}[L', \bar{K}'] \exp\left(2\pi i \varepsilon \frac{c}{8}\right)$$

D'après le théorème 8, dans un mouvement de type  $K$  spécial, la variation de phase due à la signature compense exactement la variation de phase de  $\mathcal{Z}[L, \bar{K}]$ . Ceci montre l'invariance de  $Z_s[L, \bar{K}]$  dans les mouvements de type  $K$  spéciaux.

**Mouvements de type  $\mathcal{O}_2$**  Pour traiter le cas des mouvements de type  $\mathcal{O}_2$ , il suffit de montrer que ceux-ci peuvent être obtenus par une succession de mouvements de type  $K$ . Dans le cas de mouvements de type  $\mathcal{O}_2$  portant sur une ligne de  $L$ , la preuve est donnée dans [27]. Si le mouvement porte sur une ligne de  $\bar{K}$ , le lecteur vérifiera sans peine que l'argument donné par Fenn et Rourke fonctionne encore. Le comptage des facteurs de phase montre que

$$(4.14) \quad \mathcal{Z}[L, \bar{K}] = \mathcal{Z}[L, \bar{K}']$$

car dans la suite de mouvements de type  $K$  donnés par Fenn et Rourke apparaissent un nombre égal de mouvements de type  $K$  sur une ligne avec framing  $+1$  que de mouvements portant sur une ligne avec framing  $-1$ . D'après le théorème 8, dans un mouvement de type  $\mathcal{O}_2$ ,  $\sigma(L, \bar{K}') = \sigma(L, \bar{K})$ . Cela montre l'invariance de  $Z_s[L, \bar{K}]$  dans un mouvement de type  $\mathcal{O}_2$ .

**Fin de la preuve** Pour conclure, rappelons que deux présentations par chirurgie  $[L, \bar{K}]$  et  $[L', \bar{K}']$  sont reliées par une suite

- De mouvements de type  $K$  spéciaux, et de leurs inverses.
- De mouvements de type  $\mathcal{O}_2$  relativement à une ligne de  $L$  et agissant sur une autre ligne de  $L$  ou sur une ligne de  $\bar{K}$ , et les inverses de ceux-ci.
- D'isotopies dans  $S_3$ .

Nous venons de montrer que dans de tels mouvements,  $Z_s[L, \bar{K}] = Z_s[L', \bar{K}']$ . Ceci montre que  $Z_s[L, \bar{K}]$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $[M, \bar{K}]$  et que, en conséquence, on sait associer un élément du corps de base à chaque élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$ .

## 4.5 Définition des opérateurs dans la théorie topologique

Nous allons maintenant définir les opérateurs  $\phi[M]$  pour  $M$  morphisme de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Tout d'abord, nous allons introduire une famille de bases de chaque espace  $H_{g,n}$ . Chacune de ces bases est définie par un *tore plein standard*, que nous allons définir.

Nous verrons comment les différentes bases sont reliées entre elles. Et nous examinerons l'unicité de la matrice de changement de base. Puis nous définirons les opérateurs par leurs éléments de matrice dans les bases précédentes.

### 4.5.1 Tores pleins standard et bases de $H_{g,n}$

**Les tores pleins standard** Considérons  $\mathcal{P}_{g,n}$  le graphe MS – voir la définition 10 – de type topologique  $(g, n)$  introduit en section 3.2.2. Un tel graphe peut être plongé dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le

plan  $\mathbb{R}^2$  est considéré comme plongé dans  $\mathbb{R}^3$  par  $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$ . Soit  $\mathfrak{W}_{\mathcal{P}_{g,n}}$  un voisinage tubulaire de ce plongement du graphe dans  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , c'est un tore plein dont le bord est une surface de genre  $g$ . Nous l'orientons grâce à l'orientation usuelle de  $\mathbb{R}^3$ . On définit le framing en posant, pour toute arête orientée  $a$  du graphe sous-jacent à  $\mathcal{P}_{g,n}$ ,  $f_a(s, t) = (f_a(t), \varepsilon s) \in \mathbb{R}^3$  où  $t \mapsto f_a(t)$  définit le plongement de l'arête  $a$  dans  $\mathbb{R}^2$  et où  $\varepsilon$  est assez petit pour que  $(f_a(t), \varepsilon s) \in \mathfrak{W}_{\mathcal{P}_{g,n}}$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Nous munissons d'un paramétrage le bord de ce tore plein qui envoie les sommets marqués de  $\mathcal{P}_{g,n}$  sur le point  $P_1$  de l'objet de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  considéré. De même, l'ensemble des sommets externes de  $\mathcal{P}_{g,n}$  étant ordonné, le  $k$ -ème sommet externe est envoyé sur le point  $P_k$ . On assure également la condition de compatibilité entre le framing et les demi-droites  $(\Delta_k)_k$ . Ceci nous donne, lorsque l'on choisit un coloriage  $\mathcal{C}$  du graphe trivalent  $\mathcal{G}$  sous-jacent à  $\mathcal{P}$ , un élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_{g,n})$  que nous noterons  $[T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ . En munissant  $\mathfrak{W}_{\mathcal{P}_{g,n}}$  de l'orientation opposée et en gardant la même paramétrisation de  $\partial(\mathfrak{W}_{\mathcal{P}_{g,n}})$ , on obtient un élément de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \widehat{\Sigma_{g,n}})$ . On dira que  $(g, n)$  est le type topologique du tore plein considéré.

Si maintenant  $\mathcal{P}$  désigne un graphe MS de type topologique  $(g, n)$  dans la composante connexe – au sens du complexe  $\mathfrak{Y}_{g,n}$  – de  $\mathcal{P}_{g,n}$ , nous pouvons encore le plonger<sup>24</sup> dans  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  de sorte que son image soit incluse dans le tore plein  $\mathfrak{W}_{\mathcal{P}_{g,n}}$  précédent et que les sommets externes soient envoyés sur les mêmes points que ceux de  $\mathcal{P}_{g,n}$ . Du coup, on obtient directement<sup>25</sup> un morphisme de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  que nous noterons  $[T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ . Remarquons que le graphe trivalent  $\mathcal{G}$  est pour tout  $\mathcal{P}$  un 1-squelette du tore plein considéré.

De tels éléments de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_{g,n})$  seront appelés des tores pleins standards. Nous allons les utiliser pour définir les éléments de matrice des opérateurs associés aux morphismes de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ .

**Les espaces  $H_{g,n}$  et leurs bases** D'autre part, nous allons décrire explicitement des bases de  $H_{g,n}$ . Nous nous basons sur le Lemme suivant:

**Lemme 1** *Les espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  pour  $\mathcal{P}$  parcourant la composante connexe de  $\mathcal{P}_{g,n}$  sont deux à deux canoniquement isomorphes.*

**Preuve:** En effet, le Lemme 1.2 de [44] est valable lorsqu'on l'applique à la composante connexe  $\mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n})$ . Nous avons vu en sections 3.3.1 et 3.3.2 comment associer à chaque chemin  $\gamma \in \pi_1(\mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n}), \mathcal{P}, \mathcal{P}')$  un isomorphisme  $P_\gamma(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  entre  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  et  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}'}$ . De plus, grâce aux équations 3.15 et 3.26, et à la simple connexité de  $\mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n})$ , l'isomorphisme  $P_\gamma(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$  ne dépend que de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ .  $\square$

Nous considérons donc un modèle d'espace vectoriel  $H_{g,n}$  isomorphe aux espaces  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$  ainsi qu'un isomorphisme explicite entre  $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{g,n}}$  et  $H_{g,n}$ . Ce choix est arbitraire mais sans importance: deux choix différents fournissent des théories topologiques équivalentes au sens de la définition 9. Enfin, on définit  $H_N$  pour  $N$  non connexe par  $H_{N_1 \sqcup N_2} = H_{N_1} \otimes H_{N_2}$ .

Pour chaque graphe MS, nous disposons donc d'une base  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$  associée au graphe. Dans ce langage, la matrice  $F$  de Moore et Seiberg apparaît comme une matrice de changement de base. Nous verrons en section 5.4.2 quelques raisons pour ne pas identifier brutalement tous les  $H_{\mathcal{P}}$  à un même espace  $H_{g,n}$ .

<sup>24</sup>Nous gardons la même prescription que précédemment pour le framing.

<sup>25</sup>Après choix d'un coloriage.

### 4.5.2 Définition des opérateurs

Pour définir une théorie topologique, nous devons définir les opérateurs  $\phi[M]$  pour tout morphisme  $M$  de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . La définition 24 des fonctions de partition nous fournit  $\phi[M]$  pour tout  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$ . Considérons maintenant  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$  où, pour fixer les idées  $\Sigma_{1,2}$  sont des objets de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  de types topologiques respectifs  $(g_1, n_1)$  et  $(g_2, n_2)$ . Nous allons définir  $\phi[M]$  par sa matrice dans des bases  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$ . Nous choisissons la base en spécifiant<sup>26</sup>  $[T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_1)$  et  $[T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_2)$  qui sont tous deux des tores pleins standards de types topologiques respectifs  $(g_1, n_1)$  et  $(g_2, n_2)$ .

La stratégie consiste alors à considérer les bases  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}}$  de  $H_{g,n}$  et à définir les éléments de matrice de  $\phi[M]$  dans  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}_1}$  et  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}_2}$  grâce à  $Z[(T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1) \# M \# \widehat{(T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2)}]$ . Il est crucial de vérifier la covariance de cette définition par changement de base: si on change de base  $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}'$ , alors on change l'élément  $[(T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1) \# M \# \widehat{(T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2)}]$  de  $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  en  $[(T_1, \mathcal{G}'_1, \mathcal{C}'_1) \# M \# \widehat{(T_2, \mathcal{G}'_2, \mathcal{C}'_2)}]$ . La définition 24 de la fonction de partition de ce morphisme ainsi que la définition 20 des fonctions de partition dans  $S_3$  permettent de relier les matrices calculées dans différentes bases. Il faut vérifier que cette relation est bien compatible avec l'interprétation de  $F$  comme matrice de changement de base! Une fois cela fait, nous pouvons dire que nous avons vraiment défini les opérateurs  $\phi[M]$  pour tous les morphismes de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Finalement, nous arrivons à:

**Définition 25** Soit  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ , l'opérateur  $\phi[M]$  exprimé dans les bases  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}_1} = (V_{\mathcal{P}_1 c_1})_{c_1}$  et  $\mathfrak{B}_{\mathcal{P}_2} = (V_{\mathcal{P}_2 c_2})_{c_2}$  est défini par

$$(4.15) \quad \phi[M] \cdot V_{\mathcal{P}_1 c_1} = \sum_{c_2} \frac{Z[(T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1) \# M \# \widehat{(T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2)}]}{\|V_{\mathcal{P}_2 c_2}\|^2} \times V_{\mathcal{P}_2 c_2}$$

### 4.5.3 Expression du cocycle

Une fois l'invariance topologique obtenue, il reste à démontrer la propriété clef des théories topologiques projectives, à savoir la functorialité projective exprimée par 2.15. Dans le cas qui nous intéresse, nous considérons  $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma)$  et  $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma, \emptyset)$ . Dans ce cas particulier, la functorialité projective s'exprime par l'existence de  $\mu(M_1, M_2)$  non nul tel que

$$(4.16) \quad Z[M_1 \# M_2] = \mu(M_1, M_2) \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \# M_2] Z[M_1 \# \widehat{(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}})}]}{\|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\|^2}.$$

où la somme porte sur tous les coloriage du graphe  $\mathcal{G}$  définissant une base de  $H_{g,n}$ . Le coloriage des pattes externes est compatible avec la décoration de  $M_{1,2}$ .

La preuve de ce résultat, que nous ne détaillerons pas ici faute de place, permet d'accéder à une expression explicite pour le cocycle  $\mu(M_1, M_2)$ .

Pour donner cette expression, nous devons d'abord élargir notre notion de présentation par chirurgie aux morphismes de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Soit  $[M_0, \bar{K}] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(N_1, N_2)$  un morphisme de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  et  $L$  un entrelac avec framing plongé dans ce cobordisme, la définition 21 de la chirurgie

<sup>26</sup>Ici  $\mathcal{G}_{1,2}$  est le graphe trivalent sous-jacent à  $\mathcal{P}_{1,2}$ .

le long de  $L$  s'adapte naturellement. La notion ainsi obtenue est celle de chirurgie le long de  $L$  sur un morphisme de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ . Le résultat est un morphisme de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ :

$$[M_0, \bar{K}] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(N_1, N_2) \xrightarrow{L} [M_L, K] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(N_1, N_2)$$

Nous considérerons  $[M, K] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma)$ , et le théorème 6 se généralise en<sup>27</sup>

**Théorème 9** *Tout  $[M, K] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma)$  admet une présentation par chirurgie de la forme  $[(T_g, \bar{K}), L]$  où la chirurgie est effectuée le long de  $L$ .*

Considérons alors pour fixer les notations  $[(T_g, \bar{K}_1), L_1]$  une présentation par chirurgie de  $[M_1, K_1]$  et  $[(S_3 \setminus T_g, \bar{K}_2), L_2]$  une présentation par chirurgie de  $[M_2, K_2]$ . Alors clairement,  $[(S_3, \bar{K}_1 \# \bar{K}_2), L_1 \sqcup L_2]$  est une présentation par chirurgie de  $M_1 \# M_2$ . Je note  $\sigma_{1,2}$  la signature associée à cette présentation et  $\sigma_1$  celle associée à  $[(T_g \# (S_3 \setminus T_g), \bar{K}_1 \# \mathcal{G}), L_1]$  – qui est une présentation de  $M_1 \# \widehat{(T_g, \mathcal{G})}$  – et  $\sigma_2$  celle associée à  $[(T_g \# (S_3 \setminus T_g), \mathcal{G} \# \bar{K}_2), L_2]$  – qui est une présentation de  $[(T_g, \mathcal{G}) \# M_2]$ . Alors,  $\mu(M_1, M_2)$  est donné par (voir [15, Section 4.3]):

$$(4.17) \quad \mu(M_1, M_2) = \exp \left( 2\pi i \frac{c}{8} (\sigma_{1,2} - \sigma_1 - \sigma_2) \right)$$

En combinant cette équation avec la définition des éléments de matrice des opérateurs  $\phi[M]$  pour tout morphisme  $M$  de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ , nous obtenons une expression explicite du cocycle général.

## 4.6 Propriétés des représentations des groupes modulaires fournies par les théories topologiques projectives.

Chaque théorie topologique projective basée sur une catégorie géométrique  $\mathbf{Ma}$  donne naissance à des représentations projectives des groupes modulaires des différents objets de la catégorie  $\mathbf{Ma}$ . La philosophie générale est la suivante: pour chaque objet  $N$  de  $\mathbf{Ma}$ , le groupe  $\text{Diff}_+(N)$  agit linéairement et projectivement sur l'espace  $H_N$ . En utilisant l'invariance topologique, on montre alors que la composante connexe de l'identité de  $\text{Diff}_+(N)$  agit par l'identité sur l'espace  $H_N$ .

Nous allons préciser comment ces idées se mettent en place dans le cas des théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg. Puis, nous discuterons plus explicitement le cas du genre zéro: nous montrerons la trivialité du cocycle fournit par la théorie topologique et nous discuterons les implications de la trivialité du groupe modulaire de la sphère sans point marqué.

### 4.6.1 Représentations des groupes modulaires

Dans le cas qui nous intéresse, il existe, pour chaque couple  $(g, n)$  plusieurs groupes modulaires intéressants:

- $\mathfrak{M}(g, n)$ : Groupe modulaire des surfaces de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, respectant l'ordre des points.

---

<sup>27</sup>Avec un énoncé analogue pour les  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma, \emptyset)$ .

- $\mathcal{M}(g, n)$ : Groupe modulaire des surfaces de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, ne respectant pas l'ordre des points.
- $\mathfrak{M}^*(g, n)$ : Groupe modulaire des surfaces de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, et un vecteur tangent non nul en chaque point, respectant l'ordre des points.
- $\mathcal{M}^*(g, n)$ : Groupe modulaire des surfaces de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, et un vecteur tangent non nul en chaque point, ne respectant pas l'ordre des points.

Dans les notations de [6, Chapitre 4], nous avons

$$(4.18) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}(g, n) = \pi_0(\mathcal{F}_{0,n}(T_g), \mathbf{1}_{T_g}) \\ \mathcal{M}(g, n) = \pi_0(\mathcal{M}_{0,n}(T_g), \mathbf{1}_{T_g}) \end{cases}$$

Et de plus, nous disposons de suites exactes:

$$(4.19) \quad \begin{cases} \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathfrak{M}^*(g, n) \longrightarrow \mathfrak{M}(g, n) \longrightarrow \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathcal{M}^*(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow \mathbf{1} \end{cases}$$

Pour définir la première flèche, considérons  $(P_k)_{k \in \langle 1, n \rangle}$  les points marqués sur la surface. On note  $\gamma_k$  une courbe simple correspondant au bord d'un voisinage de  $P_k$  difféomorphe au disque fermé. L'orientation de  $\gamma_k$  est donnée par l'orientation de la surface. On désigne par  $t_{\gamma_k}$  le twist de Dehn au sens de [6, Chap. 4, §4] relativement à  $\gamma_k$ . Alors, l'injection de  $\mathbb{Z}^n$  dans  $\mathcal{M}^*(g, n)$  associe à  $(\delta_{j,k})_j$  la classe dans  $\mathcal{M}^*(g, n)$  de  $t_{\gamma_k}$ . La seconde flèche associe à la classe de  $f \in \text{Diff}_+(\Sigma_{g,n})$  dans  $\mathcal{M}^*(g, n)$  sa classe dans  $\mathcal{M}(g, n)$ . Enfin, nous avons également

$$(4.20) \quad \mathbf{1} \longrightarrow \mathfrak{M}(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow \mathbf{1}$$

où la première flèche est l'injection naturelle, et la seconde associe à la classe de  $f \in \text{Diff}_+(\Sigma_{g,n})$  son action sur l'ensemble des  $n$  points marqués.

Considérons maintenant  $\bar{f} \in \mathcal{M}^*(g, n)$  représenté par  $f \in \text{Diff}_+(\Sigma_{g,n})$ , qui induit sur l'ensemble  $\{P_1, \dots, P_n\}$  des  $n$  points marqués sur la surface une permutation  $\sigma_f$ . Si  $\Delta_k$  désigne la demi-droite dans  $(T\Sigma_{g,n})_{P_k}$ ,  $(df)(P_k) \cdot \Delta_k = \Delta_{\sigma_f(k)}$ . Considérons alors la variété  $\Sigma_{g,n} \times [0, 1]$ , dont nous paramétrons les bords par  $\varphi'_0 : (x, 0) \mapsto x$  et  $\varphi'_1 : (x, 1) \mapsto f(x)$ . Ce cylindre est décoré de la manière suivante:

- Le graphe est formé de  $n$  arêtes disjointes:  $A = \cup_{k=1}^n \{a_k, \widehat{a_k}\}$  et  $\partial_i(a_k) = e_k$ , et  $\partial_j a_k = e'_k$ .
- Il est plongé “trivialement” dans  $[\Sigma_{g,n} \times [0, 1], \varphi'_0, \varphi'_1]$ : fixons  $k \in \langle 1, n \rangle$ , si  $p_1$  désigne la première projection dans le produit cartésien  $\Sigma_{g,n} \times [0, 1]$ ,  $t \mapsto (p_1 \circ f_{a_k})(\cdot, t)$  est une application constante et de plus, si  $p_2$  désigne la seconde projection, alors pour tout  $(s, t) \in [0, 1]^2$ ,  $(p_2 \circ f_{a_k})(s, t) = t$ . Notons que cette prescription définit le framing.

Si nous colorions les points  $P_k$  par les couleurs  $i_k$ , alors nous colorions l'arête  $a_k$  par la couleur  $i_k$ . Nous venons donc de définir un cobordisme paramétré qui interpole entre  $\Sigma_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}$  et  $\Sigma_{g,n}^{[\sigma_f \cdot i_1, \dots, \sigma_f \cdot i_n]}$ . Ici,  $\Sigma_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}$  désigne l'objet de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  basé sur la surface  $\Sigma_{g,n}$  munie des points marqués avec direction tangente  $(P_k, \Delta_k)_{k \in \langle 1, n \rangle}$  et du coloriage  $P_k \mapsto i_k$ . Le choix du représentant  $f$  de  $\bar{f} \in \mathcal{M}^*(g, n)$

n'est pas unique mais changer de représentant produit un cobordisme paramétré isomorphe, au sens de la définition 1. En conséquence, nous avons défini

$$M_{[i_1, \dots, i_n]}(\bar{f}) \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}, \Sigma_{g,n}^{[\sigma_f, i_1, \dots, \sigma_f, i_n]}).$$

Nous définissons

$$(4.21) \quad \rho_{g,n}(\bar{f})|_{H_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}} = \phi[M_{[i_1, \dots, i_n]}(\bar{f})].$$

Notons  $E = (i_1, \dots, i_n)$ , il est clair que  $\rho_{g,n}(\bar{f})$  envoie  $H_{g,n}^{[E]}$  sur  $H_{g,n}^{\sigma_f([E])}$ . Pour voir que l'on dispose d'une représentation projective de  $\mathcal{M}^*(g, n)$ , nous considérons le cobordisme paramétré obtenu comme précédemment mais en remplaçant les paramétrisations des bords par  $\varphi''_0 : (x, 0) \mapsto f(x)$  et  $\varphi''_1 : (x, 0) \mapsto f'(f(x))$ . Soit  $M_f(f')$  ce cobordisme, il est isomorphe à  $M(f')$ , et comme  $M(f)\sharp M_f(f')$  est isomorphe à  $M(f' \circ f)$ , nous en déduisons que<sup>28</sup>

$$(4.22) \quad \rho_{g,n}(f' \circ f) = \phi[M(\bar{f})\sharp M(\bar{f}')] = \mu(M(\bar{f}), M(\bar{f}')) \times \rho_{g,n}(\bar{f}') \circ \rho_{g,n}(\bar{f})$$

Ceci montre explicitement que les théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg fournissent des représentations projectives des groupes  $\mathcal{M}^*(g, n)$  dans chaque espace  $H_{g,n}$ . Cela nous fournit un 2-cocycle  $\mu_{g,n}$  pour le groupe  $\mathcal{M}^*(g, n)$ .

#### 4.6.2 Trivialité en genre zéro

Compte tenu de l'expression explicite obtenue pour le cocycle, nous remarquons que:

**Proposition 10** *Soient  $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_1, \Sigma)$  et  $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma, \Sigma_2)$ , et si  $\Sigma$  est de genre zéro, alors*

$$(4.23) \quad \mu(M_1, M_2) = 1$$

**Preuve:** Pour commencer, nous nous limitons au cas où  $\Sigma_{1,2} = \emptyset$ . Il existe des présentations par chirurgie de  $M_1$  et de  $M_2$  respectivement à partir de  $[B_3, L_1]$  et  $[\widehat{B}_3, L_2]$ . En conséquence,  $[B_3\sharp\widehat{B}_3, L_1 \cup L_2]$  est une présentation par chirurgie de  $M_1\sharp M_2$ . Considérons alors  $\bar{M}_1 = M_1\sharp\widehat{B}_3$  et  $\bar{M}_2 = B_3\sharp M_2$ . Ce sont des variétés tridimensionnelles sans bord, et elles admettent aussi des présentations par chirurgies qui font intervenir  $L_{1,2}$ . Ainsi,  $[B_3\sharp\widehat{B}_3, L_1\sharp\emptyset]$  est une présentation par chirurgie de  $\bar{M}_1$  et  $[B_3\sharp\widehat{B}_3, \emptyset\sharp L_2]$  est une présentation par chirurgie de  $\bar{M}_2$ . En conséquence, comme  $\sigma(L_1 \cup L_2) = \sigma(L_1) + \sigma(L_2)$  et que l'on calcule les éléments de matrice des opérateurs associés à  $M_{1,2}$  respectivement en termes de fonctions de partitions de  $\bar{M}_{1,2}$  décorées par des graphes appropriés, nous en déduisons que

$$Z[M_1\sharp M_2] = \phi[M_1] \circ \phi[M_2].$$

Notre raisonnement n'est pas modifié si  $\Sigma_1 \neq \emptyset$  ou  $\Sigma_2 \neq \emptyset$ .  $\square$

Considérons maintenant  $f$  un difféomorphisme préservant l'orientation de la sphère  $S_2$  avec  $n$  points marqués. Nous pouvons lui associer un morphisme de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ , noté  $M(\bar{f})$ , dont

<sup>28</sup>Pour alléger les notations, j'ai omis les indices de couleur.



un représentant du cobordisme tridimensionnel sous-jacent est le cylindre  $S_2 \times [0, 1]$  paramétré par  $\varphi_0 : (x, 0) \mapsto x$  et  $\varphi_1 : (x, 1) \mapsto f(x)$ . La proposition 10 montre alors que

**Corollaire :** *Les représentations  $\rho_{0,n}$  des groupes  $\mathcal{M}^*(0, n)$  ne sont pas projectives.*

Quelques remarques s'imposent dans le cas du genre zéro: la trivialité de  $\mathfrak{M}(0, 0)$  [6] nous dit qu'il existe un représentant du morphisme  $M(\bar{f})$  de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  basé sur le cylindre  $S_2 \times [0, 1]$  et paramétré par  $\varphi_0 : (x, 0) \mapsto x$  et  $\varphi_1 : (x, 1) \mapsto x$ . Pour un tel représentant, le graphe reste le même mais son plongement au sens de la définition 5 change! Considérons  $F : [0, 1] \rightarrow \text{Diff}_+(S_2)$  tel que  $F(0) = \mathbf{1}_{S_2}$  et  $F(1) = f$ , alors  $F$  est un isomorphisme entre les cobordismes non décorés  $[S_2 \times [0, 1], \varphi_0, \varphi_1]$  et  $[S_2 \times [0, 1], \varphi_0, f \circ \varphi_1]$ . Au niveau des décorations, il existe un plongement du graphe à  $n$  arêtes non orientées sans vertex dans  $S_2 \times [0, 1]$  qui est envoyé sur le plongement trivial discuté plus haut. Comme dans [6, Page 102] considérons l'espace des configurations, que nous notons  $\tilde{\mathfrak{C}}_n(S_2)$  des  $n$ -uplets de couples  $(P, \Delta)$  formés d'un point de  $S_2$  et d'une direction dans l'espace tangent à la sphère au point  $P$ . Le groupe fondamental  $\tilde{B}_n(S_2) = \pi_1(\tilde{\mathfrak{C}}_n(S_2), (P_k, \Delta_k)_k)$  de cet espace est isomorphe au produit semi-direct du groupe des tresses<sup>29</sup> d'Hurwitz  $B_n(S_2) = \pi_1(\mathfrak{C}_n(S_2), (P_k)_k)$  par  $\mathbb{Z}^n$ , où  $B_n(S_2)$  agit sur  $\mathbb{Z}^n$  via l'action naturelle du groupe de permutations de  $n$  objets sur  $\mathbb{Z}^n$ . Le nouveau plongement définit un chemin dans  $\tilde{\mathfrak{C}}_n(S_2)$ . Il suffit pour cela de considérer le chemin  $t \mapsto (f_{a_k}(0, t), (\partial_s f_{a_k})(0, t), \mathbb{R}^+)$ . Sa classe d'homotopie dans l'espace de configuration nous fournit alors un élément du groupe  $\tilde{B}_n(S_2)$ .

D'une manière générale, ces considérations permettent de construire une représentation linéaire de  $\tilde{B}_n(S_2)$  dans l'espace  $H_{0,n}$ : partons de  $\bar{\gamma}$  un élément de<sup>30</sup>  $\tilde{B}_n(S_2) = \pi_1(\tilde{\mathfrak{C}}_n(S_2), \star)$ , un représentant  $\gamma$  de  $\bar{\gamma}$  définit un plongement du graphe à  $n$  arêtes non orientées sans vertex dans  $[S_2 \times [0, 1], \varphi_0, \varphi_1]$  au sens de la définition 5. Changer de représentant produit un cobordisme à la Milnor isomorphe. Fixons  $i_1, \dots, i_n$  les couleurs des points  $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ , soit  $M_{[i_1, \dots, i_n]}(\gamma)$  le morphisme de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  ainsi défini<sup>31</sup>,  $M_{[i_1, \dots, i_n]}(\gamma \gamma') = M_{[i_1, \dots, i_n]}(\gamma) \sharp M_{\sigma_\gamma \cdot [i_1, \dots, i_n]}(\gamma')$ . En conséquence, on vient de fabriquer une représentation linéaire  $\tilde{\rho}_{0,n}$  de  $\tilde{B}_n(S_2)$  dans  $H_{0,n}$ .

D'un autre coté, de manière analogue à [6, Page 153], on dispose d'un morphisme surjectif de  $\tilde{B}_n(S_2)$  dans le groupe modulaire  $\mathcal{M}^*(0, n)$ . Notons  $\mathfrak{d}_n$  ce morphisme, alors nous avons

$$(4.24) \quad \tilde{\rho}_{0,n} = \rho_{0,n} \circ \mathfrak{d}_n$$

Cette équation montre clairement la relation entre les représentations des groupes "des tresses avec framing"  $\tilde{B}_n(S_2)$  et celle des groupes modulaires  $\mathcal{M}^*(0, n)$ .

## 5 Action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les solutions des équations de Moore et Seiberg provenant des théories rationnelles.

Dans cette section, nous suggérons quelle est la traduction de l'action du groupe de Galois absolu  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur le groupe fondamental algébrique de la droite projective privée de trois points dans

<sup>29</sup>Ici  $\mathfrak{C}_n(S_2)$  est l'espace de configuration de Birman pour  $n$  points sur la sphère.

<sup>30</sup>Le point base  $\star$  est formé par la configuration  $(P_k, \Delta_k)_{1 \leq k \leq n}$  associée aux objets de type topologique  $(0, n)$  de la catégorie  $\mathbf{Ma}_{3,1}$ .

<sup>31</sup>Ici,  $\gamma \gamma'$  signifie  $\gamma$  suivi de  $\gamma'$ .

le cadre des théories topologiques rationnelles déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg. Si, comme nous le conjecturons, les théories topologiques tridimensionnelles sont bien des représentations de la “Tour de Teichmüller” entrevue par Grothendieck, l’action que nous décrivons reflète l’action de Galois sur la Tour qui se trouve dans [33].

Toutefois, les raisonnements qui vont suivre sont encore assujettis à quelques hypothèses qui ne trouveront de justification que dans une définition précise de la notion d’algèbre chirale et ensuite de théorie conforme rationnelle. Avant de rentrer dans le vif du sujet, voici brièvement les conditions essentielles aux raisonnements qui vont suivre:

- Les raisonnements qui vont suivre ne sont valables que pour des solutions de ces équations de Moore et Seiberg qui peuvent être jaugées à des solutions algébriques. Cela semble être le cas dans tous les exemples qui ont été étudiés. Toutefois, en utilisant les équations de Moore et Seiberg, on sait seulement montrer que les éléments de matrice de  $S$  et  $T$  sont des nombres algébriques! Par contre, aucun résultat général n’est connu pour les éléments de matrice  $F$ .
- L’algèbre chirale de cette théorie conforme doit vérifier certaines propriétés – de rationalité – que je détaille plus loin. C’est le cas des exemples que je connais. En particulier, je discuterai les modèles minimaux relativement à une algèbre de Virasoro ou à une algèbre de Kac-Moody non tordue.

Dans un premier temps, nous rappelons comment définir une action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur le groupoïde fondamental algébrique de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Puis nous montrerons comment cette action induit l’action de la théorie des nombres sur les éléments de matrice des données de Moore et Seiberg. Enfin, nous discuterons l’action induite sur les théories topologiques. Ceci nous conduira à envisager une modification de l’axiomatique des théories topologiques en vue de formuler plus naturellement (*i.e.* comme dans l’énoncé du théorème 1) la traduction sur les données de Moore et Seiberg de l’action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur le groupoïde fondamental de la sphère privée de trois points.

Dans cette section, nous supposons le lecteur familier avec les idées fondamentales des théories conformes telles qu’elles sont exposées dans [4] (en particulier la notion de bloc conforme).

### 5.1 L’action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, *)$ .

Le but de cette section est de rappeler ce qu’est le groupoïde fondamental algébrique de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  (ou plus généralement d’une surface de Riemann compacte privée d’un nombre fini de points), puis d’expliquer comment  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  agit naturellement sur celui-ci. Le point de vue exposé ici est relativement naïf et ne fait appel qu’à la théorie classique des surfaces de Riemann et des variétés algébriques. Il existe une formulation considérablement plus générale de ces idées (voir [32] et [17, Paragraphes 10.18 et suivants]).

Nous aurons également besoin de donner une formulation plus adaptée au contexte des théories conformes. Ceci se fait en utilisant les idées de Y. Ihara [35] ainsi que la notion de point base à la Deligne [17, Paragraphe 15]. Dans cette section, nous rappellerons la définition du groupoïde fondamental algébrique de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  par rapport à deux points base  $x$  et  $y$  de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Puis nous définirons l’action du groupe de Galois absolu sur ce groupoïde. Nous étendrons ensuite ces considérations en décrivant la notion de point base à la Deligne et nous donnerons une

prescription explicite pour le calcul de l'action de Galois sur le groupoïde fondamental relativement à de tels points base.

**Le groupoïde fondamental algébrique: cas des points bases ordinaires** Nous considérons ici des revêtements topologiques finis de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  ainsi que la catégorie des revêtements topologiques finis de  $P_1(\mathbb{C})$  ramifiés au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  (au sens de la définition 6.1.7 de [23]). Au paragraphe 6.1.11 de cet ouvrage, on montre que la catégorie des revêtements finis d'une surface topologique  $B$  qui ramifient au dessus d'un ensemble fini  $\Delta$  est équivalente à la catégorie des revêtements finis au dessus de  $B \setminus \Delta$ . Nous noterons donc  $\underline{\text{Rev}}_{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  la catégorie des revêtements finis de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  ramifiant au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ . Le foncteur d'oubli de la structure analytique définit une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements analytiques finis de  $P_1(\mathbb{C})$  ramifiant au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  et  $\underline{\text{Rev}}_{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ .

Enfin, le théorème d'uniformisation de Riemann nous dit que la catégorie  $\underline{\text{Rev}}_{\text{an}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  des revêtements analytiques de  $P_1(\mathbb{C})$  qui ramifient seulement au-dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  est équivalente à la catégorie des courbes algébriques au dessus de  $P_1(\mathbb{C})$  ramifiant au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  [59, Chapitre 7].

Nous allons maintenant définir le groupoïde fondamental algébrique à partir de transformations naturelles entre foncteurs fibres qui vont de la catégorie des revêtements dans la catégorie des ensembles finis. Les différentes catégories de revêtements étant équivalentes, les groupoïdes fondamentaux obtenus seront isomorphes. Toutefois, la catégorie des revêtements algébriques nous permettra de définir une action naturelle du groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur le groupoïde fondamental algébrique.

Rappelons que dans le cas d'un point  $x \in P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  (qui est dit ordinaire, par opposition aux points base à la Deligne), la fibre au dessus de  $x$  d'un revêtement  $(X, p)$  est l'ensemble fini  $p^{-1}(x)$ . Ceci définit la partie objet d'un foncteur fibre  $\mathfrak{F}_x^{\text{top}}$  de la catégorie  $\underline{\text{Rev}}_{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  à valeurs dans la catégorie  $\underline{\text{Ens}}$  des ensembles *finis*. Rappelons que si  $\varphi : X \rightarrow Y$  est un morphisme de revêtements de  $X$  dans  $Y$ , on lui associe  $\mathfrak{F}_x^{\text{top}}(\varphi)$ , application de  $\mathfrak{F}_x^{\text{top}}(X)$  dans  $\mathfrak{F}_x^{\text{top}}(Y)$  par restriction aux fibres. On procède de même dans le contexte algébrique et on note  $\mathfrak{F}_x^{\text{alg}}$  le foncteur fibre en  $x$ . Nous allons maintenant définir le groupoïde fondamental algébrique de la base  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ , l'ensemble des transformations naturelles entre  $\mathfrak{F}_x^{\text{top}}$  et  $\mathfrak{F}_y^{\text{top}}$  est en bijection canonique avec l'ensemble des transformations naturelles entre les foncteurs  $\mathfrak{F}_x^{\text{alg}}$  et  $\mathfrak{F}_y^{\text{alg}}$ . Cet ensemble est noté  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, y)$ .

La catégorie dont les objets sont les points de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  et les morphismes entre deux objets  $x$  et  $y$  sont les éléments de  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, y)$  est appelée le groupoïde fondamental algébrique de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Elle est notée  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ . Dans le contexte topologique, on définit de même le groupoïde fondamental topologique  $\pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ . On vérifie facilement que c'est une sous catégorie de  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ : leurs ensembles d'objets sont identiques et, pour tout couple d'objets  $(x, y)$ , on dispose d'une injection canonique de  $\pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, y)$  dans  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, y)$  définie grâce aux théorèmes de relèvement des chemins et des homotopies [23, Paragraphes 4.8.4 et 4.8.5]. Rappelons également que, grâce à la théorie de Galois des revêtements [23, Paragraphe 4.5.8], on montre que pour tout  $x \in P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ , le groupe fondamental algébrique  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, x)$  est le complété profini du groupe fondamental topologique, *i.e.* la limite projective de tous les quotients finis

de  $\pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x)$ . En clair, le groupe fondamental algébrique est parfois *beaucoup* plus “gros” que son avatar topologique. Nous invitons le lecteur à expliciter le cas de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}$  et à montrer que  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}, 1) \simeq (\hat{\mathbb{Z}}, +)$ .

**L’action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$**  On dispose d’une action naturelle de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur la catégorie  $\underline{\text{Rev}}_{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  par isomorphisme fonctoriel. Elle est définie de la manière suivante:

- Soit  $(X, p)$  un revêtement algébrique de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . On fabrique alors  $(\sigma.X, \sigma.p)$  en appliquant  $\sigma$  aux coefficients d’un quelconque système d’équations définissant  $X$  et  $p$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .
- Si  $(X, p)$  et  $(Y, q)$  sont deux revêtements algébriques de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  définis sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme entre eux (également défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ), on définit  $\sigma.f$  en appliquant  $\sigma$  aux coefficients des équations définissant  $f$ .

Ces prescriptions fournissent un automorphisme fonctoriel de la catégorie  $\underline{\text{Rev}}_{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ . A partir de là, on dispose d’une action naturelle de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{Q}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ . En effet, soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $P_1(\mathbb{Q}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ , et  $\hat{\gamma}$  un élément de  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{Q}) \setminus \{0, 1, \infty\}, a, b)$ , pour chaque revêtement algébrique  $(X, p)$  de la sphère privée de  $0, 1$  et  $\infty$ , notons  $\hat{\gamma}_{(X,p)}$  l’isomorphisme entre les fibres  $p^{-1}(a)$  et  $p^{-1}(b)$ . On considère alors

$$(5.1) \quad \sigma \circ \hat{\gamma}_{\sigma^{-1}(X,p)} \circ \sigma^{-1}$$

qui est un isomorphisme de la fibre de  $(X, p)$  au dessus de  $a$  dans celle au-dessus de  $b$ . Le lecteur vérifiera que la définition 5.1 est compatible aux morphismes de revêtements algébriques. En conséquence, nous pouvons définir  $\sigma.\hat{\gamma}$  au moyen de cette prescription. On vérifie alors que cela définit bien un isomorphisme fonctoriel de la catégorie  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{Q}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  obtenue à partir de  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  en se limitant aux objets  $x \in P_1(\mathbb{Q}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Cet isomorphisme agit comme l’identité sur l’ensemble des objets car ce sont les points rationnels de la sphère de Riemann.

**Les points base à la Deligne** Lorsque l’on veut prendre un point base qui, intuitivement, corresponde à approcher “infiniment près” de  $0, 1$  ou  $\infty$  (ce qui est naturel dans le contexte des théories de champs invariantes conformes bidimensionnelles), nous devons rajouter un peu de structure car un revêtement fini au dessus de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$  est ramifié au dessus de  $P_1(\mathbb{C})$ . Nous avons besoin d’un moyen de distinguer entre les différentes branches qui partent d’un même point dans la fibre au dessus du point considéré<sup>32</sup>. C’est ce que les vecteurs tangents de Deligne permettent de faire.

Pour fixer les idées, raisonnons en zéro. Choisissons un vecteur  $u \neq 0$  tangent à  $P_1(\mathbb{C})$  en zéro. Soit  $(X, p)$  un revêtement fini de  $P_1(\mathbb{C})$  qui ramifie seulement au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ , alors la “fibre en  $(0, u)$ ” est formée par les couples  $(x, w)$  où  $x \in p^{-1}(0)$  et  $w$  est une uniformisante de  $X$  en ce point, dont une puissance est  $z$  (c’est à dire une fonction méromorphe sur la surface  $X$ , qui au voisinage de  $x$  est de germe  $\omega$  tel que  $\omega^n = p$ ). Il va de soi que le choix d’une telle uniformisante permet de choisir entre les différentes branches topologiques issues de  $X$ , tracées sur  $X$ , et dont la

<sup>32</sup>Cette idée est naturelle dans le contexte des théories conformes car nous considérons des opérateurs dont les poids conformes sont non nuls.

projection sur  $P_1(\mathbb{C})$  part dans la direction  $u$ . Supposons avoir associé à la branche  $b_1$  l'uniformisante  $\omega_1$ , alors nous associons à l'uniformisante  $\omega$  l'unique branche  $b$  telle que  $\omega/\omega_1$  prenne des valeurs réelles positives sur la branche  $b$  au voisinage du point de ramification.

**Séries de Puiseux** Nous allons maintenant donner une traduction des idées précédentes en termes purement algébriques. Cela nous permettra d'une part de décrire explicitement l'action du groupe de Galois absolu sur  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, x, y)$  où  $x$  et/ou  $y$  sont des points base à la Deligne, et d'autre part, facilitera la traduction de ces idées dans le contexte des théories conformes rationnelles (voir section 5.2).

L'idée importante consiste à associer à une fonction méromorphe  $f$  sur  $X$  (courbe algébrique au dessus de  $P_1(\mathbb{C})$ ) un développement de Puiseux pour chaque point de la fibre au dessus du point base considéré. Rappelons qu'un développement de Puiseux (en zéro pour fixer les idées) est une série de la forme [59, Page 5]

$$(5.2) \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n z^{n/p}$$

où  $n_0$  est un entier. Intuitivement, la construction est la suivante:

- Dans le cas où  $a$  est un point base ordinaire, le revêtement est étale au voisinage de  $a$ . La fonction  $f$  admet un développement de Laurent de la forme

$$(5.3) \quad f = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n$$

et nous lui associons donc le développement de Laurent  $\sum_n a_n (z - a)^n$ . Le point de la fibre définit un morphisme de  $\mathbb{C}(T)$ -algèbre du corps des fonctions méromorphes sur  $X$  dans le corps des séries de Puiseux en  $z - a$ .

- Dans le cas où le point base est un point base à la Deligne  $(0, u)$ , nous choisissons  $(x, w)$  un point de la fibre au dessus de  $(0, u)$  du revêtement  $(X, p)$ . Soit  $f \in \mathcal{M}(X)$  une fonction méromorphe sur  $X$ , elle admet un développement de Laurent en fonction de l'uniformisante:

$$(5.4) \quad f = \sum_{n \geq n_0} a_n w^n$$

et nous lui associons le développement de Puiseux

$$(5.5) \quad \sum_{n \geq n_0} a_n z^{n/e_x}$$

où  $e_x$  est l'indice de ramification au point  $x$ . De ce fait, nous construisons un morphisme de  $\mathbb{C}(T)$ -algèbre de  $\mathcal{M}(X)$  dans le corps des séries de Puiseux en  $z$ .

D'après la descente de Weil [65] (C'est l'argument donné par Bielyi dans [5]), les courbes algébriques qui sont des revêtements de la droite projective ramifiés seulement au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$  sont définies sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ . En conséquence, le corps des fonctions méromorphes d'une telle courbe  $X$  est de la forme  $\mathcal{M}(X(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}})) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ . Pour chaque choix d'un point au dessus d'un point

base, nous disposons d'un plongement du corps  $\mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}}))$  dans le corps des séries de Puiseux à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Dans le cas de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ , on utilisera les points base à la Deligne  $\overrightarrow{ij}$  définis pour  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $\{0, 1, \infty\}$ . Précisément, (voir par exemple [35, page 105]) soient  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $\{0, 1, \infty\}$ , il existe un et un seul automorphisme analytique  $t_{\overrightarrow{ij}}$  de  $P_1(\mathbb{C})$  qui envoie  $i$  et  $j$  sur 0 et 1 dans cet ordre. Si  $f$  est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann connexe  $X$  qui est un revêtement fini de  $P_1(\mathbb{C})$  ramifiant seulement au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ , grâce au choix d'une uniformisante au dessus de  $i$ , on lui associe naturellement un développement de Puiseux en la variable  $t_{\overrightarrow{ij}}$ . Dans la suite de ce texte, nous utiliserons  $\overrightarrow{01}$  et  $\overrightarrow{10}$ . Dans ce cas, la variable utilisée sera:  $t_{\overrightarrow{10}} = 1 - z$ .

A chaque point de la fibre  $(x, w)$  au dessus du point base  $\overrightarrow{ij}$ , nous associons un morphisme de  $\mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}}))$  dans un corps de séries de Puiseux en la variable  $t_{\overrightarrow{ij}}$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Cette idée permet de développer une description purement algébrique de la théorie des revêtements de  $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ : nous allons décrire les notions de foncteur fibre et de groupoïde fondamental algébrique dans ce cadre. Cela nous permettra de donner la prescription d'Ihara pour le calcul explicite de l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur le groupoïde fondamental algébrique de la sphère privée de trois points.

La sous-catégorie  $\text{Rev}_{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$  formée par les revêtements *connexes* est *anti-équivalente* à la catégorie des extensions algébriques finies de  $\mathbb{Q}(T)$  non ramifiées<sup>33</sup> hors de  $\{0, 1, \infty\}$  [23]. Dans cette formulation, un point de la fibre de  $(X, p)$  au dessus de  $\overrightarrow{ij}$  est un morphisme  $\varphi_{(x, w)}$  de  $\overline{\mathbb{Q}}(T)$ -algèbre de  $\mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}}))$  dans le corps des séries de Puiseux en  $t_{\overrightarrow{ij}}$  à coefficients algébriques (noté  $\text{Puis}_{\overline{\mathbb{Q}}}(t_{\overrightarrow{ij}})$ ) qui étend l'injection de  $\overline{\mathbb{Q}}(T)$  dans  $\mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}}))$  canoniquement associée à  $p$ . Le foncteur fibre  $\mathfrak{F}_{\overrightarrow{ij}}^{\text{Puis}}$  associe au corps  $\mathcal{M}(X(\overline{\mathbb{Q}}))$  l'ensemble des morphismes  $\varphi_{(x, w)}$  précédents. C'est un foncteur contravariant de la catégorie des extensions finies de  $\overline{\mathbb{Q}}(T)$  ne ramifiant pas hors de  $\{0, 1, \infty\}$  dans la catégorie des ensembles finis.

On définit le groupoïde fondamental algébrique comme une catégorie dont les objets sont les différents points base considérés et les morphismes entre deux objets  $x$  et  $y$  (pouvant être des points base à la Deligne  $\overrightarrow{01}, \overrightarrow{10}, \overrightarrow{1\infty}, \overrightarrow{\infty 1}, \overrightarrow{\infty 0}$  ou  $\overrightarrow{0\infty}$ ) les transformations naturelles entre les foncteurs fibres  $\mathfrak{F}_x^{\text{Puis}}$  et  $\mathfrak{F}_y^{\text{Puis}}$ . A titre d'illustration, la transformation naturelle  $\mathfrak{T}_\gamma$  entre les foncteurs  $\mathfrak{F}_\alpha^{\text{Puis}}$  et  $\mathfrak{F}_\beta^{\text{Puis}}$  associée à  $\gamma \in \pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \alpha, \beta)$  est donnée par la prescription suivante: si  $M$  est une extension finie de  $\overline{\mathbb{Q}}(T)$  ramifiée seulement au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ , et  $\phi \in \mathfrak{F}_\beta^{\text{Puis}}(M)$ , on pose:

$$(5.6) \quad \forall f \in M, \quad (\mathfrak{T}_\gamma \cdot \phi)(f) = \gamma \cdot \phi(f)$$

où  $\gamma \cdot \phi(f)$  désigne le développement de Puiseux du prolongement analytique le long de  $\gamma$  du germe défini par le développement de Puiseux  $\phi(f)$ . Dans ce cadre,  $\mathfrak{T}_\gamma$  est l'image de  $\gamma$  par l'injection canonique de  $\pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \alpha, \beta)$  dans  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \alpha, \beta)$ .

L'action du groupe de Galois absolu sur un chemin  $\gamma \in \pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, a, b)$  où  $(a, b)$  sont deux points base rationnels (*i.e.* dans  $P_1(\mathbb{Q})$  ou bien un des six points base à la Deligne) est alors facile à décrire en s'inspirant de l'équation 5.1. Pour fixer les idées, supposons que  $a = \overrightarrow{01}$  et

<sup>33</sup>Voir l'Exercice 6.3 dans [23] pour une définition.

$b = \overrightarrow{10}$ . L'action de  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur  $\gamma \in \pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \overrightarrow{01}, \overrightarrow{10})$  est alors décrite par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{n \geq n_0} a_n z^{n/e} & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \sum_{n \geq n_0} \sigma^{-1}(a_n) z^{n/e} \\ \downarrow \sigma \cdot \gamma & & \downarrow \gamma \\ \sum_{n \geq n_0} \sigma(b_n) (1-z)^{n/e'} & \xleftarrow{\sigma} & \sum_{n \geq n_0} b_n (1-z)^{n/e'} \end{array}$$

où  $e$  et  $e'$  sont les indices de ramification en 0 et 1 respectivement.

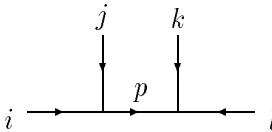
## 5.2 Traduction sur les blocs conformes.

L'idée importante dans ce qui va suivre est que les blocs conformes d'une théorie rationnelle admettent justement des développements de type Puiseux au voisinage des points coïncidants car, comme l'ont montré Moore et Anderson [2] ou Vafa [63], les dimensions conformes des champs primaires et la charge centrale sont des rationnels! A partir de là, nous associons à chaque point base à la Deligne pertinent une base de blocs conformes, et donc une famille libre finie de développement de Puiseux. De plus, les matrices de Moore et Seiberg se calculent comme des matrices de monodromie entre les bases précédentes. Comme les matrices sont définies en dimension modulaire au plus égale à un, nous nous ramènerons toujours sur la sphère de Riemann privée de quelques points. Puis nous montrerons comment l'action de Galois sur le groupoïde fondamental algébrique de la sphère privée de trois points induit une action sur les matrices de Moore et Seiberg. Nous avons choisi d'illustrer cette idée sur les matrices  $F$  et  $S$ . La démarche est identique dans le cas des autres matrices.

### 5.2.1 Le cas de la sphère avec quatre points marqués.

Considérons quatre points deux à deux distincts sur la sphère de Riemann; grâce à une homographie, on peut envoyer trois de ces quatre points sur  $\{0, 1, \infty\}$ . Ceci permet, comme expliqué dans [4], d'associer à chaque bloc conforme un développement de Puiseux au voisinage de zéro.

En effet, un bloc est indexé par deux opérateurs de vertex chiraux [53]. Le développement de Puiseux du bloc

$$\mathcal{F}_{a,b}^{(\overrightarrow{01})} \left\{ \begin{array}{cc} j & k \\ i & l \end{array} \right\} (z_1, z_2, z_3, z_4) =$$


est obtenu de la manière suivante: notons  $\phi_a(z) : V_i \otimes V_j \rightarrow V_p$  et  $\phi_b(z) : V_p \otimes V_k \rightarrow V_l$  les opérateurs de vertex chiraux considérés, étant entendu que la première représentation est insérée en 0, la seconde en  $z$  et la représentation "en sortie" en  $\infty$ . Nous introduisons alors

$$(5.7) \quad \mathcal{F}_{a,b}^{(\overrightarrow{01})}(z) = \langle \varphi_l | (\phi_b(1)(\phi_a(z)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)) \otimes |\varphi_k\rangle \rangle$$

qui est reliée à notre bloc conforme par

$$(5.8) \quad \mathcal{F}_{a,b}^{(\overrightarrow{01})}(z) = \lim_{z_4 \rightarrow \infty} \left( z_4^{2h_l} \mathcal{F}_{a,b}^{(\overrightarrow{01})} \left\{ \begin{array}{cc} j & k \\ i & l \end{array} \right\} (0, z, 1, z_4) \right)$$

C'est une fonction analytique sur un voisinage du segment réel  $]0, 1[$  mais qui peut avoir des monodromies non triviales autour de  $0, 1$  et  $\infty$ ! Dans les théories conformes bidimensionnelles, elle est définie pour  $z$  "proche de zéro" sur l'axe réel positif, soit par une expression asymptotique, soit en résolvant une équation différentielle comme l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov ou une équation BPZ. Ceci revient à prendre comme point base pour le calcul des monodromies, le point base à la Deligne  $\overline{01}$ . Nous allons maintenant définir la matrice  $F$  en termes de monodromie le long d'un élément particulier de  $\pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \overline{01}, \overline{10})$ . Il est donc indispensable de définir une base de blocs conformes associés au voisinage du point  $z = 1$  dans  $P_1(\mathbb{C})$ . A chaque élément de la base est associé son développement de Puiseux dans la variable  $t_{\overline{10}} = 1 - z$ . Ce développement peut se calculer en fonction d'éléments de matrice d'opérateurs de vertex chiraux [4, 53]. Nous notons  $(\mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})})_{c,d}$  la base ainsi obtenue. Enfin, nous noterons  $\mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})}(1 - z)$  le développement de Puiseux de  $\mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})}$  pour  $z$  voisin de 1 dans l'intervalle réel  $]0, 1[$ .

Nous notons  $p. \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}$  le prolongement méromorphe de  $\mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{10})}$  le long de  $p \in \pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \overline{01}, \overline{10})$  représenté par  $t \in ]0, 1[ \mapsto t \in P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ . La matrice  $F$  est définie de la manière suivante:

$$(5.9) \quad p. \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})} = \sum_{c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})}$$

Le développement de Puiseux de  $\mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}$  en 0 est donné par

$$(5.10) \quad \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}(z) = z^{h_p - h_i - h_j} \sum_{\{q\}} \langle \varphi_i | \phi_b(1) (|\varphi_p, \{q\}\rangle \otimes |\varphi_k\rangle) \times \langle \varphi_p, \{q\} | \varphi_a(1) (|\varphi_j\rangle \otimes \varphi_i) \rangle z^{\Delta(\{q\})}$$

où  $(|\varphi_p, \{q\}\rangle)_{\{q\}}$  désigne ici une base de  $V_p$  orthonormée et propre pour  $L_0$ . L'entier  $\Delta(\{q\})$  est la différence entre la valeur propre de  $L_0$  sur  $|\varphi_p, \{q\}\rangle$  et  $h_p$ . L'exposant  $h_p - h_i - h_j$  est rationnel.

C'est maintenant que vont intervenir des hypothèses de rationalité et/ou d'algébricité de certains éléments de matrice des opérateurs de vertex chiraux. Je vais discuter ce point important plus loin. Supposons pour le moment que le développement de Puiseux de  $\mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}$  au voisinage de zéro soit de la forme suivante:

$$(5.11) \quad \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}(z) = A_a A_b \times z^{h_p - h_i - h_j} \times \sum_{n \geq 0} \alpha_{a,b}(n) z^n$$

où les  $\alpha_{a,b}(n)$  sont dans  $\mathbb{Q}$  (hypothèse de rationalité) et  $A_{a,b} \in \mathbb{C}^*$ . Nous discuterons plus loin la forme et l'origine de ces facteurs  $A_a$ .

Nous prolongons  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  en un automorphisme du corps  $\mathbb{C}$  grâce au choix d'une base de transcendance de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{Q}$ . Ce choix est arbitraire mais nous allons voir que, du point de vue de la théorie topologique, il ne change rien. Nous désignons encore ce prolongement par  $\sigma$ . Considérons  $p$  comme un élément de  $\pi_1^{\text{alg}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \overline{01}, \overline{10})$ , et *par analogie* avec la prescription de Ihara, nous effectuons les opérations suivantes sur le développement de Puiseux de  $\mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{01})}$ :

$$\begin{aligned} A_a A_b \times z^{h_p - h_i - h_j} \times \sum_{n \geq 0} \alpha_{a,b}(n) z^n &\xrightarrow{\sigma^{-1}} \sigma^{-1}(A_a A_b) \times z^{h_p - h_i - h_j} \times \sum_{n \geq 0} \alpha_{a,b}(n) z^n \\ &\xrightarrow{p.} \frac{\sigma^{-1}(A_a A_b)}{A_a A_b} \sum_{c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})}(1 - z) \end{aligned}$$



et nous arrivons, par application de  $\sigma$ , à l'expression suivante:

$$(5.12) \quad \sigma \left( \frac{\sigma^{-1}(A_a A_b)}{A_a A_b} \right) \times \sum_{c,d} \sigma \left( F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right) \frac{\sigma(A_c A_d)}{A_c A_d} \mathcal{F}_{c,d}^{(\overline{10})} (1-z)$$

Nous supposons maintenant que les éléments de matrice de  $F$  sont algébriques dans la jauge considérée (hypothèse d'algébricité) et donc, ceci montre que la matrice  $F$  se transforme sous l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  par la formule suivante:

$$(5.13) \quad \left( F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right)_{(a,b);(c,d)} \mapsto \left( \sigma \left( F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right) \right) \times \frac{(A_a/\sigma(A_a))(A_b/\sigma(A_b))}{(A_c/\sigma(A_c))(A_d/\sigma(A_d))} \Big|_{(a,b);(c,d)}$$

Il faut remarquer que cette action se décompose entre d'une part une action "naïve" du groupe de Galois absolu, et d'autre part une transformation de jauge au sens de la définition 17. Au niveau de la théorie topologique, nous savons bien que les transformations de jauge ne changent pas la théorie topologique. On s'attend donc à ce que seule compte pour l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  l'action "naïve" sur les fonctions de partition de la théorie topologique tridimensionnelle déduite de la solution des équations de Moore et Seiberg.

### 5.2.2 Le cas du tore sans points marqués.

Dans ce cas, nous identifions l'espace des modules avec le quotient du disque unité privé de l'origine par l'action de  $PSL(2, \mathbb{Z})$  sur la variable<sup>34</sup>  $q = \exp(2\pi i\tau)$ . Nous prenons comme point base le point 0, muni d'un vecteur tangent pointant vers 1. La transformation  $S$  se calcule en prenant le chemin  $p$  qui va de  $\overrightarrow{01}$  vers le point base  $\overrightarrow{10}$  à la Deligne<sup>35</sup>. Les blocs conformes en genre un sont les caractères des représentations irréductibles de l'algèbre chirale de la théorie. Ce sont des fonctions holomorphes  $(\chi_j)_j$  sur le demi-plan de Poincaré, qui joue le rôle d'espace de Teichmüller pour les tores. Ces caractères fournissent des développements de Puiseux de la forme suivante:

$$(5.14) \quad \chi_j^{(\overline{01})} = q^{h_j - c/24} \sum_{n \geq 0} a_j(n) q^n$$

en la variable  $q = \exp(2\pi i\tau)$ . Bien entendu, les coefficients  $a_j(n)$  sont des entiers car ce sont des dimensions d'espaces vectoriels de dimension finie. Ces développements sont naturellement associés au point base  $\overrightarrow{01}$  en la variable  $q$ .

La matrice  $S$  de Moore et Seiberg est définie par

$$(5.15) \quad \chi_j \left( \frac{-1}{\tau} \right) = \sum_k S_j^k \chi_k(\tau)$$

Comme nous le verrons plus loin, les éléments de matrice de  $S$  sont des nombres algébriques. Il est même conjecturé que les caractères sont des fonctions algébriques de l'invariant modulaire  $j$ .

A partir de  $\tau \mapsto \chi_j(-1/\tau)$ , nous fabriquons un développement de Puiseux relatif au point base  $\overrightarrow{10}$ :

$$(5.16) \quad \chi_j^{(\overline{10})} = \tilde{q}^{h_j - c/24} \sum_{n \geq 0} a_j(n) \tilde{q}^n$$

<sup>34</sup>En fait,  $q^{1/2}$  serait un choix plus judicieux si on veut utiliser la variable de Picard  $\lambda(\tau) = (\vartheta_4/\vartheta_2)^4(\tau)$ .

<sup>35</sup>Dans le demi-plan de Poincaré  $H$ , cela revient à aller de l'infini à l'origine le long de l'axe imaginaire  $i\mathbb{R}^+$ .

où  $\tilde{q} = \exp(-2\pi i/\tau)$ . La matrice  $S$  relie alors le prolongement analytique du développement  $\chi_i^{(\overline{01})}$  le long de  $p \in \pi_1^{\text{top}}(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, \overline{01}, \overline{10})$  aux  $(\chi_k^{(\overline{10})})_k$ . Notons  $s \cdot \chi$  le prolongement analytique de  $\chi$  le long du chemin  $p$ , nous avons:

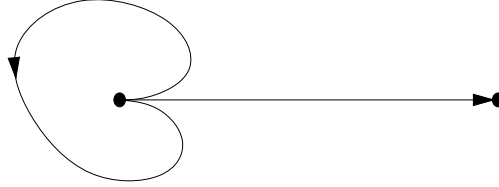
$$(5.17) \quad s \cdot \chi_j^{(\overline{01})} = \sum_k (S^{-1})_j^k \chi_k^{(\overline{10})}$$

L'action d'un élément  $\sigma$  du groupe de Galois absolu est alors triviale à obtenir:

$$\begin{aligned} s \cdot (\sigma^{-1} \cdot \chi_j^{(\overline{01})}) &= \sum_k (S^{-1})_j^k \chi_k^{(\overline{10})} \\ \sigma \cdot (s \cdot [\sigma^{-1} \cdot \chi_j^{(\overline{01})}]) &= \sum_k \sigma((S^{-1})_j^k) \chi_k^{(\overline{10})} \end{aligned}$$

où on a utilisé de manière essentielle le fait que les  $a_j(n)$  sont des rationnels et donc sont fixes sous l'action de  $\sigma$ . En conséquence, l'action de  $\sigma$  sur la matrice  $S$  est simplement l'action de  $\sigma$  sur chacun de ses éléments de matrice!

Finalement, on peut reprendre le même genre de raisonnement pour  $T$  en considérant le chemin ci dessous:



et là encore, le même argument montre que l'action de  $\sigma$  sur  $T$  est simplement l'action de  $\sigma$  sur les éléments de matrice  $\exp(2\pi i(h_j - c/24))$  de  $T$  (qui est diagonale). Comme les dimensions  $h_i$  et la charge centrale  $c$  sont rationnelles, c'est seulement la partie abélienne  $\text{Gal}(\mathbb{Q}_{\text{ab}}/\mathbb{Q})$  qui agit.

On peut se poser la question de l'algébricité des éléments de matrice de  $S$  et de  $T$ . Les résultats connus actuellement sont les suivants:

**Matrice  $S$**  Considérons les règles de fusion  $N_{i,j}^k$ , nous savons que les matrices  $\hat{N}_i = (N_{i,j}^k)_{j,k}$  forment une famille de matrices normales mutuellement commutantes qui sont simultanément diagonalisées par la matrice  $S$ . Les valeurs propres de  $\hat{N}_i$  sont les  $\lambda_i^{(j)} = S_i^j/S_0^j$ . Comme les matrices  $\hat{N}_i$  sont à coefficients entiers, ces nombres appartiennent à  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Il reste à montrer que  $S_0^k$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Pour cela, utilisons l'équation  $S^2 = C$ ,

$$\sum_k (S_0^k)^2 \frac{S_k^j}{S_0^k} = \delta_{j,0}$$

Ainsi, les  $(S_0^k)^2$  sont les solutions d'un système de Cramer à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$  dont le second membre est un vecteur à coordonnées dans  $\mathbb{Q}$ . En conséquence, ces nombres sont algébriques sur  $\mathbb{Q}$ . En conséquence, pour tout  $k$ ,  $S_0^k$  est algébrique sur  $\mathbb{Q}$  ce qui achève la preuve. Citons également le travail de De Boer et Goeree [7] qui montre que les rapports  $\lambda_i^{(j)} = S_i^j/S_0^j$  sont des entiers dans un corps cyclotomique, *i.e.* des combinaisons linéaires à coefficients entiers de racines de l'unité.

**Matrice  $T$**  L'argument "massue" consiste à utiliser le travail de Moore et Anderson [2] qui montre que  $c$  et les dimensions des opérateurs sont des rationnels dès lors que la théorie est rationnelle. Il existe une preuve qui se base sur l'article de Vafa [63]. Elle consiste à utiliser l'identité dite "de la lanterne chinoise" qui est une relation du groupe modulaire pour la sphère avec quatre points marqués, afin d'obtenir une relation entre les différentes dimensions conformes. Vafa montre alors que les  $h_i$  doivent être des rationnels. En prenant le déterminant de l'identité matricielle  $(ST)^3 = C$  sachant que  $S^2 = C$  et  $C^2 = 1$ , on montre que  $\exp(2\pi ic/4)$  est algébrique et donc que  $c$  est rationnel. Cette preuve présente l'avantage de n'utiliser que les équations de Moore et Seiberg.

### 5.3 Justification des hypothèses sur la structure des blocs conformes sur la sphère avec quatre points marqués.

Je n'ai pas de justification générale de l'hypothèse de rationalité que j'ai énoncé plus haut sauf dans certains cas particuliers que je voudrais détailler ici. Il en est de même pour l'hypothèse imposée sur l'algébricité des coefficients de la matrice  $F$ . Dans cette section, nous discuterons tout d'abord l'hypothèse de rationalité des coefficients du développement de Puiseux des blocs  $(0, 4)$ , puis nous passerons aux propriétés d'algébricité des coefficients de la matrice  $F$ . Nous discuterons aussi de l'algébricité des caractères sur le tore sans point marqué.

#### 5.3.1 Hypothèse de rationalité

Nous allons montrer que l'hypothèse de rationalité des  $\alpha_{a,b}(n)$  est vérifiée dans le cas des modèles minimaux de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov, ainsi que dans le cas des modèles de Wess, Zumino et Witten associés à un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe.

Commençons par les modèles minimaux relativement à l'algèbre de Virasoro. Dans la suite, je noterai  $\mathcal{V} = \bigoplus_n \mathcal{V}^{(n)}$  un module de plus haut poids irréductible muni de sa graduation naturelle due à l'action de  $L_0$ . Le vecteur de plus haut poids sera noté  $|\varphi\rangle$ . Les vecteurs  $|\varphi, \{q\}\rangle = \rho(L_{-q_1}) \dots \rho(L_{-q_N})|\varphi\rangle$  forment un système générateur de  $\mathcal{V}$  en temps que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Nous en extrayons une base  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}_n$  désigne la base de  $\mathcal{V}^{(n)}$  que nous obtenons par ce procédé.

Nous pouvons énoncer les résultats suivants:

- La forme contragédiente définie par la condition  $\rho(L_{-n}) = \rho(L_n)^\dagger$  dans la base  $\mathfrak{B}_n$  est le produit de  $\langle\varphi|\varphi\rangle$  par une matrice à coefficients rationnels.
- Soit  $\varphi^{(a)}(z)$  un opérateur de vertex chiral au sens de Moore et Seiberg [53] entre les trois représentations irréductibles, unitaires et de plus haut poids  $\mathcal{V}_i \otimes \mathcal{V}_j$  et  $\mathcal{V}_k$ , alors les quotients

$$\frac{\langle\varphi_k, \{q\}|\phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}{\langle\varphi_k|\phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)} \quad \text{et} \quad \frac{\langle\varphi_k|\phi^{(a)}(1)(|\varphi_i, \{q\}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}{\langle\varphi_k|\phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}$$

sont rationnels

La première assertion provient de la rationalité des constantes de structure de l'algèbre de Virasoro et de la rationalité des poids conformes et de la charge centrale dans les modèles minimaux. La seconde est peu plus délicate. Nous avons besoin des propriétés d'entrelacement des opérateurs de vertex chiraux relativement à l'algèbre de Virasoro. Là encore, la rationalité des poids conformes est essentielle. Considérons les éléments de matrice  $\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(|\varphi_i, \{q\}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle$  et  $\langle \varphi_p, \{q\} | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)$ . On utilise les formules suivantes qui se trouvent dans [53]:

$$(5.18) \quad n \geq -1, \quad \Delta_{0,z}(L_n) = L_n \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left( \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} z^k L_{n-k} \right)$$

$$(5.19) \quad n < -1, \quad \Delta_{0,z}(L_n) = L_n \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n+1) \dots (n-k+2)}{k!} z^{n+1-k} L_{k-1} \right)$$

et les propriétés fondamentales suivantes:

$$(5.20) \quad \phi^{(a)}(z) \circ (\rho_i \otimes \rho_j)(\Delta_{0,z}(L_n)) = \rho_p(L_n) \circ \phi^{(a)}(z)$$

$$(5.21) \quad \frac{d\phi^{(a)}(z)}{dz} = \phi^{(a)}(z) \circ (\mathbf{1}_{V_i} \otimes \rho_j(L_{-1}))$$

qui donnent les propriétés de commutation des opérateurs de vertex chiraux avec l'algèbre de Virasoro. Ces formules permettent de calculer  $\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i, \{q\}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)$  en termes de  $\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)$ . Je vais détailler ces expressions pour le calcul de  $\langle \varphi_p, \{q\} | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)$ . Considérons

$$\rho_p(L_{q_N}) \dots \rho_p(L_{q_1}) \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)$$

où les entiers  $q_l$  sont positifs. Comme  $|\varphi_i\rangle$  et  $|\varphi_j\rangle$  sont des états de plus haut poids pour l'algèbre de Virasoro, en utilisant 5.18, 5.20 et 5.21, nous obtenons

$$(5.22) \quad \langle \varphi_p, \{q\} | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle) = \left( (\mathcal{D}_1 \circ \dots \circ \mathcal{D}_N) \phi^{(a)}(z)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle) \right)_{z=1}$$

$$(5.23) \quad \mathcal{D}_l = (q_l + 1) z^{q_l} h_j + z^{q_l+1} \partial_z$$

De plus, l'équation 5.21 montre que

$$(5.24) \quad \langle \varphi_p | \phi^{(a)}(z)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle) = \frac{\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}{z^{h_i+h_j-h_p}}$$

Les dimensions  $h_i$  étant des rationnels, ceci montre que

$$\frac{\langle \varphi_p, \{q\} | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}{\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)} \in \mathbb{Q}$$

Par le même genre de raisonnement, on montre que:

$$\frac{\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i, \{q\}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)}{\langle \varphi_p | \phi^{(a)}(1)(|\varphi_i\rangle \otimes |\varphi_j\rangle)} \in \mathbb{Q}$$

Enfin, la forme quadratique définie par  $\rho_i(L_{-n}) = \rho_i(L_n)^\dagger$  vérifie:

$$\frac{\langle \varphi_i, \{q\} | \varphi_i, \{q'\}\rangle}{\langle \varphi_i | \varphi_i\rangle} \in \mathbb{Q}$$

En conclusion, les blocs conformes des modèles minimaux sur la sphère avec quatre points marqués vérifient l'hypothèse que nous avons imposé.

Considérons maintenant une algèbre de Lie simple  $\mathfrak{g}$  de dimension finie sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ , nous allons montrer que les théories minimales relativement à l'algèbre affine  $\mathfrak{g}^{(1)}$  vérifient l'hypothèse de rationalité. L'essence de la preuve réside dans l'existence des bases de Chevalley pour les algèbres de Lie semi-simples qui permettent de construire  $\mathfrak{g}$  sur l'anneau  $\mathbb{Z}$ . L'analogie des formules 5.18 et 5.19 est donné par:

$$(5.25) \quad n \geq 0, \quad \Delta_{0,z}(J_n^a) = J_n^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k J_{n-k}^a \right)$$

$$(5.26) \quad n < 0, \quad \Delta_{0,z}(J_n^a) = J_n^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n \dots (n-k+1)}{k!} z^{n-k} J_k^a \right)$$

Les représentations de l'algèbre affine  $\mathfrak{g}^{(1)}$  sont caractérisées par une représentation de plus haut poids  $\lambda$  intégral de l'algèbre de dimension finie  $\mathfrak{g}$  [37]. Soit  $\mathcal{V}_\lambda$  cette représentation de  $\mathfrak{g}^{(1)}$ , alors

$$\mathcal{V}_\lambda = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_\lambda^{(n)}$$

où  $\mathcal{V}_\lambda^{(n)} = \ker(\rho_\lambda(L_0) - (h_\lambda + n)\mathbf{1})$ . Comme d'habitude,  $h_\lambda$  désigne le poids conforme de Sugawara [42] associé à la représentation  $\mathcal{V}_\lambda$ . L'espace  $\mathcal{V}_\lambda^{(0)}$  est stable sous l'action des  $\rho_\lambda(J_0^a)$  qui forment une algèbre de Lie isomorphe à  $\mathfrak{g}$ . C'est une représentation de  $\mathfrak{g}$  de plus haut poids  $\lambda$ . Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$  une décomposition de  $\mathfrak{g}$  en une algèbre de Cartan et deux algèbres de Borel, on note  $|\lambda\rangle$  un vecteur de plus haut poids du  $\mathfrak{g}$ -module  $\mathcal{V}_\lambda^{(0)}$ , et  $|\{q, a\}, \lambda\rangle$  l'état  $\rho_\lambda(\prod_l J_{-q_l}^{a_l})|\lambda\rangle$ . Ces vecteurs forment une famille génératrice du  $\mathfrak{g}^{(1)}$ -module  $\mathcal{V}_\lambda$ .

Considérons alors  $\langle \lambda_p, \{q, a\} | \phi^{(a)}(1)(|\lambda_i\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \rangle$  et utilisons 5.25, ce qui nous donne

$$(5.27) \quad \langle \lambda_p, \{q, a\} | \phi^{(a)}(z)(|\lambda_i\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \rangle = z^{\sum_i q_i} \langle \lambda_p | \phi^{(a)}(1)(|\lambda_i\rangle \otimes \rho_\lambda(J_0^{a_1} \dots J_0^{a_N}) |\lambda_j\rangle) \rangle$$

De plus,  $\phi^{(a)}(z)$  induit sur  $\mathcal{V}_{\lambda_i}^{(0)} \otimes \mathcal{V}_{\lambda_j}^{(0)}$  un opérateur d'entrelacement pour l'action de  $\mathfrak{g}$  lorsque l'on projette sur  $\mathcal{V}_{\lambda_p}^{(0)}$  ( $\Delta_{0,z}(J_0^a) = J_0^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes J_0^a$  n'est autre que le coproduit usuel sur  $\mathfrak{g}$ ) et de plus si  $|y\rangle \in \mathcal{V}_{\lambda_j}^{(0)}$  et  $|x\rangle \in \mathcal{V}_{\lambda_i}^{(0)}$  et  $|z\rangle \in \mathcal{V}_{\lambda_p}^{(0)}$  alors

$$\langle z | \phi^{(a)}(z)(|x\rangle \otimes |y\rangle) \rangle = z^{h_p - h_i - h_j} \langle z | \phi^{(a)}(1)(|x\rangle \otimes |y\rangle) \rangle$$

ce qui montre que

$$\langle \lambda_p, \{q, a\} | \phi^{(a)}(1)(|\lambda_i\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \rangle$$

ne dépend que des éléments de matrice de l'opérateur d'entrelacement induit par  $\phi^{(a)}$  entre les représentations  $\mathcal{V}_{\lambda_i}^{(0)} \otimes \mathcal{V}_{\lambda_j}^{(0)}$  et  $\mathcal{V}_{\lambda_p}^{(0)}$ . On montre qu'il en est de même pour les éléments de matrice

$$\langle \lambda_l | \phi^{(b)}(1)(|\{q, a\}, \lambda_p\rangle \otimes |\lambda_k\rangle) \rangle.$$

De même en ce qui concerne la forme contragédiente: elle est entièrement déterminée par la forme analogue sur la représentation de dimension finie. On peut alors invoquer les résultats de Chevalley et Serre [34, Section 25.2] qui montrent l'existence d'une base de  $\mathfrak{g}$  dans laquelle les constantes de structure sont des rationnels. Dans [34] est expliqué comment construire une base de Chevalley pour  $\mathfrak{g}$ . Mais au paragraphe 25.4 est expliqué que la structure d'algèbre de Lie sur  $\mathbb{Z}$  déduite de la base de Chevalley choisie est en fait indépendante de cette base. Nous la notons  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ .

Soit maintenant  $K$  une forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ , elle vérifie

$$\forall(x, y, z) \in \mathfrak{g}^3, \quad K([x, y], z) + K(y, [x, z]) = 0$$

et donc, si il existe une base de  $\mathfrak{g}$  dans laquelle les constantes de structures sont rationnelles, il existe un choix de forme de Killing rationnel au sens suivant<sup>36</sup>: si  $(e_\alpha)_\alpha$  est la base en question,

$$\forall(\alpha, \beta), \quad K(e_\alpha, e_\beta) \in \mathbb{Q}.$$

C'est une forme de Killing sur la  $\mathbb{Z}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ .

Les relations de commutation de l'algèbre affine, extension centrale de  $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$  par  $\mathbb{C}$  sont

$$[t^n \otimes x, t^m \otimes y] = t^{n+m} \otimes [x, y] + k\delta_{n,-m}K(x, y)$$

où  $K$  est une forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ . Donc, si  $k$  est rationnel, il existe une base de l'algèbre affine dans laquelle les constantes de structure de  $\mathfrak{g}^{(1)}$  sont rationnelles. Il s'en suit que la forme contragédiente pour l'algèbre affine, évaluée dans la représentation  $\mathcal{V}_\lambda$  associée au poids  $\lambda$ , est proportionnelle à une matrice rationnelle.

En ce qui concerne les opérateurs d'entrelacement, nous procédons de même. Tout d'abord, considérons  $\mathcal{D}$  une représentation de  $\mathfrak{g}$  de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . D'après [34, §27.1], il existe dans  $\mathcal{D}$  une base pour la structure de  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel qui est stable sous l'action de  $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ , algèbre enveloppante sur  $\mathbb{Z}$  de la  $\mathbb{Z}$ -algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ . En conséquence, soit  $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$  une de ces bases,  $V_{\mathbb{Q}} = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_{\mathcal{D}})$  définit une  $\mathbb{Q}$ -structure sur  $V$  qui est stable sous l'action de l'algèbre enveloppante  $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ . De ce fait, chaque  $\rho_{\mathcal{D}}(x)$  pour  $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$  est un endomorphisme  $\mathbb{Q}$ -rationnel de  $(V, V_{\mathbb{Q}})$  au sens de [8, Chapitre 2, §8, déf. 3] et donc sa matrice dans la base  $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$  est à coefficients rationnels.

Un opérateur d'entrelacement  $u$  entre les représentations  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  de  $\mathfrak{g}$  est une application linéaire  $\varphi$  telle que

$$(5.28) \quad \forall(x, u) \in \mathfrak{g} \times \mathcal{D}, \quad \varphi(\rho_{\mathcal{D}}(x).u) = \rho_{\mathcal{D}'}(x).\varphi(u)$$

Choisissons alors les bases  $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}}$  et  $\mathfrak{B}_{\mathcal{D}'}$  comme précédemment, l'équation 5.28 devient un système linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . L'espace vectoriel des solutions sur  $\mathbb{Q}$  a la même dimension que l'espace vectoriel des solutions sur  $\mathbb{C}$ . Nous pouvons donc choisir des  $\mathbb{Q}$ -structures sur les espaces d'opérateurs d'entrelacement entre représentations de  $\mathfrak{g}$ . En conséquence, on peut travailler sur le corps des rationnels pour la théorie des modules de plus haut poids et de dimension finie pour  $\mathfrak{g}$ .

Finalement, en combinant ce dernier résultat et 5.27, il existe une base de l'espace des opérateurs de vertex chiraux entre  $\mathcal{V}_{\lambda_i} \otimes \mathcal{V}_{\lambda_j}$  et  $\mathcal{V}_{\lambda_p}$  telle que  $\langle \lambda_p, \{q, a\} | \phi^{(a)}(1)(|\lambda_i\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \rangle$  soit rationnel pour tout descendant  $|\lambda_p, \{q, a\}\rangle$  de  $|\lambda_p\rangle$ . Le même type de raisonnement montre la rationalité de  $\langle \lambda_l | \phi^{(b)}(1)(|\lambda_p, \{q, a\}\rangle \otimes |\lambda_i\rangle) \rangle$ . En conséquence, les blocs conformes sur la sphère avec quatre points marqués des modèles de Wess-Zumino-Witten associés à une algèbre de Lie semi-simple et de dimension finie (sur  $\mathbb{C}$ ) vérifient les hypothèses voulues sur les développements de Puiseux des blocs.

---

<sup>36</sup>Explicitons l'argument: l'équation d'invariance de la forme de Killing s'écrit  $\sum_d (f_{a,b}^d K_{d,c} + f_{a,c}^d K_{b,d}) = 0$  pour tout  $(a, b, c)$ . Les  $f_{a,b}^c$  sont les constantes de structures de l'algèbre de Lie considérée. C'est un système linéaire homogène à coefficients rationnels que l'on résout sur le corps  $\mathbb{Q}$  et qui possède des solutions car le rang est indépendant du corps de base.

### 5.3.2 Hypothèses d’algébricité

Dans cette section, nous allons discuter les hypothèses d’algébricité des coefficients des matrices de Moore et Seiberg. Nous nous intéresserons au cas de la matrice  $F$ , puis au cas de la matrice  $S$  via la question de l’algébricité des caractères sur le tore sans point marqué.

**Sur l’algébricité des éléments de matrice  $F$**  Dans ce paragraphe, nous allons discuter brièvement les problèmes liés à l’algébricité des coefficients de la matrice  $F$  de Moore et Seiberg. Nous discuterons également la forme et l’origine des coefficients  $A_a$  et  $A_b$  qui apparaissent dans l’équation 5.11.

Deux faits “expérimentaux” se sont imposés dans l’étude des théories conformes rationnelles et des équations de Moore et Seiberg:

- A règles de fusion fixées, les solutions des équations de Moore et Seiberg associées à ces règles fournissent une matrice  $F$  qui est toujours jaugeable à une matrice à coefficients algébriques.
- A partir d’une théorie conforme rationnelle, l’étude des monodromies des blocs sur la sphère avec quatre points marqués fournit une matrice  $F$  jaugeable à une matrice à coefficients algébriques.

Il est tentant de conjecturer que ces faits sont un phénomène général pour toute théorie conforme rationnelle. Toutefois, aucun embryon de preuve n’existe à l’heure actuelle. Nous allons rappeler, sans rentrer dans le détail, quel est l’état de l’art sur l’exemple des modèles minimaux.

Dans le cas des modèles minimaux de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [4], un certain nombre de résultats sont connus. Les blocs sur la sphère avec quatre points marqués faisant intervenir un des deux champs primaires  $\phi_{1,2}$  ou  $\phi_{2,1}$  (avec les notations de [4]) vérifient des équations différentielles d’ordre deux qui se ramènent, après une transformation adéquate, à des équations de Riemann-Papperitz [26]. Dans ce cas, nous savons associer à chaque point base à la Deligne  $\overline{ij}$  (avec  $(i, j) \in \{0, 1, \infty\}^2$  distincts) une base de solutions de l’équation différentielle qui fournit naturellement des développements de Puiseux de la forme

$$(t_{\overline{ij}})^r \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{a,b}(n) (t_{\overline{ij}})^n$$

où les coefficients  $\alpha_{a,b}(n)$  sont rationnels ainsi que l’exposant  $r$ . Le calcul des éléments de matrice de  $F$  relativement à ces bases remonte au siècle dernier (voir [26]). Toutefois, dans cette base, la matrice  $F$  n’est pas toujours à coefficients algébriques. Mais on montre qu’un simple changement de base de la forme

$$(5.29) \quad \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{ij})} \longrightarrow A_a^{-1} A_b^{-1} \mathcal{F}_{a,b}^{(\overline{ij})}$$

permet de jauger la matrice  $F$  à une matrice à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Ceci montre, d’une part que le développement de Puiseux de ces blocs est de la forme 5.11, et d’autre part que dans cette base, la matrice  $F$  est à coefficients algébriques.

L’extension de cette étude aux autres blocs se trouve en partie dans le travail de Cremmer, Gervais et Roussel [12]. Ces auteurs y étudient les blocs formés par quatre champs de type  $\phi_{1,r}$ ,

et montrent que la matrice  $F$  est jaugeable à une matrice dont les coefficients sont les symboles  $6j$  du groupe quantique  $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$  où le paramètre  $q$  est une racine de l'unité. Vu l'expression de ces symboles en termes de  $q$ , la matrice  $F$  est jaugeable à une matrice à coefficients algébriques. La démarche suivie par ces auteurs procède par étapes:

- Ils calculent la matrice  $F$  dans le cas où un des quatre champs primaires intervenant dans le bloc est  $\phi_{1,2}$ .
- Par récurrence, ils montrent comment déterminer les coefficients  $A_a$  pour tout indice de vertex  $a$ .
- En utilisant l'équation pentagonale 3.26 vérifiée par  $F$  et par les symboles  $6j$ , ils montrent que  $F$  est jaugée aux symboles  $6j$  par les coefficients précédemment mentionnés.

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la détermination d'une base de solutions des équations de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov pour chaque quadruplet de champs primaires possible. Toutefois, il serait intéressant d'étudier de plus près les développements de Puiseux des blocs et de considérer le cas à cinq points marqués<sup>37</sup> afin de souligner la relation entre l'étude des théories conformes et l'approche d'Ihara. On peut aussi se demander dans quels cas les blocs sur la sphère avec quatre points marqués sont des fonctions algébriques du birapport des quatre points d'insertion. Cette question n'a pas été beaucoup étudiée dans la littérature. Nous espérons y revenir ultérieurement.

**Sur l'algébricité des caractères** Nous rappelons ici l'état de l'art concernant l'algébricité des caractères des théories rationnelles en genre un sans point marqué. La conjecture principale, qui remonte à la fin des années 80, et qui a été formulée précisément par plusieurs auteurs peut s'énoncer ainsi:

**Conjecture 1** *Les caractères d'une théorie conforme rationnelle sont des fonctions algébriques du paramètre de Picard  $\lambda$ .*

Comme l'invariant  $j$  est une fonction rationnelle du paramètre de Picard  $\lambda$ , il revient au même de dire que les caractères sont des fonctions algébriques de  $j$ . Cette conjecture est équivalente à la suivante:

**Conjecture 2** *Le groupe modulaire  $SL_2(\mathbb{Z})$  agit sur les caractères au travers d'un de ses quotients d'ordre fini.*

En effet, soit  $\rho : SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}_{1,0}$  la représentation de  $SL_2(\mathbb{Z})$  fournie par les caractères, notons  $\Gamma_\rho$  son noyau. Introduisons  $\Gamma_\rho(2) = \Gamma_\rho \cap \Gamma(2)$  qui est un sous-groupe distingué du sous-groupe principal de congruence de niveau deux de  $SL_2(\mathbb{Z})$ , noté  $\Gamma(2)$ . Les caractères sont des fonctions holomorphes sur le quotient du demi-plan de Poincaré par  $\Gamma_\rho(2)$ . Comme  $\Gamma_\rho(2)$  est un groupe

---

<sup>37</sup>Il s'agit alors de développements à deux variables.



distingué d'indice fini dans  $\Gamma(2)$ ,  $\widehat{H/\Gamma_\rho(2)} = X_\rho$  est une surface de Riemann compacte<sup>38</sup>. De plus, si à la classe de  $\tau \in H$  modulo  $\Gamma_\rho(2)$ , on associe sa classe modulo  $\Gamma(2)$ , on définit une application holomorphe  $\beta : X_\rho \rightarrow P_1(\mathbb{C}) \simeq \widehat{\mathfrak{h}/\Gamma(2)}$  qui ramifie seulement au dessus de  $\{0, 1, \infty\}$ . En conclusion, chaque caractère est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann compacte qui, de plus, est définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

Rappelons au passage que, dans le cas des modèles minimaux de BPZ, le sous-groupe  $\Gamma_\rho$  est un sous-groupe de congruence de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Il en est de même dans les modèles de WZW associés au groupe  $SU(N)$  pour toutes valeurs du niveau et pour les théories de type  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ . Nous ne savons pas si cela est une caractéristique générale des théories rationnelles. Plus généralement, il serait intéressant de caractériser quels sous-groupes de  $SL_2(\mathbb{Z})$  peuvent apparaître comme noyau de la représentation  $\rho$  associée à une théorie conforme rationnelle.

Pour finir, comme l'a fait remarquer M. Kontsevich, cette conjecture est étroitement reliée à une conjecture plus générale de Grothendieck sur les systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme

$$(5.30) \quad \frac{du}{dz} = A(z).u(z)$$

où  $A(X)$  est une matrice carrée à coefficients dans  $\mathbb{Q}(X)$ . Cette conjecture permet, si elle est vraie, de décider si un système d'équations différentielles de la forme précédente admet une base de solutions algébriques. Dans le cas des théories conformes, les équations en question sont, par exemple, les équations différentielles d'Eguchi et Ooguri [25] exprimées dans le paramètre de Picard  $\lambda$ . Le critère utilisé fait intervenir les différentes réduites du système d'équations différentielles modulo chaque nombre premier [38]. A notre connaissance, l'analyse de ces réduites dans le cas des équations différentielles issues de théories conformes n'a jamais été abordée aussi bien dans le cas du tore  $(g, n) = (1, 1)$  que dans le cas de la sphère avec quatre points marqués  $(g, n) = (0, 4)$ ! Nous renvoyons le lecteur intéressé à [1] et [38] pour plus de détails.

#### 5.4 Action sur les théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg.

Nous allons maintenant déduire des considérations précédentes une action du groupe de Galois sur les théories topologiques. Un élément  $\sigma$  de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  transforme une solution  $\mathcal{S}$  des équations de Moore et Seiberg en une autre solution  $\sigma.\mathcal{S}$  des équations de Moore et Seiberg. Pour chaque solution des équations de Moore et Seiberg, on sait associer à chaque  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$  un nombre  $Z[M]$  algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Comme la procédure de construction ne fait appel qu'à des additions et multiplications, nous avons:

$$(5.31) \quad \forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset), \quad \sigma(Z_{\mathcal{S}}[M]) = Z_{\sigma.\mathcal{S}}[M]$$

Ceci décrit l'action du groupe de Galois au niveau des fonctions de partition. Remarquons que le groupe de Galois relie des invariants numériques différents.

Dans ce qui va suivre, nous allons décrire quelles sont les données minimales utilisées pour le calcul des fonctions de partition. Puis, nous discuterons l'extension de ces idées au cas des

---

<sup>38</sup>L'ouvrage de Shimura [62] explique comment traiter les "cusps" et les éventuels points fixes sous l'action du sous-groupe  $\Gamma_\rho(2)$ .

théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg. Il apparaît alors une difficulté, qui provient sans aucun doute d’une formulation un peu inadaptée et qui est liée à une ambiguïté liée au choix de la  $\mathbb{Q}$ -structure dans les espaces  $H_N - N \in \text{Ob}(\mathbf{Ma}_{3,1})$  – pour ces théories de champs.

En effet, dans ces théories tridimensionnelles, on définit les  $\mathbb{Q}$ -structures par le choix d’une base dans chaque  $H_{g,n}$ . Bien entendu, ces bases sont associées à des graphes trivalents munis de framing, plongés dans des tores pleins et la principale subtilité provient que différents graphes ne définissent pas la même  $\mathbb{Q}$ -structure sur  $H_{g,n}$ . Toutefois, toutes ces  $\mathbb{Q}$ -structures sont  $\overline{\mathbb{Q}}$ -équivalentes et “compatibles” au travers de l’action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  comme on va le voir.

#### 5.4.1 Quelles sont les données minimales pour définir une théorie topologique tridimensionnelle.

Tout d’abord, il est important de déterminer quelles sont les données minimales qui sont utiles pour définir une théorie tridimensionnelle selon la prescription donnée dans [15]. En fait, il suffit de connaître

$$(5.32) \quad S_0^0 \quad F \quad \Omega(\pm) \quad \left( \sqrt{S_0^j / S_0^0} \right)_j \quad \exp(2\pi i \frac{c}{8})$$

pour calculer toutes les fonctions de partition<sup>39</sup> dans la théorie topologique. Nous noterons  $\mathbb{K}_{\mathcal{S}}$  l’extension normale de  $\mathbb{Q}$  engendrée par ces données dans le cas d’une solution  $\mathcal{S}$  des équations de Moore et Seiberg. Une question importante, mais non résolue, est de savoir quels corps de nombres sont obtenus de cette manière.

**Données nécessaires** En effet, nous savons que si  $[M, K]$  est une variété sans bords se déduisant de  $[S_3, \bar{K}]$  par chirurgie le long de l’entrelac  $L$ , alors,

$$(5.33) \quad Z[M, K] = \exp\left(-2\pi i \frac{c\sigma(L)}{8}\right) \sum_{\mathcal{C}} \left( \prod_{k=1}^n S_{c_k}^0 \right) Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}]$$

où, contrairement à [15], je suppose que  $L$  est muni de son framing originel et non du framing zéro. Ceci montre qu’il suffit de savoir quelles données minimales servent à calculer les fonctions de partition dans  $S_3$ .

Soit  $K$  un graphe trivalent colorié, muni d’un framing et plongé dans  $S_3$ , nous coupons  $[S_3, K] = [S_3, K_1] \# [S_3, K_2]$  par une sphère avec  $n$  points marqués. Les couleurs des lignes coupées par cette sphère sont  $(j_1, \dots, j_n)$ . Nous avons alors:

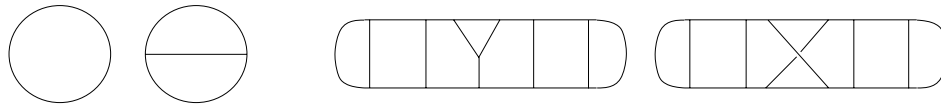
$$(5.34) \quad Z[S_3, K] = \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[S_3, K_1 \# \widehat{\mathcal{G}}_{\mathcal{C}}] Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_2]}{S_0^0} \times \left( \prod_{i=1}^n \frac{S_0^0}{S_0^{j_i}} \right)^{1/2}$$

Cette formule est à la base de la méthode de la matrice de transfert pour le calcul de  $Z[S_3, K]$ .

On choisit une fonction de Morse pour  $[S_3, K]$  (au sens de [16, Section 6.2.2]). Nous supposons que le framing est normal au plan de projection choisi pour  $K$ . De toutes façon, changer de framing

<sup>39</sup>Ce sont les scalaires  $Z[M]$  pour tout  $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \emptyset)$ .

ne fait qu'introduire des facteurs  $\exp(2\pi i h_j)$ . Alors, en utilisant plusieurs fois 5.34 on montre que  $Z[S_3, K]/S_0^0$  se calcule en fonction des  $S_0^j/S_0^0$  et des fonctions de partitions de  $S_3$  décorée par un des graphes suivants<sup>40</sup>:



Pour les deux graphes de droite, nous nous ramenons facilement, en coupant le long de sphères avec deux points marqués, aux fonctions de partition

$$Z[S_3, \begin{array}{c} \hat{c} \quad q \quad \hat{d} \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad p \quad b \end{array} ] \quad \text{et} \quad Z[S_3, \begin{array}{c} \hat{c} \\ q \quad \hat{d} \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad p \quad b \end{array} ]$$

ainsi que la fonction de partition correspondant à  $B(-)$ , multipliées par un produit de  $(S_0^i/S_0^0)^{1/2}$ . En termes des données de Moore et Seiberg, les fonctions de partitions ci-dessus valent:

$$\frac{\sqrt{\prod_{k=1, \dots, 4} S_0^{i_k}}}{S_0^0} B_{p,q}(+) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\prod_{k=1, \dots, 4} S_0^{i_k}}}{S_0^0} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

En conséquence, les données minimales sont bien celles de la liste 5.32 car  $B(\pm)$  s'exprime en fonction de  $F$  et de  $\Omega(\pm)$  et les  $\exp(2\pi i h_j)$  se calculent en fonction de  $\Omega(+)$ , tout simplement en mettant une des pattes à zéro.

Finalement, il ressort de ces considérations que les données minimales pour le calcul des fonctions de partition sont bien données par la liste 5.32. Nous allons maintenant examiner l'action du groupe de Galois au niveau de la théorie topologique tridimensionnelle, et les problèmes liés au choix des  $\mathbb{Q}$ -structures sur les espaces  $H_{g,n}$ .

**Corps engendrés par les données de Moore et Seiberg** Les nombres  $\exp(2\pi i c/8)$  et  $\exp(2\pi i h_j)$  sont clairement inclus dans un corps cyclotomique. Comme nous l'avons déjà signalé, on sait également dire des choses sur le corps engendré par les éléments de matrice de  $S$ . En particulier, le corps engendré par les éléments de matrice de  $S$  ainsi que celui engendré par les  $\lambda_i^{(j)}$  sont inclus dans un corps cyclotomique. De plus, A. Coste m'a informé de la possibilité de calculer explicitement et en toute généralité l'action d'un élément  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur la matrice  $S$ . De manière précise, on montre que [11]:

**Proposition 11** *Le corps  $\mathbb{M} = \mathbb{Q}((S_i^j)_{i,j})$  est une extension normale de  $\mathbb{Q}$ , au plus quadratique par rapport à  $L = \mathbb{Q}((\lambda_i^{(j)})_{i,j})$ . De plus, pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{Q})$ , il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_I$  et  $i \mapsto \varepsilon_\sigma(i) = \pm 1$  tels que*

$$(5.35) \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad \sigma(S_i^j) = \varepsilon_\sigma(j) S_i^{\sigma(j)} = \varepsilon_\sigma(i) S_{\sigma(i)}^j$$

<sup>40</sup>Par soucis de lisibilité le coloriage n'apparaît pas sur la figure. Enfin, nous omettons le graphe obtenu en tressant les deux lignes "dans l'autre sens" mais il doit être considéré.

et qui vérifient  $\sigma(\hat{k}) = \widehat{\sigma(k)}$  et  $\varepsilon_\sigma(\hat{k}) = \varepsilon_\sigma(k)$ .

Signalons que ce résultat provient essentiellement du fait que les sous-espaces propres communs aux matrices  $N_i = (N_{i,j^k})_{j,k}$  sont des droites. Nous donnons ici une preuve de la proposition 11 qui met l'accent sur ce point ainsi que sur les relations vérifiées par  $S$  et  $C$ .

**Preuve :** Notons  $N_i$  la matrice dont les coefficients sont les  $N_{i,j^k}$ . Introduisons également  $\Delta_i$  la matrice diagonale dont la valeur propre d'indice  $j$  est  $\lambda_i^{(j)} = S_i^j / S_0^j$ . La formule de Verlinde, qui est une conséquence des équations de Moore et Seiberg [52]

$$(5.36) \quad N_{i,j^k} = \sum_n \frac{S_i^n S_j^n S_n^{\hat{k}}}{S_0^n}$$

se traduit par

$$(5.37) \quad N_i = S \Delta_i S^{-1}$$

Soit  $M$  une matrice carrée à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Q}}$ , et  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , on note  $\sigma(M)$  la matrice obtenue en faisant agir  $\sigma$  sur chaque coefficient.

Remarquons que  $\sigma(\Delta_i)$  est encore diagonale. Elle possède le même ensemble de valeurs propres que  $\Delta_i$ : ce sont les racines du polynôme caractéristique de  $N_i$  qui sont simplement permutées par  $\sigma$ . En appliquant  $\sigma$  aux deux membres de 5.37, nous trouvons:

$$(5.38) \quad N_i = \sigma(S)\sigma(\Delta_i)\sigma(S)^{-1}$$

En conséquence,  $\sigma(S)$  diagonalise simultanément toutes les matrices  $N_i$ . Utilisons alors le Lemme suivant [14]:

**Lemme 2** *Tout sous espace propre commun à toutes les matrices  $N_i$  est une droite.*

En conséquence, il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_I$  et  $i \mapsto \varepsilon_\sigma(i) \in \mathbb{C}^*$  tels que:

$$(5.39) \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad \sigma(S_i^j) = \varepsilon_\sigma(j) S_i^{\sigma(j)}$$

La symétrie de  $S$  entraîne que:

$$(5.40) \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad \varepsilon_\sigma(j) S_i^{\sigma(j)} = \varepsilon_\sigma(i) S_{\sigma(i)}^j$$

Il reste à montrer que  $\varepsilon_\sigma(j) = \pm 1$ . Pour cela, nous allons utiliser les relations modulaires vérifiées par  $S$  et  $C$ :

$$(5.41) \quad S^2 = C$$

$$(5.42) \quad SC = CS = S^*$$

En appliquant  $\sigma$  aux deux membres de 5.41, nous obtenons

$$(5.43) \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad \varepsilon_\sigma(i)\varepsilon_\sigma(k) \delta_{\sigma(i)}^{\widehat{\sigma(k)}} = \delta_i^{\hat{k}}$$

et donc

$$(5.44) \quad \begin{cases} \sigma(\hat{k}) = \widehat{\sigma(k)} \\ \varepsilon_\sigma(k)\varepsilon_\sigma(\hat{k}) = 1 \end{cases}$$

Appliquons maintenant  $\sigma$  aux deux membres de  $SC = S^*$ , il vient

$$(5.45) \quad \begin{cases} \sigma((S_i^j)^*) = \sigma(S_i^j) = \varepsilon_\sigma(\hat{i}) S_{\sigma(\hat{i})}^j \\ \sigma((S_i^j)^*) = \sigma(S_i^{\hat{j}}) = \varepsilon_\sigma(i) S_{\sigma(i)}^{\hat{j}} \end{cases}$$

Utilisons maintenant  $SC = CS$  et  $\sigma(\hat{i}) = \widehat{\sigma(i)}$ , nous obtenons  $\varepsilon_\sigma(\hat{k}) = \varepsilon_\sigma(k)$  pour tout  $k \in I$ . Comme  $\varepsilon_\sigma(k)\varepsilon_\sigma(\hat{k}) = 1$ , nous en déduisons que pour tout  $k \in I$ ,  $\varepsilon_\sigma(k) = \pm 1$ .

Ceci conclut la preuve de l'existence de  $\sigma \in \mathfrak{S}_I$  et  $i \mapsto \varepsilon_\sigma(i) = \pm 1$  tels que

$$(5.46) \quad \forall (i, j) \in I^2, \quad \sigma(S_i^j) = \varepsilon_\sigma(j) S_i^{\sigma(j)} = \varepsilon_\sigma(i) S_{\sigma(i)}^j$$

La formule 5.46 montre immédiatement que  $\mathbb{M}$  est une extension normale de  $\mathbb{Q}$  car elle est globalement stable par tout élément de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux éléments de  $\text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{Q})$ , nous avons

$$\sigma \sigma'(S_i^j) = \varepsilon_\sigma(i) \varepsilon_{\sigma'}(j) S_{\sigma(i)}^{\sigma'(j)} = \sigma' \sigma(S_i^j)$$

et donc le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{Q})$  est abélien. En conséquence<sup>41</sup>,  $\mathbb{M}$  est inclus dans une extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant comparer les groupes  $\Gamma_{\mathbb{M}} = \text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{Q})$  et  $\Gamma_L = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ . Les corps  $\mathbb{M}$  et  $L$  sont reliés très simplement: comme

$$(5.47) \quad S_i^j = S_0^0 \lambda_i^{(j)} \lambda_i^{(0)}$$

nous voyons que  $\mathbb{M} = \mathbb{Q}(L, S_0^0)$ . De plus, nous savons que

$$(5.48) \quad \sum_k (S_0^k)^2 = (S_0^0)^2 \left( \sum_k (\lambda_k^{(0)})^2 \right) = 1$$

Ceci montre que  $\mathbb{M}$  coïncide avec  $L$  ou bien en est une extension quadratique. Deux cas sont à distinguer:

- Lorsque  $S_0^0 \in L$ , alors  $\mathbb{M} = L$  et  $\Gamma_L = \Gamma_{\mathbb{M}}$ .
- Si  $S_0^0 \notin L$ , le degré de  $\mathbb{M}$  par rapport à  $L$  est exactement deux. Nous avons une suite exacte

$$(5.49) \quad 1 \longrightarrow \underset{\simeq(\{\pm 1\}, \times)}{\text{Gal}(\mathbb{M}/L)} \longrightarrow \Gamma_{\mathbb{M}} \longrightarrow \Gamma_L \longrightarrow 1$$

car  $\mathbb{M}$  est une extension normale de  $L$ .

---

<sup>41</sup>C'est l'argument de De Boer et Goeree.

En revanche, dire quelque chose à priori sur les éléments de matrice  $F$  ne semble pas évident. Dans les exemples que nous connaissons, on peut, par une transformation de jauge, se ramener au cas où les coefficients  $F$  appartiennent à un corps cyclotomique. Nous n'avons pas à ce jour d'explication conceptuelle de ce fait, ni même de preuve générale s'appuyant sur les équations de Moore et Seiberg comme nous venons de le faire pour  $S$ .

Il serait intéressant de pouvoir répondre à cette question: que dire du corps  $\mathbb{K}_S$  pour une solution  $S$  des équations de Moore et Seiberg. Est-ce que les données de Moore et Seiberg voient la partie "non-abélienne" de  $\mathbb{Q}$  (*i.e.* celle qui n'est pas incluse dans  $\mathbb{Q}_{\text{ab}}$ )? Peut-être qu'une meilleure compréhension de la relation entre la géométrie des espaces des modules des sphères avec cinq points marqués, et la géométrie de l'espace des courbes elliptiques avec deux points marqués et une décoration adéquate permettrait d'avancer sur ces questions.

#### 5.4.2 Ambiguïté dans le choix des $\mathbb{Q}$ -structures sur les espaces $H_{g,n}$ .

Nous considérons une théorie topologique déduite d'une solution des équations de Moore et Seiberg au sens de [15]. Je noterai  $\mathcal{S}_0$  la liste 5.32 relative à cette solution.

Soit  $(g, n)$  un couple d'entiers, nous avons introduit pour chaque graphe MS dans  $\mathfrak{Y}_{g,n}(\mathcal{P}_{g,n})$  une base  $\mathfrak{B}_{\mathcal{G}}$ . Les vecteurs de cette base s'obtiennent également en appliquant  $\phi$  à des tores pleins standard dont le 1-squelette est le graphe MS considéré. Nous écrivons  $\mathfrak{B}_{\mathcal{G}} = (|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\rangle)_{\mathcal{C}}$  qui est orthogonale mais non orthonormée<sup>42</sup>[66]:

$$(5.50) \quad \langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}'} \rangle = \delta_{[\mathcal{C}][\mathcal{C}']} \frac{\prod_{k \in \langle 1, n \rangle} S_0^{j_k}}{(S_0^0)^{g-1+(n/2)}}$$

et nous l'orthonormalisons par

$$(5.51) \quad |\mathcal{G}, \mathcal{C}\rangle = \frac{|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\rangle}{\| |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\rangle \|}$$

Cette nouvelle base sera notée  $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{G}}$ . Le choix de  $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{G}}$  détermine une  $\mathbb{Q}$ -structure sur  $H_{g,n}$ . Changer  $\mathcal{G}$  change la  $\mathbb{Q}$ -structure.

Précisément, si  $\mathcal{G}'$  désigne un autre graphe, nous savons qu'il existe une matrice de changement de base  $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ :

$$(5.52) \quad |\mathcal{G}, \mathcal{C}\rangle = \sum_{\mathcal{C}'} P(\mathcal{G}, \mathcal{G}') |\mathcal{G}', \mathcal{C}'\rangle$$

est La formule 5.51 montre que la matrice  $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$  est également la matrice de changement de base entre  $\mathfrak{B}_{\mathcal{G}}$  et  $\mathfrak{B}_{\mathcal{G}'}$ . En conséquence, ses éléments de matrice sont dans le corps  $\mathbb{K}_{\mathcal{S}_0}$ . Avec nos hypothèses, cela entraîne que  $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \in \mathcal{M}_{\dim(H_{g,n})}(\overline{\mathbb{Q}})$ . Sur chaque  $H_{g,n}$ , nous disposons donc d'une  $\overline{\mathbb{Q}}$ -structure naturelle et de plusieurs  $\mathbb{Q}$ -structures.

Nous avons vu en section 2.3 une action naturelle de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur les théories topologiques à valeurs dans une catégorie de  $\overline{\mathbb{Q}}$ , munies de  $\mathbb{Q}$  structures compatibles au vide, au dual et aux produits tensoriels. Nous aimerions pouvoir dire que l'action de Galois sur les solutions des équations

<sup>42</sup> $j_1, \dots, j_n$  désignent les couleurs des pattes externes de  $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ .

de Moore et Seiberg décrite dans les sous-sections précédentes induit cette action naturelle sur la théorie topologique tridimensionnelle. Toutefois, l’ambiguïté dans le choix des  $\mathbb{Q}$  structures sur les différents espaces  $H_{g,n}$  montre que nous ne pouvons procéder aussi directement.

Nous aimerions ne pas avoir cette ambiguïté de  $\mathbb{Q}$ -structure à discuter. Pour le moment, je n’ai pas trouvé de formulation qui me convienne mais nous allons donner un angle d’attaque possible de ces problèmes. Bien entendu, ce qui va suivre est n’est encore qu’une ébauche.

Pour aller plus loin, on aurait envie de privilégier une stratégie où l’on considère qu’à chaque graphe  $\mathcal{G}$  est associé un espace vectoriel, et que, pour des graphes distincts, ces espaces vectoriels sont distincts mais isomorphes. En passant, on remarque que cette remarque va dans le sens des idées de Grothendieck. En effet, si on se souvient qu’un groupe est une catégorie avec un seul objet, une représentation linéaire du groupe est un foncteur de cette catégorie dans la catégorie des espaces vectoriels. L’image de l’unique objet de la catégorie groupe est alors l’espace vectoriel sous-jacent à la représentation. Dans le cas du groupoïde, nous avons plusieurs objets! Si on appelle représentation linéaire du groupoïde, un foncteur à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels (sur un corps de base donné), nous ne pouvons plus parler d’un unique espace vectoriel sous-jacent. Il y en a un pour chaque objet du groupoïde... Si les différents graphes  $\mathcal{G}$  sont reliés aux différents points base “à la Deligne” d’une des variantes de la Tour de Teichmüller (qui correspond aux découpes en pantalons), alors il y a lieu de définir un espace vectoriel pour chacun de ces graphes. Comme j’estime que ce que je sais sur ce point n’est pas encore satisfaisant, je n’en dirai pas plus.

Ceci suggère qu’il serait sans doute plus naturel d’utiliser une version des théories topologiques tridimensionnelles dans laquelle on associe un espace des états non pas seulement à un objet de  $\mathbf{Ma}_{3,1}$  mais à une surface munie de structures supplémentaires de sorte que les matrices de changement de base apparaissent comme des matrices d’isomorphismes entre espaces vectoriels différents et non des matrices de changement de base dans un même espace vectoriel. Nous pensons cependant qu’une réflexion plus approfondie sur la Tour de Teichmüller est nécessaire afin de pouvoir introduire la notion de théorie topologique la plus naturelle dans ce cadre.

## 6 Conclusion

### 6.1 Comparaison avec d’autres travaux

La construction que nous avons donné des théories topologiques tridimensionnelles à partir des solutions des équations de Moore et Seiberg recoupe un certain nombre de travaux déjà existants. Toutefois, et à notre grand regret, un dictionnaire complet et précis entre les principaux d’entre eux n’existe pas encore. Le principal obstacle, du point de vue “Moore et Seibergien” que nous avons adopté, provient de la difficulté à résoudre ces équations. La méthode la plus “naturelle” pour attaquer ce problème, qui a été suggérée par Moore et Seiberg eux-mêmes [55], consiste à se donner les règles de fusion et à calculer les différentes matrices  $F$ ,  $\Omega(\pm)$ ,  $S$  et  $T$ .

Force est de constater que, même dans le cas des modèles de WZW associés au groupe  $SU(2)$  au niveau  $k$ , ce programme n’a pas été mené à terme! Les travaux dont nous avons eu connaissance

sont les suivants:

- Dans [53], les auteurs détaillent la résolution des équations dans quelques cas à petit nombre d’indices de couleurs, ainsi que dans le cas de règles de fusion “de type groupe abélien”. En collaboration avec A. Buhot et D. Carpentier et L. Gallot, nous avons redérivé ces résultats (à quelques signes près...).
- Dans [20], on montre comment obtenir les matrices  $S$  et  $T$  ainsi que les règles de fusion qui correspondent aux orbifolds des théories conformes holomorphes. Plus tard, Dijkgraaf, Pasquier et Roche ont construit une quasi-algèbre de Hopf dont la théorie des représentations fournit précisément les mêmes règles de fusion. En principe, il est donc possible de calculer les matrices de Moore et Seiberg correspondantes. La construction de théories topologiques tridimensionnelles, à la Reshetikhin-Turaev a été effectuée dans ce cas par Altschüler et Coste [13]. Toutefois, la détermination explicite des matrices de Moore et Seiberg n’a pas été faite, hormis le cas des matrices  $S$  et  $T$ .
- Dans [14], on calcule les matrices  $S$  et  $T$  à partir de règles de fusion de type groupe abélien. Dans le cas où les règles de fusion obtenues dans [20] sont de “type groupe” associées à un groupe cyclique, nous avons explicité la correspondance entre les résultats de [14] et [20] (voir [16, Chapitre 4]). De plus, dans ce cas, la construction d’Altschüler et Coste fournit des représentations non projectives des groupes modulaires, ce qui est compatible d’une part avec le fait que  $c \equiv 0 \pmod{8}$  dans les orbifolds de théories holomorphes [20], et d’autre part avec le fait que le cocycle que nous avons obtenu est une puissance entière de  $\exp(2\pi ic/8)$ .
- Dans leur étude des modèles minimaux [12], Cremmer, Gervais et Roussel ont calculé les éléments de matrice de  $F$ . Leur méthode est basée sur l’étude de la monodromie de certains blocs conformes et l’utilisation de l’équation pentagonale pour déterminer de proche en proche les différents éléments de matrice.

Signalons également que l’action de Galois sur les fonctions de partition de variétés tridimensionnelles orientées, compactes, sans bords et sans décoration dans les théories avec règles de fusion de type  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  a été étudiée dans [9]. Le lecteur y trouvera une illustration concrète des idées développées ici. Le nombre d’orbites de telles fonctions de partitions sous l’action de Galois est de deux (respectivement une) quand  $N \equiv 0, 1 \pmod{4}$  (respectivement  $N \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ). Les invariants obtenus coïncident avec ceux donnés par Kohno dans [43].

## 6.2 Perspectives

Nous espérons que le lecteur se sera convaincu de la nécessité de fonder le travail de Moore et Seiberg sur des bases saines. De manière équivalente, il nous semble crucial de donner une bonne définition de la “Tour de Teichmüller” entrevue par Grothendieck [33, Paragraphe 2]. Ensuite, la définition et l’étude de représentations de cette Tour apparaît comme naturelle.

Un tel travail permettrait sans doute de clarifier relation entre d’une part les théories topologiques tridimensionnelles et les équations de Moore et Seiberg, et d’autre part la théorie des représentations de la Tour. Nous conjecturons en effet qu’une certaine classe – à préciser – de représentations de la Tour, fournit les solutions des équations de Moore et Seiberg, et donc, des



théories topologiques tridimensionnelles. A partir de là, les constructions que nous avons présentées ici pourront sans doute être reformulées d'une manière beaucoup plus précise et élégante. En particulier, les arbitraires dans la définition des tores pleins standard montrent bien que notre formalisme n'est pas le plus adapté au problème. De même, on aimerait bien voir le groupe des permutations sur les  $n$  points marqués jouer un rôle plus transparent.

Nous avons également suggéré dans la section 5 pourquoi selon nous, la traduction de l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur la Tour n'est autre que l'action naturelle de Galois sur la théorie topologique (celle-ci étant définie sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ ). Bien sûr, ceci n'est que *conjectural* mais il serait intéressant de confirmer ce fait et d'en déduire les conséquences pour la famille des invariants topologiques en dimension trois déduits des solutions des équations de Moore et Seiberg. L'étude des fonctions de partition dans les théories  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  que nous avons mentionné plus haut n'est qu'une première étape dans cette direction. De même, il serait intéressant de comprendre la structure de ces classes d'invariants et de les comparer aux invariants de Vassiliev.

## Remerciements

Il va de soi que les réflexions développées dans cet article n'auraient pas vu le jour sans le fabuleux texte de Grothendieck [33]. La conférence de Luminy organisée par L. Schneps fut extraordinairement instructive et je remercie l'organisatrice pour son invitation et pour les multiples discussions que nous avons eu sur le sujet.

Les exposés de Y. Ihara et J. Oesterlé m'ont beaucoup aidé dans le travail sur l'action de Galois sur les théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg. Je tiens à les remercier pour les discussions que nous avons eu lors du colloque de Luminy. J'ai également bénéficié de conversations avec G. Moore et N. Reshetikhin sur les propriétés de rationalité des coefficients des développements de Puiseux des blocs conformes sur la sphère avec quatre points. Je remercie aussi J.-F. Roussel pour les renseignements qu'il m'a communiqué à propos de son travail.

Enfin, je remercie les organisateurs et participants du Séminaire Groupes Quantiques de Paris 7 pour m'avoir invité à leur exposer ces travaux. Leurs remarques m'ont été bien utiles lors de la rédaction de ce texte.

## Références

- [1] D. Altschüler, *Non-unitarity in rational conformal field theories*, Jour. Phys. **A**: Math. Gen. (1989), no. 22, L325–L329.
- [2] G. Anderson and G. Moore, *Rationality in conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 441.
- [3] M. Atiyah, *Topological field theories*, Publ. Math. IHES **68** (1989), 175–186.
- [4] A.A. Belavin, A.B. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in 2d field theory*, Nucl. Phys. **B**. **241** (1984), 333–380.
- [5] G.V. Bielyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 247–257.

- [6] J. Birman, *Braids, links and mapping class group*, Annals of Math. Studies., vol. 82, Princeton University Press, 1975.
- [7] J. De Boer and J. Goeree, *Markov traces and type  $II_1$  factors in conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 267.
- [8] N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, 1947-59.
- [9] E. Buffenoir, A. Buhot, A. Coste, P. Degiovanni, and J. Lascoux, *Precise study of some number fields and Galois actions occuring in Conformal Field Theory*, Preprint ENSLAPP-L-477/94, X A317.0794 et CPT-94/PE.3049, Juin 1994.
- [10] J. Cardy, *Operator content of 2d conformal field theories*, Nucl. Phys. **B. 270** (1986), 186–204.
- [11] A. Coste and T. Gannon, *Remarks on Galois symmetry in RCFT*, Phys. Lett. **B 323** (1994), 316–321.
- [12] E. Cremmer, J.-L. Gervais, and J.-F. Roussel, *The genus zero chiral bootstrap of chiral vertex operators in liouville theory*, Nucl. Phys. **B 413** (1994), 244–277.
- [13] Altschüler D. and A. Coste, *Quasi-quantum groups, three manifolds and topological field theory*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), 83–107.
- [14] P. Degiovanni,  *$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  Conformal Field Theories*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 71–99.
- [15] ———, *Moore and Seiberg’s equations and 3D topological field theories*, Comm. Math. Phys. **145** (1992), 459–505.
- [16] ———, *Théories des champs en dimensions deux et trois*, Thèse, Université Paris 6, 1992.
- [17] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over  $\mathbb{Q}$  (Springer Verlag, ed.), MSRI Publications, vol. 016, 1989, pp. 79–297.
- [18] R. Dijkgraaf, *A geometric approach to 2D conformal field theory*, Thèse, Utrecht University, 1989.
- [19] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, *Modular invariance and the fusion algebra*, Conformal Field Theories and Related Topics (P. Binétruy, P. Sorba, and R. Stora, eds.), Nucl. Phys. **B. (Proc. Suppl)**, vol. 5, North Holland, 1988, pp. 87–97.
- [20] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, and C. Vafa, *The operator algebra of orbifold models*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 16.
- [21] V.S. Dotsenko and V.A. Fateev, *Conformal algebra and multipoint correlation functions in two-dimensional statistical models*, Nucl. Phys. **B 240** (1984), 312.
- [22] ———, *Four point correlation functions and the operator algebra in the two-dimensional conformal invariant theories with the central  $c < 1$* , Nucl. Phys. **B 251** (1985), 691.
- [23] A. Douady and R. Douady, *Algèbre et théories Galoisiennes (2)*, Fernand Nathan, 1979.
- [24] V.G. Drinfeld, *On quasi triangular algebras and a group connected with  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. Journal **2** (1991), 829–861.

- [25] T. Eguchi and H. Ooguri, *Conformal and current algebras on a general Riemann surface*, Nucl. Phys. **B 282** (1987), 308–329.
- [26] Wittacker E.T. and Watson G.N., *A course of modern analysis*, fourth ed., Cambridge University Press, 1980.
- [27] R. Fenn and C. Rourke, *On Kirby’s calculus of links*, Topology **18** (1979), 1–15.
- [28] K. Fredenhagen, K.H. Rehren, and B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, Comm. Math. Phys. **125** (1989), 201–226.
- [29] J. Fröhlich, *2D conformal field theory and 3D topology*, Int. Jour. of Modern Physics **20** (1989), 5321–5393.
- [30] J. Fröhlich and C. King, *Chern-Simons theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **126** (1989), 167–199.
- [31] J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Quantum field theories of vortices and anyons*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 177–223.
- [32] A. Grothendieck, *Seminaire de géométrie algébrique 1*, 1962.
- [33] ———, *Esquisse d’un programme*, Rapport Scientifique, 1984.
- [34] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and their representation theory*, Springer Verlag, 1980.
- [35] Y. Ihara, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, International Congress of Mathematics (The mathematical society of Japan, ed.), Springer Verlag, 1992, pp. 99–120.
- [36] A. Joyal and R. Street, *The geometry of tensor calculus (1)*, Advances in Mathematics **88** (1991), 55–112.
- [37] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1990.
- [38] N.M. Katz, *Algebraic solutions of differential equations ( $p$ -curvature and Hodge filtration)*, Invent. Math. **1** (1972), 1–118.
- [39] L. Kauffman, *On knots*, Annals of Math. Studies, vol. 115, Princeton University Press, 1987.
- [40] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S_3$* , Invent. Math. **45** (1978), 35–56.
- [41] R.C. Kirby and L.C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Annals of Math. Studies, vol. 88, Princeton University Press, 1977.
- [42] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B 247** (1984), 83.
- [43] T. Kohno, *Invariants of 3-manifolds based on Conformal Field Theory and Heegard splittings*, Quantum groups (P.P. Kulish, ed.), Lecture notes in Mathematics, vol. 1510, Springer-Verlag, 1990, pp. 341–349.
- [44] ———, *Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups (1)*, Topology **31** (1992), 203–230.

- [45] M. Kontsevitch, *Rational conformal field theories and invariants of 3 dimensional manifolds*, Preprint CPT-88/P.2189, 1988.
- [46] G. Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifolds invariants*, Preprint Berkeley 1990, 1990.
- [47] Y. Ladegaillerie, *Classification topologique des plongements de 1-complexes compacts dans les surfaces*, C. R. Acad. Sc. Paris. A. **278** (1974), 1401–1403.
- [48] W.B.R. Lickorish, *Surgery on knots*, Proc. of the A.M.S. **60** (1977), 296–298.
- [49] ———, *Invariants of three-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial*, Cambridge University Preprint, 1991.
- [50] S. Mac-Lane and G. Birkhoff, *Algèbre: structures fondamentales*, Cahiers Scientifiques, vol. 35, Gauthier Villars, 1971.
- [51] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Math. Notes, vol. 1, Princeton University Press, 1965.
- [52] G. Moore and N. Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Phys. Lett. B. **212** (1988), 451–460.
- [53] ———, *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 177–255.
- [54] ———, *Naturality in conformal field theory*, Nucl. Phys. B. **313** (1989), 16.
- [55] ———, *Lectures on rational conformal field theories*, Trieste Superstrings 1989, 1990, pp. 1–129.
- [56] K.H. Rehren and B. Schroer, *Einstein causality and Artin braids*, Nucl. Phys. B **312** (1988), 715.
- [57] N.Y. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [58] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.
- [59] A. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Birkhauser, 1989.
- [60] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Oxford University Preprint, 1987.
- [61] ———, *Two dimensional conformal field theories and modular functors*, IXth International Congress on Mathematical Physics (B. Simon, A. Truman, and I.M. Davies, eds.), Adam Hilger, 1989, pp. 22–37.
- [62] G. Shimura, *Automorphic functions and number theory*, Springer Verlag, 1968.
- [63] C. Vafa, *Towards classification of conformal field theories*, Phys. Lett. B. **206** (1988), 421–426.
- [64] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D CFT's*, Nucl. Phys. B **300 (FS 22)** (1988), 360–376.

- [65] A. Weil, *The field of definition of a variety*, Amer. J. of Math. **78** (1956), 509–524.
- [66] E. Witten, *Gauge theories and integrable lattice models*, Nucl. Phys. **B 322** (1989), 629–697.
- [67] ———, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.