

THEORIES DES CHAMPS EN DIMENSION 2 ET 3

PASCAL DEGIOVANNI
LPTENS, 24 rue Lhomond, 75005 PARIS, FRANCE.

28 octobre 1994

Résumé: Cette thèse présente quelques aspects caractéristiques des théories quantiques des champs en dimension 2 et 3. L'axiomatique catégorique de la théorie des champs en constitue le langage naturel. Les théories conformes sont analysées et on montre sur l'exemple des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ comment reconstruire (partiellement) les données de Moore et Seiberg du modèle à partir des règles de fusion. En particulier, la détermination complète des fonctions de partition invariantes modulaires sur le tore est effectuée. Ensuite, nous montrons que toute théorie topologique rationnelle projective en dimension trois, vérifiant deux hypothèses “simplificatrices”, définit une solution des équations de Moore et Seiberg. Réciproquement, nous montrons que toute solution de ces équations définit une théorie topologique projective rationnelle en dimension trois. Puis nous définissons une classe d'équivalence de théories topologiques bidimensionnelles à partir de chacune de ces théories tridimensionnelles. Cette construction donne une solution complète du modèle de Wess-Zumino-Witten *jaugé*. La relation avec la théorie de Yang-Mills et la théorie de Higgs (qui sont également résolues dans cette thèse) est discutée. Finalement, nous replaçons tous ces travaux dans une même perspective autour de la notion de TOUR MODULAIRE et de ses représentations qui sont définies selon les idées de Grothendieck.

Everybody knows that the dices are loaded.
Everybody rolls with their finger crossed. Everybody knows the war is over.
Everybody knows the good guys lost.
Everybody knows the fight was fixed: the poor stay poor, the rich get rich.
That's how it goes, everybody knows.
Everybody knows that the boat is leaking.
Everybody knows the captain lied.
Everybody got this broken feeling like their father or their dog just died.
Everybody talking to their pockets.
Everybody wants a box of chocolates and a long stem rose.
Everybody knows.

L. COHEN.

We ate the food, we drank the wine
Everybody having a good time
Except you
You were talking about the end of the World.

U2

Du soir montent des feux et des points de silence
Qui vont s'élargissant et la Lune s'avance
Et la mer se déchire infiniment brisée
Par des rochers qui prirent des prénoms affolés

J. BREL.

Préambule.

Avant de laisser le lecteur face au texte qui va suivre, il me paraît nécessaire d'apporter quelques précisions quant à la forme de cette thèse.

Lorsque pour moi s'est posé le problème de la mise en forme du travail que j'ai effectué entre 1987 et 1991, je me suis rapidement rendu compte que je ne pourrais me satisfaire d'une compilation d'articles précédée par une courte introduction. J'ai éprouvé le besoin de refondre mon travail dans une perspective un peu plus globale afin de combler certaines de mes (trop) nombreuses lacunes et de pouvoir définir avec précision les directions dans lesquelles j'allais orienter mon travail ultérieur. Pendant cette période, il m'est également devenu de plus en plus difficile d'interagir avec d'autres collègues, sans doute à cause du caractère trop personnel du langage que j'utilisais. Cette situation devenant trop pénible, j'ai décidé d'écrire un texte qui, même s'il ne se lit pas comme un roman de gare, pourrait servir de base à quelqu'un désireux de se lancer dans le sujet.

Ceci explique la longueur de l'ensemble, la longue période de gestation dont j'ai eu besoin et la présence de nombreux rappels introductifs qui, j'espère, aideront le lecteur. J'ai donc inclus de nombreux rappels de travaux qui n'étaient pas les miens afin de resituer mon travail par rapport à un courant d'idée. Une tel effort de synthèse m'a paru nécessaire.

Je me suis efforcé de présenter les choses d'une manière personnelle *et* pédagogique, sans toujours y arriver. Le côté personnel l'a peut être emporté... J'ai aussi tenté de décrire le cheminement, aussi bien mes errements que mes intuitions, qui m'a conduit vers tel ou tel problème et qui en fin de compte fournit les solutions recherchées. Pour cette raison la forme de ce texte est plus libre, moins conventionnelle que celle d'articles publiés, mais j'espère, plus abordable. Enfin, à mon sens, une thèse constituant le bilan d'une initiation à la recherche ne devrait pas se limiter à un catalogue de résultats mais montrer aussi la démarche qui y conduit. J'espère qu'il se trouvera des gens pour en tirer quelque plaisir.

Enfin, je ne doute pas que de nombreux points puissent être améliorés, simplifiés ou complétés. Certains thèmes ont également été abordés par d'autres auteurs, que j'ai cités dans les limites de mes connaissances. Ceux que j'ai oubliés voudront bien me pardonner. Enfin, je suis maintenant convaincu que bien des idées qui sont maintenant développées dans le domaine des théories topologiques étaient "dans l'air" pour certains comme en témoignent d'une part le fabuleux texte de Grothendieck dont j'ai eu connaissance en 1991, et d'autre part le livre de P. Cvitanovic [29] dont les petits dessins laissent rêveur!

Remerciements.

Cette thèse n'est pas le résultat de mon seul travail mais plutôt le fruit de multiples influences qui s'étendent dans l'espace et dans le temps bien au delà des endroits que j'ai pu fréquenter pendant cette période "doctorale". Que l'on n'attende donc pas une simple citation des personnes avec qui j'ai eu des échanges scientifiques, ni une liste exhaustive¹ de ceux qui, de près ou de loin m'ont apporté quelque chose. L'honnêteté et la concision m'ont amené à des choix qui rendront les lignes qui suivent obscures ou décevantes pour certains. Le mieux serait qu'ils n'y attachent pas trop d'importance.

Il est d'usage de remercier les membres du jury pour leur participation. Compte tenu du volume de ce qui va suivre, mes remerciements n'en sont que plus sincères. Un grand merci à Daniel Bennequin et K. Gawedsky qui ont accepté la tâche de rapporteurs avant même d'avoir vu le manuscrit. Edouard Brézin a accepté la présidence du jury dans des conditions également difficiles², je l'en remercie, ainsi que Claude Itzykson qui n'a pas forcément eu une tâche plus aisée. Raymond Stora s'est lancé dans une relecture sérieuse de ce travail. Nos séances de discussion ont souvent abouti à une réécriture bien utile de certains passages imprécis. Je tiens à le remercier pour ses commentaires et ses enseignements. Enfin, Bernard Julia m'a fait découvrir la jungle conformiste, en me laissant suffisamment de liberté pour m'y éclater tout en me fournissant une documentation adaptée à l'ampleur du domaine! Alors que je me suis dirigé vers des sujets de plus en plus topologiques, Bernard a continué à surveiller mon travail³ et à me conseiller des simplifications bien utiles!

Mais en premier lieu, je voudrais remercier Jean Ganteille qui a su faire partager son enthousiasme pour la physique et sa spontanéité. Je lui dois deux enseignements fondamentaux, à savoir que tout problème est une source d'émerveillement *quelque soit sa difficulté* et enfin que la physique est avant tout une activité *ludique*.

Cet enseignement serait resté lettre morte sans la présence de quelques personnes dont l'ouverture d'esprit et l'amitié ont été un apport décisif. Ainsi, diverses personnes parmi lesquelles Frédérique, Pascal, Laurent, Anne, Valérie, Renaud, Arnaud, Philippe, Bruno et d'autres⁴ que j'ai pu croiser à Saint Avertin ou au Lycée Grandmont ont fait que je ne suis (peut être) pas devenu un névrosé des mathématiques!

C'est à cette époque que m'ont été suggérées des lectures telles celle de Feynman ou de Bourbaki. J'avoue avoir été profondément influencé par ces textes, et s'il ne m'appartient pas de juger si ce fut en bien ou en mal, je tiens à remercier ceux qui me les ont indiqués, tout comme ceux qui plus tard m'indiquèrent le traité de Landau ou la théorie de Galois. J'eus aussi l'occasion, grâce à Michèle Leduc, de "tester" le manuscrit du livre de Michel Le Bellac, ce qui m'a permis un contact exceptionnel avec la Théorie Quantique des Champs et de nombreuses discussions sur le sujet avec l'auteur ainsi qu'avec Edouard Brézin. Le lecteur retrouvera peut être un reflet de cet éclectisme dans cette thèse.

Lors de mon passage à l'ENS, j'ai pu bénéficier du contact avec les deux autres tiers du trio BDL dont les nombreuses discussions m'ont apporté beaucoup, avec Laurent Bélanger dont les bonnes idées s'appliquaient aux théories de jauge comme au choix d'un Sauternes, à Arsenne Fagnonjibac et Françoise Hatchuel pour tout ce qu'ils ont d'exceptionnel. J'épargne au lecteur le catalogue complet de mes autres camarades de promotion avec qui j'ai pu discuter: Pierre Bouissou, Christophe Chaubet, Francois Graner, Jean-Michel Courty et d'autres encore.

¹Et donc probablement hypocrite et sûrement ennuyeuse.

²Oserais-je dire risquées?

³Tâche particulièrement difficile vu le sujet et l'étudiant...

⁴Dont la liste serait beaucoup trop longue.

Je tiens aussi à remercier Théo qui m'a permis de vérifier numériquement, sans rien y comprendre d'ailleurs, certains passages de la preuve combinatoire du chapitre 4 et d'une manière générale pour sa gentillesse.

Un grand merci à Nicolas Daubresse pour s'être extasié sur les dessins du chapitre 5, m'avoir servi de moniteur de ski, partagé un certain nombre de bières, ne pas avoir planté ma voiture quand je lui en avais donné l'occasion, appris le catamaran avec moi et d'une manière générale pour les multiples délires dont la description dépasserait le volume de cette thèse; à Céline pour avoir supporté tout ça... Je tiens aussi à remercier Olivier, Juliette, Hervé, Greg, Edouard (marquis de Cinq-Mars), Sonia, Samuele, l'infâme JR, Anne et Bernard pour les multiples choses faites en commun... Là encore, la liste serait trop longue! Je dois à Claire d'arriver à faire tenir 48 heures en 24, et un certain nombre de bonnes adresses à Paris. Je remercie aussi CB pour avoir suivi bon nombre de mes explications avec une bonne volonté étonnante, Fred pour les avoir moins bien supportées mais avec autant de bonne volonté, Gilles, et d'une manière générale un certain nombre d'habitants de la ZAC du Bougnon.

Pendant la même période⁵, j'ai aussi profité du brassage d'idées qui régnait dans un groupe de travail rassemblant Daniel Arnaudon, Bruno Rostand, Michel Bauer, Marios Petropoulos, Marco Picco et Philippe Roche, et dont l'importance a été capitale. J'ai également bénéficié de la grande expérience de Claude Itzykson (dont une conjecture occupe l'essentiel du chapitre 4), J.B. Zuber, J.L. Gervais, J. Zinn-Justin et Jacques Beigbeder (bien que ce soit dans un domaine complètement différent). J'ai eu de nombreuses discussions avec R. Rouquier sur la théorie des groupes en relation avec les problèmes posés au chapitre 4! Je le remercie pour son ouverture d'esprit en ce qui concerne la physique! Le voisinage d'Antoine Georges m'a donné une ouverture sur la physique des milieux désordonnés. D'une manière générale, j'ai pu profiter de l'environnement du LPTENS, de multiples rencontres très instructives qui m'ont permis d'explorer les sujets développés dans cette thèse et m'ont encouragé dans les voies que j'avais choisies. En particulier, je remercie sincèrement Erik Verlinde, Adam Schwimmer, Vaughan Jones et Nicolai Reshetikhin pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Philippe Meyer puis Jean Illiopoulos m'ont fait confiance en m'accueillant au sein du LPTENS, je les en remercie sincèrement. Je tiens aussi à mentionner l'apport des autres membres du Laboratoire qui ont effectivement contribué au climat de liberté indispensable à l'élaboration de cette thèse! Enfin, la vie s'y trouverait grandement compliquée et beaucoup moins drôle sans le dévouement de Nicole, Geneviève et Michèle. En 1991, Laurent Baulieu a suivi avec patience mes élucubrations lors de la préparation d'un cours commun dispensé à Paris sur les théories topologiques. Cette expérience fut à la fois enrichissante et agréable.

Enfin, la rédaction de cette thèse a grandement bénéficié de la bonne ambiance qui règne à l'ENSLyon. J'y ai bénéficié d'excellentes conditions matérielles. En particulier, je remercie Jean-Louis Moisy et Gilles Carré pour leur aide et leur gentillesse lors de notre installation informatique. Je remercie Paul Sorba pour m'avoir reçu au sein du groupe Lyonnais de l'ENSLAPP, Marc pour avoir subi mon voisinage avec bonne humeur malgré les nombreux dérangements que je peux causer, Laurent et Jean-Michel pour notre expérience commune d'ACM, l'ensemble de l'équipe pour nos nombreuses discussions, de la gastronomie Lyonnaise au théorème de Tannaka-Krein ainsi qu'Alexis qui a tenté un difficile passage de la géologie à la physique, peut être sous mon influence...

J'ai eu l'occasion de dispenser un cours de Maîtrise à douze étudiants de l'ENSLyon. Leur motivation et leur enthousiasme me porte à penser que cette expérience a été un succès. J'ai pu, grâce à cela, passer quelques nuits studieuses et réorienter la rédaction de cette thèse dans un esprit que j'espère plus pédagogique. Je tiens à les remercier pour leur sens critique et leur participation active. En particulier, Pascal Tran-Ngoc-Bich s'est aventuré dans les versions préliminaires de cette thèse, en y découvrant

⁵A quelques violations de causalité près...

quelques erreurs et m'a accompagné dans le défrichage de la notion de Tour de Teichmüller. Jean-Yves Fortin s'est chargé de la douloureuse fonction de correcteur orthographique. Je tiens à lui exprimer ma gratitude! Pour finir, si ces remerciements ont été écrits quelque part où les gens ont la tête en bas et le cœur à l'envers, je le dois à Miguel Aubouy!

Ollagüe, Septembre 1992
Bolivie

Table des matières

1	Approche Fonctorielle des Théories Quantiques de Champs Géométriques	31
1.1	Intégrale Fonctionnelle.	32
1.2	Définition axiomatique d'une TQCG.	34
1.2.1	Catégories de variétés.	34
1.2.2	Catégories algébriques.	37
1.2.3	Foncteurs modulaires et Théorie Quantique des Champs Géométrique.	37
1.2.4	Localité à la frontière.	38
1.2.5	Calculabilité dans une TQCG.	41
1.2.6	Insertions.	44
1.3	La catégorie des TQCG.	48
1.3.1	Equivalence entre théories.	49
1.3.2	Catégories des TQCG.	52
1.4	Exemples.	53
1.4.1	Constructions algébriques élémentaires.	53
1.4.2	Les théories topologiques.	54
1.4.3	La mécanique quantique topologique.	59
1.4.4	Relation fonctorielle entre MQT et TTR bidimensionnelles.	60
1.5	Théories des champs géométriques projectives.	61
1.5.1	Définition d'une Théorie des Champs Projective Géométrique.	62
1.5.2	Extensions centrales de TQCG.	63
1.5.3	Théories topologiques projectives et groupes modulaires.	64
1.5.4	Transformations naturelles locales projectives.	65
1.5.5	Sur la localité à la frontière.	66
1.A	Rappels sur les catégories.	66
1.A.1	Catégories et foncteurs.	67
1.A.2	Catégories de foncteurs et transformations naturelles.	68
1.A.3	Extensions de catégories par un groupe.	70
1.B	Théorie de Yang-Mills et de Higgs bidimensionnelles.	71
1.B.1	Théorie de Yang-Mills et de Higgs en dimension deux.	71
1.B.2	Etude sur le cylindre.	73
1.B.3	Quelques observables dans la théorie de Higgs.	78
2	Implications physiques des phases topologiques en Théorie Quantique des Champs.	85
2.1	Phases Topologiques.	86
2.1.1	Généralités sur les facteurs topologiques.	86

2.1.2	Quantifications exotiques: problème des états physiques à plusieurs excitations. . .	87
2.2	Particules indiscernables.	90
2.2.1	Espace de configurations.	90
2.2.2	Statistiques en dimension $D > 2$	92
2.2.3	Cas bidimensionnel.	92
2.2.4	Parastatistiques.	96
2.2.5	Une approche par les fonctions d'ondes.	99
3	Théories conformes 2D, aspects généraux.	105
3.1	Approche heuristique des théories conformes.	106
3.1.1	A quoi sert le tenseur énergie-impulsion?	107
3.1.2	Qu'attend on d'une théorie conforme?	108
3.1.3	Espaces de Teichmüller et de modules.	111
3.2	Approche fonctorielle des théories conformes.	113
3.2.1	La catégorie des surfaces de Riemann.	113
3.2.2	Théories conformes <i>à la</i> Segal.	118
3.2.3	Symétries de la théorie.	119
3.2.4	L'action de l'algèbre de Virasoro.	120
3.2.5	Une première définition des opérateurs de vertex (non-chiraux).	124
3.2.6	Une catégorie Riemannienne?	125
3.2.7	Champs locaux et fonctions de corrélation.	126
3.2.8	Identités de Ward	126
3.3	Théories conformes sur $P_1(\mathbb{C})$	128
3.3.1	Identités de Ward sur la sphère de Riemann.	129
3.3.2	Champs primaires.	130
3.3.3	Algèbre de Virasoro.	132
3.3.4	Aspects algébriques: représentations de l'algèbre de Virasoro et TIC.	134
3.4	Exemples	138
3.4.1	Le modèle d'Ising.	138
3.4.2	Les modèles minimaux.	141
3.4.3	Le modèle Gaussien général.	141
3.4.4	Conditions de Rationalité.	144
3.4.5	Le boson libre compactifié sur un cercle.	145
3.4.6	Modèle de Wess-Zumino et Witten.	148
3.4.7	Actions effectives du modèle de WZW.	151
3.4.8	Messe noire sous un clair de lune monstrueux.	156
3.5	Théories rationnelles.	160
3.5.1	Algèbre chirale.	160
3.5.2	Opérateurs de vertex chiraux.	163
3.5.3	Complexe de dualité.	166
3.6	Transformations de dualité et groupes modulaires.	168
3.6.1	Exemple du modèle d'Ising.	169
3.6.2	Groupe modulaire dans les théories conformes.	174
3.6.3	Quelques équations de Moore et Seiberg: point de vue conformiste.	176
3.7	Equations de Moore et Seiberg.	183
3.7.1	Récapitulatif.	183

3.8	Quelques identités utiles.	185
3.8.1	Compatibilité entre F et $B(\pm)$, équations de Yang-Baxter.	186
3.9	Invariance de jauge des équations de Moore et Seiberg.	187
3.9.1	Changements de jauge.	187
3.9.2	Un “bon” choix de jauge.	189
3.10	Propriétés de symétrie des données de Moore et Seiberg.	189
3.10.1	Propriétés de symétrie de F	190
3.10.2	Expression de $S(p)$ en termes de $B(-)$	191
3.10.3	Symétries de S	196
3.11	Quelles sont les équations minimales.	197
3.A	Représentations des Algèbres de Lie de dimension infinie.	198
3.A.1	Modules de plus haut poids et modules de Verma.	198
3.A.2	Questions d’unitarité.	204
3.A.3	Etats nuls et “règles de fusion”.	204
3.B	La symétrie affine sans Wess, Zumino ni Witten...	205
3.B.1	Théorème d’équivalence quantique.	205
3.B.2	Condition de rationalité des modèles $LG^{(1)} \times Vir$	206
3.B.3	Equations de Knizhnik-Zamolodchikov généralisées.	206
3.B.4	Invariants modulaires exotiques.	207
3.C	Quelques rappels sur les fonctions elliptiques et modulaires.	210
3.C.1	Fonctions elliptiques.	210
3.C.2	Fonctions doublement périodiques.	211
3.C.3	Fonctions de Green du Laplacien sur le tore.	214
3.C.4	Formes modulaires.	216
3.C.5	Espace des modules $M_{0,4}$	221
4	Théories associées à un groupe.	227
4.1	Théories associées à un groupe.	227
4.1.1	Matrice S	228
4.1.2	Vers de nouvelles théories conformes?	231
4.2	Le cas abélien.	233
4.3	Deux exemples choisis.	234
4.3.1	Théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	235
4.3.2	Théories $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$	237
4.4	Classification des invariants modulaires des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	238
4.5	Preuve directe.	239
4.5.1	Recherche du commutant.	239
4.5.2	Intégralité et Positivité.	240
4.5.3	Preuve du Lemme.	242
4.6	Preuve par les équations de Moore et Seiberg.	250
4.6.1	Le “petit” théorème de naturalité.	250
4.6.2	Cas d’un groupe abélien quelconque.	251
4.6.3	Classification des invariants $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$	252
4.7	Exemples.	253
4.7.1	Modèle gaussien.	253
4.7.2	Modèles $A_N^{(1)}$ de niveau 1.	254

4.7.3	Modèles orbifold à la Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde.	254
4.A	Propriétés des algèbres de Verlinde.	258
4.A.1	Diagonalisation simultanée.	258
4.A.2	Symétrie de S et propriétés modulaires.	259
4.A.3	Choix de la matrice S	259
4.A.4	Calcul de dimensions.	261
4.B	Quelques techniques arithmétiques utiles.	262
5	Théories Topologiques tridimensionnelles et Equations de Moore et Seiberg.	269
5.1	Définition de la catégorie géométrique.	270
5.1.1	Les objets de $\mathbf{Ma}_{3,1}$	270
5.1.2	Les morphismes de $\mathbf{Ma}_{3,1}$	270
5.1.3	Quelques exemples.	273
5.2	La théorie de Chern-Simons.	276
5.2.1	Equations du mouvement, symétries.	276
5.2.2	Analyse Hamiltonienne.	277
5.2.3	Résolution de la contrainte.	278
5.2.4	Propriétés modulaires.	279
5.3	Déduction tridimensionnelle des équations de Moore et Seiberg.	280
5.3.1	Hypothèses de simplification.	280
5.3.2	Choix des facteurs de normalisation.	284
5.3.3	Définition tridimensionnelle des données de Moore et Seiberg.	286
5.3.4	Preuve des équations en genre 0.	288
5.3.5	Preuve des équations en genre 1.	294
5.3.6	Explorations calculatoires tridimensionnelles.	299
5.4	Amplitudes de changement de topologie.	302
5.4.1	Préambule géométrique.	302
5.4.2	Amplitudes avec changement de topologie.	303
5.4.3	Calculabilité.	304
6	Construction d'une Théorie Topologique 3D à partir d'une solution des Equations de Moore et Seiberg.	307
6.1	Plan de construction d'une TTR à 3 dimensions.	307
6.1.1	Espace des états associé à une surface.	308
6.1.2	Fonction de partition des variétés sans bord.	308
6.1.3	Variétés à bords.	309
6.1.4	Fonctorialité et unitarité.	309
6.2	Espaces des états et fonctions de partition dans S_3	310
6.2.1	Espaces des états.	310
6.2.2	Invariants de graphes ϕ^3 décorés dans S_3	311
6.2.3	Propriétés diverses de ces invariants.	317
6.3	Fonctions de partition des variétés sans bord décorées.	319
6.3.1	Fonctions de partition et présentations par chirurgie.	319
6.3.2	Invariance topologique par le calcul de Kirby.	329
6.3.3	Fin de la preuve.	332
6.4	Covariance du formalisme et définition des opérateurs.	332

6.4.1	Covariance.	333
6.4.2	Définition des opérateurs.	334
6.5	Fonctorialité, unitarité.	334
6.5.1	Position du problème.	335
6.5.2	Etude préliminaire dans S_3	335
6.5.3	Aspects géométriques.	340
6.5.4	Aspects algébriques.	343
6.5.5	Unitarité et propriétés diverses.	344
6.5.6	Exemples de fonctions de partition.	345
6.6	Décompositions de Heegaard et Théorie des Champs.	347
6.6.1	Scindements de Heegaard.	347
6.6.2	Fonction de partition associée à un scindement de Heegaard.	351
6.6.3	Lien avec la méthode chirurgicale.	353
6.6.4	Quelques extensions possibles...	356
6.7	Histoire de résumer...	359
6.7.1	Représentations de la “Tour de Teichmüller”.	359
6.A	Calcul de Kirby.	363
6.A.1	Présentations par chirurgie d’une variété décorée.	363
6.A.2	Calcul de Kirby “amélioré”...	364
6.A.3	Cobordismes à quatre dimensions et calcul de Kirby.	370
6.B	Propriétés du polynôme de Jones.	371
6.B.1	Définition	371
6.B.2	Propriétés de factorisation.	373

7 Affaires à Suivre... 375

7.1	Histoire de résumer?	375
7.1.1	Le résultat principal.	375
7.1.2	Comment aller beaucoup plus loin?	376
7.1.3	Comment aller moins loin?	378
7.2	La localité à la frontière dans les théories tridimensionnelles.	380
7.2.1	Expression des morphismes de localité à la frontière.	380
7.2.2	Une propriété intéressante du cocycle!	383
7.3	Vers une description de la tour de Teichmüller.	383
7.3.1	Découpes de surfaces.	383
7.3.2	La catégorie des découpes.	384
7.3.3	Morphismes de groupes modulaires.	387
7.3.4	Vision <i>à la</i> Mumford de la tour modulaire.	388
7.3.5	Automorphismes de la tour modulaire.	390
7.3.6	Représentations de la tour modulaire.	391
7.3.7	Le cas projectif.	396
7.4	Dessins d’enfants et structures complexes.	397
7.4.1	Théorème de Belyi.	397
7.4.2	Exemples de fonctions de Belyi.	399
7.5	Résolution du modèle de WZW jaugé.	400
7.5.1	Modèle de WZW jaugé.	401
7.5.2	Réduction dimensionnelle.	403

7.5.3	Formulation “IRF”.	406
7.5.4	Dessins d’enfants, tags et théorie de Galois.	412

Introduction

La présente introduction poursuit un double objectif: d’une part, elle explicite les fils conducteurs et les motivations du travail qui va être exposé, et d’autre part, j’ai tenté d’y expliquer les tâtonnements qui m’ont conduit à certains choix, tant dans la forme que dans le fond.

Que le lecteur n’y cherche pas un historique exhaustif et neutre du sujet mais plutôt un angle de vue qui m’a paru plaisant, et qui donc est assez subjectif. J’ai également insisté sur les problèmes ouverts qui subsistaient et j’ai tenté de positionner ma démarche et les résultats obtenus par rapport à ceux-ci.

Le plan général de la thèse sera détaillé à la fin de cette introduction. Le lecteur y trouvera une description compacte de mes principales contributions. Enfin, une notice bibliographique suit cette introduction. Le lecteur y trouvera la description d’une part des travaux qui m’ont été utiles, et d’autre part, une liste de travaux analogues qui permet de mieux situer mes propres contributions par rapport aux autres travaux.

Gravité quantique, cordes et invariance conforme.

Un des traits les plus attirants de la physique me semble être l’élégance et la simplicité de certaines idées qui, lorsqu’elles sont convenablement mises en œuvre, rendent compte d’une foule de perceptions les plus diverses, des plus immédiates aux plus inaccessibles. La variété des phénomènes décrits par toutes les modélisations actuelles doit beaucoup au principe fondamental selon lequel toute expérience est le fruit d’une interaction entre le système étudié et l’observateur. Ceci entraîne que toute expérience altère l’objet observé. Cette idée est présente au cœur des deux domaines où elle a eu des conséquences conceptuelles et pratiques spectaculaires:

- Dans la physique quantique, elle a conduit à distinguer entre, d’une part des concepts “classiques” qui constituent le langage naturel dans lequel formuler nos perceptions mais qui sont dépourvus de sens dans la modélisation microscopique, et d’autre part des concepts “quantiques” qui constituent le langage de la modélisation mais sont accessibles seulement au travers de leurs conséquences expérimentales.
- Dans les phénomènes gravitationnels, elle se trouve naturellement incorporée dans la modélisation de la gravité selon Einstein. Celui-ci a montré comment “coder” la gravité dans la géométrie de l’espace-temps et comment cette géométrie est en retour déterminée par le contenu matériel s’y trouvant et qui contient en particulier l’observateur.

Toutefois les modélisations dont nous disposons dans ces deux cas s’expriment dans des domaines radicalement différents. Cette incompatibilité est à l’origine du plus important défi posé à la physique. En effet, pour des particules de masse M , la seconde quantification ne se manifeste que pour des échelles spatiales inférieures à la longueur Compton:

$$(0.1) \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{Mc}$$

Ce n’est que dans ce régime que la notion classique de “particule individuelle” perd sa pertinence⁶. Elle doit être remplacée dans la modélisation des phénomènes par celle d’excitation élémentaire d’un champ quantique.

La modélisation d’Einstein, qui est classique, perd tout son sens aux petites échelles car la concentration d’une masse dans un très petit rayon aboutit à la “censure” de celle-ci: c’est à dire à la séparation

⁶En toute rigueur, en présence d’interactions.

de l'espace en deux régions dont l'interface ne laisse passer l'information que dans un sens (un trou noir). Ceci se produit dès que l'échelle spatiale est inférieure au rayon de Schwarzschild

$$(0.2) \quad R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Il en résulte une impossibilité de sonder la structure de l'espace-temps en dessous de la longueur de Planck. Elle correspond à la longueur Compton de particules si massives que le rayon de Schwarzschild est précisément égal à la longueur Compton. Elle vaut [143]

$$(0.3) \quad L_P = \frac{\sqrt{G\hbar c}}{c^2} \simeq 10^{-33} \text{ cm}$$

Cette contradiction rabaisse immédiatement la géométrie de l'espace-temps au rang de “concept classique”, produit d'une perception qui doit être retrouvée par un modèle. La construction d'une telle modélisation qui réconcilierait gravitation et mécanique quantique n'est toujours pas réalisée.

La difficulté principale provient de la nécessité de laisser tomber la géométrie comme cadre de travail fixe, ce qui constitue une rupture totale avec les modèles traditionnellement utilisés en physique. Ceux utilisés ces dernières années en physique des particules sont en fait des théories quantiques des champs basées sur un espace-temps fixé. Dans l'optique d'une modélisation du régime quantique de la gravité, de tels objets devraient constituer les “briques” de construction du modèle. Ce n'est que comme produit dérivé que la géométrie que nous percevons réapparaîtrait.

Dans le dernier demi-siècle, il est apparu que les théories de champs basées sur des objets ponctuels semblaient inadaptées à la construction d'un modèle de gravité quantique. L'analyse de la cohérence de ces modèles avec géométrie fixée suggère de sérieuses difficultés:

- Les théories de champs basées sur des objets ponctuels ne fournissent pas ou peu de contrainte sur la géométrie dans laquelle on les définit.
- Dans une approche “perturbative” où l'on couple les fluctuations de géométrie aux champs de matière du modèle, il semble impossible d'arriver à des théories cohérentes sans introduire une infinité de paramètres (non-renormalisabilité des quantifications de la relativité générale et de ses versions super-symétriques).

L'idée la plus simple pour sortir de ces impasses remonte à 1974 [172][163][161] et elle consiste à introduire *ab initio* un paramètre ayant les dimensions d'une longueur L dans le modèle. Cette idée est issue des modèles duaux initialement utilisés pour modéliser l'interaction forte. Dans ces modèles, les objets fondamentaux ne sont plus des particules ponctuelles mais des objets unidimensionnels appelés cordes. Scherk et Schwarz [172] ainsi que Yoneya [194] ont remarqué que l'interaction entre cordes fermées dans la limite de basse énergie se faisait par l'intermédiaire d'excitations de spin deux et donc peut modéliser une interaction gravitationnelle à condition que le paramètre L corresponde à l'échelle de Planck. L'exploration “semi-classique” de ces modèles, où les cordes se déplacent dans une géométrie fixée a permis d'arriver à des conclusions très encourageantes:

- La cohérence du modèle de cordes nues (unitarité) contraint fortement la géométrie.
- L'interaction effective entre deux cordes fermées se fait dans la limite classique ($L \mapsto 0$) selon les lois de la relativité générale.

- Les problèmes liés aux divergences ultra-violettes semblent disparaître ou s’atténuer.

Suite aux travaux de Polyakov [144], la première conclusion fut exploitée par D. Friedan en 1987 et transformée en un principe d’une portée considérable [77]. Son analyse s’appuya sur le fait que tout modèle de corde dans une géométrie fixée définit une théorie quantique des champs bidimensionnelle (le mouvement d’une corde fermée dans un espace X définit une application (un champ) du cylindre vers X). L’invariance conforme de la théorie bidimensionnelle est alors équivalente aux “équations du mouvement” pour la géométrie X , par exemple les équations d’Einstein pour la métrique sur X . C’est comme cela qu’apparaissent des contraintes sur l’espace-temps dans lequel la corde se déplace. Friedan retourna alors l’argument pour considérer que *toute* théorie bidimensionnelle invariante conforme “définit” une géométrie d’un modèle de corde et que chacune de ces “géométries” constitue une “configuration” classique d’une modélisation de la gravité quantique encore à construire.

La quête d’une classification.

La classification des théories conformes bidimensionnelles s’est donc imposée comme un préliminaire à la théorie quantique des cordes. Toutefois, son intérêt ne s’est pas limité à la construction d’un hypothétique modèle de gravité quantique. La physique statistique s’est emparée du problème à travers le travail fondamental de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (BPZ). Dans l’esprit de Landau qui, en son temps, avait proposé une classification des théories de champ moyen à partir de considérations de symétries, ces auteurs ont entamé une détermination des caractéristiques de *toutes* les classes d’universalité isotropes⁷ à deux dimensions. En s’appuyant sur la vision de Wilson des phénomènes critiques, ils ont caractérisé chacune de ces classes par une théorie des champs bidimensionnelle invariante conforme *Euclidienne* qui représente le comportement à grande distance du système à son point critique. Ces théories s’avèrent exactement solubles. C’est à dire que l’on peut, en principe, calculer toutes les fonctions de corrélation à partir des propriétés de symétrie du système.

Le démarrage de ce programme a constitué une rupture importante en physique en annonçant le retour à une attitude plus naturaliste. Dans cette optique, l’important n’est plus l’analyse d’un modèle particulier rivé à une situation expérimentale (dans le meilleur des cas) mais la considération de classes entières de modèles possédant certaines caractéristiques générales. Par cette approche, on accède à de nouvelles possibilités excitantes:

- D’une part, la possibilité de mettre en rapport des modèles en apparence non reliés et/ou de trouver plusieurs formulations équivalentes d’une même situation physique.
- D’autre part, cette attitude, parce qu’elle s’attache à considérer un modèle comme un *objet*, met l’accent sur les relations entre eux et semble être la serrure qui donne accès à un langage naturel pour formuler un modèle de gravité quantique. Friedan a d’ailleurs émis quelques propositions dans ce sens [75] auxquelles il a malheureusement été impossible de donner autre chose que l’apparence de visions fugaces. Pour mémoire, il convient de dire que les nombreux efforts de construction d’une théorie des champs de cordes sont restés sans succès.

Au cours des années 87-88 s’est dégagée une vision “pyramidale” du problème de classification qu’il convient d’expliquer un peu plus. C’est par la construction d’exemples explicites que s’est peu à peu dégagée la structure que nous allons dévoiler maintenant.

⁷Le modèle de Potts chiral possède un point critique invariant d’échelle mais anisotrope. Sa limite continue n’est donc pas décrite par une théorie invariante conforme.

Une théorie conforme Euclidienne peut, en partie, se caractériser par son algèbre de symétrie *maximale* $\mathcal{A}_m$. Ce terme désigne comme nous le rappellerons un ensemble de courants conservés de spins entiers, stable par développement des produits d'opérateurs. Comme dans toute théorie des champs, les états physiques vivent sur le bord des espace-temps considérés: c'est l'idée du formalisme opératoire de la théorie des champs. Dans le cas bidimensionnel, il s'agit de cercles⁸. A chaque surface est associé un "opérateur d'évolution" qui envoie les états initiaux sur les états finaux. Dans le cas des théories conformes, l'opérateur $\phi[\Sigma]$ associé à la surface Σ ne dépend que de la structure complexe⁹ de Σ . Cet opérateur s'interprète comme l'opérateur d'évolution associé à la surface Σ . Cette axiomatique des théories conformes est due à G. Segal [164][165] et s'appuie sur la théorie des catégories. Elle a été ensuite élargie aux autres théories des champs par divers auteurs [3] [46][37] en vue de l'étude des théories topologiques.

On montre alors que l'espace H_{S_1} des états du système qui vivent sur le cercle est une somme de représentations irréductibles de cette algèbre $\mathcal{A}_m$. Comme l'ont suggéré BPZ, $\mathcal{A}_m$ est un produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ de deux copies d'une algèbre $\mathcal{A}$ d'opérateurs locaux, stables par développement des produits d'opérateurs, ce qui entraîne que

$$(0.4) \quad H_{S_1} = \bigoplus_{i, \bar{i}} (V_i \otimes V_{\bar{i}})$$

où les V_i sont des représentations irréductibles de $\mathcal{A}$. Chaque représentation $V_i \otimes V_{\bar{i}}$ correspond à un champ dit primaire qui se caractérise par une loi de transformation conforme très simple. De plus, dans une théorie conforme, les champs sont en correspondance biunivoque avec les états de H_{S_1} : l'état associé est obtenu par action du champ sur le vide de H_{S_1} . Les représentations $V_i \otimes V_{\bar{i}}$ sont de plus haut poids relativement à $\mathcal{A}_m$ et les champs primaires sont associés aux états de plus haut poids. La décomposition en partie holomorphe et antiholomorphe se reflète au niveau des fonctions de corrélation sur une surface Σ des champs primaires qui s'exprimeraient comme des combinaisons sesquilineaires¹⁰

$$(0.5) \quad \begin{aligned} \langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_n} \rangle_{\bar{\Sigma}} &\equiv \phi[\Sigma](|\varphi_{i_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{i_n}\rangle) \\ &= \sum_{I, \bar{I}} G^{I, \bar{I}} \mathcal{F}_I(m) \mathcal{F}_{\bar{I}}(\bar{m}) \end{aligned}$$

de fonctions holomorphes $\mathcal{F}_I$ et antiholomorphes $\mathcal{F}_{\bar{I}}$ sur l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$. Celui-ci est formé par les classes d'équivalence de métriques par les transformations de Weyl et les difféomorphismes connexes à l'identité. Ici, n désigne le nombre de champs primaires dans le corrélateur considéré, g est le genre de la surface sur laquelle on calcule la fonction de corrélation, et $(m, \bar{m})$ sont des coordonnées complexes sur $\mathcal{T}_{g,n}$. Elles incluent les "positions" des points d'insertion des champs ainsi qu'une coordonnée en chacun de ces points, mais aussi les paramètres de Teichmüller de la surface $\bar{\Sigma}$ obtenue en rebouchant les bords de Σ par des disques. BPZ ont baptisé les fonctions $\mathcal{F}_I$ les *blocs conformes*. Les autres champs (appelés descendants) sont obtenus par l'action de l'algèbre $\mathcal{A}_m$ sur les champs primaires. BPZ ont montré que leurs fonctions de corrélation se déduisent des corrélateurs de champs primaires par application d'opérateurs dont la forme est entièrement déterminée par $\mathcal{A}$.

La traduction en des termes plus abstraits de ces résultats par Friedan [78] nous a appris que les fonctions $\mathcal{F}_I$ forment une base de l'espace des sections holomorphes d'un fibré projectif de dimension finie au dessus de $\mathcal{T}_{g,n}$. Le tenseur énergie-impulsion définit alors une connexion projective¹¹ plate sur

⁸Qui sont les bords des surfaces!

⁹A l'anomalie de Weyl près.

¹⁰A des problèmes près dont Raymond Stora est un expert. Ces questions seront mentionnées en temps utile.

¹¹La projectivité étant mesurée par la charge centrale de la théorie conforme.

ce fibré. Les monodromies des blocs conformes fournissent donc une représentation projective du groupe fondamental de l'espace $\mathcal{T}_{g,n}$. Ce groupe coïncide avec le groupe modulaire $\mathcal{M}_{g,n}^*$ de la surface considérée qui est aussi le quotient du groupe de difféomorphisme préservant l'orientation de la surface par la composante connexe de l'identité. En conséquence, les théories conformes recèlent un moyen de sonder simultanément *tous* les groupes modulaires. Cette idée s'est trouvée exprimée dans le travail de Moore et Seiberg [129] qui, dans le cas des théories rationnelles où la somme (0.4) est *finie*, purent écrire un système d'équations polynomiales vérifiées par quelques matrices de monodromie et qui permettent, en prime, de reconstruire *toutes* les matrices de monodromie de *tous* les blocs conformes de manière cohérente. Ces équations constituent l'expression “minimale” de la *covariance modulaire* et de la dualité. La même structure existe pour la partie antiholomorphe.

D'autre part, comme les fonctions de corrélation physiques du modèle sur une surface sont monovaluées au dessus des espaces de modules correspondants, d'autres équations portant sur les $G^{I,\bar{I}}$ expriment l'*invariance modulaire* de la théorie. Elles dictent quels sont les blocs conformes qui apparaissent dans une fonction de corrélation donnée. Là encore, Moore et Seiberg ont montré qu'un ensemble fini d'équations assure l'invariance modulaire pour toutes valeurs de g et n . Ces équations permettent, comme l'avait montré Cardy [21] en genre 1 sans points marqués, d'obtenir le contenu en champs de n'importe quelle classe d'universalité ayant une symétrie (i.e. une algèbre $\mathcal{A}_m$) fixée. Les $G^{I,\bar{I}}$ sont alors les multiplicités des différents champs primaires. Ceci constitue une information fondamentale pour la physique statistique: deux classes d'universalité peuvent présenter les mêmes propriétés d'échelle pour l'énergie libre mais différer par leur contenu en champs. Rappelons que celui-ci nous donne la totalité des excitations élémentaires du système avec leurs énergies et impulsions.

Dans une optique de classification, la résolution des équations polynomiales de Moore et Seiberg semble être un préliminaire important. Mais d'autre part, les données de Moore et Seiberg (matrices de monodromies) ne permet pas de reconstituer toute la théorie conforme. Ceci ne fait que souligner les abîmes encore insondés qui se cachent derrière le programme de classification de BPZ et Friedan (BPZF):

- Tout d'abord, la résolution des équations de covariance modulaire reste un problème ouvert particulièrement épineux. De nombreux exemples de solutions sont connus mais aucun schéma général autre qu'empirique n'est apparu. Une méthode de résolution consiste à se fixer un ensemble d'indices de champs primaires, puis des règles de fusion (règles de sélection des couplages entre les primaires) ce qui fixe la taille des matrices de Moore et Seiberg. Ensuite, on résout les équations de covariance modulaire.
- Etant donné une solution des équations de covariance modulaire, personne ne sait en général retrouver toutes les algèbres $\mathcal{A}$ qui redonnent cette solution comme monodromies des blocs conformes associés.
- Enfin, identifier les théories équivalentes n'est pas évident du tout! Nous en verrons des exemples au chapitre 4.

Théories topologiques, géométrie bidimensionnelle et jeu de Léo-Teichmüller.

Cette pyramide de problèmes montre à mon avis qu'il est illusoire de considérer le programme de classification des théories conformes (même rationnelles) comme un exercice pour étudiant ou même pour chercheur très confirmé. Il me semble alors crucial, pour développer les idées “conformistes” que je viens de rappeler, de chercher les *implications* du programme de classification de BPZF plutôt qu'une solution

complète du problème. C’est dans cette optique, peut-être peu rentable mais terriblement instructive, que j’ai rédigé mon travail.

Je n’ai pas la prétention d’avoir à l’heure actuelle compris, ni même entrevu, toutes les ramifications du programme de classification. Deux directions d’investigation ont attiré mon attention jusqu’à présent: d’une part les implications “conceptuelles” qui ont accaparé la majeure partie de mon énergie, et d’autre part, les implications “physiques”.

Dans la première optique, je me suis principalement intéressé aux conséquences mathématiques des idées de BPZF. Au vu des liens entre les théories conformes, la géométrie des espaces de modules et la théorie des représentations des algèbres de dimension infinie, la nécessité d’une telle exploration semble claire. Deux points de vue semblent prometteurs:

- D’une part, le point de vue “à $D \geq 2$ ” qui désigne les applications des théories conformes aux problèmes de topologie et de géométrie en dimension $D = 2, 3$ ou 4 et qui constitue le point essentiel de mon travail.
- D’autre part, le point de vue “à $D = 2$ ” qui recouvre les aspects holomorphes des théories conformes et provient des relations entre théories conformes et surfaces de Riemann. Par ce biais, une relation étroite avec la géométrie algébrique se dessine.

L’idée d’une relation entre les théories conformes et la topologie à basse dimension ($D \in \{2, 3, 4\}$) est due à Witten grâce à son interprétation du polynôme de Jones en termes de théorie des champs [192]. Cette interprétation a permis de définir des invariants topologiques pour des variétés de dimension trois orientables compactes, avec ou sans bord. Elle se trouve aussi sous-jacente dans le texte de Grothendieck [91] “Esquisse d’un programme”. Witten conjecture qu’il est possible d’associer à toute théorie conforme rationnelle une théorie des champs topologique (i.e. dont les fonctions de corrélation ne dépendent que des propriétés topologiques de l’espace-temps sur lequel on travaille et non pas des propriétés métriques) en dimension trois. Les champs sont alors associés à des plongements de graphes [191] dans des espaces-temps tridimensionnels. Dans le contexte de la théorie de Chern-Simons, ce sont les lignes de Wilson des théories de jauge. Witten conjecture également que cette théorie ne dépend que de la solution des équations de covariance modulaire associée à la théorie conforme et que celles-ci ont une interprétation “naturelle” à trois dimensions.

Le RÉSULTAT PRINCIPAL de cette thèse est une PREUVE de ces assertions. Je montre que, moyennant certaines hypothèses¹², il y a équivalence entre les solutions des équations de covariance modulaire de Moore et Seiberg et les théories topologiques projectives en dimension trois. Des travaux analogues ont vu le jour dans la même période que cette thèse. Ils utilisent des méthodes différentes où partent de la théorie des groupes quantiques. Citons les travaux de Kontsevitch [111], de Crane [28], de Fröhlich [70] et [72] ainsi que de Reshetikhin et Turaev [151]. J’ai aussi eu connaissance de travaux plus récents [14][142] et [141]. Dans la notice bibliographique située après cette introduction, je détaille les différences entre ces travaux et les miens.

Théories topologiques et jeu de Léo-Teichmüller.

Cette relation entre topologie tridimensionnelle et théories conformes ouvre de belles perspectives dans l’étude de la géométrie modulaire (des espaces $\mathcal{T}_{g,n}$) au travers de l’action projective des groupes modulaires sur les blocs conformes. Dans une théorie topologique, seul le groupe modulaire agit non

¹²Détaillées pages 281 et 283.

trivialement sur l'espace des états, et, dans le cas qui nous intéresse, les blocs conformes fournissent les états physiques de la théorie (ils vivent sur des surfaces). Nous disposons donc d'un cadre naturel pour étudier l'action de ces groupes. Parmi les directions d'étude ultérieures se trouve la possibilité de considérer l'ensemble de tous les groupes modulaires (pour toutes valeurs de g et n) muni d'un certain nombre d'injections qui reflètent les plongements possibles de surfaces dans une surface plus grande, les opérations d'oubli de points marqués, ou de recollement des surfaces.

Un tel objet (tour modulaire) a été introduit par Grothendieck dans [91] comme groupoïde fondamental de la “tour de Teichmüller”, c'est à dire de l'ensemble de tous les espaces $\mathcal{T}_{g,n}$ liés entre eux par les opérations de recollement, d'oubli de points, etc ... familières dans le contexte des théories conformes pour le calcul du comportement asymptotique des blocs conformes au voisinage des bords des espaces de Teichmüller. La notion de représentation de cette “tour modulaire” devrait consister en un ensemble d'espaces $H_{g,n}$ tels que le groupe modulaire $\mathcal{M}^*(g, n)$ (des surfaces de genre g avec n cercles frontières) agisse par $\rho_{g,n}$ sur $H_{g,n}$. Enfin, les relations entre les différents espaces $\mathcal{T}_{g,n}$ doivent se refléter par des relations reliant les différentes représentations $(H_{g,n}, \rho_{g,n})$. A l'heure actuelle, je ne dispose pas d'une formulation précise de ces idées mais j'aimerais expliquer en quoi les concepts utilisés dans cette thèse constituent peut-être la “boîte à outils” nécessaire à la formulation de ces idées.

- En résumé, il est naturel de penser à $H_{g,n}$ comme l'espace des états de la théorie topologique tridimensionnelle et $\rho_{g,n}$ comme l'action de $\mathcal{M}^*(g, n)$ sur $H_{g,n}$ que cette théorie définit. Je conjecture que les relations entre les différents $(H_{g,n}, \rho_{g,n})$ s'expriment dans le langage des théories topologiques par la “localité à la frontière” que j'introduis au chapitre 1 et qui ressurgit dans les chapitres 5, 6 et 7.
- Une autre conjecture naturelle (originellement due à Grothendieck) qui ne devrait pas trop poser de problèmes et qui est peut-être en grande partie déjà prouvée dans la littérature existante est la possibilité de reconstruire la structure de la tour de Teichmüller à partir de ses deux premiers étages, c'est à dire pour six valeurs de (g, n) qui vérifient $\dim(\mathcal{T}_{g,n}) \leq 2$.

Pour englober ces deux problèmes d'un coup et pour comprendre également le fait qu'un nombre fini d'équations suffit à construire une théorie topologique, il serait intéressant de:

- Définir une notion naturelle de représentation (projective) de la “tour modulaire” et montrer son identité avec la notion de théorie topologique (projective) tridimensionnelle.
- Caractériser complètement une telle représentation à partir d'une classe d'équivalence de théories projectives.

J'espère qu'une lecture attentive de cette thèse convaincra le lecteur que le langage utilisé semble bien adapté à ce travail.

Cauchemars quadridimensionnels.

Pour préciser encore ce que je mets derrière les conséquences “conceptuelles” des théories conformes, je dois mentionner les relations avec les problèmes de géométrie en dimension 2 et 4.

Au cours de mes tentatives pour comprendre l'origine de la projectivité des théories topologiques déduites des solutions des équations de covariance modulaire, j'ai dû faire intervenir les variétés quadridimensionnelles bordant les variétés de dimension trois auxquelles je m'intéressais. D'autre part, Witten

a suggéré [190] une interprétation des invariants de Donaldson qui sondent la structure différentielle des variétés de dimension 4 en termes de théorie des champs. Il s'agit en l'occurrence d'une théorie de jauge dont l'action non fixée de jauge est

$$(0.6) \quad S_M[A] = \frac{1}{4\pi} \int_M \text{Tr}(F_A \wedge F_A)$$

en termes de la courbure F_A du champ de jauge A . Dans le cas où Y borde M , la formule de Stokes réduit cette action à une intégrale de la forme de Chern-Simons

$$(0.7) \quad S_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_Y \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

pour la restriction de A sur Y . D'après Witten, l'action de Chern-Simons (0.7) définit une théorie topologique tridimensionnelle déduite d'une théorie conforme¹³. Enfin Baulieu a suggéré [8] que la quantification stochastique de la théorie de Chern-Simons n'était autre que la théorie d'action (0.6). Toutefois, la relation précise entre les théories à $D = 3$ et $D = 4$ est hors de ma portée actuellement, principalement parce que la théorie de Donaldson définie par (0.6) est d'un type différent de celles que je considère dans cette thèse. Il semble en particulier épouvantablement difficile de calculer la fonction de partition d'une variété sans bord par découpage de celle-ci en morceaux plus simples comme je le fais. Enfin, j'aimerais souligner que la situation quadridimensionnelle est extrêmement complexe pour diverses raisons:

- Il n'y a plus équivalence entre les catégories différentiables, triangulables et topologiques (alors qu'en dimension 2 et 3, cette équivalence est vraie [67]) et nous devons distinguer entre théories
 - Différentiables: qui sondent les différentes structures différentielles (les invariants de Donaldson).
 - Simpliciales: qui sont définies à partir de triangulations (comme celles introduites par Dijkgraaf et Witten [46]).
 - Topologiques: qui distinguent les topologies différentes mais ne sont pas sensibles aux structures différentielles.
- Enfin il est impossible d'énumérer les classes topologiques de variétés de dimension 4 non simplement connexes: c'est un problème indécidable (Markov 1959).

Théories topologiques et géométrie bidimensionnelle.

Etant intéressé par les relations entre classes de théories vivant en des dimensions différentes (comme la relation entre théories conformes bidimensionnelles et théories topologiques tridimensionnelles), j'ai cherché un terrain d'approche de ce problème moins sauvage. Ceci me poussa vers une étude, encore en cours, des théories topologiques bidimensionnelles.

De la même manière qu'une théorie topologique tridimensionnelle nous donne, entre autres, un invariant pour des graphes plongés dans une variété tridimensionnelle (dont le polynôme de Jones n'est qu'un cas particulier), j'ai cherché à obtenir des invariants intéressants pour les plongements de graphes dans des surfaces.

¹³Un modèle de Wess-Zumino-Witten en l'occurrence

C'est ainsi que j'ai commencé un travail qui me permet, à partir de chaque théorie tridimensionnelle que j'ai obtenue, de fabriquer automatiquement une théorie *bidimensionnelle topologique* et de calculer toutes les fonctions de partition de cette théorie à partir d'une solution des équations de covariance modulaire de Moore et Seiberg. Un cas particulier de théorie topologique bidimensionnelle permet de retrouver nombre de concepts de la théorie des représentations linéaires des groupes compacts. Il s'agit du modèle de Higgs topologique dont l'action est donnée par

$$(0.8) \quad S[A, \phi] = \int_{\Sigma} \text{Tr}(F_A \phi)$$

où A est le champ de jauge (1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie LG du groupe considéré) et ϕ le champ de Higgs (0-forme à valeurs dans l'algèbre LG). Plus précisément, les états physiques vivant sur le cercle S_1 sont essentiellement les fonctions centrales sur le groupe, qui sont donc des combinaisons linéaires de caractères des représentations irréductibles du groupe. Cet exemple m'a conduit à une construction très simple d'une théorie topologique bidimensionnelle à partir de théories tridimensionnelles déduites des équations de covariance de Moore et Seiberg. Il s'agit du modèle de Wess-Zumino-Witten *jaugé* qui est en relation avec la théorie de Chern-Simons. Ceci rend le modèle jaugé *exactement soluble*! La correspondance entre ces deux théories peut alors être étendue à l'ensemble des théories topologiques déduites des solutions des équations de Moore et Seiberg. Ce processus est une réduction dimensionnelle qui permet d'associer à une surface Σ décorée par un graphe trivalent colorié K un opérateur $\phi[\Sigma, K]$ invariant topologique. Ces thèmes sont développés dans les chapitres 1 et 7 de cette thèse.

A partir de tels outils, il devient possible de se demander dans quelle mesure ces invariants sont utilisables. L'application à l'étude des classes d'isotopies de plongements de 1-complexes dans des surfaces semble très intéressante pour au moins deux raisons:

- Comme quelques résultats sont déjà connus dans ce domaine (en particulier une description entièrement combinatoire de ces classes due à Ladegaillerie [114]), c'est un excellent terrain de test de la finesse de nos invariants.
- La géométrie des espaces de modules s'étudie avantageusement en examinant comment découper une surface en différents morceaux "plus simples". Cette méthode de découpage, pressentie par Grothendieck, permet de se ramener à des plongements de graphes dans une surface. Ceci se retrouve aussi dans l'étude des scindements de Heegaard des variétés de dimension trois (voir le chapitre 6).

Malheureusement, je n'ai pas encore pu explorer en détail ces idées mais j'espère que ces quelques explications permettront au lecteur de se faire une idée de ces problèmes, ou au moins qu'elles auront illustré quelques unes des implications des théories conformes en topologie.

Aspects holomorphes des théories conformes.

Les aspects de géométrie bidimensionnelle renvoient sans aucun doute aux aspects holomorphes ("de dimension $D = 2$ "), des théories conformes. Dans ce domaine, le travail me semble nettement moins défriché encore mais les perspectives très prometteuses.

Tout d'abord se pose le problème de la reconstruction d'une théorie conforme à partir d'une solution des équations de covariance modulaire. Celui-ci peut être décomposé en deux étapes:

- Reconstruire les blocs conformes à partir de leurs monodromies dans les différents espaces de modules. Ceci constitue une sorte de problème de Riemann-Hilbert modulaire.

- Retrouver à partir des blocs conformes une algèbre $\mathcal{A}$ maximale qui permette d’obtenir ces blocs par la procédure de BPZ.

A ma connaissance, aucun de ces deux problèmes n’est résolu en général. Dans le premier cas, l’unicité est fautive vu qu’il existe une théorie conforme non triviale qui fournit une solution triviale des équations de covariance modulaire. Notons $\mathcal{A}_0$ son algèbre de symétrie maximale, nous pouvons alors partir d’une théorie conforme d’algèbre de symétrie $\mathcal{A}$ et la théorie d’algèbre de symétrie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_0$ fournit alors la même solution des équations de covariance modulaire que la théorie d’algèbre $\mathcal{A}$. Comme les blocs conformes de la théorie d’algèbre $\mathcal{A}_0$ ne sont pas triviaux, la solution du problème de Riemann-Hilbert n’est pas unique.

La seconde étape constitue une version “théorie des champs” du problème de reconstruction de Tannaka-Krein qui vise à reconstruire un groupe à partir de sa théorie des représentations [39]. Prouver un résultat analogue dans le cas des théories conformes semble extrêmement difficile. Par contre, il est peut-être plus abordable et sans doute plus instructif de se demander quelles seraient les conséquences d’un tel résultat en mathématiques.

Une autre approche vise à construire une algèbre de quasi-Hopf [52] dont un certain ensemble de représentations nous redonnerait une solution donnée des équations de Moore et Seiberg. Ce programme n’a été complété que pour certains exemples de solutions des équations de Moore et Seiberg: par exemple, les modèles de WZW s’obtiennent à partir de la théorie des représentations “non cycliques” [156] des groupes quantiques de Drinfeld. Personne ne sait actuellement si cette reconstruction est possible en général.

D’autres facteurs plaident pour l’utilisation des théories conformes en géométrie algébrique. Les remarques de Grothendieck [91] concernant le théorème de Belyi [10] (qui montre qu’une courbe algébrique définie sur un *corps de nombres* est un revêtement ramifié en 0, 1 et ∞ au dessus de la sphère de Riemann), suggère effectivement que l’arithmétique des espaces de modules est reliée aux propriétés topologiques des surfaces, et également à la structure intime des groupes modulaires. Mais une introduction n’est pas le lieu le plus approprié pour parler de ces questions et j’espère donner au lecteur d’autres aperçus de ces questions dans le chapitre 7 de cette thèse, et indiquer des liens entre l’aspect “ $D = 2$ ” des théories conformes et l’aspect “ $D \geq 2$ ” via l’utilisation de $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$, groupe de Galois des nombres algébriques par rapport aux rationnels.

Statistiques fractionnaires en dimension deux.

Même si je n’ai pas consacré une grande part de mon travail de thèse aux applications physiques des théories conformes, cet aspect me semble au moins aussi fascinant que le précédent et mérite le détour.

A deux dimensions se produit un phénomène très particulier: l’existence de statistiques exotiques (anyons) qui ne sont ni bosoniques, ni fermioniques. Dans une approche par l’intégrale fonctionnelle, la statistique d’un ensemble de N particules provient d’un facteur de phase qui fournit une représentation du groupe fondamental de l’espace des configurations de N particules indiscernables sur une surface Σ . Ce groupe est Σ_N , groupe des permutations de N éléments, pour $\mathbb{R}^D$ dès que $D > 2$ et c’est un groupe de tresses non colorées sur Σ : $\mathcal{B}_N(\Sigma)$ au sens de Birman [13] dans le cas de la dimension deux. Dans une approche algébrique, la statistique est un morphisme de ce groupe de tresses dans le groupe des nombres complexes unimodulaires. Il est aussi possible de considérer des *parastatistiques*, qui sont définies par des représentations du groupe de tresses considéré dans $V^{\otimes N}$ où V est un espace vectoriel caractérisant les degrés de liberté internes de la particule affectés par la statistique. Dans les deux cas, nous obtenons une action du groupe des tresses à N brins sur l’espace des états $\mathcal{H}_N(\Sigma)$ à N particules sur Σ .

Les applications physiques de tels objets sont nombreuses. Récemment, plusieurs auteurs [71][128] ont avancé l'idée que les excitations de certains systèmes d'électrons bidimensionnels fortement corrélés étaient localisées spatialement et avaient de telles propriétés exotiques. D'autres systèmes bidimensionnels comme des couches d' He_3 superfluide pourraient aussi présenter de telles excitations [79].

Il serait intéressant de disposer d'une seconde quantification pour de tels objets. Cela consiste à regrouper tous les espaces des états $\mathcal{H}_N(\Sigma)$ en un seul, qui constitue l'espace des états H_Σ de la théorie quantique des champs sensée décrire le système à nombre de particules non fixé. Dans ce but, il importe de disposer d'une forme explicite des espaces $\mathcal{H}_N(\Sigma)$ ainsi que du spectre à N particules sur Σ . Malheureusement, ce problème n'est pas résolu, même dans le cas de trois anyons sur le plan! Nous avons cependant le pressentiment que les théories conformes peuvent apporter quelque aide dans ce problème.

En effet, deux points de vue différents permettent d'aborder les statistiques fractionnaires:

- Nous pouvons coder la statistique dans les monodromies non triviales des fonctions d'onde. C'est le point de vue utilisé dans les cours élémentaires de mécanique quantique.
- Les effets de la statistique peuvent être rendus par une interaction “topologique” entre particules bosoniques. Les fonctions d'onde sont alors monovaluées. Le premier exemple d'une telle interaction topologique est dû à Polyakov [147] qui a remarqué que l'interaction effective produite par le couplage entre des particules bosoniques et un champ de jauge abélien avec une action de Chern-Simons (0.7) introduit un changement de statistique. Dans le cas de Chern-Simons non abélien, les particules doivent porter des degrés de liberté internes correspondant aux représentations irréductibles du groupe de Lie considéré. L'interaction effective produit des parastatistiques.

Verlinde a remarqué [182] que les blocs conformes possédaient des monodromies non triviales et fournissent en fait le pont entre ces deux points de vue. Ces idées sont développées dans le chapitre 2. Toutefois, les blocs ne fournissent pas des états propres du hamiltonien d'un ensemble de particules libres non-relativistes. Un certain nombre d'auteurs ont quand même avancé que ces blocs conformes pouvaient représenter des fonctions d'ondes physiques mais dans un système complexe comme une couche d'électrons bidimensionnels présentant un effet Hall fractionnaire. Ces remarques sont basées sur la relation entre certains blocs conformes et les fonctions d'onde d'essai proposées par Laughlin [117]. Je n'ai pas d'idées nettes à ce sujet. Par contre, il semble amusant de comprendre ce qu'est un gaz d'anyons libres. Pour ce faire, il n'est pas évident que les blocs conformes soient adaptés mais il est naturel de se demander si il n'existe pas une *déformation* d'une théorie conforme où l'analogue des blocs conformes subsiste et qui fournisse des fonctions d'ondes pour le gaz d'anyons libres. Cette idée est motivée par la nécessité d'introduire une échelle de longueur dans le problème (les particules sont massives). Je n'ai pas de solution à ce problème à l'heure actuelle. Peut être les progrès récents [69] dans l'étude des déformations de théories conformes [195] permettront-ils des avancées dans ces questions?

Guide de lecture.

Pour conclure, le plan de l'exposé qui va suivre reflète les préoccupations que je viens d'expliquer:

- Considérer les théories des champs comme des objets élémentaires en soulignant les relations entre elles (théories équivalentes).
- Relier des classes de théories des champs par des constructions algébriques indépendantes de la théorie particulière que l'on considère.

- Montrer l'utilité des théories des champs dans des problèmes de géométrie ou de topologie. Je me suis principalement limité aux cas bi- et tridimensionnels.

J'ai donc choisi de présenter d'abord un formalisme qui soit adapté à une approche globale des théories que j'étudie. Le chapitre 1 expose ces définitions basées sur les notions de catégorie et de foncteur. L'équivalence entre théories des champs s'exprime tout naturellement en termes de transformations naturelles. Ces considérations sont étendues au cas projectif qui nous intéresse. J'introduis également la notion de théorie *locale à la frontière* qui, comme je l'explique par la suite, permet de construire simplement les états des théories tridimensionnelles. A titre d'exemple, je discute le modèle de Higgs topologique (bidimensionnel) mentionné précédemment.

Dans le second chapitre, j'ai regroupé quelques réflexions très simples sur les statistiques fractionnaires et présenté quelques rappels concernant les groupes de tresses qui jouent un rôle fondamental dans les théories conformes à cause de leur relation avec les groupes modulaires.

Le troisième chapitre constitue des rappels sur les théories conformes qui ne visent pas à remplacer la littérature existante mais à en faciliter la lecture. J'ai particulièrement insisté sur la technologie *à la Moore et Seiberg* [130][132] qui est utilisée abondamment par la suite. Le lecteur me pardonnera certains passages un peu arides mais nécessaires... Enfin, j'ai tenté, sans y arriver hélas, de relier les différents points de vue sur les théories conformes bidimensionnelles. Celles-ci conservent encore beaucoup de leur mystère...

Afin d'illustrer par des exemples le programme de classification des théories rationnelles, j'ai consacré le quatrième chapitre à l'étude de théories conformes associées à des groupes finis. Le principe de base est la reconstruction d'une solution des équations de Moore et Seiberg à partir d'une donnée minimale, à savoir les règles de fusion de Verlinde [181] qui constituent les "règles de sélection" pour les représentations d'algèbre chirale. Je me suis concentré sur les matrices de transformation modulaire des blocs conformes avec $g = 1$, $n = 0$ et sur la recherche du contenu en champs de ces modèles (problème de "l'invariance modulaire"). Une résolution complète de ce problème est possible lorsque les règles de fusion proviennent d'un groupe cyclique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Ceci prouve une conjecture d'Itzykson [97] sur les invariants modulaires des théories ayant l'algèbre de symétrie affine $SU(N + 1)$ au niveau 1.

Les deux chapitres suivants établissent le lien entre les théories conformes et les théories topologiques tridimensionnelles. Dans un premier temps (chapitre 5), je montre qu'une théorie topologique vérifiant quelques hypothèses particulières définit une solution des équations de covariance modulaire de Moore et Seiberg. Afin d'illustrer les simplifications apportées par l'interprétation tridimensionnelle de ces équations, un certain nombre d'identités obtenues par des moyens purement calculatoires sont ici redérivées graphiquement, et plus simplement. Puis, dans le chapitre suivant, je démontre que toute solution des équations de covariance modulaire de Moore et Seiberg définit une théorie topologique projective en dimension trois. Ce résultat justifie de faire tous les calculs relatifs aux équations de Moore et Seiberg à partir de "petits dessins". C'est un outil de choix pour le futur.

La technique employée est fondée sur le résultat de Lickorish et Wallace [120] qui montre que toute variété de dimension trois sans bord s'obtient par chirurgie à partir de la sphère S_3 , et le calcul de Kirby [104]. D'autres travaux portant sur le même sujet sont détaillés dans la notice bibliographique qui suit cette introduction.

Enfin, j'ai rassemblé dans le dernier chapitre quelques perspectives plus récentes dont l'étude de théories bidimensionnelles (qui fait écho à l'exemple du modèle de Higgs topologique), quelques réflexions sur la projectivité des théories tridimensionnelles en relation avec la localité à la frontière, et enfin quelques commentaires plus proches de la théorie des nombres et de la théorie de Galois.

Les principaux résultats obtenus dans cette thèse ont fait l'objet de publications. D'autres ne l'ont pas été parce qu'inachevés à mes yeux ou difficiles à intégrer dans un ensemble cohérent autre que cette thèse. Le lecteur intéressé pourra consulter les articles suivants:

Invariance modulaire L'article [34] contient les résultats principaux du chapitre 4: la reconstruction de la matrice S à partir des règles de fusion et la preuve combinatoire de la conjecture d'Itzykson sur les invariants $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Une référence complémentaire sur ce sujet se trouve dans les Proceedings de l'Ecole de Printemps des Houches 1989 [35] consacrée à l'interface entre Théorie des Nombres et Physique.

Théories topologiques L'"équivalence" entre solutions des équations de Moore et Seiberg et théories topologiques tridimensionnelles rationelles projectives est présentée dans deux articles [35] et [37]. Mais, la présentation donnée dans l'article publié est *nettement* moins pédagogique que celle qui apparaît dans cette thèse.

Notes de cours Les notes du cours [36] que j'ai donné en 1991 à l'ENS avec L. Baulieu n'ont pas été publiées mais peuvent constituer une bonne introduction au sujet. J'y ai mis en particulier quelques remarques sur les théories topologiques bidimensionnelles. Je les tiens à disposition de toute personne intéressée.

Faucon, face le Ventoux
Mai 1992
Paris et Lyon, Été 1992

Notice Bibliographique.

Cette notice contient les principales références que j'ai utilisées ou qui traitent des sujets similaires. J'ai indiqué pour chacune d'elles ce que l'on pouvait y trouver et à quel endroit elle était importante. J'espère que cette notice pourra aider le lecteur désireux d'approfondir les questions abordées dans cette thèse.

Outils Généraux.

J'ai compilé ici quelques un des textes "de base" qui m'ont été utiles durant cette thèse.

Théories conformes.

L'article fondamental est celui de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [9]. C'est un passage obligé pour entrer dans le monde conformiste. Leur travail s'est alors prolongé entre 1984 et 1986 dans deux directions différentes:

- D'une part les problèmes *d'invariance* modulaire ont été introduits par Cardy [21] (sur le tore) dans le but de trouver le contenu en champs du modèle. Les premiers gros résultats sont dus à Capelli-Itzykson et Zuber [19] et Kato [102]. La conjecture sur les invariants des théories Z/NZ qui est prouvée dans le chapitre 4 apparaît dans [97].
- D'autre part, sous l'impulsion de Friedan [77], Segal [164] puis surtout après le choc consécutif au travail de Verlinde [181], les problèmes de *covariance* modulaire des théories conformes ont attiré l'attention.

Dans le premier cas, il s'agissait d'approfondir la *physique* des théories conformes en trouvant des réalisations de celles-ci; et dans le second cas, il s'agissait de comprendre la structure mathématique qui se cache derrière ces modèles, en particulier les aspects géométriques.

La base sur la théorie des surfaces de Riemann est extraite de [15]. Les fonctions thêta sont décrites dans [136] et j'ai beaucoup utilisé le dernier chapitre de [167] pour tout ce qui concerne les formes modulaires. Pour les fonctions elliptiques, je ne peux que renvoyer à [25] et à [186] qui sont très clairs.

Parmi les principaux textes sur l'invariance conforme, on notera les contributions de Cardy et Ginsparg dans les proceedings de l'Ecole des Houches de 1988. Le livre d'Itzykson et Drouffe [98] contient aussi beaucoup de choses. Enfin, un exposé extrêmement complet et pédagogique se trouve dans la thèse de Dijkgraaf [42] que je conseille vivement.

Topologie.

Ces références apparaissent principalement dans le chapitre 6.

Pour les groupes de tresses: [13] est *la* référence sur le sujet mais on consultera avec profit [12] et [11].

Tout ce que vous désirez savoir sur la chirurgie se trouve dans [104] et [61]. Ce dernier est de loin le mieux adapté à la construction des théories topologiques tridimensionnelles.

Le problème de la signature des variétés quadridimensionnelles est discuté dans [4] et [118].

La théorie des scindements de Heegaard est décrite dans [173] et le résultat concernant les groupes de difféomorphismes qui s'étendent d'une surface à un tore plein qui la borde se trouve dans [175].

Bases de la théorie nouvelle.

Vers 1988-1990 se sont dessinées les bases d’une vision plus globales des théories de champs et en particulier des théories topologiques et conformes. L’article primordial est celui de Segal [164] qui s’était inspiré de Friedan [78] [77] qui fut un des premiers à explorer la possibilité de définir les théories conformes sur des surfaces de topologie quelconque et à souligner l’importance de l’espace des modules. Le pas important fut franchi par Verlinde qui dans l’article [181] donna une expression des règles de fusion en termes de la matrice S décrivant les transformations modulaires des caractères sur le tore. A l’époque, Verlinde ne savait pas démontrer sa conjecture et cela motiva les travaux de Moore et Seiberg sur les aspects modulaires des théories conformes.

Travaux de Moore et Seiberg.

J’ai intensément utilisé les articles suivants:

- L’article original [129].
- L’article sur le théorème de naturalité [131] dont une version faible¹⁴ apparaît dans [44].
- Les deux articles les plus complets: [130] et [132] qui contiennent d’une part une “démonstration” du théorème de complétude pour le premier, d’autre part, de nombreuses relations que l’on peut déduire des identités fondamentales.

Catégories et Théorie Quantique des Champs.

L’article original est celui de Segal [164] qui développe l’axiomatique dans le cas des théories conformes et seulement dans ce cas. Plusieurs versions de ce texte ont circulé. Celle que j’ai lue n’est pas publiée. On trouvera dans les proceedings du congrès de Swansea (1988) une version moins riche [165] mais plus inspirée des idées de Verlinde.

Peu de temps après, Atiyah a proposé [3] une généralisation de ces idées pour les théories topologiques. Je n’ai eu connaissance de ce texte que vers 1991. Je ne sais pas précisément si nos axiomes sont équivalents.

Dijkgraaf et Witten ont aussi donné une version des axiomes de la théorie des champs basée sur les catégories: [46].

Indépendamment, j’ai proposé une axiomatique de la théorie des champs inspirée de Segal. J’ai de plus développé le concept d’équivalence entre théories des champs au niveau catégorique. Enfin, j’ai introduit la notion de localité à la frontière qui joue un rôle clef dans l’étude des représentations de la Tour modulaire (voir chapitre 7).

Théories topologiques.

L’essentiel des idées est dû à Witten. Il fut le premier à introduire la notion de théorie des champs [190] et en 1988, il donna une interprétation tridimensionnelle du polynôme de Jones en utilisant la théorie de Chern-Simons [192]. Dans cet article, la formule de Verlinde 3.223 est redémontrée par des arguments purement tridimensionnels. Witten *conjecture* aussi que toutes les équations de Moore et

¹⁴Qui est essentiellement celle donc j’ai besoin au chapitre 4 de ma thèse.

Seiberg peuvent se démontrer tridimensionnellement et qu’elles suffisent à définir une théorie topologique tridimensionnelle.

De manière contemporaine et indépendante, Kontsevitch a obtenu un résultat tout à fait analogue [111].

D’un autre côté, un travail similaire avait été mené à terme par Reshetikhin et Turaev sur les invariants topologiques de graphes décorés et munis d’un “framing” dans S_3 : [152]. Ce travail est à mettre en regard de l’article où Witten introduit des graphes trivalents dans la théorie de Chern-Simons [191] et relie les fonctions de corrélations associées aux matrices F et $B(\pm)$ de Moore et Seiberg.

Travaux contemporains autour des mêmes thèmes.

Le résultat important de cette thèse est une reconstruction *explicite* d’une théorie tridimensionnelle projective topologique à partir de toute solution des équations de Moore et Seiberg. Ceci prouve les conjectures de Witten.

Un certain nombre de travaux traitent des mêmes idées. Voici ceux dont j’ai eu connaissance. Bien entendu, cette liste n’est pas exhaustive, j’ai tenté de ne citer que les articles que j’avais réellement consultés.

Théories topologiques tridimensionnelles.

Beaucoup de gens ont dit qu’une théorie topologique tridimensionnelle donnait une solution des équations de Moore et Seiberg mais je n’ai pas vu de preuve publiée. La nécessité des hypothèses simplificatrices introduites au chapitre 5 n’est mentionnée nulle part.

En ce qui concerne la reconstruction d’une théorie topologique tridimensionnelle à partir d’une solution des équations de Moore et Seiberg:

- Pour des variétés à bord mais non décorées par des graphes trivalents, le premier article remonte à Kontsevitch [111]. La méthode utilisée repose sur la théorie de Cerf.
- Reshetikhin et Turaev [151] ont utilisé une méthode par chirurgie pour définir la théorie topologique en partant d’une algèbre de Hopf. Comme on ne sait pas si derrière toute solution des équations de Moore et Seiberg se cache une telle algèbre, on ne peut pas considérer que nos résultats sont équivalents.

Dans le cas de graphes plongés dans la sphère, on doit citer [152].

Les notions d’algèbre de Hopf et d’algèbre de quasi-Hopf ont été utilisées (et même inventées dans le second cas) par Drinfeld. Les deux articles fondamentaux sur le sujet sont respectivement [?] et [52]. Récemment, Drinfeld s’est intéressé à la tour de Teichmüller dans une optique quelque peu similaire aux allusions du chapitre 7: [53].

- D’autres travaux tournent autour des mêmes idées mais dans des cas particuliers: Lickorish [121], Altschüler et Coste [30]. Les auteurs de cette dernière référence signalent que leurs théories topologiques donnent des représentations *vraies* des groupes modulaires. Ceci est compatible avec $c \equiv 0 \pmod{8}$ qui apparaît dans [44] et avec la formule pour le cocycle que je donne dans le chapitre 6. J’ai enfin reçu un travail de P. Vogel avec ses collaborateurs [14] qui semble préciser un peu plus les questions de framing de la variété tridimensionnelle.

- Fröhlich et ses collaborateurs ont également écrit deux articles sur le sujet: [70] et [72]. Ces articles discutent d’une part l’exemple de la théorie de Chern-Simons et d’autre part, le problème général de la reconstruction d’une théorie topologique en dimension trois à partir d’une solution des équations de Moore et Seiberg. Le cas de graphes dans la sphère est traité complètement.
- La méthode utilisant la théorie des scindements de Heegaard a été utilisée par Kohno [110] dans le cas des théories déduites du modèle de Wess-Zumino-Witten de groupe $SU(2)$, et par Crane [28] de manière générale mais encore imprécise. La partie correspondante de ma thèse est tirée d’un article que je n’ai pas publié [33].
- Enfin, j’ai reçu très récemment les articles de S. Piunikhin qui a tenté de faire la synthèse entre les différentes méthodes de construction des théories topologiques tridimensionnelles. Il a montré dans [141] que les approches de Kontsevitch, de Crane et par chirurgie donnent la même théorie des champs. Dans [142] est examinée l’équivalence entre l’approche de Reshetikhin et Turaev par les groupes quantiques et l’approche par les théories conformes.

Théories topologiques bidimensionnelles.

Ceci concerne l’Appendice B du chapitre 1 et le chapitre 7. La théorie de Higgs bidimensionnelle a dû être résolue par pas mal de monde mais je ne connais pas de référence. Witten semble avoir travaillé sur le sujet en 1991, mais je n’ai pas de référence.

En ce qui concerne le modèle de WZW jaugé, l’action apparaît dans [82] et à ma connaissance, Verlinde est le premier à avoir remarqué que c’était une théorie topologique: [183].

Les résultats principaux que j’ai obtenus sont une résolution explicite de la théorie de Higgs et de la théorie de Yang-Mills bidimensionnelle mais aussi une correspondance qui à partir de toute théorie topologique tridimensionnelle déduite des solutions des équations de Moore et Seiberg permet de construire une théorie topologique bidimensionnelle non projective. Cette correspondance n’a pas été publiée à ma connaissance.

Il convient de mentionner les travaux de Krichever [112] et Dubrovin [54] sur les théories bidimensionnelles mais je ne sais pas encore ce que l’on peut tirer du mélange entre ces travaux et les miens.

Chapitre 1

Approche Fonctorielle des Théories Quantiques de Champs Géométriques

Sauter à pieds joints sur ces calculs, grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes, telle est, selon moi la mission des géomètres futurs.

E. GALOIS.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche des Théories Quantiques de Champs Géométriques (TQCG) par la théorie des catégories. Cette formulation permet de se placer au niveau algébrique dès le début et de raisonner sans considérer un modèle particulier. Ceci est parfaitement adapté au programme de classification des TQCG invariantes conformes bidimensionnelles. De même, ce formalisme est utilisable pour l'étude des TQCG dites topologiques.

Cette présentation fait ressortir ce qui définit une TQCG, i.e. la donnée des amplitudes de probabilité (dans le langage de la physique des particules). Plus précisément, une TQCG associe à une variété à bords et des conditions aux limites fixées, un nombre complexe: l'amplitude. En mécanique statistique¹, cette amplitude s'interprète comme la fonction de partition d'un système à conditions aux bords fixées. Les différentes conditions aux limites définissent les états de la TQCG et chaque variété interpolante, un opérateur. On est ainsi amené à considérer deux catégories, l'une dont les objets et les morphismes sont des variétés, l'autre à base d'espaces de Hilbert et d'opérateurs agissant sur ces espaces. La TQCG est la donnée d'un foncteur entre ces deux catégories qui possède de bonnes propriétés censées traduire les idées de localité, unitarité² etc chères aux physiciens.

Cette approche a été développée originellement par Segal [164][165], puis Atiyah [3], Dijkgraaf et Witten [46] et moi-même indépendamment. Il convient de rappeler qu'elle est assez différente de l'approche axiomatique ou de l'approche constructiviste. La plupart des constructions sont non perturbatives. La motivation principale de nos constructions est de fournir un pont entre géométrie et algèbre, et c'est pour cela que je parlerais de théories des champs géométriques.

Nous commencerons par introduire la notion de TQCG en utilisant l'intégrale fonctionnelle comme un outil heuristique. Ceci nous amènera tout naturellement à la définition d'une TQCG par la théorie des catégories. Nous examinerons la notion de symétrie dans ce contexte, la notion d'insertion. Puis, nous discuterons le problème des équivalences entre les différentes théories, faisant ainsi apparaître la notion

¹C'est à dire en théorie Euclidienne des champs.

²Et la causalité dans le contexte Minkowskien.

de transformation naturelle locale. Ces notions seront discutées sur l'exemple des théories topologiques avec comme illustration, le cas bidimensionnel. Enfin, on examinera la catégorie dont les objets sont des théories des champs et les foncteurs les transformations naturelles locales. Certains résultats décrits dans cette thèse se reformulent dans ce langage.

Le lecteur intéressé par un rappel de théorie des catégories trouvera tout le nécessaire dans l'appendice 1.A.

1.1 Intégrale Fonctionnelle.

Habituellement, une théorie des champs Lagrangienne est définie par une action $S_M[\varphi]$ qui est une fonctionnelle des champs. M est l'espace sur lequel les champs sont définis. Cela peut être une variété mais aussi un réseau ou un graphe comme dans le cas des modèles de mécanique statistique. Nous désignerons génériquement par φ l'ensemble des champs de la théorie. Ce sont des applications de M dans un espace cible X . On notera ∂M le bord de M . Si f est un ensemble de conditions aux bords pour les champs, on s'intéresse à la quantité suivante [196]:

$$(1.1) \quad Z[M, f] = \int_{\varphi=f \text{ on } \partial M} \mathcal{D}[\varphi] \exp(-S_M[\varphi]).$$

De sérieux problèmes apparaissent lorsque l'on essaye de définir la mesure d'intégration $\mathcal{D}[\varphi]$ dans le continu. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement. De même, notre écriture de la "condition aux limites" $\varphi = f \text{ sur } \partial M$. Une telle écriture est en général dépourvue de sens mais nous signifions simplement que dans le cas de systèmes admettant une formulation "Hamiltonienne", il est possible de donner un sens convenable à cette écriture.

Dans le cas des modèles de mécanique statistique, M est un graphe ou un réseau et les champs sont des variables discrètes. L'intégrale 1.1 est donc remplacée par une somme. A chaque condition aux bords f , on associe un vecteur d'un espace de Hilbert noté $|f\rangle$. Nous désignons par $(|f\rangle)_f$ une base de l'espace considéré. Si ∂M est considéré comme bord sortant de M , alors on associe à M un vecteur $|M\rangle$ de l'espace des états et nous noterons $Z[M, f] = \langle f|M\rangle$.

Un exemple de théorie continue est fourni par notre mécanique quantique habituelle, où $M = [t_i, t_f]$, $f = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f\}$ et selon Feynman [62]:

$$(1.2) \quad Z[[t_i, t_f], (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f)] = \int_{\substack{\mathbf{r}(t_i)=\mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}(t_f)=\mathbf{r}_f}} \mathcal{D}[\mathbf{r}(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_c[\mathbf{r}(t)]\right)$$

n'est autre que l'amplitude de probabilité pour la particule de passer de $\mathbf{r}_i$ à $\mathbf{r}_f$ entre les instants t_i et t_f , notée d'ordinaire³:

$$\langle \mathbf{r}_f, t_f | \mathbf{r}_i, t_i \rangle$$

élément de matrice de l'opérateur évolution entre t_i et t_f . les configurations physiquement inéquivalentes sont les positions de la particule $\mathbf{r}$.

D'une manière générale, la définition dans le continu de $Z[M, f]$ est un peu délicate. Tout d'abord, dans la théorie des champs, M est de dimension d et son bord, s'il est non vide, est de dimension $d-1$. Il importe de bien tenir compte des symétries du système et de définir la mesure de façon à ne pas compter

³Ici $[t_i, t_f]$ possède un bord sortant et un bord entrant...

plusieurs fois des configurations physiquement équivalentes. On parle de fixation de la jauge [99, Chapitre 9, paragraphe 9.3]. Nous en verrons quelques exemples. Ensuite, la restriction $\varphi|_{\partial M}$ n'est pas une notion évidente à définir même dans des cas bien connus comme la théorie de Chern-Simons [183]. Ainsi, il est parfois possible de se ramener à un système hamiltonien. Les conditions au bord sont alors les valeurs physiquement inéquivalentes des polarisations du système (en général un quotient approprié de l'espace des phases). L'espace des états est l'espace des fonctions de carré sommable sur ce quotient.

D'autres modèles sont moins faciles à étudier; ce sont les théories dites *cohomologiques* pour lesquelles l'action est un invariant topologique du champ $\varphi : M \rightarrow X$. La théorie est alors définie par la procédure de fixation de la jauge qui permet de se ramener à des intégrales sur des espaces de modules comme [190] [8]:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{A}_M}{\mathcal{G}_M}$$

où $\mathcal{G}_M$ est le groupe de jauge approprié et $\mathcal{A}_M$ l'espace des configurations du champs de jauge. Signalons que ces modèles sont encore en cours d'étude.

Dans ces deux cas, une intégrale fonctionnelle comme 1.1 apparaît comme un élément de matrice d'un opérateur. Pour toute variété M de dimension d , nous considérerons qu'elle possède un bord entrant et un bord sortant éventuellement vide. Soient N_1 et N_2 ces variétés, nous dirons que M interpole entre N_1 et N_2 . Enfin M est orientable, munie d'une orientation et $N_{1,2}$ héritent d'une orientation induite. Si $\hat{N}$ désigne N renversée d'orientation, alors $\partial M = N_1 \cup \hat{N}_2$. Si N est un "bord", nous lui associons un espace des états H_N . Si M est une variété qui interpole entre N_1 et N_2 , on lui associe un opérateur $\phi[M] \in \mathcal{L}(H_{N_1}, H_{N_2})$ que l'on appelle un "opérateur d'évolution" par référence à la mécanique quantique. Ses éléments de matrice sont les amplitudes de transition entre deux conditions aux limites sur N_1 et N_2 . Cette variété M doit être munie d'un peu plus de structure. En effet, une condition aux limites sur N est une application de N dans X mais nous devons préciser comment N se plonge dans M . En conséquence, il est indispensable de se donner un paramétrage de ∂M . C'est un difféomorphisme de ∂M dans $N_1 \cup \hat{N}_2$ qui est un isomorphisme entre la structure de sous-variété de $\partial M \subset M$ et celle de $N_1 \cup \hat{N}_2$. En conséquence, l'opérateur est associé à une variété interpolante à bords paramétrés⁴. Cette idée est au centre de la définition que nous donnerons dans la prochaine section.

Pour le moment, nous n'avons rien imposé à notre théorie des champs. Toutefois, les théories que nous considérerons proviennent d'un formalisme Lagrangien ou d'un modèle de mécanique statistique possédant des interactions à courte portée. On s'attend donc à ne considérer que des théories locales. Ceci se traduit très simplement en termes d'intégrales fonctionnelles. Soient M_1 et M_2 deux variétés de bord partiellement isomorphes $N \subset \partial M_{1,2}$ ⁵. Si on dispose d'un formalisme Lagrangien, alors:

$$(1.3) \quad S_{M_1 \sharp M_2}[\varphi] = S_{M_1}[\varphi_1] + S_{M_2}[\varphi_2]$$

où $M_1 \sharp M_2$ est obtenue en recollant M_1 et M_2 le long⁶ de N ! Dans ce cas, en désignant par $N_{1,2}$ les complémentaires de N dans $\partial M_{1,2}$, alors:

$$(1.4) \quad Z[M, f] = \int_{\mathcal{D}[g]} \mathcal{D}[g] Z[M_1, f_1] Z[M_2, f_2]; \quad f_{1,2} = f \text{ sur } N_{1,2}, \quad f_{1,2} = g \text{ sur } N.$$

⁴Attention, ceci diffère du choix d'un atlas sur le bord de M . Par contre, si on dispose d'un atlas sur $N_{1,2}$, la composante correspondante de ∂M se trouve automatiquement munie d'un atlas.

⁵Le lecteur rigoureux aura noté l'abus de notation que nous avons fait ici: $\partial M_{1,2}$ contiennent des parties isomorphes à N mais pas N elle-même!

⁶Les bords étant munis de paramétrisations, l'isomorphisme de recollement est entièrement fixé!

Dans le contexte de la mécanique quantique, cette formule se réécrit sous la forme:

$$\hat{U}(t_1, t_3) = \hat{U}(t_2, t_3) \circ \hat{U}(t_1, t_2)$$

On a donc sommé sur tous les états pouvant se propager au travers de la surface de recollement. Bien sûr, la mesure $\mathcal{D}[f]$ doit être convenablement définie, de manière à ce que la relation 1.4 soit vérifiée. Nous en verrons des exemples plus tard.

L'équation 1.4 suggère que le produit scalaire sur H_N s'interprète aussi comme un recollement de deux variétés. Considérons en effet M et M' qui interpolent entre $\emptyset$ et N . A chacune de ces variétés, nous associons un état de H_N : $|M\rangle$ et $|M'\rangle$. Alors, si $\hat{M}$ est la renversée d'orientation de M , on s'attend à ce que $Z[\hat{M}, f] = (Z[M, f])^*$. A $\hat{M}$ est associé un élément de $H_{\hat{N}}$. Il est naturel d'identifier $H_{\hat{N}}$ avec le dual topologique de H_N . Finalement $Z[M' \sharp \hat{M}] = \phi[\hat{M}](|M'\rangle)$ qui s'écrit:

$$\begin{aligned} Z[M' \sharp \hat{M}] &= \int_f \mathcal{D}[f] Z[\hat{M}, f] Z[M', f] \\ &= \int_f \mathcal{D}[f] Z[M, f]^* Z[M', f] \end{aligned}$$

et que l'on interprétera comme le produit scalaire de $|M\rangle$ et $|M'\rangle$: $\langle M'|M\rangle$, antilinéaire par rapport à la première variable et linéaire par rapport à la seconde. Nous pouvons résumer cela par la relation de fermeture:

$$1 = \int_f \mathcal{D}[f] |f\rangle \langle f|$$

1.2 Définition axiomatique d'une TQCG.

Nous pouvons maintenant donner la définition axiomatique d'une TQCG qui a pour but de *formaliser* les intuitions exposées dans la précédente sous-section. Comme nous l'avons indiqué précédemment, une TQCG est définie comme un foncteur entre une catégorie de variétés et une catégorie algébrique. La première catégorie décrit tous les espaces temps possibles comme des cobordismes paramétrés entre les espaces (conçus comme sections à temps fixé). La seconde fournit les espaces des états de la TQCG et les opérateurs d'évolution associés aux différents espaces-temps possibles. Nous allons définir précisément ces deux catégories puis donner la définition d'une TQCG comme "foncteur modulaire". On abordera ensuite les différentes notions importantes de la TQCG: insertions d'opérateurs, symétries. Dans cette section, nous donnerons la définition d'une TQCG en d dimensions.

1.2.1 Catégories de variétés.

Nous noterons génériquement une telle "catégorie" **Ma** dans toute la suite de cette thèse. Les puristes remarqueront à la lecture de ce qui va suivre que dans certains cas, les structures que nous considérerons n'ont pas d'unité. Néanmoins, *par abus de langage*, nous continuerons à parler de catégories.

Pascal Tran-Ngoc-Bich m'a fait remarqué que la notion de cobordisme paramétré se trouve déjà présente dans [125]. Le lecteur qui ne serait pas familier avec les notions de variété, d'orientation et de structure, topologique, différentielle et autres est invité à consulter l'ouvrage précédent et [126] ainsi que [41] pour plus d'information. Les bases de topologie algébrique se trouvent dans [86] par exemple.

Une catégorie est définie par la donnée de ses objets et morphismes [122]. Ici, nous supposons toutes les variétés considérées munies d'une structure particulière. On pourra se limiter au cas des variétés

différentielles (théories topologiques) ou Riemanniennes (théories conformes)... Toutes nos variétés seront supposées orientables et compactes [41]. Le choix d’une orientation fait partie de la structure considérée. Le bord de M est muni de l’orientation induite.

Avant de définir **Ma**, rappelons quelques notions utiles par la suite. Les objets de **Ma** seront des variétés de dimension $d - 1$ munies d’une certaine structure qui inclut au moins la donnée d’une orientation. Le renversement d’orientation est noté $N \mapsto \hat{N}$. Considérons N et N' deux tels objets, on appellera *cobordisme paramétré* ou *variété interpolante* entre N et N' tout triplet (M, f, f') où M est une variété de bord $N \cup N'$ et f, f' des “paramétrisations” de N, N' respectivement. Nous supposons que les orientations induites par M sur son bord transforment (f, f') en homéomorphisme préservant l’orientation de ∂M sur $N \cup \hat{N}'$. C’est ce que nous sous-entendrons par $\partial M = N \cup \hat{N}'$. N est appelée variété entrante et N' variété sortante. La donnée d’une paramétrisation du bord permet de recoller les variétés. La variété recollée est définie par un système de cartes. Supposons que l’on veuille recoller M et M' de bords isomorphes à N . Notons $f : \partial M \rightarrow N$ et $f' : \partial M' \rightarrow N$ les paramétrisations des frontières de M et M' . Soit $\{(\varphi_i, U_i)\}$ un système de cartes pour M et (φ'_j, U'_j) pour M' . Soit g un homéomorphisme de N préservant l’orientation. On recolle M et M' via $h = f'^{-1} \circ g \circ f$. Soit (φ_i, U_i) une carte au voisinage de la frontière de M , h envoie ∂U_i sur $\partial U'_j$ et on note h_{ij} son expression dans ces cartes. Alors, considérons l’espace X topologique obtenu en recollant M et M' via l’identification à la frontière [86]: $x \equiv y$ si et seulement si $h(x) = y$, φ_i et φ'_j définissent une application de l’ouvert recollé de U_i et U'_j via h à valeurs dans le recollé de $\varphi_i(U_i)$ et de $\varphi'_j(U'_j)$ via h_{ij} . Avec (φ_i, U_i) et (φ'_j, U'_j) sur $M \setminus \partial M$ et $M' \setminus \partial M'$ respectivement comme carte, on obtient un atlas de la variété $M \#_g M'$. Suivant les conditions de compatibilité imposées à l’atlas [41], la structure sera plus ou moins riche (topologique, différentiable, conforme...). On désignera par $M \# M'$ le cas où $g = 1_N$. Remarquons que la prescription choisie pour les orientations permet de munir $M_1 \#_g M_2$ d’une orientation qui est compatible avec celles de M_1 et M_2 . Enfin, on notera $U_i(N)$ un cobordisme ayant le type topologique d’un cylindre s’appuyant sur N . Ici t désigne le module pertinent de ce cylindre; par exemple, sa longueur dans le cas de la mécanique quantique. Le bord d’un tel cylindre est $N \cup \hat{N}$.

Pour chaque cobordisme paramétré $[M, f, f']$ qui interpole entre N et $\hat{N}'$, on définit $\hat{M}$ qui interpole entre N' et N et qui se trouve muni des paramétrisations f', f .

Pour considérer les symétries d’une TQCG, nous aurons besoin de la définition suivante qui prend en compte les bords de la variété:

Définition 1 Soient M et M' deux variétés interpolantes entre N_1 et N_2 , $\varphi_{1,2}$ les paramétrisations des bords $N_{1,2}$ de M (respectivement $\varphi'_{1,2}$ pour $N'_{1,2}$, bords de M') et f un difféomorphisme⁷ de M sur M' . On dira que f est un isomorphisme entre les variétés interpolantes si et seulement si on a la compatibilité aux bords:

$$\varphi_{1,2} = \varphi'_{1,2} \circ f|_{\partial M_{1,2}}, \quad \partial M_{1,2} = \varphi_{1,2}^{-1}(N_{1,2}).$$

On notera $M \simeq M'$ si M et M' sont isomorphes. Deux morphismes isomorphes sont deux présentations différentes d’un même objet géométrique. Enfin, il est utile de définir la notion d’isomorphisme faible:

Définition 2 Avec les notations de la définition 1, si $N = N_1 \cup N_2$, f est un isomorphisme faible si et seulement si:

$$\varphi' \circ f|_{\partial M} = \varphi$$

⁷ On appellera ainsi un isomorphisme pour la structure considérée, par référence au cas différentiel.

ce qui permet de ne pas distinguer les composantes du bord de M , c'est à dire les composantes entrantes et sortantes.

Nous pouvons définir **Ma**.

Définition 3 *Les objets d'une catégorie géométrique (ou de variétés) **Ma** sont des variétés sans bord de dimension $d - 1$. On suppose que le vide est un objet, et que l'union de deux objets est un objet. Si N est un objet, alors $\hat{N}$ est aussi un objet.*

*Les morphismes de **Ma** entre deux objets N et N' sont les cobordismes entre N et N' munis d'une paramétrisation du bord par $N \cup \hat{N}'$.*

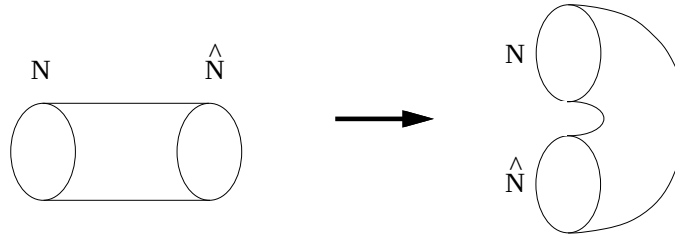
Soient M_1 et M_2 deux morphismes interpolant entre N_1 et N et N et N_2 respectivement, on définit $M_1 \# M_2$ comme la variété obtenue en recollant M_1 et M_2 via N .

*Enfin, si M est un morphisme, $\hat{M}$ est un morphisme appelé le renversé de M . Nous supposons que si M est un morphisme de **Ma**, alors toute variété interpolante faiblement isomorphe à M est un morphisme de **Ma**.*

L'inclusion de tous les morphismes faiblement isomorphes entraîne que **Ma** est stable par "transposition" des composantes connexes du bord de ses morphismes. La variété obtenue en recollant $Y \subset N$ (avec $Y \subset N'$) (respectivement via $U_i(Y)$) sera notée $M_{[Y]}$ (respectivement $M_{[Y, U_i(Y)]}$). C'est aussi un morphisme.

Donnons quelques exemples de cobordismes faiblement isomorphes à $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$: M est munie d'une orientation que nous noterons $\mathcal{O}$, l'orientation opposée étant $-\mathcal{O}$. Nous nous limitons ici au cas topologique qui sera le plus utilisé dans cette thèse.

- Tout d'abord, $\hat{M}$ est muni de l'orientation $-\mathcal{O}$ et interpole entre N_2 et N_1 .
- On définit ${}^tM$ qui interpole entre $\hat{N}_2$ et $\hat{N}_1$ en conservant la même orientation sur M mais en considérant que N_2 est le bord entrant et que N_1 est le bord sortant. Physiquement, cela revient à changer le sens du temps sur M ! Ce cobordisme est clairement faiblement isomorphe à M . L'application identité sur M réalise l'isomorphisme faible.
- On définit aussi $\bar{M}$ qui interpole entre N_2 et N_1 mais qui est muni de l'orientation $-\mathcal{O}$.
- Le cobordisme ${}^t(\hat{M})$ est isomorphe à $\overline{({}^tM)}$ et est faiblement isomorphe à $\hat{M}$. Il interpole entre $\hat{N}_1$ et $\hat{N}_2$.
- Si N est un objet de **Ma**, alors $N \times [0, 1]$ paramétré par $\varphi_0 : (x, 0) \mapsto x$ et $\varphi_1 : (x, 1) \mapsto x$ est faiblement isomorphe à un cobordisme paramétré qui interpole entre $N \cup \hat{N}$ et $\emptyset$ comme indiqué ci dessous:



Ces exemples seront utilisés par la suite.

Remarque : Strictement parlant, on ne définit pas vraiment une catégorie car on ne dispose pas en général d'élément unité. En effet, tout cylindre $U_t(N)$ possède une certaine structure: c'est le cas dans les théories conformes par exemple, où rajouter un anneau à une surface de Riemann avec frontière en change le module. Il n'y a que dans le cas topologique que le cylindre⁸ $N \times [0, t]$ n'a pas de structure: $M\sharp(N \times [0, t]) \simeq M$ pour $N \subset \partial M$. Nous continuerons toutefois à parler de la catégorie **Ma** . $\square$

1.2.2 Catégories algébriques.

Nous noterons génériquement de telles catégories **Sp** dans la suite du texte.

En fait, **Sp** est l'analogue algébrique de **Ma** . Il est naturel de penser que les objets de **Sp** vont être des espaces de Hilbert, et les morphismes des applications linéaires entre ces espaces. On aimerait disposer de l'analogue de l'union pour les variétés. Compte tenu du fait que ces espaces vont être les espaces des états de la TQCG, ils représentent des conditions aux limites pour le système physique étudié. Les conditions aux limites relatives à deux composantes connexes différentes de la frontière de l'espace temps sur lequel on travaille doivent être indépendantes. L'espace associé est donc un produit tensoriel. Ceci revient déjà à imposer la *localité* à notre théorie: on comprend bien que si la dynamique est locale, les conditions aux limites sur un bord n'aient pas d'influence sur les conditions aux limites possibles sur l'autre bord. Le recollement des variétés trouve son pendant dans la composition des applications linéaires. La trace doit également être prise en compte ainsi que la conjugaison hermitienne. Finalement, la définition se formule comme suit:

Définition 4 *Les objets d'une catégorie algébrique **Sp** sont des espaces de Hilbert à isomorphisme près. Le corps des complexes $\mathbb{C}$ est un objet. Les morphismes sont des applications linéaires entre ces espaces.*

*Nous supposons que **Sp** est stable par dualisation et produit tensoriel aussi bien au niveau des espaces que des morphismes. La loi de composition des morphismes est la composition usuelle des applications linéaires. Enfin, tous les opérateurs sont supposés à trace et toute trace partielle d'un morphisme est encore un morphisme. Enfin l'adjoint d'un morphisme existe et est encore un morphisme.*

Nous noterons H^* le dual topologique de H et $u^\dagger$ l'adjoint de u . Bien sûr, nous ne supposons pas a priori que l'identité 1_E d'un objet E fait partie des morphismes de E dans lui même: il n'existe pas forcément d'unité. Ces définitions étant posées, il est possible de définir une théorie quantique des champs géométrique en toute généralité.

1.2.3 Foncteurs modulaires et Théorie Quantique des Champs Géométrique.

La notion de foncteur modulaire n'est pas la notion de TQCG la plus forte car elle n'incorpore pas le fait que les conditions aux limites des champs soient des données *locales*. Nous verrons dans la section 1.2.6 que la *localité à la frontière* permet de rendre de précieux services dans l'étude de la notion d'*insertion d'opérateurs*. La notion de foncteur modulaire permet de rendre compte de la localité au niveau global.

Foncteurs modulaires.

Supposons données une catégorie **Ma** de variétés et une catégorie algébrique **Sp** , on définit alors la notion de foncteur modulaire:

⁸Muni des paramétrisations triviales au bord.

Définition 5 On appelle *foncteur modulaire*⁹ tout foncteur Φ de $\mathbf{Ma}$ vers $\mathbf{Sp}$ tel que, si pour tout objet N de $\mathbf{Ma}$, $\Phi(N)$ est noté H_N et si $\Phi(M)$ est noté $\phi[M]$ pour tout morphisme M , alors:

$$(1.5) \quad H_{\hat{N}} = (H_N)^*, \quad \phi[\hat{M}] = (\phi[M])^\dagger$$

$$(1.6) \quad H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}, \quad \phi[M \cup M'] = \phi[M] \otimes \phi[M']$$

$$(1.7) \quad H_\emptyset = \mathbb{C}$$

$$(1.8) \quad \phi[M_{[Y]}] = \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M]).$$

et H_N ne dépend que de la topologie de N .

Certaines de ces propriétés ont un sens physique immédiat. Ainsi, les conditions aux limites possibles pour les champs sur une frontière donnée doivent être indépendantes de la paramétrisation de cette frontière. En conséquence, H_N ne dépend que de la topologie de N . La première propriété exprime qu'un changement d'orientation change toutes les amplitudes en leur conjuguées. Enfin, la seconde propriété et la fonctorialité expriment la localité de la théorie. La dernière propriété est aussi appelée le “gluing axiom” dans la littérature anglo-saxonne. Remarquons que la propriété clef est sans doute la fonctorialité qui s'illustre par le dessin suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 N_1 & \boxed{M_1} & | & \boxed{N_2 \quad M_2} & N_3 \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 & \phi[M_1] & & \phi[M_2] & \\
 H_{N_1} & \longrightarrow & H_{N_2} & \longrightarrow & H_{N_3} \\
 & & \phi[M_1 \sharp M_2] = \phi[M_2] \circ \phi[M_1] & &
 \end{array}$$

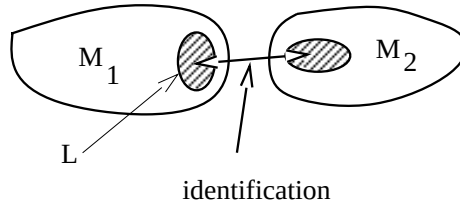
Définition 6 Une *théorie quantique des champs géométrique* est la donnée d'une catégorie de variétés $\mathbf{Ma}$, d'une catégorie algébrique $\mathbf{Sp}$ et d'un foncteur modulaire Φ entre $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$.

1.2.4 Localité à la frontière.

Comme nous l'avons mentionné, cela ne suffit pas tout à fait pour disposer d'une TQCG comme on les rencontre en physique. Ainsi, dans la formule “heuristique” 1.4, les conditions aux limites des champs sont en fait des données *locales* et on aimerait que l'équation 1.4 soit vraie quand on recolle deux variétés par une fraction de leur frontière avec bord éventuellement comme sur la figure ci-dessous et pas

⁹ *Petite étymologie de l'appellation incontrôlée “foncteur modulaire”*: C'est G. Segal qui le premier a introduit cette sémantique dans le contexte des théories conformes. Strictement parlant, sa définition était quelque peu différente de la nôtre. Comme nous le verrons au chapitre 3, Segal appelait foncteur modulaire l'association à toute surface de Riemann avec des cercles frontières marqués d'un bloc conforme d'une théorie invariante conforme bidimensionnelle rationnelle (TICR). Ce que nous appelons foncteur modulaire pour une TICR correspond en fait à l'association de la fonction de partition de la théorie sur la surface considérée. Le lecteur averti aura saisi la nuance...

seulement via deux composantes connexes de leurs bords respectifs (ce que traduit la fonctorialité).



C'est une sorte de localité à la frontière. Pour anticiper quelque peu, signalons que dans le chapitre 7, nous donnerons une définition de la notion de tour modulaire ainsi qu'une définition de la notion de représentation de cette Tour. La localité à la frontière joue un rôle très important dans cette notion.

Enfin, il serait souhaitable d'étendre le formalisme de la TQCG que nous avons proposé au cas où les objets de la catégorie $\mathbf{Ma}$ sont eux mêmes des variétés à bords. Malheureusement, ce travail n'a pas encore été effectué. Je ne connais pas d'exemple où apparaisse clairement la notion d'espace des états associé à une variété avec bord. Introduire cette notion sans le guide précieux d'un exemple me paraît donc dangereux. En revanche, dans le cas des théories des champs topologiques que nous construirons au chapitre 6, la localité à la frontière apparaît *naturellement*. C'est pour cela que j'ai tenté de systématiser cette notion.

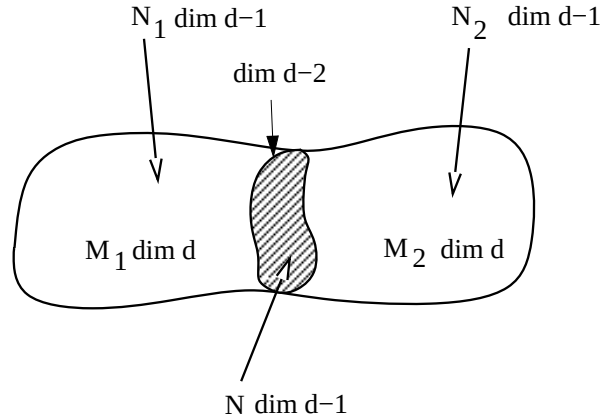
La mise en œuvre de cette idée permet de déterminer l'espace des états d'un bord compliqué par découpage.

Définition 7 *On dit qu'un foncteur modulaire est local à la frontière si et seulement si, pour tout objet N de $\mathbf{Ma}$ obtenu en recollant N_1 et N_2 , cobordismes paramétrés de dimensions $d - 1$ de bord L et $\hat{L}$ respectivement, il existe Δ_L cobordisme paramétré de bord $\hat{L}$, fonction de L seulement tel que l'on dispose d'une isométrie de H_N dans $H_{N_1 \# \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \# N_2}$.*

Nous la noterons:

$$\psi_{N_1, N_2} : H_{N_1 \# N_2} \rightarrow H_{N_1 \# \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \# N_2}$$

Mais cela ne suffit pas à réaliser la formule 1.4 au niveau algébrique. Nous avons simplement dit que les conditions aux limites étaient locales. Dans la situation ci dessous¹⁰:



¹⁰ M_1 interpole de $\emptyset$ à $N_1 \# N$ et M_2 de $\hat{N} \# N_2$ à $\emptyset$.

on impose qu'il existe une forme bilinéaire $\mathcal{Q}_N : H_{\hat{N} \# \Delta_L} \times H_{\Delta_L \# N}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, qui ne dépende que de N et telle que:

$$(1.9) \quad \psi_{N_1, N_2}(\phi[M_1 \# M_2]) = \mathcal{Q}_N(\psi_{\hat{N}, N_2}(\phi[M_2]), \psi_{N_1, N}(\phi[M_1]))_{H_{\Delta_L \# N}}$$

où la forme $\mathcal{Q}_N$ est évaluée sur $H_{\Delta_L \# N}$. Cette opération correspond bien à sommer sur tous les états intermédiaires se propageant à travers la variété N . C'est une sorte de "relation de fermeture". Nous imposons donc que ce crochet de dualité modifié $\mathcal{Q}_N$ provienne d'une forme sesquilinéaire définie positive sur $H_{\Delta_L \# N}$ notée

$$\mathcal{Q}_N \langle x | y \rangle$$

semilinéaire par rapport à la première variable, et

$$\mathcal{Q}_N \langle x | y \rangle = \mathcal{Q}_N(x^\dagger, y)$$

où $x^\dagger$ est la forme linéaire associée à x par le produit scalaire usuel sur $H_{N \# \Delta_L}$. Nous *interprétons* $\mathcal{Q}_N \langle . | . \rangle$ comme un produit scalaire d'états associés à N qui est une variété à bord. Toutefois, comme je l'ai déjà souligné, l'axiomatisation de cette idée reste à faire.

Comme nous voulons préserver cette image de la TQCG comme foncteur entre une catégorie géométrique basée sur des cobordismes et une catégorie algébrique, nous ne définirons pas directement d'espace des états associé à une variété à bords: le bord d'un bord est vide! La localité à la frontière est un moyen de contourner ce problème... Bien entendu, l'écriture de l'équation 1.9 suppose que $\hat{\Delta}_L = \Delta_{\hat{L}}$ et nous supposons en plus que:

$$(1.10) \quad \psi_{\hat{N}_2, \hat{N}_1} = {}^t(\psi_{N_1, N_2}^\dagger)$$

$$(1.11) \quad \mathcal{Q}_{\hat{N}}(x, y) = \mathcal{Q}_N(y^\dagger, x^\dagger)$$

qui assure la compatibilité avec le changement d'orientation. Dans la formule 1.10, ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ est le transposé de $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une dernière condition de compatibilité.

Supposons que l'on souhaite décomposer le bord N en $N = N_1 \# N_2 \# \dots \# N_p$. On note $L_{j, j+1}$ la frontière de N_j commune avec N_{j+1} . Dans ce cas, on peut envoyer l'état $\phi[M]$ créé par une variété interpolant entre le vide et N dans $H_{N_1 \# \Delta_{12}} \otimes H_{\Delta_{12} \# N_2 \# \Delta_{23}} \otimes \dots \otimes H_{\Delta_{p-1, p} \# N_p}$ en composant différents morphismes de localité à la frontière. Mais on doit s'assurer que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on procède. Le premier cas non trivial est $p = 3$ et dans ce cas, la condition de compatibilité est:

$$(1.12) \quad (\psi_{N_1, N_2 \# \Delta_{23}} \otimes \mathbf{1}) \circ \psi_{N_1 \# N_2, N_3} = (\mathbf{1} \otimes \psi_{\Delta_{12} \# N_2, N_3}) \circ \psi_{N_1, N_2 \# N_3}$$

Cette équation est clairement l'analogue d'une condition d'associativité. Le lecteur vérifiera trivialement par récurrence que cela permet de définir une application de localité à la frontière généralisée:

$$(1.13) \quad \psi_{[(N_j)_{j \in \langle 1, p \rangle}]} : H_N \longrightarrow H_{N_1 \# \Delta_{12}} \otimes \dots \otimes H_{\Delta_{p-1, p} \# N_p}$$

à partir des morphismes de localité à la frontière pour $p = 2$. Nous définissons:

Définition 8 Une TQCG est dite locale à la frontière si et seulement si le foncteur modulaire associé vérifie les équations 1.9, 1.10, 1.11 et 1.12.

Remarque : Les implications de cette propriété sont extrêmement fortes mais pas toutes claires pour moi actuellement. Comme nous le verrons plus tard, les théories topologiques rationnelles (TTR) construites à partir de solutions des équations de Moore et Seiberg sont effectivement locales à la frontière. Cette propriété joue même un rôle crucial pour certains aspects... En revanche, dans le cas des théories topologiques de Higgs bidimensionnelles, je ne sais pas si la localité à la frontière est vérifiée. Le brouillard est encore plus épais dans le cas des théories de type Donaldson étudiées par Witten [190]...

Bien sûr, les isométries de localité à la frontière, quand elles existent, ne sont pas surjectives comme on le verra sur des exemples.

Enfin signalons quelques points importants:

- Le calcul des espaces de Hilbert n’est facile qu’à basse dimension. En effet, dans ce cas, N peut se décomposer en un nombre relativement faible de morceaux élémentaires comme les surfaces qui se décomposent en pantalons¹¹.
- A ma connaissance, le calcul des espaces des états n’a pas été fait pour les théories topologiques à 4D considérées par Witten [190] et d’autres. Dans son travail, Witten suggère que les espaces des états des théories qu’il considère sont les espaces associés par A. Floer [64] à certaines variétés de dimension trois. Mais à ma connaissance, il n’est pas prouvé que la théorie de Donaldson-Witten admette une formulation en termes de foncteur modulaire...
- Toute variété 2D est le bord d’une variété à trois dimensions et de même, toute variété 3D est le bord d’une variété 4D mais en dimension élevée, ceci cesse d’être vrai. Il existe des variétés de dimension d qui sont pas des bords de variétés de dimension $d+1$. On ne doit donc pas attendre que les états qui vivent sur une telle variété de dimension d soient créés par des variétés de dimension $d+1$ la cobordant. Cette remarque renvoie au “postulat de simplicité” qui apparaît dans la section 5.3 du chapitre 5.

Hard is life... $\square$

1.2.5 Calculabilité dans une TQCG.

A ce stade, il est possible de donner quelques unes des méthodes utilisables pour le calcul des amplitudes dans une théorie des champs géométrique. Cela permet notamment d’illustrer l’utilité des axiomes énoncés ci-dessus. Nous allons également être naturellement conduit à la notion de symétrie.

Formalisme Hamiltonien.

Les propriétés imposées au foncteur Φ permettent de calculer facilement toutes les amplitudes dans une TQCG: l’idée de base est que la localité de la théorie permet d’insérer une base complète d’états chaque fois qu’on le souhaite. Rappelons toutefois que si l’on coupe un bord en deux parties non vides, il est nécessaire de disposer de propriétés supplémentaires pour continuer le calcul, comme la localité à la frontière!

Le “saucissonnage” d’une variété permet de retrouver l’approche Hamiltonienne. On souhaite par exemple calculer la fonction de partition d’une variété M sans bord.

¹¹Un pantalon est une sphère S_2 dont on a retiré trois disques disjoints.

Considérons pour cela une fonction de Morse¹² f sur la variété M [127], notons $t_0, \dots, t_n$ ses valeurs critiques. La fonction de Morse joue le rôle du temps dans notre problème. Soit $N_t = f^{-1}(t)$ une section à temps donné de M . $M(t) = f^{-1}(f(M) \cap]-\infty, t])$ décrit l'état du système à l'instant t . Nous supposons choisi un paramétrage de $N(t)$ qui varie continûment entre deux valeurs critiques de la fonction de Morse. $\phi[M(t)]$ est à valeurs dans H_{N_t} qui ne change que lorsque t croise une valeur critique de la fonction de Morse f . Si t_i et t_f encadrent une telle valeur critique, $\phi[f^{-1}([t_i, t_f])]$ est appelée *amplitude avec changement de topologie* [193]. Pour commencer, nous nous concentrerons sur l'évolution de $\phi[M(t)]$ entre deux valeurs critiques de f .

Dans ce cas très simple, nous fixerons le paramétrage de $N(t)$ de la manière suivante: au voisinage d'un point t , il existe $\epsilon > 0$ et un difféomorphisme h de $f^{-1}([t, t+\epsilon])$ sur $N(t) \times [t, t+\epsilon]$ tel que $f(h^{-1}(x, z)) = z$ pour tout $x \in N(t)$ et $z \in [t, t+\epsilon]$ (Théorème du collier [41]). On fixe alors un paramétrage arbitraire de $N(t)$ et par translation le long de la coordonnée z et via h^{-1} on en déduit un paramétrage de $N(t')$ pour tout t' .

Considérons alors $\hat{H}(t)$ défini par ¹³:

$$(1.14) \quad \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t).$$

où $\hat{U}(t) = \phi[M(t)]$. C'est une équation de Schrödinger pour l'état du système $\hat{U}(t)$ entre deux valeurs critiques de la fonction de Morse. Le Hamiltonien $\hat{H}(t)$ dépend de t et de M comme nous le verrons dans le contexte des théories conformes. Il dépend aussi des choix de paramétrage que nous devons faire. On retrouve donc l'approche usuelle entre les instants où la topologie change. La théorie est donc entièrement définie par la donnée de tous les opérateurs d'évolution et les amplitudes de changement de topologie. Nous verrons, dans le cas des théories topologiques¹⁴ que cet ensemble de données est très restreint. Par contre, dans le cas d'une théorie non topologique, ces données sont plus complexes: il existe beaucoup de cylindres inéquivalents au sens de la définition 1 et donc l'ensemble des opérateurs d'évolution est indexé par d'autres paramètres que t . Il en est de même pour les amplitudes avec changement de topologie ¹⁵.

Symétries de la TQCG.

Considérons l'ensemble des opérateurs agissant sur H_N qui commutent avec tout opérateur $\phi[M]$ pour $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N, N)$ sur N . Ce sont les symétries de la TQCG sur N . Nous verrons plus loin 1.3.1 comment les décrire de manière abstraite. Toutefois, parmi toutes ces symétries, certaines sont d'origine géométrique. Nous allons les décrire ici afin de définir l'action du groupe des difféomorphismes de N sur H_N .

Soit $g \in \text{Diff}_+(N)$ un difféomorphisme de N préservant l'orientation. Considérons alors $U_t(g, N, \varphi)$ le cylindre $N \times [0, t]$ paramétré par $\varphi : (x, 0) \mapsto \varphi(x)$ au bout entrant et par $g \circ \varphi : (x, t) \mapsto g(\varphi(x))$ à l'autre bout. Nous posons $\rho_{t, \varphi}(g) = \phi[U_t(g, N, \varphi)]$. Le lecteur vérifiera que:

$$(1.15) \quad \forall (g, h) \in (\text{Diff}_+(N))^2, \forall t, t' > 0, \quad \rho_{t', g \circ \varphi}(h) \circ \rho_{t, \varphi}(g) = \rho_{t+t', \varphi}(h \circ g)$$

¹²Ce qui suppose que l'on munit nos variétés d'une structure différentielle.

¹³Nous supposons qu'un tel objet existe, ce qui est le cas dans les exemples connus!

¹⁴Rapplons que pour considérer une fonction de Morse, une structure différentielle est nécessaire et que les catégories topologiques et différentielles ne coïncident que en dimension assez basse.

¹⁵Une bonne illustration de ces remarques est fournie par les théories conformes à deux dimensions où les structures conformes inéquivalentes d'un anneau sont paramétrées par un nombre *complexe* de module inférieur strictement à 1!

Lorsque t tend vers 0, $\rho_{t,\varphi}(g)$ tend vers $\rho_\varphi(g)$. Nous supposons comme d'habitude ne pas avoir de problèmes de convergence et donc 1.15 devient:

$$\forall (g, h) \in (\text{Diff}_+(N))^2, \quad \rho_{g \circ \varphi}(h) \circ \rho_\varphi(g) = \rho_\varphi(h \circ g)$$

Nous ne disposons pas immédiatement d'une représentation de $\text{Diff}_+(N)$ sur l'espace H_N . En effet, $\rho_\varphi(g)$ dépend de φ : cet opérateur représente l'action du changement de paramétrage $\varphi \mapsto g \circ \varphi$:

$$(1.16) \quad \phi[M_1] \circ \rho_\varphi(g) \circ \phi[M_2] = \phi[M_2 \sharp_g M_1]$$

de manière évidente.

L'introduction du groupe $\text{Diff}_+(N)$ peut sembler quelque peu artificielle mais nous venons simplement de formuler la notion de changement d'observateur. En effet, en théorie des champs, comme partout, on doit préciser quel est l'observateur qui regarde le système. Pour parler de symétrie, il faut¹⁶ que deux observateurs puissent comparer ce qu'ils observent. Ainsi s'introduit la notion de *carnet de notes* commun aux deux observateurs.

L'introduction de cobordismes paramétrés illustre très bien notre propos: deux observateurs disposent d'un modèle abstrait pour l'espace, en l'occurrence la variété intrinsèque N , ils observent la même réalité physique, en l'occurrence le bord d'un espace-temps M ($\partial M \simeq N$); mais de deux points de vue différents, c'est à dire via les paramétrisations φ et φ' qui vont de ∂M dans N .

Dans la théorie quantique des champs, on peut considérer deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ qui observent l'espace-temps M qui interpole entre $\emptyset$ et N (pour fixer les idées) de deux manières différentes. Ainsi $\mathcal{O}$ utilise une paramétrisation φ pour ramener ∂M au carnet de note commun N , et $\mathcal{O}'$ utilise une autre paramétrisation φ' . Les deux observateurs considèrent donc deux morphismes éventuellement distincts de la catégorie géométrique: M_φ pour $\mathcal{O}$ et $M_{\varphi'}$ pour $\mathcal{O}'$. Dans le cas qui nous intéresse ici, l'état du système est un vecteur d'un espace des états et pour que $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ puissent comparer ce qu'ils perçoivent, ils vont associer à M un élément d'un même espace des états. Plus précisément si $\phi_{\mathcal{O}}[M]$ (respectivement $\phi_{\mathcal{O}'}[M]$) désigne l'état de M vu par $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}'$) et clairement:

$$(1.17) \quad \phi_{\mathcal{O}}[M] = \phi[M_\varphi] \text{ et } \phi_{\mathcal{O}'}[M] = \phi[M_{\varphi'}]$$

Un même foncteur modulaire nous donne tous les états d'un même espace-temps¹⁷ vu par différents observateurs. Alors, comme nous l'avons vu, si $\varphi' = g \circ \varphi$, nous pouvons écrire:

$$(1.18) \quad \phi_{\mathcal{O}'}[M] = \rho_\varphi(g)(\phi_{\mathcal{O}}[M])$$

Il est clair que $\rho_\varphi(g)$ dépend de φ . Pour le voir, considérons le cas d'un système ayant une symétrie de révolution, il est clair que $\rho_\varphi(g)$ où g est une rotation agira trivialement sur l'état du système quand l'axe de la rotation coïncide avec l'axe de la symétrie de révolution, mais n'agira pas trivialement dans le cas contraire. Mais dans le cas de systèmes physiques réels, où la brisure de symétrie par rotation est induite par un champ extérieur, $\rho_\varphi(g \circ h) = \rho_{h \circ \varphi}(g)$ si h est une symétrie du système relativement à l'observateur φ . L'opérateur $\rho_{h \circ \varphi}(g)$ n'est donc pas égal à $\rho_\varphi(g)$. Cette subtilité provient du fait que nous avons défini l'action de $\text{Diff}_+(N)$ sur la variété abstraite N , laquelle peut se plonger de bien des manières dans ∂M .

¹⁶Dans le point de vue passif, c'est à dire celui d'Einstein.

¹⁷Au sens de variété de dimension d , *non munie* d'une paramétrisation.

Remarque : En fait, nous verrons que dans le cas des théories topologiques, ρ_φ est indépendant de φ . Dans ce cas, nous montrerons que l'on dispose d'une représentation du "groupe modulaire" de N : $\text{Diff}_+(N)/\text{Diff}_{+,0}(N)$ quotient du groupe des difféomorphismes de N préservant l'orientation par les difféomorphismes connectés à l'identité (voir le théorème 2) $\square$

Nous pouvons alors définir les symétries *d'espace-temps* d'une TQCG.

Définition 9 *On appelle symétrie d'espace-temps sur N d'une TQCG, les difféomorphismes g de N tels que $\rho_\varphi(g) = \mathbf{1}_{H_N}$.*

L'ensemble des symétries d'espace-temps sur N est noté $\text{Sy}(N, \varphi)$. Bien sûr, par localité:

$$\text{Sy}(N_1 \cup N_2, (\varphi_1, \varphi_2)) = \text{Sy}(N_1, \varphi_1) \times \text{Sy}(N_2, \varphi_2)$$

et $\text{Sy}(\hat{N}, \varphi) = \text{Sy}(N, \varphi)$.

Calcul par chirurgie.

Cette technique de calcul sera en fait surtout utile dans le cas des théories topologiques. Définissons ce qu'est une chirurgie [104]:

Définition 10 *Soient M une variété de dimension d et N une sous variété de dimension $d - 1$ plongée dans M et la séparant en deux composantes connexes M_+ et M_- . Soit g un difféomorphisme de N . On définit la chirurgisée de M par rapport à (N, g) comme étant la variété obtenue en recollant M_- à M_+ via g .*

Plaçons nous pour fixer les idées dans le cas où M est sans bord, alors la chirurgisée est elle aussi sans bord. Il est facile de calculer la fonction de partition de la chirurgisée M_{chir} connaissant $\phi[M_\pm]$. En effet, on sait associer à g un opérateur $\rho_\varphi(g) \in \mathcal{L}(H_N)$ qui prend en compte l'effet du changement de paramétrisation de N , paramétrée initialement par φ . Donc, nous avons si $Z[M] = \phi[M_+] \circ \phi[M_-]$:

$$(1.19) \quad Z[M_{chir}[N, g]] = \phi[M_+] \circ \rho_\varphi(g) \circ \phi[M_-]$$

Cette méthode nécessite bien sûr de connaître ρ ! Elle n'est intéressante que quand on connaît une description relativement simple de $M_\pm$ et que $\phi[M_\pm]$ ne dépend que de la topologie de $M_\pm$ et pas de ses propriétés métriques par exemple...

1.2.6 Insertions.

Dans cette sous section, nous allons retrouver la notion d'insertion de la TQCG et lui donner un support géométrique. Comme nous le montrerons dans le chapitre 5, ces insertions fournissent pour certaines théories topologiques une description commode des espaces des états du modèle considéré. Physiquement, une insertion d'opérateur est un moyen d'imposer des conditions aux limites sur la frontière d'un voisinage tubulaire d'une sous variété K qui sera noté $V(K)$ dans la suite. Nous retrouvons là la notion familière de fonction de corrélation dans une TQCG.

Du point de vue géométrique qui nous intéresse dans cette thèse, la notion d'insertion permet de représenter certains états par une structure géométrique comme par exemple un graphe ou une sous-variété plongée dans l'espace-temps considéré. Les considérations qui vont suivre visent d'une part à

expliquer au lecteur pourquoi considérer des catégories géométriques où les morphismes sont munis de “décorations”¹⁸ correspond à la notion d’insertion dans le contexte des théories géométriques, et d’autre part à montrer que la localité à la frontière joue un rôle fondamental dans la cohérence de théories de champs géométriques bâties sur de telles catégories de variétés “décorées”. Je ne prétends pas avoir percé tous les mystères qui se cachent derrière ces “décorations” et le lecteur pardonnera le caractère encore inachevé des réflexions qui vont suivre.

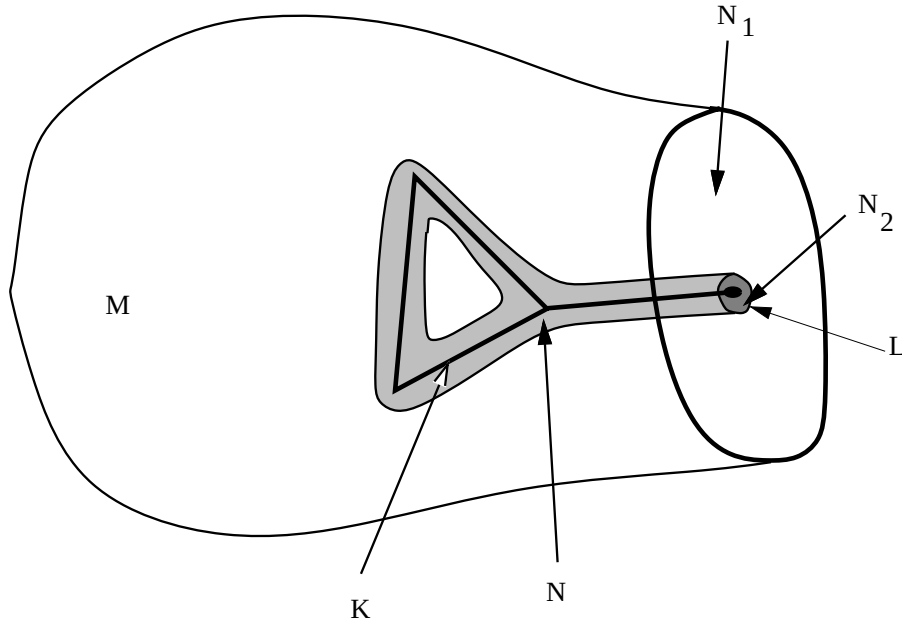
Définition de la valeur moyenne d’une insertion.

Examinons tout d’abord le cas où K ne rencontre pas le bord de M . $V(K)$ est un voisinage de K tel que $V(K) \cap \partial M = \emptyset$. Soit $|\psi\rangle$ un état de $H_{\partial V(K)}$ qui représente une distribution de conditions aux limites à la frontière de $V(K)$, on peut considérer l’objet :

$$(1.20) \quad \hat{O}_{|\psi\rangle}[M, V(K)] = \phi[M \setminus V(K)].|\psi\rangle$$

où l’on a contracté le vecteur $|\psi\rangle$ avec la forme linéaire associée à $(M \setminus \partial V(K)) \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, \partial V(K))$. On a bien imposé les conditions aux limites décrites par ψ au voisinage de K . Nous dirons que la charge $|\psi\rangle$ est portée par K . Nous verrons des exemples ultérieurement dont le plus fameux est la ligne de Wilson dans les théories de jauge. Ainsi, $\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, V(K)]$ s’interprète comme une fonction de corrélation. En général, K est une union de composantes connexes $K_1, \dots, K_n$ et $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$ avec $|\psi_j\rangle \in H_{\partial V(K_j)}$. La quantité $\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, V(K)]$ représente la fonction de corrélation d’un ensemble de n champs φ_i de support K_i et associés aux états $|\psi_i\rangle$.

Le cas à problème est celui où K rencontre la frontière de M . Pour le moment, indiquons comment les choses se passent en reportant les exemples à plus tard. Dans ce cas, extraire un voisinage tubulaire de K dans M ne fait pas que rajouter une ou plusieurs composantes connexes à la frontière mais transforme celle-ci par recollement. Plus précisément, $\partial V(K)$ se décompose en une partie incluse dans le bord de M , que nous noterons N_2 et une partie notée N incluse dans l’intérieur de M comme sur le dessin ci-dessous :



¹⁸Comme des plongements de sous variétés, ou de graphes avec certaines structures comme nous en verrons des exemples à partir du chapitre 5.

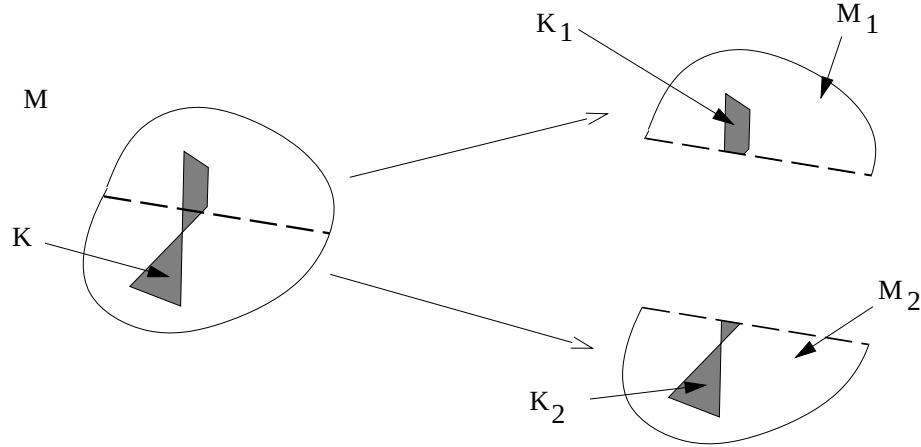
où la décoration K est ici un graphe et $L \subset \partial M$ est l'intersection de N_1 , N_2 et N . Si N_1 désigne le complémentaire dans ∂M de N_2 , alors retirer $V(K)$ change $\partial M = N_1 \sharp N_2$ en $N_1 \sharp N$. La formule 1.20 n'a alors plus aucun sens car $|\psi\rangle$ appartient à $H_{\hat{N} \sharp N_2}$ et $\phi[M \setminus V(K)]$ est un élément de $H_{N_1 \sharp N}$.

Pour passer outre, il nous faut pouvoir comparer ces différents espaces des états entre eux. La localité à la frontière permet de faire cela très facilement. En effet, nous utilisons d'une part $\psi_{N_1, N}$ pour envoyer $\phi[M \setminus V(K)]$ dans $H_{N_1 \sharp \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \sharp N}$ et d'autre part $\psi_{\hat{N}, N_2}$ pour envoyer $|\psi\rangle$ dans $H_{\hat{N} \sharp \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \sharp N_2}$. Nous pouvons alors contracter via $\mathcal{Q}_N$ sur $H_{\Delta_L \sharp N}$ et cela nous donne un élément de $H_{N_1 \sharp \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \sharp N_2}$. Nous *décidons* que cela correspond à un état $\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, K, V(K)]$ appelé la valeur moyenne de l'insertion de $|\psi\rangle$ le long de K :

$$(1.21) \quad \psi_{N_1, N_2}(\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, K, V(K)]) = \mathcal{Q}_N(\psi_{\hat{N}, N_2}(|\psi\rangle), \psi_{N_1, N}(\phi[M \setminus V(K)]))_{H_{\Delta_L \sharp N}}$$

L'idée de base de cette notion est la possibilité de représenter géométriquement des états comme étant associés à des variétés munies du plongement d'une sous-variété ou d'un graphe K . Ainsi $\phi[M \setminus V(K)](|\psi\rangle)$ est en fait associé à la variété M décorée par $(K, |\psi\rangle)$. Un prototype important de cette situation est étudié dans le chapitre 5 de cette thèse: les morphismes de la catégorie des variétés sont des variétés tridimensionnelles décorées par des graphes trivalents qui portent une certaine structure. Ceci n'est intéressant que si la fonctorialité et les autres propriétés de la TQCG restent valables. Plusieurs conséquences en découlent et nous découvrons de nouvelles perspectives:

- Lorsque l'on coupe une variété décorée comme sur le dessin suivant:



alors on se retrouve sur chacune des variétés ainsi créées dans la situation où la décoration intersecte le bord. La situation pathologique apparaît donc dès que l'on sait définir des insertions de manière compatible avec la localité.

- Ceci implique de considérer aussi des bords qui sont des variétés décorées. Nous verrons un exemple de tout ceci dans le contexte des théories topologiques tridimensionnelles où toute cette construction est effroyablement naturelle.
- On peut voir que les contraintes imposées par la localité à la frontière et la possibilité de définir tout en préservant la fonctorialité les valeurs moyennes d'insertions sont très fortes. On doit en effet imposer que $\mathcal{Q}_N(\psi_{\hat{N}, N_2}(|\psi\rangle), \psi_{N_1, N}(\phi[M \setminus V(K)]))_{H_{\Delta_L \sharp N}}$ soit dans l'image de ψ_{N_1, N_2} . Outre cette contrainte, imaginons que l'on souhaite calculer $\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, K, V(K)]$ dans une situation comme celle

présentée ci-dessus, en coupant la décoration en deux. Nous devons disposer d'un moyen naturel de séparer $|\psi\rangle \in H_{\partial V(K)}$ en un vecteur de $H_{\partial(V(K_1))}$ et $H_{\partial(V(K_2))}$. Mais $\partial V(K) = ((\partial V(K)) \cap M_1) \sharp ((\partial V(K)) \cap M_2)$ et donc la localité à la frontière nous fournit un élément de $H_{((\partial V(K)) \cap M_1) \sharp \Delta_L} \otimes H_{\Delta_L \sharp ((\partial V(K)) \cap M_2)}$ où $L = (\partial V(K)) \cap (\partial M_1)$. Il n'est pas évident du tout de relier $H_{(\partial V(K) \cap M_1) \sharp \Delta_L}$ à $H_{\partial V(K_1)}$.

Dans les théories tridimensionnelles que nous construirons au chapitre 6, ce problème est résolu par le fait que les décorations K considérées sont des graphes trivalents, $L = S_1$ et Δ_L est un disque muni d'une décoration ponctuelle. Mais d'autre part, quand on coupe une variété de dimension trois contenant un graphe, on obtient en général une surface avec des points marqués. Toutefois, la définition des insertions ne permet de préserver la fonctorialité que pour certains vecteurs $|\psi\rangle$ très particuliers: ceux qui correspondent à des graphes coloriés. C'est seulement dans ces cas que nous dirons que l'insertion est bien définie. Quand $|\psi\rangle$ correspond à une combinaison linéaire de vecteurs associés à des graphes coloriés, cela n'est plus le cas. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 6, section 6.2.1 pour quelques remarques et au chapitre 7 pour quelques perspectives.

Pour conclure, si la définition de la notion d'insertion est relativement naturelle dans notre formulation de la TQCG, la compatibilité de cette notion avec la localité est une forte source de contraintes¹⁹.

“Repérage” de la sous variété.

En fait, il est clair que l'insertion est définie non seulement par K et l'état $|\psi\rangle$ mais également par $V(K)$ et en particulier par la paramétrisation de sa frontière. Les arguments que nous présentons ici ne sont pas excessivement précis mais notre objectif est de suggérer comment les choses se passent. Tout d'abord, nous introduisons:

$$(1.22) \quad \mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle) = \phi[(M \setminus V(K))_\varphi](|\psi\rangle)$$

où nous avons indiqué la paramétrisation du bord créé par le retrait de $V(K)$. Nous noterons cette variété abstraite N . Si on interprète $\mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle)$ comme associée à la variété M munie de K qui porte une charge $|\psi\rangle$, alors l'écriture $\phi[M, K_{|\psi\rangle}]$ est ambiguë car cet objet est défini par $\mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle)$ et il dépend donc du paramétrage de la frontière $\partial V(K)$.

L'objet pertinent est donc le sous-groupe de $\text{Diff}_+((\partial V(K)))$ des difféomorphismes de $\partial V(K)$ qui se prolongent à $V(K)$ et qui de plus envoient K sur K . Notons G_K ce groupe, il s'agit là de difféomorphismes de $\partial V(K)$ sous-variété de $V(K)$ et non pas de difféomorphismes de N . Pour chaque paramétrisation φ de $\partial V(K)$, G_K se plonge dans $\text{Diff}_+(N)$: pour $g \in G_K$, $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ est dans $\text{Diff}_+(N)$. On note $G_{\varphi,K}$ le groupe ainsi obtenu. Soit $h \in G_{\varphi,K}$,

$$[V(K), K]_{\varphi \sharp h}(M \setminus V(K))_{\varphi'} = [V(K), K]_{h \circ \varphi \sharp}(M \setminus V(K))_{\varphi'} \simeq [V(K), K]_{\varphi \sharp}(M \setminus V(K))_{\varphi'}$$

où le signe $\simeq$ signifie que les deux variétés sont isomorphes au sens de la définition 1. En conséquence, comme $\rho_\varphi(h)$ possède à priori une action non-triviale sur $|\psi\rangle$, il apparaît une ambiguïté dans la définition de $\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, K, V(K)]$. En conséquence, nous devons rajouter un degré de liberté géométrique supplémentaire pour définir nos insertions. C'est le “framing” ou “repérage”, que nous allons définir un peu plus précisément²⁰.

¹⁹Le lecteur aura compris que je n'en ai pas encore exploré toutes les conséquences.

²⁰Le lecteur pardonnera l'emploi d'un mot Anglais dans cette thèse. Il faut bien avouer que la forme en *ing* d'Outre-Mer est parfois impossible à traduire sans de longues périphrases. Le terme “repérage” m'a semblé ambigu car généralement il désigne le choix d'une base de l'espace tangent à la variété considérée. Malheureusement le terme “framing” présente aussi la même ambiguïté mais a été consacré par l'usage dans le contexte des théories topologiques tridimensionnelles.

Considérons alors $g \in G_K$, l'élément correspondant dans $G_{\varphi,K}$ est alors $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ et son action naturelle sur $\mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle)$ est donnée par:

$$F(g)(\mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle)) = \mathcal{K}_\varphi(\rho_\varphi(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})|\psi\rangle)$$

qui se réécrit

$$\mathcal{K}_{\varphi \circ g}(|\psi\rangle).$$

En conséquence, le groupe G_K agit à droite sur l'ensemble

$$I(K) = \{\mathcal{K}_\varphi(|\psi\rangle); \quad |\psi\rangle \in H_N\}$$

qui en fait ne dépend pas de φ . Cet ensemble est en somme l'ensemble des valeurs possibles d'insertions sur $K \subset M$. La définition suivante semble alors naturelle:

Définition 11 *Le framing de la sous variété K utilisée pour définir l'insertion associée à K est le groupe quotient F_K avec:*

$$F_K = G_K / \ker(F)$$

Pour calculer une valeur moyenne, ce framing *doit* être précisé. L'origine de l'appellation *framing* provient des théories topologiques tridimensionnelles [192]. En effet, nous verrons que dans ces théories, le framing tel que nous l'avons défini ici peut se représenter géométriquement par un repère normal²¹ à la sous variété K qui dans ce cas est un graphe trivalent plongé dans M . A un tel repère mobile, on associe un difféomorphisme de manière canonique comme nous le verrons plus loin.

Remarque : On notera donc la valeur moyenne,

$$\hat{O}_{|\psi\rangle}[M, K, V(K)]$$

étant entendu que la donnée de $V(K)$ se fait avec les paramétrisations de la frontière $\partial V(K)$ et donc *contient* l'information relative au framing. Dans le cas des théories topologiques, l'épaisseur de $V(K)$ n'a pas d'importance, on pourra donc se contenter d'omettre $V(K)$ mais en n'oubliant pas de préciser le framing. $\square$

1.3 La catégorie des TQCG.

Nous allons voir qu'il est possible de considérer les TQCG comme les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les équivalences entre TQCG. Ceci permet de traiter les relations entre TQCG d'une façon purement algébrique. On y gagne au moins en élégance car la plupart des résultats s'expriment d'une manière relativement naturelle et susceptible de généralisations. On peut aussi caresser l'espoir que cette formulation plus abstraite aide à comprendre la structure des théories conformes en les resituant plus précisément dans le paysage mathématique avoisinant.

Nous dégagerons la notion d'équivalence entre TQCG d'une manière heuristique grâce à l'intégrale fonctionnelle. Puis nous verrons que cette notion se reformule rigoureusement comme la notion de transformation naturelle locale. Enfin, nous introduirons une catégorie des TQCG correspondant à cette notion d'équivalence. Les exemples seront discutés dans les sections suivantes.

²¹L'adjectif "normal" fait plutôt référence à un contexte métrique. Dans un contexte purement topologique, il serait souhaitable d'employer le terme "transverse". Encore une fois, je cède à l'usage en conservant l'inadéquat qualificatif "normal".

1.3.1 Equivalence entre théories.

Idée intuitive par l'intégrale fonctionnelle.

Considérons plusieurs TQCG relatives à un même ensemble de champs. Elles ne diffèrent que par leur dynamique, donc par leur action. Prenons S et S' deux telles actions. On peut se demander à quelles conditions la physique décrite par S sera identique à celle décrite par S' . Nous allons présenter quelques arguments heuristiques basés sur la théorie classique. Ils nous permettront de dégager une formulation algébrique naturelle. Nous oublierons alors ces arguments pour utiliser seulement la formulation algébrique.

Au niveau classique, on demande que les équations du mouvement soient les mêmes²². Cela signifie que:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S'}{\partial \varphi(x)} = 0$$

De ce fait, rien n'empêche S et S' de différer par des termes de bords. Plus précisément:

$$S'_M[\varphi] = S_M[\varphi] + \sigma_{\partial M}[\varphi]$$

On veut une théorie locale et donc on cherche σ sous la forme d'une intégrale:

$$\sigma_{\partial M}[\varphi] = \int_{\partial M} h(\varphi(x)).$$

Ici, nous sous-entendons que les dérivées au point x de φ tangentes (mais pas normales²³) à ∂M peuvent apparaître dans $h(\varphi(x))$. Par le théorème de Stokes, on trouve que:

$$S'[\varphi] = S[\varphi] + \int_M dh(\varphi(x)).$$

Nous venons de voir que deux Lagrangiens qui diffèrent d'une dérivée totale sont classiquement équivalents.

Pour des systèmes Hamiltoniens classiques, deux modèles sont équivalents si et seulement si leurs structures symplectiques sont identiques. Ceci est réalisé dans le cas précédent.

Quantiquement, si on cherche à calculer une amplitude entre deux conditions aux limites données, on doit tenir compte du terme σ . En utilisant l'intégrale fonctionnelle comme outil heuristique, il apparaît que:

$$Z'[M, f] = Z[M, f]e^{-\sigma_{\partial M}[f]}.$$

où f désigne une "condition initiale"²⁴ pour les champs. L'application $|f\rangle \mapsto \exp(-\sigma_{\partial M}[f])|f\rangle$ définit une application linéaire inversible de $H_{\partial M}$ dans lui-même. Dans le cas où σ est imaginaire pur, la transformation est unitaire. C'est le cas dans les théories considérées habituellement.

²²A une redéfinition des champs près.

²³Nous voulons que la différence entre S et S' ne dépende que des coordonnées décrivant le système.

²⁴Dans le cas du champ libre, c'est la restriction du champ au bord ou la restriction du moment $\partial_0 \varphi$ à ce même bord (cas hyperbolique), ou encore les données de Cauchy φ et $\partial_0 \varphi$ au bord (cas elliptique) et pour la théorie quantique, on doit choisir une polarisation. De même, dans le cas de Chern-Simons, il s'agit de $A = A_1 + iA_2$, composante holomorphe du champ de jauge une fois que l'on a choisi une structure complexe sur la surface considérée.

Ainsi, partant de deux théories des champs géométriques $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$, pour chaque objet de la catégorie des variétés $\mathbf{Ma}$, on dispose de $T_N \in GL(H_N, H'_N)$ et si M interpole entre N et N' alors, on a :

$$\phi'[M] \circ T_N = T_{N'} \circ \phi[M].$$

La localité exprime l'indépendance des conditions aux limites que l'on impose sur deux composantes connexes distinctes de la frontière. Cela se traduit par $T_{N \cup N'} = T_N \otimes T_{N'}$. Finalement, l'équivalence entre les deux TQCG est entièrement déterminée par les T_N .

C'est l'existence d'un tel jeu de transformations T_N que nous allons prendre comme définition algébrique de l'équivalence entre les TQCG. Remarquons que $T_\emptyset$ est un nombre. On prendra $T_\emptyset = 1$ pour assurer que $Z[M] = Z'[M]$ sur des variétés sans bord.

Transformations naturelles et équivalences entre théories.

La notion catégorique qui permet de définir l'équivalence entre deux TQCG existe déjà et porte le nom de transformation naturelle. En effet, on considère deux TQCG vivant sur les mêmes espace-temps, ce qui signifie que $\mathbf{Ma} = \mathbf{Ma}'$, ce sont la donnée de catégories $\mathbf{Sp}$ et $\mathbf{Sp}'$ d'espaces et d'opérateurs, ainsi que de deux foncteurs modulaires Φ et Φ' . Nous renvoyons le lecteur à l'appendice 1.A sur les catégories pour la définition d'une transformation naturelle. Rappelons simplement qu'une transformation naturelle permet de passer d'un foncteur entre deux catégories données à un autre foncteur entre ces mêmes catégories. Si F et G sont ces foncteurs, la transformation naturelle est définie par la donnée de $T_a \in \text{hom}(F(a), G(a))$ pour tout objet a de la catégorie de départ. De plus on a : $T_{a'} \circ F(f) = G(f) \circ T_a$ pour tout morphisme f de a dans a' . Nous sommes donc conduits à poser la définition suivante :

Définition 12 Les $TQCG \mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et $\mathcal{T}' = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}', \Phi']$ sont dites équivalentes si et seulement si $\mathbf{Sp}' = \mathbf{Sp}$ et il existe une transformation naturelle $\mathbb{F}$ de Φ vers Φ' telle que, si $T_N \in GL(H_N)$ ²⁵ :

- $T_\emptyset = 1$
- $T_{N \cup N'} = T_N \otimes T_{N'}$ (localité)

On parlera dans ce cas de transformation naturelle locale. Explorons les propriétés d'unitarité de cette transformation naturelle.

Soit $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$, la relation entre les TQCG nous donne :

$$\begin{aligned} T_{N_2} \circ \phi'[M] &= \phi[M] \circ T_{N_1} \\ T_{N_1} \circ (\phi'[M])^\dagger &= \phi[M]^\dagger \circ T_{N_2} \end{aligned}$$

Le conjugué hermitique de la seconde de ces relations multiplié à gauche par $T_{N_2}^\dagger$ devient

$$(1.23) \quad \phi[M] \circ (T_{N_1} T_{N_1}^\dagger) = (T_{N_2} T_{N_2}^\dagger) \circ \phi[M]$$

En conséquence, sur l'espace $\mathcal{E}_N$ engendré par les $\phi[T]$ où $T \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, N)$, T_N est inversible et unitaire.

Nous aimerions enfin relier T_N à $T_{\hat{N}}$. L'argument qui va suivre n'est valable que pour les théories topologiques mais il permet de motiver la définition 13.

²⁵ Notons que les espaces de Hilbert sont identiques!

Nous partons du cylindre $N \times [0, 1]$ paramétré comme en page 36 avec $\varphi_0 = \varphi_1$. Il est faiblement isomorphe au cylindre dont les bords sont considérés comme entrants (nous le notons $\bar{M}$). Par la TQCG, nous lui associons $\phi[\bar{M}] \in \mathcal{L}(H_N \otimes H_N^*, \mathbb{C})$. Si $x = \phi[T]$ et $y = \phi[T']^\dagger$ où $(T, T') \in (\text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, N))^2$, $\phi[\bar{M}](x \otimes y)$ se calcule en utilisant l'invariance topologique et $\phi[N \times [0, 1]] = \mathbf{1}_{H_N}$: $\phi[\bar{M}](x \otimes y) = y(x)$. De ce fait, $(T_N(y))(T_N(x)) = y(x)$ et donc $({}^t T_N T_N)|_{\mathcal{E}_N} = \mathbf{1}_{\mathcal{E}_N}$. Ceci montre que sur l'espace $\mathcal{E}_N$,

$$(1.24) \quad T_N = {}^t(T_N^\dagger)$$

Définition 13 Une transformation naturelle locale est dite unitaire si et seulement si elle vérifie:

$$\begin{aligned} T_N^\dagger &= (T_N)^{-1} \\ T_N &= {}^t(T_N^\dagger). \end{aligned}$$

Remarque: Dans la suite nous omettrons souvent l'adjectif unitaire, étant sous entendu que notre étude se limite à ce cas. Dans le cas où $\mathcal{E}_N = H_N$, comme par exemple pour les TQCG étudiées dans les chapitres 5 et 6, l'unitarité est automatiquement vérifiée pour toute transformation naturelle locale. $\square$

Il importe d'aller plus loin et de vérifier que si $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est une TQCG, et si on dispose de $\mathbf{F}$ une transformation naturelle locale unitaire entre Φ issu de la TQCG $\mathcal{T}$ et un foncteur Φ' entre $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$, alors $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ définit bien une TQCG. Nous supposons de plus que $\mathbf{F}$ est unitaire, i.e. que $T_N^\dagger = T_N^{-1}$ et $T_N = ({}^t T_N)^\dagger$.

Regardons les propriétés de Φ' : $\mathbf{F}$ étant une transformation naturelle locale unitaire, nous savons que: $T_{N'} \circ \phi[M] = \phi'[M] \circ T_N$. Mais T_N est inversible pour tout N et $\phi'[M] = T_{N'} \circ \phi[M] \circ (T_N)^{-1}$ ce qui montre que ϕ' est local. Comme $T_N^{-1} = T_N^\dagger$, ϕ' est unitaire et l'axiome $\phi[M_{[Y]}] = \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M])$ est automatiquement vérifié. En conséquence Φ' est un foncteur modulaire et donc $\mathcal{T}' = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ est bien une TQCG. Le même type de démonstration peut se faire dans le cas général d'une théorie non topologique. Nous venons de prouver:

Théorème 1 Si $\mathbf{F}$ est une transformation naturelle locale et unitaire (TNLU) entre un foncteur modulaire Φ définissant une TQCG $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et Φ' un foncteur entre $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$, alors $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ est une TQCG.

Il est possible d'étendre un peu la définition précédente. Par exemple, dans le cas de l'équivalence boson-fermion à deux dimensions, les espaces des états $H_{S_1}^B$ et $H_{S_1}^F$ ne sont pas les mêmes mais sont isomorphes. Dans la pratique, on est confronté à deux théories des champs:

$$\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi], \quad \mathcal{T}' = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}', \Phi']$$

où les catégories $\mathbf{Sp}$ et $\mathbf{Sp}'$ ne sont pas identifiées à priori. La notion de transformation naturelle que nous avons utilisée n'est plus vraiment adaptée mais on utilisera la définition suivante:

Définition 14 Les TQCG $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont dites équivalentes si et seulement si il existe une famille d'applications linéaires $T_N \in \mathcal{L}(H_N, H'_N)$ indexées par les objets de $\mathbf{Ma}$ telle que:

$$(1.25) \quad \phi'[M] \circ T_N = T_{N'} \circ \phi[M]$$

$$(1.26) \quad T_{N_1 \cup N_2} = T_{N_1} \otimes T_{N_2}, \quad T_\emptyset = 1$$

Finalement, dans le cas où les T_N sont inversibles, nous pouvons nous limiter à $\mathbf{Sp} = \mathbf{Sp}'$.

Si nous partons d'une TNLU et si Φ est local à la frontière, il est clair que Φ' est aussi local à la frontière. La construction naturelle des isométries de localité à la frontière dans la nouvelle théorie est immédiate:

$$(1.27) \quad (T_{N_1 \# \Delta_L} \otimes T_{\hat{\Delta}_L \# N_2}) \circ \psi_{N_1, N_2} = \psi'_{N_1, N_2} \circ T_{N_1 \# N_2}$$

C'est bien une isométrie par unitarité des T_N . Le crochet de dualité $\mathcal{Q}_N$ se transforme selon

$$(1.28) \quad \forall (y, x) \in (H_{\hat{\Delta}_L \# N} \otimes H_{\hat{N} \# \Delta_L}), \quad \mathcal{Q}_N'(x, y) = \mathcal{Q}_N(T_{\hat{N} \# \Delta_L}^{-1}(x), T_{\hat{\Delta}_L \# N}^{-1}(y))$$

qui provient d'un produit scalaire sur $H_{\hat{\Delta}_L \# N}$ si $\mathcal{Q}_N$ provient d'un produit scalaire. Pour intuer ces formules, remarquons simplement que, soit M interpolant entre $\emptyset$ et $N_1 \# N_2$, la TQCG définie par Φ' lui associe $\phi'[M] = T_{N_1 \# N_2}(\phi[M])$, vecteur de $H_{N_1 \# N_2}$. On peut l'envoyer dans $H_{N_1 \# \Delta_L} \otimes H_{\hat{\Delta}_L \# N_2}$ par ψ'_{N_1, N_2} . On peut procéder autrement, c'est à dire commencer par décomposer dans $H_{N_1 \# \Delta_L} \otimes H_{\hat{\Delta}_L \# N_2}$ dans la théorie définie par Φ , puis passer dans la théorie définie par Φ' . Heuristiquement, l'identité entre ces deux procédés traduit le fait que les conditions aux limites sont des fonctions f et que $\sigma_N(f)$ est une intégrale sur $N = N_1 \# N_2$. La formule 1.28 s'obtient en remplaçant dans 1.9 l'expression 1.27 pour ψ'_{N_1, N_2} . Ainsi,

Définition 15 Une TNLU est dite locale à la frontière si et seulement si:

$$\begin{aligned} \psi'_{N_1, N_2} &= (T_{N_1 \# \Delta_L} \otimes T_{\hat{\Delta}_L \# N_2}) \circ \psi_{N_1, N_2} \circ (T_{N_1 \# N_2})^{-1} \\ \forall (x, y) \in (H_{\hat{\Delta}_L \# N} \otimes H_{\hat{N} \# \Delta_L}), \quad \mathcal{Q}'_N(x, y) &= \mathcal{Q}_N(T_{\hat{N} \# \Delta_L}^{-1}(z), T_{\hat{\Delta}_L \# N}^{-1}(y)) \end{aligned}$$

La proposition suivante se vérifie alors trivialement en utilisant les propriétés de la TNLU et de ψ_{N_1, N_2} dans la théorie définie par Φ :

Proposition 1 Si $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est une TQCG locale à la frontière, alors si $\mathbb{F} : N \mapsto T_N$ est une TNLU locale à la frontière, alors $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ est une TQCG locale à la frontière.

En particulier on montre que:

$$(1.29) \quad \psi'_{[(N_j)_j]} = (T_{N_1 \# \Delta_{12}} \otimes \dots \otimes T_{\hat{\Delta}_{p-1, p} \# N_p}) \circ \psi_{[(N_j)_j]} \circ (T_{N_1 \# \dots \# N_p})^{-1}$$

Remarque: Il ne semble pas évident du tout de déduire de la propriété 1.9 de localité à la frontière pour Φ' la forme 1.27 de ψ'_{N_1, N_2} en fonction de ψ_{N_1, N_2} et $\mathbb{F}$ sans hypothèses supplémentaires... Là encore, les idées manquent. L'application de la condition de compatibilité 1.9 ne semble rien donner. $\square$

Finalement, tout ce formalisme permet d'étudier les classes d'équivalences de TQCG. C'est l'objet de la section suivante.

1.3.2 Catégories des TQCG.

Nous souhaitons pouvoir étudier l'ensemble des dynamiques inéquivalentes que l'on peut mettre sur un ensemble de champs donné au niveau quantique. Dans le cas classique, cela revient à se donner un espace de configurations et à chercher toutes les actions inéquivalentes que l'on peut mettre dessus. Dans le cas quantique, on se donne des espaces (comme dans le cas classique) via la catégorie $\mathbf{Ma}$, et l'analogue de l'espace de configurations est joué par $\mathbf{Sp}$. C'est le cadre cinématique. Chercher les

dynamiques inéquivalentes revient à chercher les classes d'équivalence de TQCG au sens précédent. Le lecteur vérifiera sans peine que cela définit bien une relation d'équivalence entre les TQCG tout simplement en composant les T_N . La symétrie est assurée par l'inversibilité des T_N . De ce fait, on définit:

Définition 16 *La catégorie des TQCG basées sur $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$ est la catégorie dont les objets sont les foncteurs modulaires et dont les morphismes sont les transformations naturelles locales unitaires entre ces TQCG.*

Remarquons d'ores et déjà²⁶ que l'on peut rajouter l'adjectif "local à la frontière" dans cette définition ce qui nous donne une catégorie plus petite mais sans doute plus proche²⁷ de la physique. Cette catégorie sera notée: $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$. On peut toutefois faire encore un pas dans l'abstraction.

En effet, on souhaite de plus en plus classer certaines familles de théories physiques. Par exemple, l'étude des phénomènes critiques bidimensionnels amène à classer les théories conformes à 2 dimensions, l'étude des parastatistiques en deux dimensions d'espace amène à la classification des théories topologiques tridimensionnelles. Toutefois, il apparaît possible que des problèmes de classification en apparence non reliés le soient. Par exemple, on verra plus loin la relation entre théories conformes 2D et théories topologiques 3D. Les phénomènes de réduction dimensionnelle observés dans la quantification stochastique des théories topologiques en sont un autre exemple.

De telles relations suggèrent l'existence d'une correspondance entre les TQCG basées sur $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$ et celles basées sur $\mathbf{Ma}'$ et $\mathbf{Sp}'$. De plus, pour être intéressante, cette correspondance doit en fait agir sur les transformations naturelles locales. Cela signifie que si $\mathcal{F}$ est une telle correspondance, $\mathbb{F}$ une TNLU morphisme de $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$. Alors $\mathcal{F}[\mathbb{F}]$ doit être une TNLU de $[\mathbf{Ma}' \mapsto \mathbf{Sp}']$ et si $\mathbb{F}$ va de Φ_1 vers Φ_2 , $\mathcal{F}[\mathbb{F}]$ va de $\mathcal{F}[\Phi_1]$ vers $\mathcal{F}[\Phi_2]$. Cela signifie que en fait $\mathcal{F}$ est un foncteur de $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$ dans $[\mathbf{Ma}' \mapsto \mathbf{Sp}']$.

Définition 17 *On appelle correspondance fonctorielle entre les TQCG basées sur $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$ d'une part et celles basées sur $\mathbf{Ma}'$ et $\mathbf{Sp}'$ d'autre part, tout foncteur de $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$ dans $[\mathbf{Ma}' \mapsto \mathbf{Sp}']$.*

1.4 Exemples.

1.4.1 Constructions algébriques élémentaires.

Un premier exemple, très simple, est donné par le produit tensoriel de théories des champs. Soit $\mathbf{Ma}$ une catégorie de variétés, $\mathbf{Sp}$ et $\mathbf{Sp}'$ deux catégories algébriques, Φ_1 et Φ_2 des objets de $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$ et $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}']$ respectivement. On définit alors:

$$(1.30) \quad \Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp} \otimes \mathbf{Sp}'$$

$$(1.31) \quad N \longrightarrow H_N^{(1)} \otimes H_N^{(2)}$$

$$(1.32) \quad M \longrightarrow \phi_1[M] \otimes \phi_2[M]$$

et pour la partie morphisme:

$$(T^{(1)} \otimes T^{(2)})_N = T_N^{(1)} \otimes T_N^{(2)}$$

²⁶Pour ne pas avoir à le refaire...

²⁷Ou moins éloignée?

où $T^{(1)}$ et $T^{(1)}$ sont des morphismes de $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}]$ et $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}']$ respectivement. Cela définit un foncteur de la catégorie produit $[\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}] \times [\mathbf{Ma} \mapsto \mathbf{Sp}']$ dans la catégorie $[\mathbf{Ma} \mapsto (\mathbf{Sp} \otimes \mathbf{Sp}')]$. C'est le produit tensoriel des TQCG qui en fait revient à mettre les degrés de liberté des deux systèmes physiques ensemble sans les coupler! *Mais* il convient de remarquer que toutes les TQCG basées sur $\mathbf{Ma}$ et $(\mathbf{Sp} \otimes \mathbf{Sp}')$ ne sont pas forcément dans l'image du foncteur produit tensoriel: il s'agit alors de théories "en interaction" par rapport à $\mathbf{Sp}$ et $\mathbf{Sp}'$. Un exemple de ce phénomène se trouve dans [32]. Nous y reviendrons plus tard.

Un moyen tout aussi simple existe pour fabriquer des correspondances fonctorielles entre catégories de TQCG. Nous considérons F un foncteur de $\mathbf{Ma}'$ dans $\mathbf{Ma}$ et G de $\mathbf{Sp}$ dans $\mathbf{Sp}'$. Nous devons imposer quelques hypothèses de localité à ces deux foncteurs:

Cas de F Soient N et N' deux objets et M et M' deux morphismes de $\mathbf{Ma}'$, alors

– Propriétés de localité:

$$(1.33) \quad F(N \cup N') = F(N) \cup F(N')$$

$$(1.34) \quad F(M \cup M') = F(M) \cup F(M')$$

– Propriétés dans les changements d'orientation:

$$(1.35) \quad F(\hat{N}) = \widehat{F(N)}, F(\hat{M}) = \widehat{F(M)}, F(\emptyset) = \emptyset, F(N \times [0, 1]) = F(N) \times [0, 1].$$

Cas de G Soient H et H' deux objets et U et V deux morphismes de $\mathbf{Sp}$, alors

– Propriétés de localité:

$$(1.36) \quad G(H \otimes H') = G(H) \otimes G(H')$$

$$(1.37) \quad G(U \otimes V) = G(U) \otimes G(V)$$

– Propriétés d'unitarité:

$$(1.38) \quad G(H^*) = (G(H))^*, G(U^\dagger) = (G(U))^\dagger, G(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, G(\mathbf{1}_H) = \mathbf{1}_{G(H)}.$$

Sous ces hypothèses, il est facile de voir que $\mathcal{F}[F, G]$ défini par:

$$\mathcal{F}[F, G](\Phi) = G \circ \Phi \circ F$$

pour la partie objet et:

$$(\mathcal{F}[F, G](\mathbb{T}))_{N'} = G(T_{F(N')})$$

est bien une correspondance entre TQCG au sens précédent.

1.4.2 Les théories topologiques.

Pour se familiariser avec les théories topologiques, nous commencerons par en donner la définition abstraite, puis on examinera une classe particulière de TQCG topologiques bidimensionnelles en montrant notamment que l'invariance topologique est une conséquence d'un nombre fini d'équations sur quelques données de la théorie [42].

Définition et généralités.

Quand on souhaite construire une TQC explicitement, on doit se donner la correspondance $N \mapsto H_N$ et $M \mapsto \phi[M]$ qui dans ce cas représente une masse de données colossale. Ainsi, dans une théorie quantique des champs traditionnelle, comme l'électrodynamique quantique, qui compte une infinité de degrés de liberté, les excitations physiques peuvent être arbitrairement bien localisées. L'espace des états physiques est gigantesque. A l'opposé, les théories de champs géométriques ont les propriétés suivantes:

- L'espace H_N est “petit” (souvent de dimension finie).
- On a $\phi[M] = \phi[M']$ le plus souvent possible.

Un bon moyen d'obtenir la première propriété est qu'il n'y ait pas d'excitations localisées, dans la théorie. Bien sûr, les états seront donnés uniquement par des propriétés topologiques des champs et non par des positions qui sont des propriétés métriques.

Pour la seconde propriété, le plus sûr est de prendre la définition d'une théorie topologique. Dans ce cas $\phi[M]$ est un invariant topologique de cobordisme paramétré. Ceci conduit donc²⁸ à la définition suivante:

Définition 18 *Une TQCG est topologique si et seulement si soient M et M' isomorphes, alors $\phi[M] = \phi[M']$ et $\phi[N \times [0, 1]] = \mathbf{1}_{H_N}$.*

Et nous introduisons par la même occasion le concept de rationalité²⁹:

Définition 19 *Si pour tout bord N , H_N est de dimension finie, la théorie est dite rationnelle.*

Avant de plonger dans des exemples, on peut donner quelques propriétés exotiques des modèles topologiques.

Dans la MQ et dans les TQCG usuelles, le formalisme hamiltonien est un outil sympathique pour classer les états suivant les énergies. Soit $\hat{U}(t)$ l'opérateur évolution pendant le temps t - on est dans une théorie invariante par translation du temps - il existe un opérateur $\hat{H}$, le Hamiltonien, tel que:

$$\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H}).$$

Mais dans le cas topologique $\hat{U}(t) = \hat{U}(t')$ et donc $\hat{U}(t) = \mathbf{1}_{H_N}$ si on veut la continuité à $t = 0$. Ceci force la chose inhabituelle suivante:

$$\hat{H} = 0$$

Ceci peut sembler traumatisant mais le spectre ne donne pas beaucoup de renseignements sur la physique de ces modèles...

Enfin, nous avons vu que dans toute théorie des champs géométrique, les difféomorphismes de N agissaient sur H_N où N est un bord. Ici cette image se simplifie considérablement: on dispose en fait d'une vraie représentation du groupe des difféomorphismes sur H_N .

Tout d'abord, si φ désigne le paramétrage du bord entrant pour un cylindre $N \times [0, 1]$ et $f \circ \varphi$ est le paramétrage pour le bord sortant, on remarque que changer φ produit un cobordisme paramétré

²⁸ Par la loi du moindre effort.

²⁹ Originellement dû à Friedan, il semble particulièrement pertinent au niveau des théories topologiques où son sens est un peu différent.

isomorphe. En conséquence $\rho_\varphi(f)$ sera noté $\rho(f)$ car il ne dépend que de $f \in \text{Diff}_+(N)$. On désignera donc par $M(f)$ n'importe quel cylindre $N \times [0, 1]$ paramétré par φ et $f \circ \varphi$ pour tout φ .

Si M_1 et M_2 ont un bord N identique, $M_1 \#_f M_2$ où $f \in \text{Diff}_+(N)$ s'obtient par isomorphisme:

$$(1.39) \quad M_1 \#_f M_2 \simeq M_1 \# M(f) \# M_2$$

où $M(f) = [N \times [0, 1], h, f \circ h]$ (h est le paramétrage du bord sortant de M_1). Le lecteur vérifiera que:

$$M(f_1 \circ f_2) = M(f_2) \# M(f_1)$$

Nous obtenons donc:

$$(1.40) \quad \rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g)$$

On a une représentation linéaire de $\text{Diff}_+(N)$ sur l'espace H_N . Dans le cas où f est connexe à l'identité (c'est-à-dire peut continûment se déformer en 1_N), il est clair que $M(f) \simeq M(1_N)$ (noté $N \times [0, 1]$). En effet, soit $t \mapsto f_t$ le chemin reliant f à 1_N ; sur $M(1_N)$ on pose:

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in N, \quad F(x, t) = (f_t(x), t)$$

qui définit un isomorphisme fort de $M(f)$ sur le cylindre trivial $M(1_N)$. En conclusion, si $\text{Diff}_{+,0}(N)$ est le groupe constitué par la composante connexe de 1_N dans $\text{Diff}_+(N)$, alors [3]:

Théorème 2 *Toute théorie topologique définit une représentation du groupe modulaire:*

$$\mathfrak{M}(N) = \frac{\text{Diff}_+(N)}{\text{Diff}_{+,0}(N)}$$

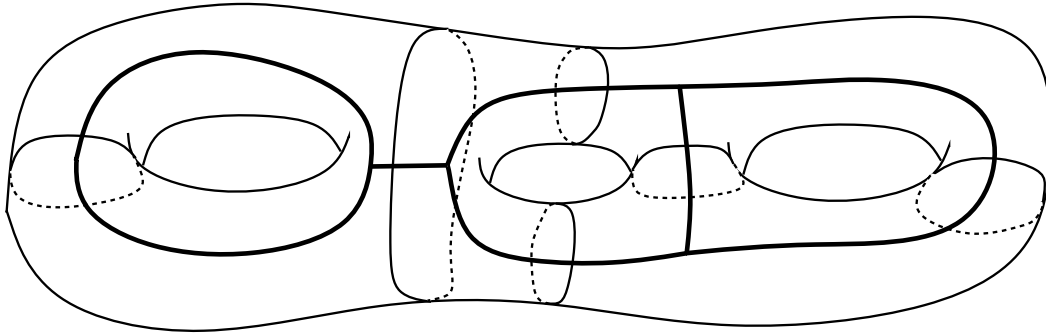
sur l'espace H_N et ce pour tout bord N .

La nécessité de paramétrer le bord apparaît pleinement. Si on l'oublie, on tue toutes ces représentations car $M(f)$ est diffeomorphe à $M(1_N)$ mais pas isomorphe!!!

Cas bidimensionnel.

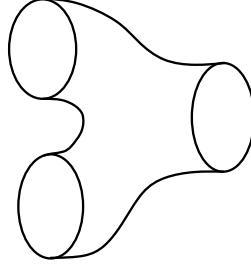
Examinons le cas des théories topologiques rationnelles à 2 dimensions. Par souci de simplicité, nous supposons que la catégorie géométrique $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ est la catégorie des surfaces non décorées, compactes orientables interpolant entre des unions³⁰ de cercles.

Dans ce cas, nous noterons H l'espace de Hilbert associé au cercle avec une orientation positive. Cet espace est supposé de dimension finie (rationalité). Considérons une surface orientable avec un bord formé de n cercles. Cette surface peut être obtenue en recollant des sphères auxquelles on a enlevé trois disques disjoints comme sur la figure ci-contre:



³⁰Eventuellement vides...

A un tel découpage on associe un graphe trivalent où chaque vertex représente une sphère avec trois trous. Il suffit donc de connaître l'opérateur associé au pantalon:



Nous le noterons $\hat{U}_{0,3}$ et nous le considérerons comme un élément de $(H^{\otimes 3})^*$.

Si nous regardons nos états comme des conditions aux limites imposées sur le cercle, renverser l'orientation du cercle définit un opérateur agissant sur H . Il est involutif. Nous supposons disposer d'une base de H : $(|i\rangle)_i$ indexée par i telle que cette involution y ait pour matrice $\delta_{i,\hat{i}}$ où $i \rightarrow \hat{i}$ est une permutation involutive. Intuitivement le disque doit définir un état invariant par cette opération et qui permet de relier l'opérateur $\hat{U}_{0,3}$ à l'identité. Il doit lui correspondre un indice $0 = \hat{0}$. Ceci donne une base de H . Nous supposons aussi que le produit scalaire est invariant et donc, nous pouvons choisir notre base orthonormée.

Alors, soient

$$C_{i,j,k} = \hat{U}_{0,3}(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle)$$

les éléments de matrice de la sphère avec trois disques enlevés (que nous appellerons le "pantalon"). Dans ce cas, nous avons le résultat suivant [42]:

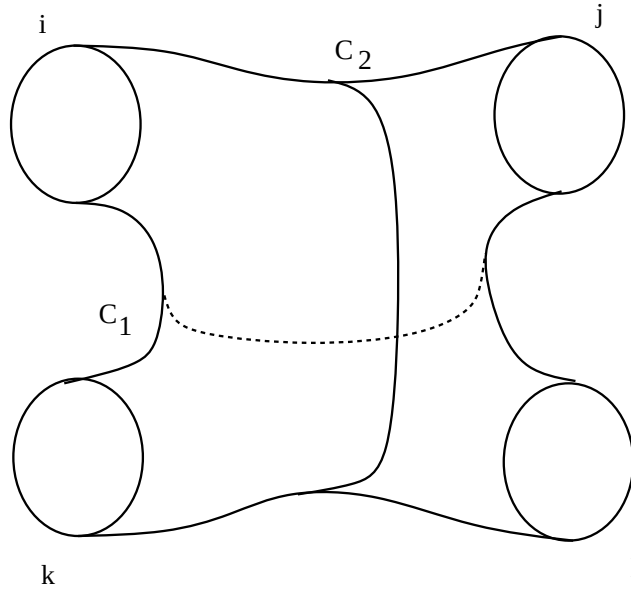
Théorème 3 *Les $C_{i,j,k}$ proviennent d'une TCT si et seulement si:*

- $C_{i,j,k}$ est symétrique.
- Les $C_{i,j,k}$ sont les constantes de structure d'une algèbre commutative, associative, unitaire et avec involution.

Nous verrons plus tard qu'une telle algèbre possède des propriétés intéressantes. Leur importance a été soulignée pour la première fois par E. Verlinde dans le contexte des théories conformes [181].

Preuve : Dans cette proposition, l'associativité de l'algèbre est la seule contrainte non triviale, les autres propriétés étant des conséquences évidentes de nos hypothèses. Pour voir que l'associativité est nécessaire,

retirons quatre disques à une sphère S_2 :



En coupant par C_1 on a (si on note $C_{i,j}^k = C_{i,j,k}$)

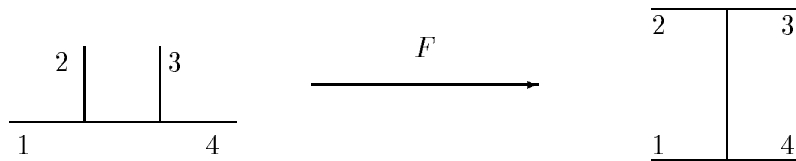
$$\sum_n C_{i,j}^n C_{n,k,l}$$

et par C_2 :

$$\sum_n C_{i,k}^n C_{n,i,l}$$

ce qui donne l'associativité.

Ces conditions sont suffisantes car un découpage de Σ en pantalons définit un graphe trivalent $\mathcal{G}$ de genre g avec n pattes externes. Si on calcule un élément de matrice de l'opérateur associé à Σ par notre TQCG entre des états $(i_1, \dots, i_n)$, on spécifie les couleurs de ces pattes et l'élément de matrice est obtenu en mettant un $C_{i,j,k}$ sur chaque vertex en en contractant ceux-ci sur les indices de ligne interne. Deux graphes de même topologie sont obtenus par un nombre fini de mouvements dits de dualité³¹.



Ceci est utilisé intensivement dans les travaux de Moore et Seiberg [130] (entre autres). On peut le prouver par récurrence sur g, n [110]. L'associativité exprime l'invariance par de tels mouvements. Finalement cela prouve le théorème. $\square$

Ces conditions sur les $C_{i,j,k}$ doivent être vues comme les “équations du mouvement” d’une théorie topologique bidimensionnelle basée sur des variétés non décorées. Il est alors facile de calculer l’opérateur

³¹Par référence à la dualité des modèles duaux [171]

associé à une surface de genre g avec n cercles frontière. Ce calcul sera décrit explicitement dans l'Appendice 4.A du chapitre 4. Dans l'exemple de théorie bidimensionnelle que nous allons résoudre, nous donnerons le résultat pour les éléments de matrice de tels opérateurs.

Remarque : Bien sûr, il est possible de considérer une catégorie géométrique plus compliquée, basée par exemple sur des surfaces “taggées”, c'est à dire décorées par un graphe trivalent colorié. La définition d'un tag sera donnée dans l'Appendice 1.B mais signalons d'ores et déjà que les équations d'invariance topologique ne sont pas connues dans ce cas. C'est un problème ouvert. $\square$

La catégorie des théories topologiques bidimensionnelles basée sur des variétés non taggées.

On suppose donnée la catégorie $\mathbf{Sp}$ avec, en particulier, l'espace des états associé au cercle: H . On cherche dans un premier temps à caractériser les TTR basées sur $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ et $\mathbf{Sp}$. Puis cela nous donnera une autre description de la catégorie des TTR bidimensionnelles.

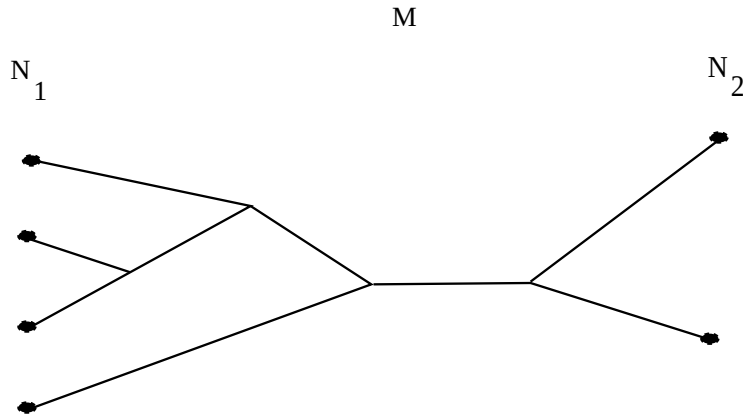
Soient $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}_{2,NT}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et $\mathcal{T}' = [\mathbf{Ma}_{2,NT}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ deux théories des champs du type étudié plus haut. Nous allons tout d'abord déterminer à quelles conditions ces TQCG sont équivalentes. Une TNLU entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est entièrement définie par la donnée de $T = T_{S_1} \in L(H)$. La TQCG est en fait définie par la donnée de l'opérateur associé au pantalon³² dont les éléments de matrice sont les constantes de structure d'une algèbre commutative, associative, unitaire et avec involution (voir Théorème 3) et d'espace vectoriel sous-jacent H . Notons $\hat{U}_{0,3}$ l'opérateur associé au pantalon et C celui associé à l'involution $i \mapsto \hat{i}$. Nous avons alors:

$$\begin{aligned}\hat{U}'_{0,3} &= T \circ \hat{U}_{0,3} \circ (T^{-1} \otimes T^{-1}) \\ C' &= T \circ C \circ T^{-1}\end{aligned}$$

Si $\hat{U}_{0,3}$ définit une algèbre commutative, associative et unitaire, $\hat{U}'_{0,3}$ définie par l'équation ci-dessus également et C' est aussi une involution.

1.4.3 La mécanique quantique topologique.

La mécanique quantique topologique (MQT) est en fait une TQCG topologique à $D = 1$. Les objets de la catégorie géométrique $\mathbf{Ma}$ sont des unions disjointes de points et les morphismes sont des 1-complexes reliant ces points entre eux:

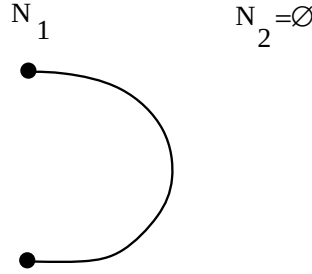


³²Avec deux cercles entrants et un cercle sortant...

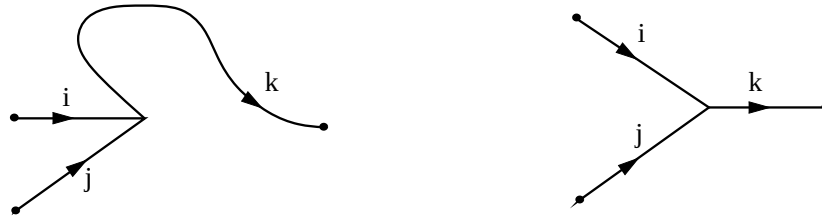
Par souci de simplicité, nous pouvons nous limiter au cas où ces graphes sont trivalents. On note $\mathbf{Ma}_{0,3}$ cette catégorie géométrique.

La catégorie algébrique est définie par H , espace vectoriel associé à un point en ce qui concerne ses objets, et par les opérateurs associés au segment et aux vertex trivalents pour sa partie morphisme...

Pour simplifier, on se limitera au cas où on peut trouver une base orthonormée $(x_i)_i$ de H telle que si A est associé au graphe suivant:



$A(x_i \otimes x_j) = \delta_{i,j}$ où $i \mapsto \hat{i}$ est une involution. Dans le cas topologique, l'opérateur associé au segment est pris égal à 1_H et $C_{i,j,k}$ désigne la valeur de l'opérateur associé au graphe trivalent agissant sur trois états entrants x_i , x_j et x_k . De l'invariance topologique, de la fonctorialité et de la valeur de A , nous déduisons que l'opérateur associé au graphe à un vertex mais avec un ou deux états entrants au lieu de trois s'exprime à partir de $C_{i,j,k}$ et de A . Topologiquement, les deux graphes coloriés ci-dessous sont identiques:



Et la traduction algébrique de cette identité topologique est

$$\sum_l C_{i,j,l} A_{l,k} = C_{i,j}^k$$

où $A_{i,j} = \delta_{i,j}$.

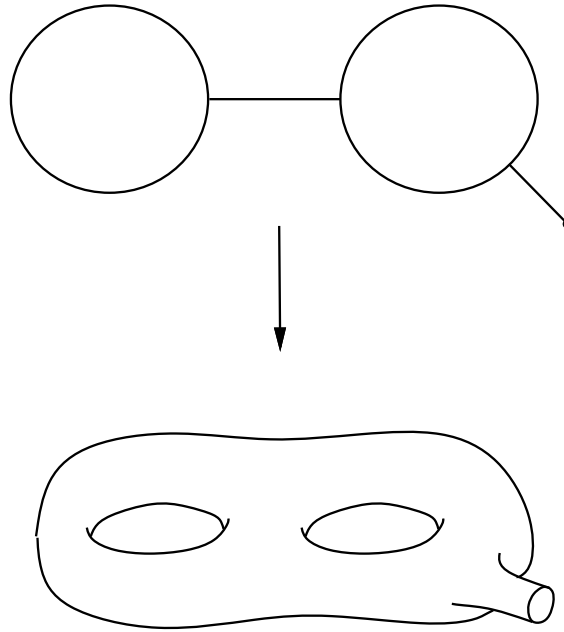
1.4.4 Relation fonctorielle entre MQT et TTR bidimensionnelles.

On n'a pas une équivalence entre MQT et TTR bidimensionnelles. Toutefois, il est possible de plonger la catégorie des TTR bidimensionnelles que nous avons rencontrée dans la section 1.4.2 dans celle des MQT vue juste au dessus. Le foncteur que nous allons construire est en fait un foncteur d'oubli... Pour cela, on construit un foncteur de la catégorie des graphes trivalents dans la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,NT}$.

Soit $\mathcal{T}$ une TTR bidimensionnelle basée sur des variétés non-tagées. On lui associe une MQT de la manière suivante:

- Soit $\mathcal{G}$ un graphe trivalent, on lui associe de manière tout à fait évidente une surface en remplaçant

chaque ligne par un cylindre et chaque vertex par un pantalon:



- Puis on associe à un point P l'espace des états du cercle. L'opérateur associé à un graphe est simplement l'opérateur associé par la théorie bidimensionnelle à la surface que l'on vient de produire.

Cela définit la partie objet et la partie morphisme de notre foncteur. Cette construction est identique à celle déjà vue précédemment en laissant la catégorie $\mathbf{Sp}$ invariante. Le foncteur ainsi construit est un foncteur d'oubli car il perd la trace de la structure d'algèbre sur H . Il existe des MQT qui ne proviennent pas d'une TTR bidimensionnelle précisément parce que dans la MQT, il n'existe pas d'analogue de la condition d'associativité du théorème 3. Ce foncteur fidèle n'est pas plein.

1.5 Théories des champs géométriques projectives.

Dans cette section, nous allons décrire succinctement la version projective de l'axiomatique précédente. Plusieurs raisons motivent cette généralisation:

- D'un point de vue physique, les états d'un système ne sont définis qu'à une phase près et lors de la quantification d'un système classique il est fréquent que des phases apparaissent "à tous les coins de rues". L'existence de particules de spin $1/2$ qui définissent une représentation *projective* du groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace dans lequel nous vivons en est une preuve flagrante.

Ainsi la théorie de Chern-Simons, et plus généralement les théories topologiques tridimensionnelles que nous définirons dans le Chapitre 6 de cette thèse sont projectives. Il en est de même des théories conformes bidimensionnelles³³.

- D'un point de vue purement mathématique, le formalisme pour les TQCG que nous avons développé ici permet de définir dans le cas topologique des représentations des groupes modulaires.

³³Sauf quand la charge centrale est nulle.

Les théories projectives géométriques des champs permettent de définir des représentations projectives de ces groupes qui ne sont pas dénuées d'intérêt. Nous y reviendrons plus longuement ultérieurement.

Nous commencerons par introduire la définition des TQCG projectives en partant de l'arbitraire de phase des états d'un système quantique, puis nous montrerons qu'une TQCG projective (TQCGP) peut se comprendre comme une TQCG³⁴ sur une catégorie géométrique étendue. Nous montrerons ensuite comment dans le cas des théories topologiques projectives (TTP), on obtient automatiquement des représentations projectives des groupes modulaires. Nous terminerons à la lisière de notre compréhension actuelle en donnant une définition³⁵ des transformations naturelles locales unitaires projectives (TNLUP).

1.5.1 Définition d'une Théorie des Champs Projective Géométrique.

Considérons $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ une TQCG. Il existe un arbitraire dans l'association d'un état à une variété: on peut imaginer un nouvel observateur qui à une variété M associerait l'opérateur

$$\phi'[M] = \lambda[M] \times \phi[M]$$

où $\lambda[M]$ est une phase dépendant du cobordisme M .

En conséquence, si $\mathcal{O}'$ désigne notre observateur pervers, la functorialité ne sera plus vérifiée pour lui mais il verra la relation suivante entre les opérateurs associés à $M_1, M_2, M_1 \sharp M_2$:

$$(1.41) \quad \phi'[M_1 \sharp M_2] = \frac{\lambda[M_1 \sharp M_2]}{\lambda[M_1]\lambda[M_2]} \times \phi[M_2] \circ \phi[M_1].$$

La généralisation de ce phénomène est immédiate pour qui connaît la notion de représentation projective d'un groupe³⁶. On introduit donc un cocycle qui à chaque couple de morphismes de $\mathbf{Ma}$ composables associe un nombre complexe non nul $\mu[M_1, M_2]$. Dans ce cas:

$$(1.42) \quad \phi[M_1 \sharp M_2] = \mu[M_1, M_2] \times \phi[M_2] \circ \phi[M_1]$$

où bien sûr, comme l'opération $\sharp$ est "associative"³⁷, on impose la condition de cohérence:

$$(1.43) \quad \mu[M_1 \sharp M_2, M_3] \times \mu[M_1, M_2] = \mu[M_1, M_2 \sharp M_3] \times \mu[M_2, M_3]$$

On parlera dans ce cas de *foncteur projectif* entre $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$. Bien entendu, on souhaite aussi préserver certaines propriétés comme l'unitarité et le fait que l'opérateur associé à une union *disjointe* est un produit tensoriel. Notre définition d'une TQCGP sera donc:

Définition 20 Une TQCG projective basée sur $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$ est la donnée d'un foncteur projectif Φ entre ces deux catégories qui vérifie les propriétés suivantes:

³⁴Non projective cette fois!

³⁵Mais est-ce la bonne?

³⁶D'ailleurs, il existe une notion de foncteur projectif et quand on considère chaque groupe comme une catégorie, cela redonne la notion de représentation projective du groupe comme nous le rappellerons dans l'Appendice 1.A.

³⁷Mea culpa pour les abus de langage...

$$(1.44) \quad H_{\hat{N}} = (H_N)^*, \quad \phi[\hat{M}] = (\phi[M])^\dagger$$

$$(1.45) \quad H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}, \quad \phi[M \cup M'] = \phi[M] \otimes \phi[M']$$

$$(1.46) \quad H_\emptyset = \mathbf{1}$$

$$(1.47) \quad \phi[M_{[Y]}] = \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M]).$$

et H_N ne dépend que de la topologie de N . De plus, si μ désigne le cocycle, il vérifie:

$$(1.48) \quad \mu[M_1 \cup M_2, M_3 \cup M_4] = \mu[M_1, M_3] \times \mu[M_2, M_4]$$

$$(1.49) \quad \mu[\hat{M}_2, \hat{M}_1] = (\mu[M_1, M_2])^*$$

La notion de transformation “de jauge” apparaît alors tout de suite. Il suffit de changer $\phi[M]$ en $\lambda[M] \times \phi[M]$ où $\lambda[M]$ est une fonction qui à chaque morphisme de $\mathbf{Ma}$ associe un nombre complexe non nul pour changer le cocycle. Si on veut préserver les conditions de cohérence 1.44, 1.45, et 1.47 dans la définition, on doit imposer que $\lambda[\hat{M}] = (\lambda[M])^*$ et $\lambda[M_1 \cup M_2] = \lambda[M_1] \times \lambda[M_2]$. Finalement:

Définition 21 *On dira que deux TQCGP $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ basées sur $\mathbf{Ma}$ et $\mathbf{Sp}$ diffèrent par une transformation de jauge si et seulement si il existe λ qui à chaque morphisme M de $\mathbf{Ma}$ associe un élément de $\mathbb{C}^*$ telle que:*

$$(1.50) \quad \phi'[M] = \lambda[M] \times \phi[M]$$

La fonction λ est appelée le paramètre de la transformation de jauge. Et dans ce cas:

Proposition 2 *Les cocycles μ et μ' de deux TQCGP déduites l'une de l'autre par une transformation de jauge de paramètre λ sont reliés par:*

$$(1.51) \quad \mu'[M_1, M_2] = \frac{\lambda[M_1 \# M_2]}{\lambda[M_1] \lambda[M_2]} \mu[M_1, M_2]$$

1.5.2 Extensions centrales de TQCG.

Comme nous le rappelons dans l'Appendice 1.A, on peut définir la notion d'extension centrale d'une catégorie par n'importe quel groupe abélien. Dans le cas de la théorie des représentations linéaires des groupes, on sait bien que les représentations projectives d'un groupe sont équivalentes aux vraies représentations des extensions centrales de ce groupe. Nous allons voir que ici, il en est de même et que en étendant la catégorie $\mathbf{Ma}$ on peut se ramener à une vraie TQCG.

Partons alors de $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ une TQCGP de cocycle μ . Nous aimerions étendre la catégorie $\mathbf{Ma}$ par le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. Nous définissons $\bar{\mu}[M_1, M_2]$ bilinéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ par $\bar{\mu}[M_1, M_2](z, \xi) = \mu[M_1, M_2]^{-1} \times z\xi$. La condition de cocycle 1.43 montre alors que la condition d'associativité dans $\mathbf{Ma}_e$ est bien vérifiée. La catégorie $\mathbf{Ma}_e$, extension centrale de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbb{C}^*$ relativement au cocycle μ , est alors bien définie. Ses objets sont les mêmes que ceux de $\mathbf{Ma}$. Nous posons alors pour chaque morphisme (M, z) de $\mathbf{Ma}_e$:

$$(1.52) \quad \phi_e[(M, z)] = z \times \phi[M]$$

et comme la loi de composition des morphismes est

$$(M_1, z_1) \sharp (M_2, z_2) = (M_1 \sharp M_2, \bar{\mu}[M_1, M_2](z_1, z_2))$$

nous avons

$$\begin{aligned} \phi_e[(M_1, z_1) \sharp (M_2, z_2)] &= \phi[(M_1 \sharp M_2, \mu[M_1, M_2]^{-1} \times z_1 z_2)] \\ &= \mu[M_1, M_2]^{-1} \times z_1 z_2 \times \phi[M_1 \sharp M_2] \\ &= z_1 z_2 \times \phi[M_2] \circ \phi[M_1] \end{aligned}$$

et donc ϕ_e est un foncteur de $\mathbf{Ma}_e$ dans $\mathbf{Sp}$. Reste à définir l'union disjointe de deux morphismes de la catégorie $\mathbf{Ma}_e$. Le plus simple est de prendre:

$$(1.53) \quad (M_1, z_1) \cup (M_2, z_2) = (M_1 \cup M_2, z_1 z_2)$$

et de même l'opération de renversement de l'orientation et de recollement $M \mapsto M_{[N]}$ sont étendues par:

$$(1.54) \quad \widehat{(M, z)} = (\hat{M}, z^*)$$

$$(1.55) \quad (M, z)_{[N]} = (M_{[N]}, z)$$

Le lecteur vérifiera alors facilement que $[\mathbf{Ma}_e, \mathbf{Sp}, \Phi_e]$ est une TQCG.

Réciproquement il est clair que si on dispose d'une TQCG définie sur une catégorie $\mathbf{Ma}_e$ alors on en déduit facilement une TQCGP sur la catégorie $\mathbf{Ma}$. Il suffit pour cela de fixer une fonction λ paramètre de jauge dans le sens de la section précédente et de poser:

$$\phi[M] = \phi_e[(M, \lambda[M])]$$

Soit Φ_λ le foncteur modulaire ainsi construit, les TQCG associées aux différents λ sont équivalentes de jauge au sens précédent.

Proposition 3 *A partir d'une TQCG définie sur une extension centrale de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbf{C}^*$, on définit une famille de TQCGP équivalentes de jauge. Réciproquement, à partir d'une TQCGP, on définit une TQCG sur une extension centrale de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbf{C}^*$. Deux TQCGP équivalentes de jauge vont donner deux TQCG définies sur des extensions équivalentes³⁸ de $\mathbf{Ma}$.*

Pour pouvoir formuler ce résultat en un sens un peu plus fort, il faut disposer de la notion de TNLU dans le cas projectif.

1.5.3 Théories topologiques projectives et groupes modulaires.

Comme précédemment, nous définissons les théories topologiques projectives par:

Définition 22 *Une TQCGP est dite topologique si et seulement si pour deux cobordismes M et M' paramétrés isomorphes, on a $\phi[M] = \phi[M']$.*

³⁸ Au sens des catégories.

Le lecteur se demandera sans doute pourquoi je n'ai pas introduit de phase dans l'égalité entre $\phi[M]$ et $\phi[M']$. La réponse est simple: pour ne pas me compliquer la vie. Enfin tous les exemples de théories topologiques que je considère dans cette thèse vérifient cette propriété.

Le résultat est le suivant:

Théorème 4 *Toute théorie topologique projective définit une représentation projective du groupe modulaire $\mathcal{M}_N$ de N , objet de $\mathbf{Ma}$, sur H_N .*

Preuve: C'est évident, il suffit de se rappeler que l'action de $f \in \text{Diff}_+(N)$ sur H_N est définie par $\rho(f) = \phi[M(f)]$ où $M(f)$ est un cylindre dont le bord entrant est paramétré par h et le bord sortant par $f \circ h$. L'opérateur associé est indépendant de h en conformité avec la définition 22. En conséquence on obtient:

$$\rho(f \circ g) = \rho(M(f \circ g)) = \mu(M(f), M(g)) \times \rho(f) \circ \rho(g).$$

Ceci montre bien que l'on a une action projective de $\text{Diff}_+(N)$ sur H_N et que le cocycle est donné par

$$(1.56) \quad \mu(f, g) = \mu[M(f), M(g)]$$

Enfin les mêmes arguments que ceux de la section 1.4.2 montrent que les difféomorphismes connectés à l'identité ne jouent aucun rôle dans cette affaire, ce qui prouve le théorème. $\square$

1.5.4 Transformations naturelles locales projectives.

Nous allons décrire ici une généralisation de la notion de transformation naturelle locale qui nous permettra de mieux voir la relation entre les classes d'équivalences³⁹ de TQCGP et les classes d'équivalences de TQCG bâties sur des extensions centrales de $\mathbf{Ma}$.

Transformations naturelles locales projectives.

Il n'est pas clair que la notion que nous allons présenter ici soit la plus générale possible mais néanmoins elle nous a semblé suffisamment générale et naturelle pour l'exposer ici.

L'idée est relativement simple: à partir d'une TQCGP, on construit une vraie TQCG sur une extension centrale de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbb{C}^*$. Deux TQCGP seront dites équivalentes si et seulement si les TQCG associées sont équivalentes. C'est à dire qu'il existe une TNLU qui les relie.

Concrètement, nous partons de $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ deux TQCGP de cocycles respectifs μ et μ' . Ces TQCGP fournissent deux vraies TQCG sur $\mathbf{Ma}_e$ et $\mathbf{Ma}'_e$ définies par les foncteurs modulaires Φ_e et Φ'_e . Pour avoir une équivalence entre ces deux TQCG, il est nécessaire que $\mathbf{Ma}_e$ et $\mathbf{Ma}'_e$ soient équivalentes. Ceci entraîne que μ et μ' soient équivalents de jauge. Il existe donc une fonction λ qui à chaque morphisme de $\mathbf{Ma}$ associe un élément de $\mathbb{C}^*$ telle que λ soit multiplicative par union disjointe et $\lambda(\hat{M}) = \lambda(M)^*$. On commence donc par effectuer une transformation de jauge sur une des TQCGP pour que les TQCG associées soient définies sur la même extension de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbb{C}^*$. Ensuite on impose que Φ_e et Φ'_e soient reliées par une TNLU. Soit $\mathbb{F}: N \mapsto T_N$ la TNLU considérée, alors la relation entre $\phi[M]$ et $\phi'[M]$ est la suivante:

$$\forall M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2); \quad \phi'[M] = \lambda(M)T_{N_2} \circ \phi[M] \circ T_{N_1}^{-1}.$$

³⁹Via ces TNLUP...

Les cocycles sont alors reliés par $\mu'[M_1, M_2] = \mu[M_1, M_2] \times \lambda(M_1 \sharp M_2) / \lambda(M_1) \lambda(M_2)$. Finalement :

Définition 23 *On appelle transformation naturelle locale projective entre les TQCGP basées sur $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ et $[\mathbf{Ma}, \mathbf{Sp}, \Phi']$ la donnée d'une TNLU $\mathbb{F} : N \mapsto T_N$ au sens de la définition 12 et d'une fonction λ qui est un paramètre de transformation de jauge. Les TQCG T et T' sont dites équivalentes si et seulement si :*

$$(1.57) \quad \phi'[M] = \lambda(M) T_{N_2} \circ \phi[M] \circ T_{N_1}^{-1}$$

pour tout morphisme M de $\mathbf{Ma}$.

1.5.5 Sur la localité à la frontière.

Dans le contexte des théories projectives, la notion de localité à la frontière n'est pas évidente à définir. Nous allons avancer dans cette section une définition dont je ne suis pas certain qu'elle soit la plus générale possible. La question de la réalisation pratique de cette condition sera discutée sur l'exemple des théories topologiques tridimensionnelles dans le chapitre 7 de cette thèse.

La localité à la frontière permet de calculer des quantités dans une TQCG en découpant des variétés sans éviter leurs bords. Comme dans la section précédente, nous allons utiliser la TQCG définie par toute TQCGP sur une extension de $\mathbf{Ma}$ par $\mathbb{C}^*$ pour définir ce que nous entendons par localité à la frontière dans le contexte projectif.

Au niveau des cobordismes paramétrés, le recollement de deux tels cobordismes via une partie de leur frontière est bien défini. Il nous faut définir cela pour (M_1, z_1) et (M_2, z_2) qui sont des morphismes de l'extension $\mathbf{Ma}_e$ considérée. La loi de composition des morphismes dans $\mathbf{Ma}_e$ est donnée par :

$$(M_1, z_1) \sharp (M_2, z_2) = (M_1 \sharp M_2, \mu[M_1, M_2]^{-1} \times z_1 z_2)$$

pour $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$ et $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_2, N_3)$. Dans le cas d'un recollement via une partie de la frontière, on attend une formule analogue mais avec un $\mu_N[M_1, M_2]$ qui prolonge celui dont on dispose au cas d'un recollement partiel et qui bien sûr dépend de la surface par laquelle on recolle N . En clair, la localité à la frontière est toujours définie par des isométries ψ_{N_1, N_2} qui vérifient les conditions de compatibilité 1.10 et 1.12 mais la formule 1.9 est remplacée par

$$(1.58) \quad \psi_{N_1, N_2}(\phi[M_1 \sharp_N M_2]) = \mu_N(M_1, M_2) \mathcal{Q}_N(\psi_{N, N_2}(\phi[M_2]); \psi_{N_1, N}(\phi[M_1]))$$

Je n'ai pas d'autre commentaire à faire actuellement. En particulier sur les conditions que doit vérifier ce cocycle "étendu"...

1.A Rappels sur les catégories.

Dans cet Appendice, nous rappelons quelques définitions de théorie des catégories qui sont indispensables pour lire le chapitre 1. Le lecteur intéressé par les catégories consultera l'ouvrage de Mac-Lane et Birkoff [122]. Cet Appendice est essentiellement basé sur un polycopié de Gérard Huet (INRIA) datant de 1987 [94]. Les applications informatiques seront bien sûr ignorées ici.

Avant toute chose, je dois avertir le lecteur que les subtilités liées à la théorie des ensembles seront relativement ignorées. Nous parlerons de classe quand la notion d'ensemble ne pourra pas être utilisée mais nos précautions n'iront pas au delà.

1.A.1 Catégories et foncteurs.

Définition d'une catégorie.

L'avantage des catégories réside dans leur capacité à traiter des objets mathématiques et les relations entre ces objets simultanément. Il est extrêmement judicieux de voir ces objets comme des points et les relations entre ces points comme des flèches entre ces points. Cette structure est toutefois un peu pauvre. De plus, si nous pensons à l'exemple dans lequel les points sont des groupes et les flèches les morphismes de groupes, les morphismes peuvent se composer et donc ce sont les chemins tracés sur le graphe qui sont pertinents. Nous considérerons donc un graphe orienté et l'ensemble des chemins tracés sur le graphe. Ceci motive la définition suivante:

Définition 24 Une catégorie $\mathbf{C}$ est la donnée d'une classe $\text{Ob}(\mathbf{C})$, d'une fonction hom qui à deux objets A et B associe un ensemble $\text{hom}(A, B)$, d'une autre fonction qui à tout triplet (A, B, C) associe une fonction:

$$\circ : \text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \longrightarrow \text{hom}(A, C)$$

telles que:

- Soit $f \in \text{hom}(A, B)$, $g \in \text{hom}(B, C)$ et $h \in \text{hom}(C, D)$ alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

qui est une associativité⁴⁰.

- Pour tout objet A de $\mathbf{C}$, il existe un élément 1_A de $\text{hom}(A, A)$ tel que pour tout $f \in \text{hom}(A, B)$ et $g \in \text{hom}(B, A)$, on ait:

$$f \circ 1_A = f \quad 1_A \circ g = g.$$

1_A est appelé élément unité de A .

La classe de tous les groupes fournit un premier exemple avec pour $\text{hom}(G, H)$ l'ensemble des morphismes de groupes de G dans H . La composition des morphismes nous donne $\circ$ et 1_G est l'application identité de G . De même, un graphe orienté définit une catégorie: $\text{hom}(P, Q)$ est l'ensemble des chemins tracés sur le graphe et reliant P à Q . Réciproquement, une catégorie peut être vue comme un graphe orienté mais où chaque point est relié à lui même par une flèche. Dans cette thèse, nous serons d'ailleurs amenés à relaxer cette contrainte et nous parlerons encore de catégorie par abus de langage. Enfin les éléments de $\text{hom}(A, B)$ sont appelés des morphismes par les mathématiciens et des flèches par les informaticiens.

A partir d'une catégorie, on peut construire la catégorie *duale* qui est obtenue en prenant la même classe d'objets mais où on renverse toutes les flèches. Cette construction est utile pour passer de la notion de groupe à celle de coalgèbre associée. Nous reverrons cela à propos des algèbres et quasi-algèbres de Hopf.

⁴⁰ On pardonnera cet abus de langage, l'associativité n'étant définie que pour une loi de composition interne.

Foncteurs.

Dans l'image géométrique que nous avons donnée, une catégorie est un graphe orienté et cela nous amène à considérer les applications entre graphes qui envoient un point de $\mathcal{G}$ sur un point de $\mathcal{G}'$ et une flèche allant de A à B sur une flèche qui relie les points images. Ainsi, nous définissons:

Définition 25 *Un foncteur covariant (respectivement contravariant) F entre $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ associe à chaque objet A de $\mathbf{C}$ un objet $F(A)$ et F définit une application de $\text{hom}(A, B)$ dans $\text{hom}(F(A), F(B))$ pour tout couple d'objets de $\mathbf{C}$. Ces applications sont compatibles avec la composition des morphismes:*

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) \text{ et } F(1_A) = 1_{F(A)} \\ \text{respectivement } F(f \circ g) &= F(g) \circ F(f) \text{ et } F(1_A) = 1_{F(A)} \end{aligned}$$

La définition de foncteur contravariant sera utile dans l'étude des théories quantiques des champs.

Simplement, un foncteur contravariant n'est autre qu'un foncteur covariant de la catégorie duale de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$. Le lecteur aura deviné qu'il existe un foncteur contravariant de toute catégorie dans sa duale!

Comme exemple, considérons la catégorie des espaces vectoriels sur un corps de base K , la correspondance qui à tout espace vectoriel associe le groupe abélien sous jacent et à toute application linéaire associe le morphisme de groupes abélien correspondant est un foncteur appelé foncteur d'oubli. Nous verrons que la théorie des champs permet de construire des exemples bien plus intéressants de foncteurs.

On peut introduire la notion de bifoncteur qui provient de celle de produit cartésien de catégories. Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour les détails.

1.A.2 Catégories de foncteurs et transformations naturelles.

La notion de foncteur présentée ci-dessus semble se situer un étage plus haut dans l'abstraction que la notion de morphisme présente au niveau des catégories. Dans cette section, nous montrons qu'il n'en est rien et que les foncteurs eux-mêmes peuvent être considérés comme des objets. Les morphismes de cette catégorie sont les transformations naturelles.

La catégorie $[\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}']$.

Nous allons définir la catégorie $[\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}']$ où $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont deux catégories fixées au départ. Les objets sont les foncteurs entre $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$. La principale difficulté consiste à définir les morphismes de cette catégorie. Pour intuitiver la définition, l'interprétation diagrammatique est très utile. On se donne deux foncteurs F et F' qui mettent en correspondance les graphes orientés que sont les catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$. On peut le voir comme un ensemble de flèches entre les objets de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ d'une part et des flèches qui relient les flèches des graphes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$.

Un morphisme entre ces deux foncteurs doit mettre en relation les deux systèmes de flèches: c'est donc un nouveau système de flèches qui relie $F(A)$ à $G(A)$ pour tout objet A de $\mathbf{C}$ et qui fait le pont entre $F(f)$ et $G(f)$ pour $f \in \text{hom}(A, B)$. Plus précisément, si on note T_A qui relie $F(A)$ à $G(A)$, alors

$$\forall f \in \text{hom}(A, B), \quad T_A \circ G(f) = F(f) \circ T_B.$$

Nous définissons les transformations naturelles par:

Définition 26 *Une transformation naturelle entre les foncteurs F et G de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}'$ est l'association pour tout objet A de $\mathbf{C}$ d'un morphisme $T_A \in \text{hom}(F(A), G(A))$ tel que*

$$\forall f \in \text{hom}(A, B), \quad T_A \circ G(f) = F(f) \circ T_B.$$

et bien sûr, la composition de ces transformations naturelles est obtenue en composant les morphismes associés: si S et T sont deux transformations naturelles de F vers G (respectivement de G vers H), alors $(T \circ S)_A = T_A \circ S_A$. En conséquence:

Définition 27 *La catégorie $[\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}']$ est définie par ses objets qui sont les foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}'$ et ses morphismes: les transformations naturelles entre foncteurs.*

Cette notion peut sembler abstraite à première vue mais elle joue un rôle clef en TQC car elle permet de relier entre elles différentes TQC (à quelques modifications près).

Remarque: A ce stade, une remarque concernant les problèmes ensemblistes s'impose. La construction de $[\mathbf{C} \mapsto \mathbf{C}']$ ne marche que si $\mathbf{C}$ est une catégorie dont la classe des objets est un ensemble. Les exemples de théories des champs que nous rencontrerons rentrent dans ce cadre. Dans ce cas, il faut quand même vérifier que chaque foncteur peut être considéré comme un ensemble et que les transformations naturelles entre deux foncteurs forment un ensemble. Nous ne développerons pas plus ces subtilités ici mais nous renvoyons le lecteur à [122, page 220]. Des considérations analogues apparaissent dans [90, Exposé 5]. Remarquons cependant que l'édifice catégorique ne doit pas grimper en abstraction trop haut sans rencontrer de sérieux problèmes. Prudence donc... $\square$

Isomorphismes naturels.

Nous voudrions généraliser la notion d'isomorphisme qui apparaît dans l'étude des structures algébriques. Nous allons d'abord définir la généralisation de l'injectivité et de la surjectivité pour les morphismes d'une catégorie. Puis nous l'étendrons aux transformations naturelles.

Epi, mono et isomorphismes. Commençons par les monomorphismes, c'est à dire les morphismes "injectifs":

Définition 28 *Dans une catégorie $\mathbf{C}$, un morphisme $f \in \text{hom}(A, B)$ est un monomorphisme si et seulement si pour tout objet X et tous morphismes $(g, h) \in (\text{hom}(X, A))^2$, $f \circ g = f \circ h$ entraîne $g = h$.*

Dans le cas de la catégorie des ensembles dont les objets sont les applications d'un ensemble dans un autre, c'est exactement l'injectivité.

Bien sûr la surjectivité se définit de manière analogue:

Définition 29 *Dans une catégorie $\mathbf{C}$, un morphisme $f \in \text{hom}(A, B)$ est un épimorphisme si et seulement si pour tout objet X et tous morphismes $(g, h) \in (\text{hom}(B, X))^2$, $g \circ f = h \circ f$ entraîne $g = h$.*

Bien sûr ces deux définitions sont duales l'une de l'autre. Tout épimorphisme est envoyé sur un monomorphisme dans la catégorie duale⁴¹. Dans ces conditions, un isomorphisme est défini par:

Définition 30 *Un isomorphisme entre A et B , objets de la catégorie $\mathbf{C}$ est un morphisme tel qu'il existe f^{-1} morphisme de B vers A avec $f^{-1} \circ f = 1_A$ et $f \circ f^{-1} = 1_B$.*

Mais il convient de remarquer que si, dans une catégorie d'ensembles tout mono et épi-morphisme est un isomorphisme, il n'en est pas de même dans le cas général!

⁴¹Et inversement!

Catégories isomorphes. Dans ce cas, on utilise la notion de foncteur inversible et deux catégories sont dites isomorphes si et seulement si il existe entre elles un foncteur inversible.

Pour les transformations naturelles, nous aurons besoin de la définition suivante:

Définition 31 Une transformation naturelle T entre les foncteurs F et G est un isomorphisme naturel si et seulement si pour tout objet A , T_A est un isomorphisme dans la catégorie d'arrivée de F et G . En associant à chaque objet A , le morphisme T_A^{-1} , on définit la transformation naturelle inverse de T .

1.A.3 Extensions de catégories par un groupe.

La définition est en fait calquée sur la notion d'extension de groupe [96]. Le cas qui nous intéresse est celui où l'extension est centrale. Nous donnons ici un sens catégorique à cette notion.

Soit G un groupe, Γ un groupe abélien. Une extension centrale de G par Γ est un groupe $\tilde{G}$ tel que:

$$1 \rightarrow \Gamma \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

soit exacte avec $i(\Gamma)$ inclus dans le centre de $\tilde{G}$.

Une description plus abstraite de cette situation est alors à portée de la main: soit $\Gamma_g = p^{-1}(g)$. La loi de groupe sur $\tilde{G}$ définit clairement une application $\mu(g, g') : \Gamma_g \times \Gamma_{g'} \rightarrow \Gamma_{gg'}$ pour chaque couple (g, g') et clairement on traduit l'associativité sur $\tilde{G}$ par la condition:

$$\mu(g_1 g_2, g_3) \circ (\mu(g_1, g_2) \otimes 1) = \mu(g_1, g_2 g_3) \circ (1 \otimes \mu(g_2, g_3)).$$

Clairement à $h \in \Gamma_g$ fixé $\mu(g, g')(h, \cdot)$ est bijective de $\Gamma_{g'}$ sur $\Gamma_{gg'}$. De même par rapport à l'autre variable. Enfin il est clair que $\Gamma_e = \Gamma$ opère à droite et à gauche sur tout Γ_g de la manière suivante:

$$(1.59) \quad \forall (h, x) \in \Gamma \times \Gamma_g, \quad \rho_G[g](h, x) = \mu(e, g)(h, x)$$

$$(1.60) \quad \rho_D[g](h, x) = \mu(g, e)(x, e)$$

La centralité de l'extension est codée dans l'identité entre ces deux actions⁴².

Mais réciproquement, supposons que l'on dispose du groupe G et, pour chaque $g \in G$, d'un ensemble Γ_g équipotent à Γ que nous identifierons à Γ_e . Si, pour chaque couple $(g, g') \in G^2$, on se donne $\mu(g, g') : \Gamma_g \times \Gamma_{g'} \rightarrow \Gamma_{gg'}$ vérifiant la condition d'associativité ci-dessus, alors par:

$$(g, h) * (g', h') = (gg', \mu(g, g').(h, h'))$$

nous définissons une loi de composition interne associative sur $\tilde{G} = \cup_{g \in G} \Gamma_g$. Nous supposons de plus que l'on a bijectivité de $\mu(g, g')$ quand une des deux variables est fixée et que 1.59 définit une action à droite et une action à gauche de Γ sur Γ_g pour tout $g \in G$. Dans ce cas, $\tilde{G}$ hérite d'une structure de groupe et on a la suite exacte suivante:

$$1 \rightarrow \Gamma_e \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

où e est l'élément neutre de G . Quand Γ est abélien, l'identité entre ρ_G et ρ_D entraîne la centralité de l'extension.

La généralisation catégorique de ces considérations est complètement élémentaire si on se souvient qu'un groupe peut être vu comme une catégorie qui n'a qu'un seul objet⁴³ et telle que, si e désigne

⁴²Le groupe Γ est alors abélien.

⁴³Avec cette seule condition, on dispose d'un monoïde.

l'unité de cet unique objet⁴⁴, pour tout morphisme x , il existe un morphisme y tel que $xy = yx = e$. La définition suivante est donc très naturelle:

Définition 32 Soit $\mathbf{C}$ une catégorie, une extension de $\mathbf{C}$ par Γ groupe, est la donnée de Γ_f équipotent à Γ au dessus de chaque morphisme f de $\mathbf{C}$, de $s_x : \Gamma \rightarrow \Gamma_{1_x}$ pour tout objet x de $\mathbf{C}$ qui munit Γ_{1_x} d'une structure de groupe, et de $\mu(f, g) : \Gamma_f \times \Gamma_g \rightarrow \Gamma_{fg}$ pour chaque paire (f, g) de morphismes composables, tels que:

– On ait la condition d'associativité:

$$(1.61) \quad \mu(g_1 g_2, g_3) \circ (\mu(g_1, g_2) \otimes \mathbf{1}) = \mu(g_1, g_2 g_3) \circ (\mathbf{1} \otimes \mu(g_2, g_3))$$

pour $g_1 \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$, $g_2 \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$ et $g_3 \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(C, D)$.

– Pour tout $f \in \text{hom}_{\mathbf{C}}(x, y)$, Γ opère à droite et à gauche sur Γ_f de la manière suivante:

$$(1.62) \quad \forall h \in \Gamma, \forall z \in \Gamma_f; \quad \rho_G[f](h, z) = \mu(\mathbf{1}_x, f)(s_x(h), z)$$

$$(1.63) \quad \rho_D[f](h, z) = \mu(f, \mathbf{1}_y)(z, s_y(h))$$

– Pour tout couple (f, g) de morphismes composables, $\mu(f, g)$ avec une des variables fixées est bijective de Γ_f (resp Γ_g) sur Γ_{fg} .

Quand de plus le groupe Γ est abélien et que $\rho_D[f] = \rho_G[f]$ pour tout morphisme f de $\mathbf{C}$ alors cette extension est dite centrale.

1.B Théorie de Yang-Mills et de Higgs bidimensionnelles.

Dans cet Appendice, nous présentons quelques calculs relatifs à la théorie de Yang-Mills bidimensionnelle dans la limite topologique. Ces calculs sont relativement récents et donc susceptibles de développement ultérieurs. Le lecteur pardonnera l'aspect inachevé de cet Appendice qui n'est qu'un exercice de compréhension des théories topologiques bidimensionnelles que nous replacerons dans une perspective plus globale dans la conclusion de cette thèse.

Nous présenterons d'abord la théorie de Yang-Mills sur un cylindre et nous montrerons que dans une certaine limite, cette théorie devient topologique. Nous exposerons les résultats de Rajeev sur le cylindre, puis nous indiquerons comment calculer des observables moins triviales comme les boucles de Wilson [145, Page 76]. Le bagage mathématique relatif à la théorie des représentations des groupes compacts ou finis se trouve dans [18] et [166].

1.B.1 Théorie de Yang-Mills et de Higgs en dimension deux.

Nous ne considérerons que le cas d'une théorie associée à un groupe connexe, compact et simplement connexe⁴⁵. Ainsi, sur Σ_g une surface compacte de genre g , sans bord, tout fibré structural de groupe G est trivial⁴⁶. Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons la notation $\text{Tr}(XY)$ où $(X, Y) \in LG^2$, qui désigne l'image par la forme de Killing du couple (X, Y) . Cette notation fait référence à l'expression comme trace de la forme de Killing en représentation adjointe.

⁴⁴C'est donc un élément de $\text{hom}(X, X)$ où X est notre objet favori.

⁴⁵Par exemple $SU(N)$.

⁴⁶Comme on le voit en triangulant la surface. Le fibré au dessus du 1-squelette de la triangulation est trivial car le groupe G est simplement connexe. La seule obstruction à l'extension d'une trivialisaton au 2-squelette (*id est* à la surface) est donnée par $\pi_2(G)$ qui est réduit à l'élément neutre compte tenu de nos hypothèses de simple connexité et compacité!

Actions.

Soit A une connexion sur Σ à valeurs dans l'algèbre de Lie LG du groupe G , l'action de cette connexion est donnée par:

$$(1.64) \quad S[A] = \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_{\Sigma} \text{Tr}(F_A^2)$$

C'est une distribution invariante de jauge et donc, les degrés de liberté physiques sont moins nombreux que ce que l'on pourrait penser.

Avant d'aller plus loin, nous pouvons regarder la limite $\varepsilon \mapsto 0$. Dans cette limite, seules survivent les connexions plates. En effet, nous pouvons avancer l'argument heuristique suivant: $W[A] = \exp(-S[A])$ est une distribution gaussienne sur les courbures qui converge vers une distribution delta fonctionnelle à la limite $\varepsilon \mapsto 0$. Cette distribution delta peut s'obtenir autrement. La transformée de Fourier d'une exponentielle est une distribution delta et donc, l'action

$$(1.65) \quad S[A] = \int_{\Sigma_g} \text{Tr}(\phi F_A)$$

où ϕ est un champ de Higgs décrit par une zéro-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie LG , définit après intégration sur ϕ , une distribution δ sur les courbures. Ainsi, nous identifierons la théorie de Yang-Mills dans la limite $\varepsilon \mapsto 0$ avec ce modèle de Higgs (équation 1.65).

Remarque : Notre argumentation est loin d'être rigoureuse. Un argument basé sur le couplage de la théorie de Higgs avec un terme de masse pour le champ ϕ donne le résultat de manière plus précise. $\square$

L'étude des degrés de liberté de ce modèle et de son spectre nous donnera un argument supplémentaire en faveur de l'identification du modèle de Higgs bidimensionnel avec la limite de faible couplage de la théorie de Yang-Mills.

Symétries de ces modèles.

Remarquons que ces deux modèles sont invariants de jauge. En effet, soit g une fonction définie sur Σ à valeurs dans G , les transformations suivantes laissent l'action invariante:

Pour le modèle de Higgs Nous avons:

$$(1.66) \quad \begin{aligned} \phi'(x) &= g(x)^{-1} \phi(x) g(x) \\ A'(x) &= g(x)^{-1} A(x) g(x) + g(x)^{-1} dg(x) \end{aligned}$$

Pour la théorie de Yang-Mills On ne dispose que de la connexion qui se transforme selon:

$$(1.67) \quad A'(x) = g(x)^{-1} A(x) g(x) + g(x)^{-1} dg(x)$$

Nous rappelons que la courbure se transforme selon la représentation adjointe du groupe G :

$$F'(x) = g(x)^{-1} F(x) g(x).$$

Enfin la dérivée covariante est définie par $\nabla_A = d + A..$

Mais nous disposons en plus de symétries géométriques. Plus précisément dans $x \mapsto f(x)$ où f est un difféomorphisme de Σ :

$$(1.68) \quad A(x) = A'(f(x)) \circ (df)(x)$$

$$(1.69) \quad \phi(x) = \phi'(f(x))$$

et donc

$$F_A(x) = F'_A(f(x)) \circ ((df)(x))^{\wedge 2}$$

Par changement de variable:

$$S_H[A', \phi'] = \int_{\Sigma} \text{Tr}(F'_A \phi') = \int_{\Sigma} \text{Tr}(F_A \phi)$$

et de même

$$S_{YM}[A] = \int_{\Sigma} \text{Tr}((F'_A(f(x)) \circ ((df)(x))^{\wedge 2})^2)$$

n'est pas invariant en général. Remarquons que la métrique n'a pas changé dans cette expression.

Les symétries de la théorie de Yang-Mills sont les difféomorphismes de Σ tels que:

$$\begin{aligned} S_{YM}[A] &= \int_{\Sigma} \text{Tr}((F'_A(f(x)) \circ ((df)(x))^{\wedge 2})^2) \\ &= \int_{\Sigma} \text{Tr}((F'_A(z))^2) \end{aligned}$$

pour *toute* connexion $A(x)$ sur la surface Σ . Ceci entraîne que chaque élément d'aire sur la surface doit être préservé: il suffit de prendre des fonctions tests localisées au voisinage d'un point et qui vont fournir un étalon de surface. L'identité ci-dessus est vérifiée si et seulement si le Jacobien de $(df)(x)$ vaut 1 ce qui revient à dire que f préserve les aires localement. On note:

$$\mathcal{AP}(\Sigma) = \{f \in \text{Diff}_+(\Sigma) / \forall x \in \Sigma, \text{Det}((df)(x)) = 1\}$$

le groupe des difféomorphismes préservant l'aire localement. C'est un sous groupe (non distingué) du groupe des difféomorphismes de Σ qui dépend de la métrique sur Σ . Pour une métrique transformée par difféomorphisme d'une métrique donnée, les groupes $\mathcal{AP}$ associés sont isomorphes. Bien sûr, ce groupe est distinct du groupe des difféomorphismes de Σ et c'est le groupe de symétrie de la théorie de Yang-Mills bidimensionnelle⁴⁷.

Celle ci n'est donc pas du tout topologique mais nous allons voir qu'elle admet les mêmes degrés de liberté physiques que la théorie de Higgs.

1.B.2 Etude sur le cylindre.

Nous allons ici rappeler par une méthode différente les résultats de Rajeev [149] sur la théorie de Yang-Mills. Puis nous résoudrons le modèle de Higgs sur le cylindre et nous verrons que les degrés de liberté sont identiques dans ces deux modèles.

⁴⁷Ceci cesse d'être vrai en dimension $D > 2$.

Equation de contrainte.

La méthode suivie est très similaire à la présentation donnée par Verlinde dans une série de conférences à l'ENS Paris en 1989 [183]. Pour déterminer l'espace des états de cette théorie, c'est-à-dire H_{S_1} , on se place sur le cylindre $S_1 \times \mathbb{R}$. Dans le cas du modèle de Higgs, $\sigma \in [0, 2\pi]$ est la coordonnée sur S_1 et t le temps et par intégration par parties:

$$S_H[A, \phi] = \int_{S_1 \times \mathbb{R}} \text{Tr}(\phi(\partial_t A_\sigma) + A_t(\partial_\sigma + \text{Ad}(A_\sigma)(\phi))) dt d\sigma$$

Donc A_t est un multiplicateur de Lagrange qui force la contrainte $\nabla_{A_\sigma} \phi = 0$. L'action résiduelle est alors donnée par:

$$S_R[A_\sigma, \phi] = \int \text{Tr}(\phi \partial_t A_\sigma)$$

et donc A_σ est la coordonnée, ϕ le moment conjugué. Dans le contexte quantique, le système sera décrit par une fonction d'onde de la coordonnée $A(\sigma) = A_\sigma(\sigma)$ qui vérifie la contrainte $\nabla_A \phi = 0$ en opérateurs. Nous savons que l'opérateur $\hat{\phi}(\sigma)$ associé à $\phi(\sigma)$ agit sur les fonctionnelles d'onde comme:

$$\hat{\phi}(\sigma) = i \frac{\partial}{\partial A(\sigma)}$$

Donc la contrainte quantique s'écrit:

$$(1.70) \quad [\partial_\sigma + \text{Ad}(A(\sigma))] \frac{\partial \psi[A(\sigma)]}{\partial A(\sigma)} = 0$$

C'est la forme de l'identité de Ward associée aux symétries du système, dans le cas d'une variété à bords. En effet, dans une transformation de jauge, indépendante du temps infinitésimale $A(\sigma) \mapsto A(\sigma) - (\nabla \varepsilon)(\sigma)$ nous avons:

$$\delta_\varepsilon \psi[A(\sigma)] = - \int_0^{2\pi} \text{Tr} \left((\nabla \varepsilon)(\sigma) \frac{\partial \psi[A(\sigma)]}{\partial A(\sigma)} \right)$$

et donc la contrainte est équivalente à l'invariance de la fonction d'onde par toutes les transformations de jauge sur le cercle. C'est le contenu géométrique de la contrainte. Nous allons la résoudre dans la sous-section suivante. On remarque alors que dans le cas du modèle de Higgs, le Hamiltonien est nul puisque le Lagrangien est $p\dot{q}$. Ceci est une première indication du caractère topologique de la théorie.

La théorie de Yang-Mills se traite par la méthode habituelle pour les systèmes contraints. Le lecteur est convié à reprendre l'analyse de [99, Pages 573-574]. Le champ A_t apparait comme un multiplicateur de Lagrange chargé d'imposer la contrainte 1.70 et le Hamiltonien résiduel est donné par:

$$\mathcal{H} = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \text{Tr}((\pi(\sigma))^2) d\sigma$$

où le moment conjugué de la coordonnée $A(\sigma)$ est donné par

$$\pi(\sigma) = \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_t A(\sigma).$$

Comme dans la quantification canonique,

$$\hat{\pi}(\sigma) = i \frac{\partial}{\partial A(\sigma)},$$

le moment engendre l'action de LG sur les fonctions d'ondes (générateurs infinitésimaux) ce qui nous permettra de trouver le spectre trivialement dès que l'on aura résolu la contrainte.

Résolution de la contrainte.

Celle-ci exprime que ψ doit être constante sur chaque orbite de jauge. De ce fait, cherchons à caractériser ces orbites de jauge qui apparaissent comme les véritables configurations physiquement inéquivalentes sur le cercle. On a :

$$A'(\sigma) = g(\sigma)^{-1}A(\sigma)g(\sigma) + g(\sigma)^{-1}(\partial_\sigma g)(\sigma)$$

Introduisons alors l'exponentielle ordonnée

$$u(\sigma) = P \exp \left(\int_0^\sigma A(x) dx \right),$$

solution de l'équation différentielle

$$\frac{du}{d\sigma}(\sigma) = u(\sigma)A(\sigma)$$

avec la condition initiale $u(0) = \mathbf{1}$. Dans une transformation de jauge, $u'(\sigma) = g(0)^{-1}u(\sigma)g(\sigma)$ et donc clairement si deux connexions sont équivalentes de jauge, les holonomies correspondantes $u(2\pi)$ sont dans la même classe de conjugaison du groupe G . Réciproquement, l'exponentielle étant une application *surjective* de l'algèbre de Lie d'un groupe *compact* connexe dans le groupe lui-même [18, Page 165, théorème 2.2], tout élément de G est l'holonomie d'une connexion. Enfin, si deux connexions ont des holonomies conjuguées, on construit très facilement une transformation de jauge qui les relie. De ce fait, les classes d'équivalence de jauge de connexions sur le cercle sont repérées par un élément de $G/\text{Int}(G)$, ensemble des classes de conjugaison de G .

Le groupe de jauge est $\mathcal{G}$ défini par :

$$\mathcal{G} = \text{Map}(S_1, G)$$

et l'espace des configurations physiquement inéquivalentes est :

$$\frac{G}{\text{Int}(G)} \simeq \frac{\text{Map}(S_1, LG)}{\mathcal{G}}.$$

Rappelons que la simple connexité de G entraîne la trivialité des fibrés en LG au-dessus de S_1 . Dans la suite, on écrira indifféremment $\psi[A(\sigma)]$ ou $\psi[u]$ avec u l'holonomie de la connexion A sur le cercle. Donc finalement par le théorème de Peter-Weyl [18, Page 134, Théorème 3.1] :

$$H_{S_1} = L_2\left(\frac{G}{\text{Int}(G)}\right) \simeq L_2(\text{Irr}(G))$$

où $\text{Irr}(G)$ est l'ensemble des caractères irréductibles de G . C'est l'espace des fonctions centrales de carré sommable sur G pour la mesure de Haar [18, Page 46]. Il est alors facile de donner le spectre de la théorie de Yang-Mills. On a vu que $\hat{H} = \varepsilon^2 \pi(\hat{\pi})^2$ où $\hat{\pi}$ est un générateur de l'action de LG . Donc si $|\chi_j\rangle$ est l'état associé au caractère irréductible χ_j , c'est un état propre du Hamiltonien et :

$$\hat{H}|\chi_j\rangle = \pi\varepsilon^2 c_2^{(j)}|\chi_j\rangle$$

où $c_2^{(j)}$ est le Casimir quadratique dans la représentation j de G .

La fonction de partition sur un tore de module $\tau = iT/2\pi R$ est donnée par

$$Z[L, R] = \sum_{j \in \text{Irr}(G)} e^{-\pi\varepsilon^2 R T c_j^{(2)}}$$

et donc ne dépend que de l'aire du tore. Enfin, comme le spectre du Hamiltonien n'est pas réduit à la seule valeur propre 0, cette théorie n'est *pas* topologique. Remarquons que dans la limite de faible couplage, le spectre devient celui d'une théorie topologique.

A titre d'exemple, la fonction de partition de la théorie de Yang-Mills $SU(2)$ sur un tore d'aire $\mathcal{A}$ et de paramètre modulaire imaginaire pur est donnée par:

$$Z_{SU(2)}(\mathcal{A}) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} e^{-\mathcal{A}n(n+2)\varepsilon^2/8}.$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent. La description par les caractères présente des avantages mais n'est pas bien adaptée à tous les usages. En particulier, l'état créé par le disque D_2 n'est pas donné par un caractère irréductible. C'est la distribution caractéristique de la classe de conjugaison de l'élément neutre. La relation d'orthogonalité des caractères [18, Page 81, théorème 4.11] montre que:

$$|D_2\rangle = \sum_{j \in \text{Irr}(G)} \chi_j(\mathbf{1}_G) |\chi_j\rangle$$

Le produit scalaire sur l'espace des états H_{S_1} .

L'étape suivante consiste à déterminer le produit scalaire sur l'espace des états H_{S_1} . Les arguments que nous allons donner ici sont heuristiques et basés sur une discrétisation de l'espace (en l'occurrence un cercle) et le traitement de la théorie sur réseau. Néanmoins, nous verrons que le résultat obtenu est parfaitement compatible avec la construction du foncteur modulaire que nous avons entamée.

Le cercle S_1 est discrétisé en un ensemble de $N - 1$ points numérotés de 1 à $N - 1$. La connexion $A(\sigma)$ est remplacée par les transports parallèles élémentaires $U_{k,k+1} \in G$ entre le point k et le point $k + 1$. Une transformation de jauge est la donnée d'une fonction $g : \langle 1, N \rangle \rightarrow G^N$ telle que $g_N = g_1$ et nous avons:

$$(1.71) \quad U'_{k,k+1} = g_k U_{k,k+1} g_{k+1}^{-1}$$

Nous introduisons les holonomies $(u(k))_{k \in \langle 1, N \rangle}$ définies par

$$(1.72) \quad \forall k \in \langle 2, N \rangle, \quad u(k) = U_{12} \dots U_{k-1,k} \text{ et } u(1) = \mathbf{1}_G$$

La loi de transformation des $u(k)$ est alors donnée par

$$(1.73) \quad u'(k) = g_1 u(k) g_k^{-1}$$

Les états sont des fonctionnelles de l'holonomie le long du cercle $u(N)$. Notre but est de trouver une expression du produit scalaire de deux états $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$ qui sont représentés par des fonctions centrales $\psi_{1,2}$, sous la forme d'une intégrale du produit $\psi_1^* \psi_2$. Hélas, l'invariance de jauge nous apprend seulement que la mesure doit être invariante par conjugaison. Nous allons "justifier" que la mesure de Haar sur G est un bon choix.

La mesure sur les connexions (c'est à dire la discrétisation de la "mesure" $\mathcal{D}[A(\sigma)]$) n'est autre que le produit des mesures de Haar μ_H sur les holonomies élémentaires:

$$(1.74) \quad \mathcal{D}[(U_{k,k+1})_k] = \prod_{k=1}^{N-1} \mu_H(U_{k,k+1})$$

Pour exprimer celle-ci en termes des nouvelles variables $u(k)$, il suffit de se souvenir que la mesure de Haar se calcule très facilement en termes, d'une part de la forme n -linéaire alternée "canoniquement" associée à la forme de Killing sur l'algèbre de Lie LG du groupe G et d'autre part, de la forme différentielle de Maurer-Cartan [18]. Introduisons cette dernière $\omega(g) : TG_g \rightarrow LG$ qui est l'unique 1-forme à valeurs dans LG qui est invariante à gauche et qui vaut l'identité de LG lorsqu'elle évaluée en 1_G . Si μ_{LG} désigne la n -forme linéaire alternée sur LG définie par⁴⁸:

$$(1.75) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in (LG)^n, \quad \mu_{LG}(x_1, \dots, x_n) = \det((K(e_i, x_j)_j))$$

où on a choisi $(e_i)_i$ une base de LG , alors, en considérant μ_{LG} comme une forme linéaire sur la n -ème puissance extérieure de LG , nous obtenons:

$$(1.76) \quad \mu_H(g) = \mu_{LG} \circ (\omega(g))^{\wedge n}$$

est la mesure de Haar sur le groupe G . Comme

$$(1.77) \quad \forall k \in < 2, N >, \quad U_{k-1,k} = u(k-1)^{-1}u(k)$$

la forme de Maurer-Cartan $U_{k-1,k}^{-1}dU_{k-1,k}$ s'exprime en fonction des formes associées aux $u(k)$ par la formule

$$(1.78) \quad U_{k-1,k}^{-1}dU_{k-1,k} = u(k)^{-1}du(k) - U_{k-1,k}^{-1}u(k-1)^{-1}du(k-1)U_{k-1,k}$$

Prenons l'exemple $N = 2$ pour commencer: $U_{12} = u(2)$ et donc la mesure de Haar sur U_{12} coïncide avec la mesure de Haar pour $u(2)$. Maintenant, supposons que nous ayons montré le résultat pour un réseau à N sites, alors la mesure de Haar pour $(U_{12}, \dots, U_{N-1,N})$ coïncide avec la mesure de Haar pour $(u(2), \dots, u(N))$; et donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \mu_H(U_{k,k+1}) &= \left\{ \prod_{k=2}^N \mu_H(u(k)) \right\} \times \mu_{LG} \circ (u(N+1)^{-1}du(N+1) - U_{N,N+1}^{-1}u(N)^{-1}du(N)U_{N,N+1})^{\wedge n} \\ &= \left\{ \prod_{k=2}^N \mu_H(u(k)) \right\} \times \mu_{LG} \circ (u(N+1)^{-1}du(N+1))^{\wedge n} \end{aligned}$$

où pour arriver à la dernière ligne on a utilisé le fait qu'une forme $n+1$ linéaire alternée sur un espace de dimension n était nulle. Finalement par récurrence nous obtenons

$$(1.79) \quad \prod_{k=1}^{N-1} \mu_H(U_{k,k+1}) = \prod_{k=2}^N \mu_H(u(k))$$

Mais la forme

$$\prod_{k=2}^{N-1} \mu_H(u(k))$$

n'est autre que l'élément de volume du groupe de jauge discrétisé. Calculons "formellement" le volume de l'orbite de jauge de la configuration $(v(k))_{k \in < 2, N >}$. Il est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\int_{(g_k \in G)_{k \in < 1, N-1 >}} \prod_{k=2}^N \mu_H(g_1 v(k) g_k^{-1})}{\int_{(g_k \in G)_{k \in < 1, N-1 >}} \prod_{k=1}^N \mu_H(g_k)} &= \frac{\int_{g_1 \in G} \mu_H(g_1 v(N) g_1^{-1}) \int_{(g_k \in G)_{k \in < 2, N-1 >}} \prod_{k=2}^{N-1} \mu_H(g_1 v(k) g_k^{-1})}{\int_{(g_k \in G)_{k \in < 1, N-1 >}} \prod_{k=1}^N \mu_H(g_k)} \\ &= \frac{\int_{g_1 \in G} \mu_H(g_1 v(N) g_1^{-1})}{\int_{g_1 \in G} \mu_H(g_1)} \end{aligned}$$

⁴⁸En toute rigueur, notre construction dépend du choix d'une base dans l'algèbre LG mais un changement de base a pour effet de multiplier par un nombre non nulle la forme μ_{LG} .

C'est donc le "volume de la classe de conjugaison de $v(N)$ ". Ceci montre au moins formellement⁴⁹ que le poids d'une orbite (qui est une classe de conjugaison) correspond au poids de la classe pour la mesure de Haar normalisée à l'unité. Cela montre que la mesure fixée de jauge n'est autre que la mesure de Haar sur l'holonomie totale. Dans ce cas, nous pouvons écrire la formule suivante pour le produit scalaire de deux états représentés par les fonctions centrales $\psi_{1,2}$ sur le groupe G :

$$(1.80) \quad \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_G \psi_1^*(g) \psi_2(g) \mu_H(g)$$

Souvent par la suite, la mesure de Haar sera notée $\mu_H(g) = dg$.

1.B.3 Quelques observables dans la théorie de Higgs.

Pour illustrer un peu plus les techniques de calcul dans ce modèle, nous aimerions calculer diverses observables de la théorie de Yang-Mills et de la théorie de Higgs. Les différentes observables de cette théorie sont les suivantes:

La ligne de Wilson: Soit C une courbe simple fermée sur Σ , nous choisissons une représentation j de G d'espace vectoriel sous-jacent V_j , on pose:

$$(1.81) \quad W_j(C) = \langle \text{Tr}_{V_j}(P \exp(\int_C A)) \rangle$$

et donc on cherche la valeur moyenne dans notre modèle de la trace dans la représentation j de l'holonomie le long de C .

Le pantalon: Nous le noterons $\hat{U}_{0,3}$. C'est l'opérateur associé à une sphère privée de trois disques.

Les tags: Soit K un graphe trivalent tracé sur Σ , mettons un indice de représentation de G sur chaque ligne (orientée). Soit γ une ligne ouverte reliant A à B , j une représentation irréductible de G et ρ_j le morphisme associé, V_j l'espace vectoriel sous-jacent:

$$\rho_j(P \exp(\int_\gamma A)) \in GL(V_j)$$

On peut considérer que l'on a une charge en chaque extrémité de γ qui, par définition, est un élément de V_j . Alors $\rho_j(P \exp(\int_\gamma A))$ couple ces deux charges. Du coup, on peut définir une observable invariante de jauge pour le graphe K . Sur chaque vertex où arrivent trois lignes coloriées par i, j et k on pose un tenseur ϵ invariant de $(V_i \otimes V_j \otimes V_k)^*$. Alors dans ce cas:

$$\epsilon \left[\rho_i \left(P \exp \left(\int_{\gamma_1} A \right) \right) \otimes \rho_j \left(P \exp \left(\int_{\gamma_2} A \right) \right) \otimes \rho_k \left(P \exp \left(\int_{\gamma_3} A \right) \right) \right]$$

couple les lignes de manière invariante de jauge. En effet, dans une transformation de jauge définie par $g \in \text{Map}(\Sigma, G)$, $\rho_j(P \exp(\int_\gamma A))$ change et devient:

$$\rho_j(g(A)^{-1} \left(P \exp \left(\int_\gamma A \right) \right) g(B))$$

⁴⁹Dans le cas d'un groupe de Lie infini, les classes ont un volume nul!

et l'invariance de ϵ sous l'action de G assure l'invariance de jauge au niveau du vertex. On va donc colorier le graphe en mettant un indice de représentation sur chaque ligne et un indice sur chaque vertex qui n'est autre qu'un tenseur invariant.

Définition 33 *Un tag est un graphe trivalent colorié tracé sur une surface.*

A un tag, on associe une observable invariante de jauge construite dans le modèle de Higgs comme nous venons de le voir et on peut calculer sa valeur moyenne dans la théorie de Higgs. C'est un invariant topologique de tag. Le lecteur intéressé par le Rap se sera déjà demandé comment distinguer entre différents tags. Peut être ces invariants topologiques donnent-ils la solution à ce problème... Enfin, Wilson doit être considéré comme le premier tagueur.

Enfin, le pantalon joue un rôle tout à fait particulier vu qu'il permet le calcul de l'opérateur associé à n'importe quelle surface avec ou sans bord mais non-tagguée. Nous le calculerons explicitement plus tard mais on peut déjà grâce au formalisme général en donner des propriétés intéressantes.

La ligne de Wilson.

On aimerait calculer l'opérateur associé à une ligne de Wilson sur un cylindre dans le cadre de la théorie de Higgs topologique. La géométrie considérée est celle du cylindre muni d'une ligne fermée simple. La ligne est prise à temps fixé et si $\hat{W}_j$ est l'opérateur linéaire de H_{S_1} dans H_{S_1} associé à cette géométrie, on veut calculer :

$$\langle \chi_k | \hat{W}_j | \chi_i \rangle = N_{i,j}^k$$

où les $|\chi_i\rangle$ sont les états associés aux caractères irréductibles et j est l'indice porté par la ligne de Wilson. La ligne est en fait la trace dans la représentation j de l'holonomie étudiée précédemment.

Nous pouvons alors donner quelques arguments heuristiques pour justifier la valeur que nous assignons à la ligne de Wilson. L'opérateur associé à l'insertion d'une ligne de Wilson portant la couleur j envoie l'holonomie g sur elle-même. Dans la base des distributions caractéristiques sur les classes de conjugaisons, cet opérateur est diagonal. La contribution de la ligne de Wilson $W_j(C)$ à l'intégrale fonctionnelle pour des configurations d'holonomie g le long de C n'est autre que le caractère $\chi_j(g)$. Il est donc "raisonnable" d'écrire

$$\begin{aligned} N_{i,j}^k &= \int \mathcal{D}[A(\sigma)] \psi_{\chi_k}^*[A(\sigma)] \text{Tr}_j \left(P \exp \left(\int_0^{2\pi} A(\sigma) \right) \right) \psi_{\chi_i}[A(\sigma)] \\ &= \int_G \chi_k(g)^* \chi_j(g) \chi_i(g) dg \end{aligned}$$

Les $N_{i,j}^k$ sont les "règles de fusion"⁵⁰ de la théorie des représentations du groupe G . Plus précisément, si V_i désigne l'espace vectoriel sous jacent à la représentation i de G , la décomposition en représentations irréductibles du produit tensoriel des représentations i et j s'écrit [166]:

$$V_i \otimes V_j = \bigoplus_k (\mathbb{C}^{N_{i,j}^k} \otimes V_k)$$

et $N_{i,j}^k$ est la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement entre les représentations $V_i \otimes V_j$ et V_k .

⁵⁰Suivant la terminologie de cette fin de siècle [181]. Cinquante ans plus tôt, on aurait parlé de règles de selection!

On a alors le développement en produit d'opérateurs pour deux lignes homotopes C et C' ne s'intersectant pas:

$$\hat{W}_i(C)\hat{W}_j(C') = \sum_k N_{i,j}^k \hat{W}_k(C)$$

Vu le calcul, on sait comme la théorie est topologique que l'on peut prendre C et C' proches et tout se ramène au cylindre où l'on vient d'obtenir le résultat.

Le pantalon.

Ici, il ne s'agit pas de donner une démonstration rigoureuse du résultat pour les coefficients $C_{i,j,k}$ mais de montrer comment on peut intuitiver le résultat final. Nous décrétons que l'opérateur $\hat{U}_{0,3}$ associé au pantalon $\Sigma_{0,3} \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_2, NT}(S_1 \cup S_1 \cup S_1, \emptyset)$ est défini par ses éléments de matrice $C_{i,j,k} = \hat{U}_{0,3}(|\chi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle)$:

$$(1.82) \quad C_{i,j,k} = \frac{\delta_{i,k} \delta_{j,k}}{\chi_i(\mathbf{1}_G)}$$

Il est bien clair qu'un tel choix présente toutes les propriétés requises pour avoir invariance topologique en dimension deux:

- Les coefficients $C_{i,j,k}$ sont symétriques par permutation arbitraire de i, j et k .
- En spécialisant un des trois indices à 0, nous retrouvons la matrice du produit scalaire dans la base des caractères.
- Les $C_{i,j}^k = C_{i,j,\hat{k}}$ sont les constantes de structure d'une algèbre associative.

Nous allons quand même donner quelques arguments heuristiques en faveur de ce choix.

L'intégration sur ϕ montre que en fait seules les connexions plates comptent. Supposons avoir triangulé notre surface, une connexion plate sur réseau est la donnée d'holonomies élémentaires $U_{i,j}$ sur chacun des liens de la triangulation et qui sont soumises aux conditions suivantes: si i, j, k sont trois sommets d'un triangle $U_{i,j}U_{j,k}U_{k,i} = \mathbf{1}_G$. Nous allons alors montrer la proposition suivante:

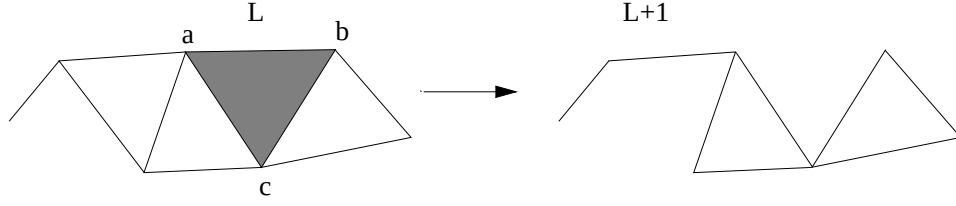
Proposition 4 *Deux connexions plates sur une triangulation d'un disque sont équivalentes de jauge modulo une transformation de jauge qui se réduit à l'identité sur le bord du disque si et seulement si elles ont même valeur au bord du disque.*

Preuve: Le sens direct est évident. Nous nous concentrons donc sur la réciproque: $\mathfrak{U} = (U_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ et $\mathfrak{V} = (V_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$ désignent deux connexions plates sur une triangulation du disque telles que $U_{i,j} = V_{i,j}$ pour (i,j) arrête du bord. Nous voulons montrer l'existence d'une transformation de jauge g telle que $g_i = \mathbf{1}_G$ pour tout sommet i du bord, qui envoie $\mathfrak{U}$ sur $\mathfrak{V}$. Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur le nombre de triangles que contient la triangulation. Dans le cas où notre disque est triangulé par un seul triangle, le résultat est évident.

Supposons maintenant qu'il soit démontré pour toute triangulation avec $n \leq \mathcal{N}$ triangles. Il existe toujours un triangle tel que en le retirant à notre triangulation – qui contient $\mathcal{N} + 1$ triangles – on obtienne une triangulation d'un disque à $\mathcal{N}$ triangles. Soit L le nombre de sommets de la triangulation

qui appartiennent au bord du disque, L augmente ou bien diminue d'une unité. Nous allons examiner ces deux cas successivement:

Cas $L \mapsto L + 1$: Désignons par a et b les sommets du triangle enlevé qui appartiennent au bord du disque et c le troisième sommet de ce triangle:

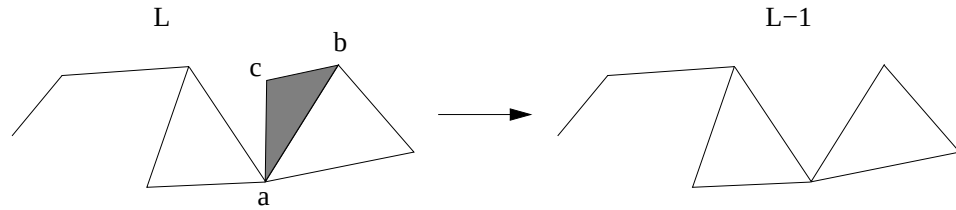


Nous cherchons une transformation de jauge qui vaut l'identité au bord du disque, et qui envoie, sur les liens (a, c) et (b, c) , la configuration $\mathfrak{U}$ sur la configuration $\mathfrak{V}$. Nous devons donc résoudre les équations suivantes d'inconnue g_c :

$$(1.83) \quad V_{a,c} = U_{a,c} g_c \quad V_{b,c} = U_{b,c} g_c$$

Ces deux équations sont compatibles grâce aux conditions de platitude des connexions $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$. Par une transformation de jauge qui vaut l'identité au bord du disque, nous arrivons à l'égalité de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ sur le bord du disque obtenu en enlevant le triangle grisé de la triangulation de départ. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Cas $L \mapsto L - 1$: Ici, a et b désignent les sommets la triangulation qui appartiennent également au bord de la triangulation obtenue après le retrait du triangle grisé:



Si les connexions $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ vérifient $U_{a,c} = V_{a,c}$ et $U_{c,b} = V_{c,b}$, alors $U_{a,b} = V_{a,b}$ et l'hypothèse de récurrence donne immédiatement le résultat.

Ceci conclut la démonstration. $\square$

Nous pouvons alors calculer la mesure sur l'espace des connexions plates sur une triangulation d'un disque. Notons i les sommets de la triangulation qui sont sur le bord du disque considéré, et a les sommets de la triangulation qui ne sont pas sur le bord. Alors, calculons le volume de l'orbite associée à une configuration⁵¹ $(U_{i,i+1})_i$ sous l'action des transformations de jauge qui valent l'identité au bord. On désigne toujours par N le nombre total de sommets de la triangulation et par L le nombre de sommets qui sont au bord du disque. Nous voulons montrer que le volume de l'orbite de jauge est donné par

$$(1.84) \quad \left(\int_{g \in G} \mu_H(g) \right)^{N-L}$$

⁵¹Les points sur le bord sont numérotés cycliquement.

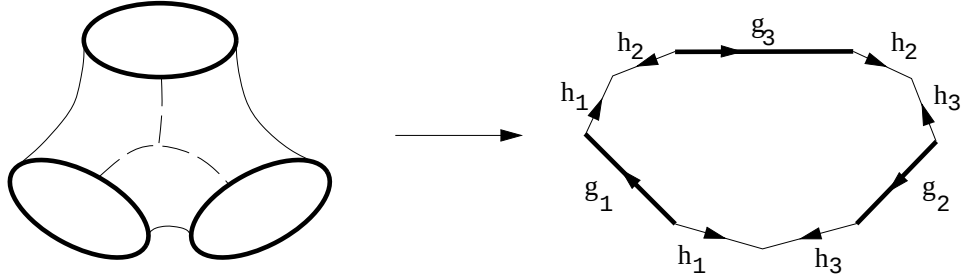
Pour ce faire, nous procédons par récurrence sur le nombre $\mathcal{N}$ de triangles. Le résultat est évident pour $\mathcal{N} = 1$. Supposons le vérifié pour toutes les triangulations qui ont $\mathcal{N}$ triangles. Nous partons donc d'une configuration avec $\mathcal{N} + 1$ triangles et N sommets. Comme précédemment, L n'est autre que le nombre de sommets qui sont situés sur le bord du disque⁵². Alors deux cas sont à distinguer

$L \mapsto L + 1$ Avec les notations utilisées dans la preuve de la proposition 4, l'intégrale à calculer porte sur g_c et sur les g_α où α désigne n'importe quel sommet qui est distinct de c et qui n'appartient pas au bord. Figeons g_c , les valeurs des holonomies $U_{a,c}$ et $U_{b,c}$ sont alors fixées. L'intégrale qui reste à évaluer est le volume de l'orbite de jauge d'une connexion plate sur une triangulation d'un disque qui contient un triangle de moins, toujours sous l'action des transformations qui se réduisent à $\mathbf{1}_G$ au bord du disque. Ce volume est indépendant de la connexion choisie et vaut $\text{Vol}(G)^{N-L-1}$. Si nous intégrons alors sur G , l'intégrale finale est de la forme:

$$(1.85) \quad \left(\int_{g \in G} \mu_H(g) \right)^{N-L-1} \int_{g_c \in G} \delta_{U_{a,b} U_{b,c} U_{c,a}, \mathbf{1}_G} \mu_H(U_{a,c} g_c) \mu_H(U_{b,c} g_c) = \int_{g_c \in G} \mu_H(U_{a,c} g_c) = \left(\int_{g \in G} \mu_H(g) \right)^{N-L}$$

$L \mapsto L - 1$ Le volume de la classe $\mathfrak{U}^{(0)}$ est exactement le volume de l'orbite de la restriction de $\mathfrak{U}^{(0)}$ à la triangulation obtenue en enlevant le triangle grisé. L'hypothèse de récurrence s'applique alors. Le résultat est acquis car la nouvelle triangulation comporte également $N - L$ sommets qui n'appartiennent pas au bord.

Nous pouvons alors évaluer sur réseau l'élément de matrice de l'opérateur associé au pantalon entre trois états associés à des caractères irréductibles χ_i, χ_j et χ_k du groupe G . Pour cela, découpons notre pantalon suivant les pointillés:



Comme indiqué sur le schéma, appelons $h_{1,2,3}$ les holonomies le long des “coutures” du pantalon et $g_{1,2,3}$ les holonomies le long des bords du pantalon. Nous intégrons sur toutes les classes d'équivalences de jauge de connexions plates sur le pantalon *sachant que* les holonomies $(g_i, h_i)_{i=1,2,3}$ sont fixées. Puis nous intégrons sur ces holonomies. Ceci permet d'appliquer les considérations précédentes. La première intégration est indépendante des $(g_i, h_i)_i$ et vaut 1. Finalement, l'élément de matrice que nous cherchons est donné par:

$$(1.86) \quad \hat{U}_{0,3}(|\chi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle) = \int_{G^3} \mu_H(g_1) \mu_H(g_2) \mu_H(g_3) \int_{G^3} \mu_H(h_1) \mu_H(h_2) \mu_H(h_3) \chi_i(g_1) \chi_j(g_2) \chi_k(g_3) \delta_{\mathbf{1}_G, h_1^{-1} g_1 h_1 h_2^{-1} g_2 h_2 h_3^{-1} g_3 h_3}$$

⁵²Bien entendu, L, N et $\mathcal{N}$ sont reliés!

Nous utilisons alors la centralité des caractères et finalement

$$(1.87) \quad \hat{U}_{0,3}(|\chi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle) = \int_{G \times G} \mu_H(g_1) \mu_H(g_2) \chi_i(g_1) \chi_j(g_2) \chi_k(g_2^{-1} g_1^{-1})$$

Ceci montre par discrétisation que la valeur que nous assignons aux éléments de matrice du pantalon n'est pas complètement stupide.

Dans le cas des groupes finis, il est possible de parler de fonction caractéristique des classes. Si $A \subset G$, $|H|$ désigne le cardinal de A . La base des ψ_C , fonctions caractéristiques des classes normalisées qui donne directement les constantes de structure d'une algèbre commutative, associative et avec élément unité. En effet, le lecteur vérifiera que

$$(1.88) \quad \hat{U}_{0,3}(|\psi_{C_1}\rangle \otimes |\psi_{C_2}\rangle \otimes |\psi_{C_3}\rangle) = \frac{\int_{C_1} dg_1 \int_{C_2} dg_2 \int_{C_3} dg_3 \delta_{g_1 g_2, g_3}}{\sqrt{|C_1||C_2||C_3|/|G|^3}}$$

L'involution correspond à $C_g \mapsto C_{g^{-1}}$.

Dans le cas des théories construites à partir des groupes finis, il est amusant de donner l'expression des éléments de matrice de l'opérateur $\phi[\Sigma_{g,n}]$ dans la base des fonctions caractéristiques des classes. Deux méthodes existent: on peut faire le calcul dans la base des représentations irréductibles et transcrire dans la base des classes, ou alors utiliser la méthode introduite par Verlinde [181] dans le contexte des théories conformes et décrites aussi par Dijkgraaf dans sa thèse [42]. Cette méthode passe par l'introduction d'une matrice S qui diagonalise simultanément toutes les matrices $\hat{C}_A = (C_{A,B^C})_{(B,C)}$. Plus précisément, le lecteur est renvoyé à l'Appendice 4.A du chapitre 4.

Dans notre exemple, on désigne par $\chi(C)$ la valeur du caractère χ sur un représentant quelconque de la classe C . En choisissant une indexation $C \mapsto \chi_C$ des caractères irréductibles par les classes qui envoie C_0 sur le caractère trivial et qui préserve la conjugaison, nous obtenons une matrice S possible⁵³:

$$(1.89) \quad S_C^{C'} = \sqrt{\frac{|C|}{|G|}} \chi_{C'}(C)$$

Il est alors aisé d'obtenir le résultat voulu:

$$\phi[\Sigma_{g,n}] (|\psi_{C_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{C_n}\rangle) = \sum_X \frac{S_{C_1}^X \dots S_{C_n}^X}{(S_0^X)^{2(g-1)+n}}$$

et donc ici:

$$(1.90) \quad \phi[\Sigma_{g,n}] (|\psi_{C_1}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{C_n}\rangle) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \frac{\sqrt{|C_1| \dots |C_n|}}{(\chi(\mathbf{1}_G))^{2(g-1)+n}} \prod_{l=1}^n \chi(C_l)$$

Remarque : Dans le cas des groupes de Lie infinis, il existe une infinité de classes de conjugaison qui sont indexées par les éléments du tore de Cartan. Cette pathologie se reflète dans la non rationalité de la théorie: l'espace des états est de dimension infinie et donc certaines quantités vont diverger comme par exemple, la fonction de partition du tore qui est:

$$Z[S_1 \times S_1] = \dim(H_{S_1}).$$

⁵³Voir page 259 pour la définition!

Je n'ai pas d'autre commentaire à faire sur ce point. Hard is life... $\square$

Enfin on peut intuitiver la forme de la valeur du pantalon dans la théorie de Yang-Mills, qui n'est pas topologique à partir de la valeur dans la théorie de Higgs à constante de couplage ε :

$$(1.91) \quad \phi_{YM}[\Sigma_{0,3}(\mathcal{A})](|\chi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle) = \frac{\delta_{i,k} \delta_{j,k}}{\chi_i(\mathbf{1}_G)} e^{-\varepsilon^2 \mathcal{A} c_2^{(i)}/2}$$

où $\Sigma_{0,3}(\mathcal{A})$ est un pantalon d'aire $\mathcal{A}$. Cette formule a été écrite en utilisant la compatibilité avec le cylindre, la fonctorialité, l'invariance par difféomorphisme préservant les aires ainsi que le fait que à $\varepsilon \rightarrow 0$, on retrouve la valeur du pantalon dans la théorie de Higgs topologique. De même, il est complètement évident de calculer la fonction de partition d'une surface de genre g et d'aire $\mathcal{A}$ dans la théorie de Yang-Mills. Nous laissons cela au lecteur.

Perspectives de cette étude.

Bien entendu, il serait extrêmement intéressant de pouvoir poursuivre cette étude en calculant de manière simple les opérateurs associés à des surfaces taggées... Toutefois, la description de l'espace des états peut se faire mais le calcul des opérateurs est une toute autre affaire. Actuellement, je n'ai pas de méthode de calcul satisfaisante, c'est à dire qui s'apparente à un calcul de mécanique statistique comme pour l'évaluation du polynôme de Jones à la Kaufmann. Je montrerais au chapitre 7 comment on peut essayer de résoudre le problème en utilisant la théorie de Chern-Simons.

L'intérêt de cette analyse serait de fournir un exemple où tout est explicitement calculable et où d'autre part, la topologie des surfaces est bien connue. On sait même depuis les travaux de Ladegaillerie [114][113] classer les classes d'isotopies de plongements de 1-complexes dans les surfaces. Nous aimerions savoir si l'ensemble des théories de Higgs permet de séparer ces classes d'isotopies. Nous reviendrons sur ces perspectives dans la conclusion de cette thèse, en particulier dans la section 7.5 du dernier chapitre.

Chapitre 2

Implications physiques des phases topologiques en Théorie Quantique des Champs.

Après la présentation plutôt abstraite du chapitre précédent, il s'agit de motiver quelque peu les considérations des chapitres ultérieurs. En effet, l'intérêt des théories topologiques tridimensionnelles ne réside pas seulement dans la classification des variétés de dimension 3 ou dans la classification des théories conformes à deux dimensions, mais présente un intérêt physique propre.

En examinant précisément la procédure de quantification par l'intégrale de chemin et la prescription de Feynman pour la mesure [62]:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[\varphi]\right)\mathcal{D}[\varphi]$$

on se rend compte qu'il est possible de corriger cette formule sans changer le comportement classique du système en introduisant une phase qui est constante sur chaque composante connexe de l'espace des configurations. C'est l'origine de toutes les phases topologiques de la TQC. Ces phases apparaissent à de multiples endroits, dès que l'espace des configurations a une topologie non triviale [187].

Nous citerons divers exemples de ce phénomène mais nous insisterons tout particulièrement sur la statistique des excitations élémentaires dans les systèmes bidimensionnels[187]. Plus précisément, nous montrerons que l'espace des configurations utilisé pour décrire un ensemble de n excitations indiscernables n'est pas simplement connexe. Les représentations de son groupe fondamental classent les statistiques quantiques de ces n excitations. En dimension d'espace M supérieure à 3, les seules statistiques possibles sont celles de Bose-Einstein et Fermi-Dirac. Mais à deux dimensions, la physique semble bien plus riche: le groupe fondamental est alors un groupe de tresses qui ne dégénère pas en le produit $(\pi_1(M))^n \times \Sigma_n$. En utilisant le travail de J. Birman sur les groupes de tresses, [13], on peut classer toutes les statistiques à deux dimensions. De manière tout à fait étonnante, seules les statistiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac sont permises dès que le genre de M est non nul. Pour $g = 0$ on retrouve les résultats de Thouless et Wu [176]. Enfin, ceci amène à analyser la relation entre les parastatistiques à 2+1 dimensions et les théories topologiques à 3D. Ces deux concepts sont en fait étroitement reliés et la classification ou au moins l'étude des théories topologiques tridimensionnelles présente un intérêt pour la construction de nouveaux modèles statistiques à 2+1 dimensions.

Nous discuterons la notion de phase topologique en utilisant l'intégrale fonctionnelle. Puis, nous examinerons la définition des statistiques à trois dimensions en utilisant les travaux de J. Birman, puis

nous introduirons les parastatistiques à 2+1 dimensions.

2.1 Phases Topologiques.

Dans cette section, nous discutons quelques propriétés générales des facteurs de phase topologiques et en particulier leur influence sur l'espace des états physiques du système.

2.1.1 Généralités sur les facteurs topologiques.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, une TQC se définit par la donnée d'une action $S_M[\varphi]$ fonctionnelle des champs vivant sur l'espace-temps M et une mesure $\mathcal{D}[\varphi]$ sur ces champs. Dans le cadre de la mécanique quantique, les amplitudes de probabilité se calculent comme une intégrale:

$$Z[M, f] = \int_{\varphi|_{\partial M} = f} \mathcal{D}[\varphi] W_M[\varphi]$$

où $W_M[\varphi]$ est un poids qui est relié à l'action S_M . Plus précisément, Feynman [62] a montré que $W_M[\varphi]$ était *proportionnel* à $\exp(iS_M[\varphi]/\hbar)$. Dans la limite classique, c'est à dire quand $\hbar \rightarrow 0$, les configurations dominantes sont données par $\partial S_M[\varphi]/\partial \varphi = 0$. Il est toutefois possible de préserver cette propriété, i.e. d'avoir la même limite classique en modifiant le comportement quantique. Il suffit que le facteur de proportionnalité entre $\exp(iS_M[\varphi]/\hbar)$ et $W_M[\varphi]$ ne soit pas une constante sur l'ensemble de toutes les configurations de champ possibles mais varie d'une composante connexe de l'espace des configurations à l'autre. Notons $\Phi_M[\varphi]$ ce facteur. Comme il apparaît souvent sous la forme d'une phase (comme dans l'effet Bohm-Aharanov), nous parlerons de phase topologique.

Il nous faut examiner les propriétés de cette phase. En effet, la TQC doit être locale et ceci impose des contraintes sur Φ_M . Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des situations où la topologie de l'espace à temps fixé ne change pas. Dans un contexte plus général, on devrait considérer aussi les facteurs topologiques possibles sur un espace-temps comportant un changement de topologie spatiale.

Fixons un espace N pour étudier la théorie sur un espace-temps cylindrique: $N \times [t_1, t_2]$. La contrainte la plus forte provient de la localité. Soit φ une configuration de champs sur $N \times [t_1, t_2]$ et φ' une autre qui la prolonge sur $N \times [t_2, t_3]$, alors dans ce cas, nous avons:

$$(2.1) \quad W[\varphi \sharp \varphi'] = W[\varphi] W[\varphi']$$

Bien entendu, $\varphi \sharp \varphi'$ est la configuration de champ obtenue sur $N \times [t_1, t_3]$ à partir de φ et φ' . Comme nous travaillons sur un cylindre, φ peut se voir comme un chemin tracé dans l'espace des configurations des champs à temps fixé. Le poids fournit donc une représentation à valeurs dans le groupe $U(1)$ des nombres complexes unimodulaires du groupoïde fondamental de l'espace des configurations à temps fixé. Il est naturel de supposer que ce poids topologique vaut 1 pour des configurations de champs stationnaires. De même, si changer le sens du temps revient à changer l'opérateur évolution en son conjugué hermitique, on peut s'attendre à ce que $W[\gamma^{-1}] = W[\gamma]^*$ où $\gamma^{-1}(t) = \gamma(t_f - t + t_i)$ est obtenue à partir de γ en changeant le sens du temps. Ainsi, nous aurons:

$$(2.2) \quad W[\gamma_1 \sharp \gamma_2] = W[\gamma_1] W[\gamma_2]$$

$$(2.3) \quad W[\text{chemin constant}] = 1$$

$$(2.4) \quad W[\gamma^{-1}] = W[\gamma]^*$$

Enfin, ce facteur de phase est topologique, c'est à dire qu'il doit être invariant dans toute homotopie à extrémité fixée du chemin γ . Ceci motive la définition suivante:

Définition 34 *Un facteur de phase topologique admissible sur N est une fonction W sur l'ensemble des chemins tracés dans l'espace des configurations à temps fixé $\mathcal{C}_0$ et qui vérifie*

- *L'invariance par homotopie à extrémités fixées.*
- *Les identités 2.2, 2.3 et 2.4.*

Dans ce cas, prenons les configurations de champ périodiques qui passent par une configuration de base P_* ; elles correspondent à des lacets dans l'espace des configurations des champs à temps fixé. Il est clair que pour chaque point base P_* choisi, on dispose d'une représentation à valeurs dans $U(1)$ du groupe fondamental basé en P_* : $\pi_1(\mathcal{C}_0, P_*)$. Si cet espace de configurations est connexe, cette représentation ainsi que le groupe fondamental ne dépendent pas du point base¹. Nous supposons que c'est le cas dans la suite et finalement on a défini une représentation de $\pi_1(\mathcal{C}_0)$.

Ceci fournit une méthode de classification des facteurs de phases topologiques pour un système physique donné: on commence par déterminer $\mathcal{C}_0$ et son groupe fondamental². Puis on classe les représentations à valeurs dans $U(1)$ de ce groupe. Enfin on ne garde que celle qui peuvent s'étendre en un facteur topologique au sens de la définition 34. Ce dernier point est fondamental pour pouvoir implanter les idées de localité. Il permet aussi de lever l'ambiguïté qui apparaît lorsque l'on parle de groupe fondamental sans spécifier le point base³.

2.1.2 Quantifications exotiques: problème des états physiques à plusieurs excitations.

L'approche précédente peut sembler satisfaisante mais elle ne répond pas à la douloureuse question de la nature des états physiques. Nous disposons d'un espace de configurations $\mathcal{C}_0$ mais il n'est pas clair que l'espace des fonctions d'ondes soit l'espace des fonctions de carré sommable sur $\mathcal{C}_0$. Des contre-exemples sont connus, nous en rencontrerons par la suite, en particulier le modèle de Wess-Zumino-Witten pour les théories invariantes conformes bidimensionnelles et la théorie de Chern-Simons dans le cas tridimensionnel topologique. Dans cette section, nous aimerions suggérer la nature des états physiques plus que décrire explicitement un exemple. Plus loin dans ce chapitre, nous discuterons les statistiques fractionnaires et une récente analyse de E. Verlinde en termes de fonctions d'ondes illustre parfaitement notre propos général [182].

De la difficulté de définir un propagateur.

Nous nous limiterons ici à un formalisme Hamiltonien. C'est à dire que nous étudierons la théorie sur $N \times \mathbb{R}$ pour déterminer les états physiques. Les configurations du système physiquement inéquivalentes sur N forment un espace $\mathcal{C}_0$ qui dépend de N . Précisons qu'il s'agit ici de l'espace des valeurs de la coordonnée, à moins qu'il soit impossible comme dans certains exemples de quantification géométrique de garder tout l'espace des phases, la restriction à une coordonnée étant effectuée au travers d'une condition d'holomorphic [183]. Les configurations sur $N \times [t_i, t_f]$ sont des chemins tracés dans $\mathcal{C}_0$. Comme nous

¹A isomorphisme près: un changement de point base se traduit par un automorphisme intérieur!!!

²Ici, l'abélianisé suffit.

³Voir la précédente note en bas de page!

l'avons vu, le facteur topologique est une phase qui ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées des chemins tracés dans $\mathcal{C}_0$. Elle vérifie en plus la propriété de localité:

$$(2.5) \quad \Phi[\gamma_1 \# \gamma_2] = \Phi[\gamma_1] \Phi[\gamma_2]$$

où $\gamma_{1,2}$ sont deux chemins tels que l'extrémité finale de γ_1 soit l'extrémité initiale de γ_2 . Bien sur, $\gamma_1 \# \gamma_2$ est le composé de ces chemins. Cette propriété montre qu'il est impossible de définir un propagateur mono-valué sur $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$.

En effet, soient P_i et P_f deux configurations sur N , le propagateur entre les instants t_i et t_f évalué entre ces configurations est donné par:

$$(2.6) \quad K[(P_i, t_i); (P_f, t_f)] = \int_{\substack{\gamma(t_i)=P_i \\ \gamma(t_f)=P_f}} e^{iS[\gamma(t)]} \phi[\gamma(t)] \mathcal{D}[\gamma(t)]$$

qui possède une monodromie non triviale dans $\mathcal{C}_0$ dès que celui ci n'est pas simplement connexe. En effet, si nous faisons circuler P_f le long d'un cycle non trivial de $\mathcal{C}_0$, la valeur du propagateur va changer. Imaginons, pour nous convaincre, que seule la partie topologique joue un rôle dans le poids de Feynman, alors, soit γ_0 le chemin suivi dans l'opération de monodromie, on aurait:

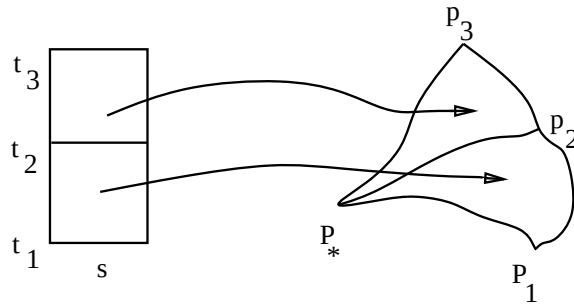
$$K'[(P_i, t_i); (P_f, t_f)] = W[\gamma_0] K[(P_i, t_i); (P_f, t_f)]$$

où K' désigne le propagateur après l'opération de monodromie. En conséquence, le propagateur est *a priori* mal défini dans cette approche.

Ceci montre que ni le propagateur, ni les fonctions d'ondes ne peuvent être considérés comme des fonctions définies sur $\mathcal{C}_0$. Les fonctions d'ondes dépendent d'une trajectoire qui relie le point où on les évalue à un point de référence. Cette description est d'ailleurs la plus simple qui produise un poids topologique $W[\gamma]$ local: γ désigne un chemin tracé dans l'espace des chemins qui partent du point de référence $P_* \in \mathcal{C}_0$. Un tel chemin est une surface plongée dans $\mathcal{C}_0$. Elle est définie par une fonction $\gamma(s, t)$ sur $[0, 1] \times [t_1, t_2]$ telle que $\gamma(0, t) = P_*$. La forme la plus simple pour un poids topologique $W[\gamma]$ local est:

$$(2.7) \quad W[\gamma] = \exp(i\Lambda[\gamma(s, t)]) = \exp\left(i \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^1 ds \lambda(\gamma(t, s), d\gamma(s, t))\right)$$

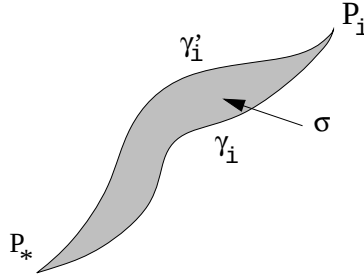
où λ est une fonction de γ et de ses dérivées. Bien entendu, l'invariance topologique impose de sérieuses contraintes sur Λ mais le fait que ce soit une fonctionnelle locale entraîne que $W[\gamma_1 \# \gamma_2] = W[\gamma_1] W[\gamma_2]$ comme le suggère le schéma suivant:



Nous pouvons alors voir W comme une fonctionnelle définie sur les plongements de surfaces dans $\mathcal{C}_0$, cette fonctionnelle étant multiplicative par recollement et topologique, c'est à dire que si σ_1 et σ_2 sont homotopes, $W[\sigma_1] = W[\sigma_2]$.

Sections de fibrés et états physiques.

Il est important pour comprendre la signification de l'introduction de chemins associés à un point de comprendre comment varie par exemple le propagateur quand on passe d'un chemin reliant P_* à P_i à un chemin voisin. Soient γ_i et γ'_i les deux chemins considérés:



σ qui les relie, le propagateur évalué entre les chemins γ_i et γ_f est relié à celui calculé entre γ'_i et γ_f par:

$$K[\gamma'_i, \gamma_f] = W[\sigma]K[\gamma_i, \gamma_f]$$

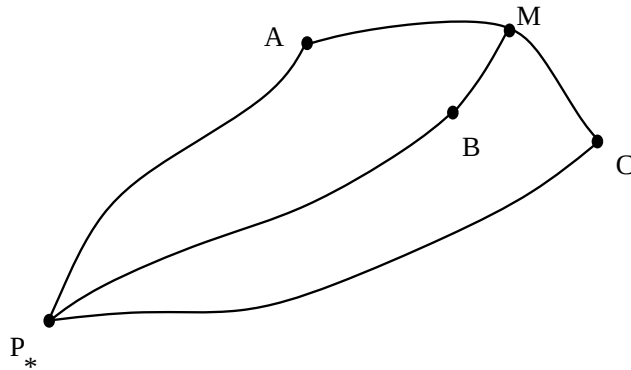
et donc, on s'attend à ce que les fonctions d'ondes aient le comportement opposé pour contrebalancer cet effet si on juge que le chemin attaché au point P n'est pas un degré de liberté physique:

$$(2.8) \quad \psi[P_i] \mapsto W[\sigma]^{-1}\psi[P_i]$$

Prenons alors un point A de $\mathcal{C}_0$, et un voisinage $\mathcal{W}_A$ de A connexe par arcs, contractile dans $\mathcal{C}_0$, soit B un autre point de $\mathcal{W}_A$, on choisit γ_A et γ_B deux chemins homotopes⁴ reliant respectivement P_* à A et P_* à B . Pour tout point M de $\mathcal{W}_A$, nous supposons avoir choisi deux chemins $\gamma_{A,M}$ et $\gamma_{B,M}$ qui relient A (respectivement B) à M , alors par contractilité de $\mathcal{W}_A$, les chemins $\gamma_A \# \gamma_{A,M}$ et $\gamma_B \# \gamma_{B,M}$ sont homotopes. On notera σ_M une homotopie entre ces chemins. Soient $\psi_{I(A)}$ et $\psi_{I(B)}$ où $I(A)$ désigne le choix de A , γ_A et d'un chemin $\gamma_{A,M}$ pour tout M de $\mathcal{W}_A$, deux fonctions sur $\mathcal{W}_A$ reliées par:

$$(2.9) \quad \psi_{I(B)}(M) = W[\sigma_M]\psi_{I(A)}(M)$$

Cette identité définit une fonction $\Psi_{I(A), I(B)}$ sur $\mathcal{W}_A$ et le dessin suivant:



⁴C'est possible car $\mathcal{W}_A$ est pris connexe par arcs.

montre que:

$$(2.10) \quad \Psi_{I(A),I(B)} \Psi_{I(B),I(C)} = \Psi_{I(A),I(C)}$$

ce qui montre que ces fonctions définissent un fibré en droite [41] au dessus de $\mathcal{C}_0$ et que les fonctions $\psi_{I(A)}$ sont les expressions, dans une trivialisation locale, des sections de ce fibré. Nous le noterons $\mathcal{L}$.

Lorsque l'on étudie la monodromie d'une fonction d'onde (ou du propagateur), on choisit le long d'un lacet de $\mathcal{C}_0$ une trivialisation du fibré image réciproque sur le cercle de $\mathcal{L}$ (qui est forcément trivial comme tout fibré structural de groupe $\mathbb{C}^*$ sur le cercle). L'objet dont on regarde la monodromie n'est autre qu'une expression dans cette trivialisation de l'image réciproque de la section de $\mathcal{L}$ considérée. Ceci constitue le lien standard entre la théorie des fonctions multivaluées et les sections de fibrés.

Ainsi dans de tels systèmes, les états ne *sont pas* des fonctions de carrés sommables sur l'espace des configurations physiquement inéquivalentes du système mais des sections de fibrés en droites au dessus de ces espaces.

Remarque : Comme nous le verrons plus tard, dans le cas où les états du système sans facteur de phase topologique sont des fonctions holomorphes sur un certain espace de phase⁵, alors les fonctions d'ondes du système avec facteur topologique sont les sections holomorphes d'un fibré en droite holomorphe au dessus de ce même espace de phases. Nous reviendrons sur des exemples de ce phénomène plus tard. $\square$

2.2 Particules indiscernables.

Dans cette section, nous allons décrire dans le formalisme de l'intégrale fonctionnelle l'apparition des statistiques quantiques. Nous verrons qu'en dimension $D > 2$, les seules statistiques possibles sont celles de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac mais qu'à deux dimensions, il existe d'autres possibilités. Nous commencerons par les décrire, puis nous décrirons les différentes statistiques en dimension $D > 1$. Enfin, nous généraliserons ces considérations aux parastatistiques. Cela nous permettra d'obtenir dans le cas bidimensionnel un ensemble d'équations que l'on pourra considérer comme duales des équations de Moore et Seiberg⁶. Une esquisse de connexion avec ces équations peut d'ailleurs être trouvée dans une approche due à Verlinde par les fonctions d'ondes [182].

2.2.1 Espace de configurations.

Décrire un ensemble de “particules identiques” quantiques nécessite de renoncer à toute image classique. En effet, dans le formalisme de la mécanique quantique, les “particules” ne peuvent être localisées dans une région trop petite de l'espace-temps. Elles sont décrites par des paquets d'ondes qui ont une certaine extension spatiale. En conséquence, la notion de choc ponctuel n'existe plus et la notion de particule individuelle n'a plus vraiment de sens...

En domaine de la matière condensée, cette situation est manifeste: on dispose d'un système microscopique avec des particules⁷ dont on pense pouvoir ignorer la structure interne et qui interagissent. L'étude de tels systèmes révèle que ceux-ci possèdent un vide et des états excités. Ces derniers peuvent souvent

⁵Comme c'est le cas dans la quantification géométrique ou dans l'exemple familier de l'espace de Bargmann-Fock utilisé pour décrire l'oscillateur harmonique [99, Paragraphe 9.1.2].

⁶Qui feront leur apparition au Chapitre 3.

⁷Atomes, molécules et autres...

être décrits par des *excitations localisées* qui sont des modes de vibration *collectifs* du système microscopique. Le point important est que ces excitations ont une extension spatiale finie mais *non nulle*. Dans ces conditions, on conçoit aisément que considérer chacune d'elles comme une entité à part entière soit absurde: seul compte le système complet, dont les excitations ne sont qu'une description commode... Pour souligner le fait que les considérations qui vont suivre s'appliquent principalement dans le domaine de la matière condensée, et donc aux excitations d'un système complexe, j'emploierai préférentiellement le mot "excitation" pour désigner les entités dont on étudie les propriétés statistiques. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de cette thèse, les situations expérimentales où les considérations qui vont suivre ont une pertinence certaine commencent à se multiplier. J'invite le lecteur à lire le très bel article de Fröhlich [74] où sont mentionnés comme domaines d'application les systèmes de Hall quantiques ainsi que les films d'Hélium 3 superfluide en phase A et A_1 [184]. Dans ce dernier exemple, il apparaît un phénomène analogue à l'effet Hall mais avec ces courants de spin et des gradients de potentiel chimique.

Ceci nous amène à ne pas chercher de justification basée sur des arguments classiques pour ce que peut être l'espace de configurations de tels systèmes. L'idéal serait de donner un exemple de système microscopique dont les excitations aient le comportement statistique que nous allons décrire plus bas mais faute de cela, nous envisagerons le problème sous un angle plutôt abrupt mais direct.

Pour décrire un ensemble de n excitations vivant dans un espace N , l'espace de configuration le plus simple est:

$$(2.11) \quad \mathcal{F}_n(N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in N^n; \quad \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$$

Toutefois chacune des excitations peut se voir attribuer un numéro et donc cela décrira l'espace des configurations de n excitations discernables. Dans le cas indiscernable, on utilisera:

$$(2.12) \quad \mathcal{B}_n(N) = \frac{\{(x_1, \dots, x_n) \in N^n; \quad \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}}{\Sigma_n}$$

où Σ_n est le groupe des permutations de n objets qui agit naturellement sur $\mathcal{F}_n(N)$. L'objet pertinent dans l'étude des systèmes à n excitations est le groupe fondamental de ces espaces qui a été étudié en long, large et en travers par J. Birman. La statistique des excitations n'est autre que le facteur topologique associé à la topologie de $\mathcal{B}_n(N)$. Plus précisément:

Définition 35 *La statistique de n excitations vivant sur N est définie par une représentation de $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$ dans les nombres complexes de module 1.*

Remarque : Dans le cas des excitations discernables, le facteur de phase topologique, s'il existe, définit une représentation de $\pi_1(\mathcal{F}_n(N))$. On pourrait s'attendre à ce que ce groupe ne code rien de plus que $\pi_1(N)$ mais nous verrons que dans le cas bidimensionnel, il n'en est rien, ce qui permet l'existence d'interactions topologiques entre excitations... $\square$

En ce qui concerne les groupes fondamentaux des espaces de configuration considérés ici, le lecteur intéressé trouvera les résultats principaux énoncés dans l'ouvrage de référence de J. Birman [13]. A titre indicatif, on emploie la terminologie suivante:

Définition 36 *Le groupe fondamental de $\mathcal{F}_n(N)$ est appelé le groupe des n -tresses colorées basées sur N . Celui de $\mathcal{B}_n(N)$ est celui des n -tresses (non colorées) basé sur N .*

En fait, ces groupes de tresses ne sont intéressants que dans le cas de la dimension $D = \dim(N) = 2$:

Théorème 5 *Si N est de dimension $D > 2$, alors: $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$ est un produit semi direct de $(\pi_1(N))^n$ avec Σ_n et le groupe fondamental de $\mathcal{F}_n(N)$ est $(\pi_1(N))^n$*

En effet, on peut toujours dénouer un entrelac en dimension supérieure à trois! Ainsi, dès que la dimension est supérieure à deux, il se produit une sorte de découplage entre les propriétés topologiques globales de N (qui se reflètent dans $(\pi_1(N))^n$) et la statistique (qui est codée dans $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$). Nous allons maintenant classer les différentes statistiques possibles suivant n et N .

2.2.2 Statistiques en dimension $D > 2$.

Nous utilisons le théorème 5. Soit $(g_k)_{k \in I}$ un ensemble de générateurs de $\pi_1(N)$. Notons $g_k^{(l)}$ le n -uplet de $(\pi_1(N))^n$ qui contient $1_{\pi_1(N)}$ sauf à la place l où on met g_k ; alors la loi de groupe de $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$ est donnée par:

$$(2.13) \quad (1_{(\pi_1(N))^n}, \sigma)(g_k^{(l)}, \sigma') = (g_k^{(\sigma(l))}, \sigma \sigma')$$

Soit $\exp(2\pi i \vartheta_k)$ la phase associée à $g_k^{(1)}$ par le facteur de phase topologique, cette relation montre que c'est la phase associée à $g_k^{(l)}$ pour tout l . Enfin, en regardant le sous groupe formé des éléments de la forme $(1_{(\pi_1(N))^n}, \sigma)$ où $\sigma \in \Sigma_n$, on définit une représentation ρ de Σ_n dans les nombres complexes de module 1. Il n'existe que deux telles représentations, la triviale et la signature. En conséquence:

$$(2.14) \quad W[(g_k^{(l)}, \sigma)] = \rho(\sigma) \exp(2\pi i \vartheta_k)$$

Ceci détermine entièrement les propriétés de statistique de nos excitations: ainsi le cas où ρ est la représentation triviale correspond aux bosons et le cas de la signature correspond au cas des fermions. En conclusion:

Théorème 6 *Dès que la dimension de l'espace N est supérieure ou égale à trois, les seules statistiques possibles sont bosoniques ou fermioniques et le facteur de phase topologique est un produit de ce facteur statistique et du facteur topologique associé à $\pi_1(N)$ calculé pour chacune des excitations.*

Remarquons que l'expression du facteur topologique est triviale au sens où les effets dus à la non-trivialité de l'espace N se manifestent indépendamment pour les différentes excitations: le facteur de phase est simplement le produit des facteurs associés à chacune des excitations.

2.2.3 Cas bidimensionnel.

Dans le cas bidimensionnel, il en est tout autrement car la topologie de l'espace des configurations n'est pas triviale. Nous allons voir que même dans le cas d'excitations discernables, le facteur topologique n'est pas un produit de facteurs associés à chacune des trajectoires mais que des effets topologiques globaux sont possibles. Enfin, nous donnerons la liste des statistiques qui peuvent apparaître pour $D = 2$.

Interactions topologiques en dimension $d = 2$.

Considérons ici n excitations discernables vivant sur une surface de genre g . Dans ce cas, l'espace des configurations de ce système est

$$(2.15) \quad \mathcal{F}_{g,n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_g^n, \quad i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$$

dont le groupe fondamental est le groupe des n -tresses colorées sur Σ_g . Remarquons que l'on dispose d'une suite exacte [13, Page 17] où le noyau de chaque morphisme est égal à la clôture normale de l'image du morphisme précédent:

$$(2.16) \quad 1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{e_{0,n}} \pi_1(\mathcal{F}_n(\Sigma)) \xrightarrow{i_*} (\pi_1(\Sigma))^n \longrightarrow 1$$

Les applications $e_{0,n}$ et i_* sont définies de la manière suivante:

- Nous choisissons un ouvert U de Σ_g homéomorphe à un disque ouvert. Le groupe des tresses sur le plan se plonge naturellement dans $\pi_1(\mathcal{B}_n(\Sigma_g))$ car toute tresse est associée à une classe d'homotopie de n chemins ne s'intersectant pas qui relient les n points $(P_1, \dots, P_n) \in (\mathbb{R})^n$ entre eux. Comme le plan est homéomorphe à un disque ouvert, ceci fournit notre application $e_{0,n}$ qui est trivialement un morphisme de groupes.
- L'application i_* s'obtient en considérant que chacun des brins de la n -tresse est indépendant des autres.

La clôture normale d'un sous-groupe $H \subset G$ s'obtient par

$$\tilde{H} = \bigcup_{g \in G} g^{-1} H g$$

et donc, si $\rho \in \text{hom}(G, U(1))$, il suffit de connaître l'action de ρ sur H pour la connaître sur $\tilde{H}$.

En conséquence, ceci montre que le facteur topologique pour n excitations sur Σ_g est entièrement défini par sa valeur sur $\text{Im}(e_{0,n})$ et par son action sur un système d'antécédents des générateurs de $(\pi_1(\Sigma_g))^n$ dans le groupe des tresses colorées. Physiquement, l'interprétation de ces données est la suivante:

- Quand une particule fait un tour le long d'un des générateurs non triviaux de $\pi_1(\Sigma_g)$, il lui est attribué un facteur de phase topologique qui rend compte de la topologie de Σ_g . On peut parler d'un “effet Bohm-Aharonov” topologique.
- La valeur du facteur topologique sur $\text{Im}(e_{0,n})$ définit des *interactions topologiques* entre les excitations. En effet, ce facteur ne dépend pas de la topologie globale de Σ_g mais seulement des mouvements relatifs des excitations, c'est à dire de la manière dont leurs trajectoires s'entrelacent.

Nous allons voir que dans le cas des excitations identiques, la statistique provient de l'action du groupe des tresses non-colorées que nous allons maintenant étudier.

Statistiques fractionnaires.

Comme nous l'avons vu, le facteur de phase doit nous fournir une représentation du groupe des n -tresses basé sur N . Pour classer ces représentations et comme on a affaire à des groupes infinis, le plus simple est encore de se servir d'une présentation par générateurs et relations. C'est la méthode que nous suivrons.

Cas du plan et de la sphère.

Dans le cas du plan, le groupe des n -tresses a été étudié dès les années 20 par Artin et sera noté B_n . Rappelons le résultat suivant:

Théorème 7 (Artin) *Une présentation par générateurs et relations du groupe B_n est donnée par:*

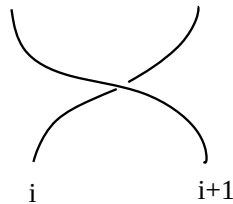
Générateurs B_n est engendré par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Relations Ceux ci obéissent aux relations:

$$(2.17) \quad \text{Si } |i - j| \geq 2, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

$$(2.18) \quad \forall i, \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

Les générateurs σ_i correspondent à l'échange des excitations i et $i + 1$ comme indiqué ci-dessous:



mais à la différence du groupe des permutations, le sens du croisement⁸ n'est pas indifférent.

Ainsi, la seconde relation montre que la phase associée à σ_i est en fait indépendante de i . Et comme la relation $\sigma_i^2 = 1$ est absente du groupe des tresses, il n'y a pas de contrainte sur la phase associée à σ_i . C'est pourquoi on parle de statistique fractionnaire, il n'y a pas que des bosons et des fermions.

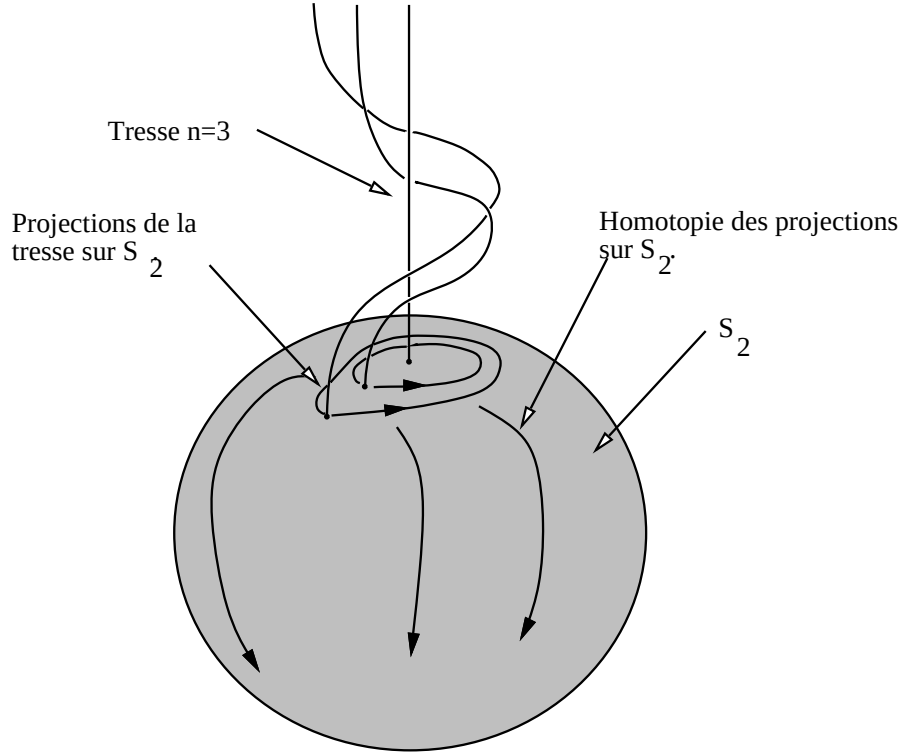
Dans le cas de la sphère, la situation est plus surprenante, le résultat fondamental est le suivant:

Théorème 8 *Le groupe des n -tresses basé sur la sphère S_2 est engendré par les mêmes tresses que B_n qui vérifient les mêmes relations avec en plus la relation:*

$$(2.19) \quad \sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \dots \sigma_1 = 1$$

⁸Par dessus ou par dessous.

Le cas $n = 3$ illustre parfaitement l'origine topologique de cette relation supplémentaire. Sur la sphère, il est possible de dénouer une tresse en passant par un des deux pôles:



Sur cette figure, nous avons dessiné la tresse correspondant à $\sigma_1 \sigma_2^3 \sigma_1$ et sa projection sur S_2 ainsi que la façon de la dénouer en passant par un des pôles.

Comme dans le cas du plan, la phase associée à σ_i est indépendante de i mais cette fois, nous disposons d'une contrainte que provient de la relation 2.19

$$4\pi(n-1)\vartheta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Ceci montre que la statistique dépend du nombre d'excitations ce qui est un phénomène plutôt inhabituel [176]!!

Théorème 9 (Wu) *Pour n excitations sur une sphère S_2 , la phase associée à l'échange d'excitations est une racine $2(n-1)$ -ème de l'unité.*

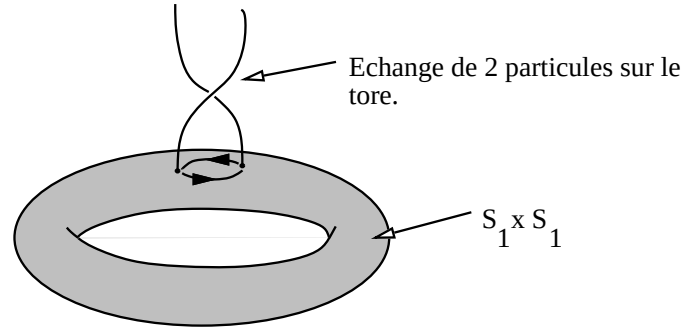
Genre $g \geq 1$.

Dans le cas des surfaces de genre plus élevé que 1, l'influence de la topologie est encore plus marquée. Comme précédemment, la littérature mathématique contient les présentations par générateurs et relations qui permettent de classer les facteurs de phases topologiques pour n excitations sur une surface de genre g . Je renvoie pour cela le lecteur à l'article de J. Birman [12] Nous illustrerons notre propos sur l'exemple du tore.

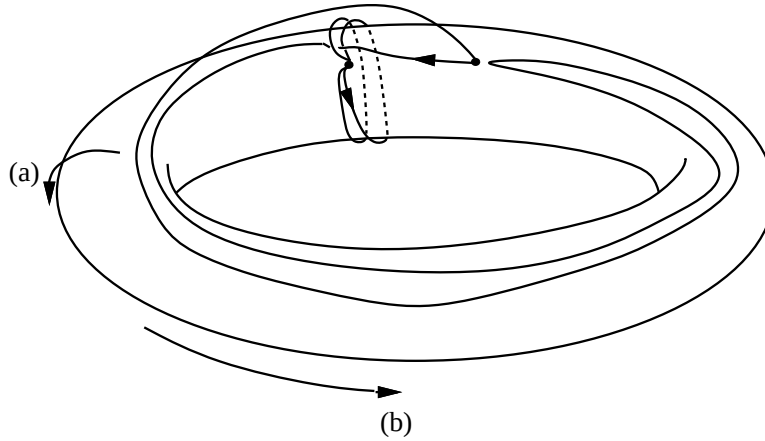
La nouveauté réside dans l'apparition des deux cycles non-triviaux (a) et (b) qui forment une base de l'homologie du tore. Celle-ci est l'abélianisée du groupe fondamental⁹ et la phase topologique associée

⁹C'est le cas pour toute surface.

est $\exp(2\pi i \vartheta_a)$ pour une trajectoire suivant (a) (respectivement $\exp(2\pi i \vartheta_b)$ le long du cycle (b)). Par l'argument standard, cette phase est la même pour chaque particule. On dispose aussi de σ_i qui échange les excitations i et $i + 1$ comme indiqué :



Ce dernier générateur est à l'origine de la statistique. Le plus surprenant est que son carré peut s'obtenir à partir de déplacements le long des cycles (a) et (b). Sur cette figure, nous avons considéré le cas $g = 1, n = 2$.



Ainsi, l'élément σ_i^2 est un commutateur dans le groupe $\pi_1(\mathcal{B}_2(\Sigma_1))$. Ce phénomène se généralise à $n > 1$ et $g \geq 1$. Ainsi, la phase associée à σ_i est ± 1 ! Ceci montre le théorème suivant :

Théorème 10 *En genre $g \geq 1$, les seules statistiques possibles sont bosoniques et fermioniques.*

2.2.4 Parastatistiques.

Les parastatistiques sont une généralisation des statistiques fractionnaires pour des particules ou des excitations qui possèdent des degrés de liberté internes. L'exemple le plus connu étant les quarks avec la couleur. Nous allons indiquer comment traiter cela par l'intégrale fonctionnelle en nous focalisant rapidement au cas bidimensionnel.

Généralités.

L'amplitude de probabilité doit être prise entre deux états qui ne spécifient plus seulement les positions géométriques des excitations mais aussi leur état interne. On peut voir le degré de liberté interne

pour une excitation comme un élément d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V . Dans le cas de n excitations, l'amplitude entre deux positions géométriques données est un endomorphisme de $V^{\otimes n}$. Nous supposons V de dimension finie.

Dans ce cas, le lecteur se convaincra facilement de la proposition suivante:

Proposition 5 *Les parastatistiques d'un ensemble de n excitations à degrés de liberté dans l'espace vectoriel V et se déplaçant dans N sont classées par les représentations de $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$ agissant sur $V^{\otimes n}$.*

En fait l'idée est la même que dans le cas des statistiques fractionnaires mais cette fois, nous avons affaire à des matrices...

Remarque: Ces parastatistiques sondent la partie non-abélienne de $\pi_1(\mathcal{B}_n(N))$. Les statistiques fractionnaires par contre ne sondent que l'abélianisé de ce groupe fondamental. $\square$

Nous ne détaillerons pas ici le cas de la dimension $D > 2$. En effet, un résultat remarquable dû à Doplicher et Roberts [49][50] montre que dans ce cas, V est une représentation linéaire d'un groupe compact. La portée de ce résultat est considérable: à partir de considérations *cinématiques*, il fournit l'existence d'un groupe compact ce qui constitue souvent une hypothèse sur la *dynamique* du modèle (comme dans le cas des théories de jauge). Cette philosophie sera reprise dans le contexte des théories conformes et topologiques comme nous le verrons tout au long de cette thèse.

Cas bidimensionnel.

Dans le cas bidimensionnel, nous connaissons une description simple du groupe des tresses basé sur une surface Σ_g . Nous allons utiliser cette description pour classer ces parastatistiques.

Cas du plan.

Le groupe des tresses d'Artin est engendré par les σ_i pour $i \in \langle 1, n-1 \rangle$. Nous ferons l'hypothèse suivante:

Le générateur σ_i de B_n agit exclusivement sur les espaces d'index i et $i+1$ du produit tensoriel $V^{\otimes n}$.

qui traduit la localité spatiale de la parastatistique. Derrière cette idée venue de la physique se cache le désir de disposer d'une machine à construire des représentations de *tous* les groupes de tresses d'Artin $(B_n)_{n>1}$. Par souci de simplicité, il nous paraît judicieux que l'opérateur associé à σ_i (qui est un élément de $V \otimes V$) soit indépendant de n et de i . Ainsi, nous supposons qu'il existe un opérateur inversible $R \in GL(V \otimes V)$ tel que si ρ_n désigne la représentation de B_n considérée ici:

$$(2.20) \quad \forall i \in \langle 1, n-1 \rangle; \quad \rho_n(\sigma_i) = \mathbf{1}_{V^{\otimes(i-1)}} \otimes R \otimes \mathbf{1}_{V^{\otimes(n-1-i)}}$$

Nous avons des motivations sérieuses pour construire un tel objet sur lesquelles nous reviendrons dans le cours ultérieur de cette thèse. Du point de vue de la physique, si on espère faire un jour la seconde quantification d'un tel système d'excitations, c'est à dire une théorie à un nombre variable de telles excitations, on doit imposer que les propriétés statistiques des excitations soient décrites par les mêmes opérateurs quel que soit le nombre d'excitations. C'est une justification heuristique de l'hypothèse 2.20

Alors, la relation 2.17 du groupe des tresses est trivialement vérifiée et l'autre relation est également vérifiée pour tout n dès que:

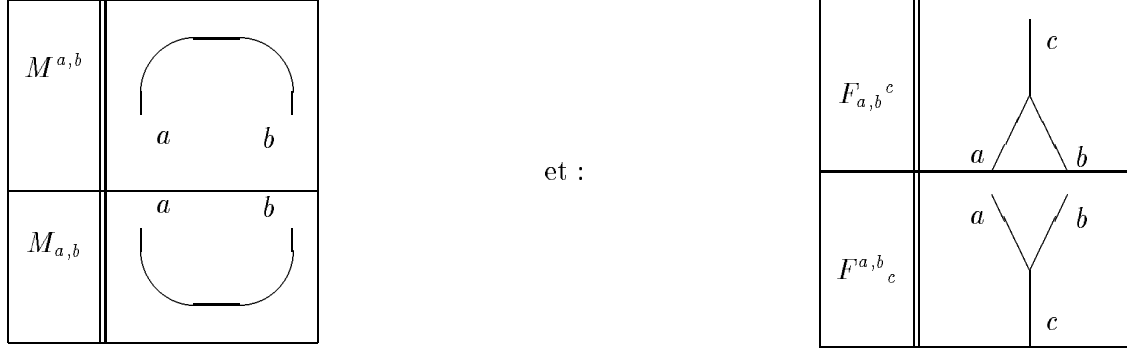
$$(2.21) \quad R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$$

C'est l'équation de Yang-Baxter écrite en représentation vertex selon la littérature relative aux modèles intégrables [154].

Il existe une matrice $\bar{R}$ qui correspond au croisement “miroir” de celui utilisé ici.

Créations et destructions d'excitations, interactions.

Pour aller vers un formalisme de seconde quantification, on peut tenter d'incorporer au niveau du facteur de phase topologique la création et la destruction d'excitations ainsi que des interactions. Ceci conduit à introduire quatre matrices M et F définies comme suit:



Ces matrices servent à associer un facteur de phase topologique à une situation dans laquelle on autorise les interactions entre excitations. Nous allons donner les relations que doivent vérifier ces matrices pour définir un invariant topologique. Ces relations se prouvent par la méthode de Reshetikhin et Turaev [152] que nous reprendrons dans la section 6.2.2. Essentiellement, la figure 2.1. décrit les différents mouvements sous lesquels notre facteur de phase doit être invariant. Reshetikhin et Turaev ont montré que ces mouvements constituaient une condition nécessaire et suffisante d'invariance topologique. Traduisons ces invariances sur les matrices M , F et R ainsi que sur les phases¹⁰

- Les relations 1 et 2 montrent que les matrices $M_{a,b}$ et $M^{a,b}$ sont inverses l'une de l'autre.
- Les relations 3 et 4 montrent que R et $\bar{R}$ sont inverses l'une de l'autre.
- La relation 5 montre l'équation 2.21 pour R et $\bar{R}$.
- Les relations 6 et 7 établissent une compatibilité entre les matrices R et F . Plus précisément:

$$(2.22) \quad F_{12}R_{23}R_{12} = R_{12}F_{23}$$

$$(2.23) \quad F_{12}\bar{R}_{23}\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}F_{23}$$

- Les relations 12 et 13 montrent que l'on doit introduire le spin de l'excitation de degré de liberté interne a . Comme on le sait bien, le spin bidimensionnel est décrit par une représentation irréductible du groupe $SO(2)$ et donc par un nombre complexe de module un. Le comportement d'un champ de spin s par une rotation bidimensionnelle d'angle ϑ est donné par:

$$\phi \mapsto e^{is\vartheta} \times \phi$$

¹⁰Les numéros des relations font référence à la figure.

En conséquence, en notant h_a le spin associé au degré de liberté a , nous obtenons:

$$(2.24) \quad R_{ab}^{xy} M_{xy} = e^{2\pi i h_a} M_{ab}$$

$$(2.25) \quad \bar{R}_{ab}^{xy} M_{xy} = e^{-2\pi i h_a} M_{ab}$$

de manière évidente.

- Les relations suivantes permettent de relier les matrices F aux matrices R , $\bar{R}$ et aux spins:

$$(2.26) \quad (F\bar{R})_{ab}^c = e^{-2\pi i h_c} F_{ab}^c$$

$$(2.27) \quad (FR)_{ab}^c = e^{2\pi i h_c} F_{ab}^c$$

- Grâce aux matrices M_{ab} et M^{ab} , il est possible de relier F_{ab}^c à F_a^{bc} .

Les autres relations n'apportent rien de plus comme le lecteur le vérifiera.

Pour le moment, ces relations sont encore très mystérieuses pour moi. Il serait très intéressant de disposer d'une interprétation plus conceptuelle de celles-ci.

Finalement, on dispose d'un processus de calcul des facteurs topologiques sur n'importe quelle surface. Ces données ont été introduites par Kauffman en vue d'obtenir une méthode de calcul sympathique pour le polynôme de Jones.

Vers la seconde quantification?

On peut alors se demander si ces données F , M et R sont adaptées à la description de la seconde quantification d'un système d'excitations obéissant à une parastatistique. L'objet de ces remarques est d'indiquer que dans ce cas, les représentations des groupes de tresse qui sont pertinentes pour la seconde quantification ne sont pas *directement* celles qui apparaissent dans la définition du facteur topologique.

Pour effectuer la seconde quantification, il importe de disposer d'une description de l'espace des états associé à n excitations. Comme nous l'avons vu dans la section 2.1.2 la présence du facteur de phase topologique complique nettement les choses. Les états ne sont plus les fonctions de carré sommable sur l'ensemble des configurations physiquement inéquivalentes du système. Soit $\mathcal{H}_{g,n}$ cet espace, un travail récent de Verlinde [182] montre comment les blocs conformes du modèle de Wess-Zumino et Witten fournissent un moyen de comprendre la structure des espaces $\mathcal{H}_{g,n}$ pour n excitations présentant une parastatistique à valeur dans une représentation irréductible d'un groupe de Lie compact, connexe et simplement connexe G .

Il va de soit que cet espace $\mathcal{H}_{g,n}$ forme une représentation du groupe des tresses $\pi_1(\mathcal{B}_n(\Sigma_g))$. Toutefois, nous soulignons que cette représentation dépend à priori de la forme précise du Hamiltonien décrivant les n excitations. Ainsi, la connexion avec les blocs conformes n'est possible que dans certains cas mais considérer des parastatistiques générales suggèrent que des représentations des groupes de tresses $\pi_1(\mathcal{B}_n(\Sigma_g))$ pour tout (g, n) peuvent apparaître dans un contexte autre que celui des modèles conformes [150][66].

2.2.5 Une approche par les fonctions d'ondes.

Pour effectuer la seconde quantification de ce système, on peut essayer de résoudre un problème à N corps puis tenter ensuite de deviner la structure de la théorie à nombre d'excitations variable. Ici, nous allons décrire quels types de problèmes peuvent apparaître à partir d'un modèle simple dû à Verlinde [182].

Le Hamiltonien que Verlinde a considéré est extrêmement particulier: les excitations portent une charge qui est un vecteur d'une représentation d'un groupe de Lie G connexe, simplement connexe, compact. Ainsi, la fonction d'onde à n excitations est une application définie sur l'espace de configuration $\mathcal{B}_n(\mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_n}$ où $i_1, \dots, i_n$ sont les couleurs des excitations 1 à n . Introduisons:

$$(2.28) \quad \nabla_i = \partial_{z_i} - \frac{1}{k+2} \sum_{j \neq i} \frac{K_{a,b}(\rho_i(T^a) \otimes \rho_j(T^b))}{z_i - z_j}$$

où $(T_a)_a$ est une base de l'algèbre de Lie LG et $K_{a,b}$ est la matrice de la forme de Killing dans cette base. Enfin:

$$(2.29) \quad \bar{\nabla}_i = \partial_{\bar{z}_i}$$

Notre Hamiltonien sera:

$$(2.30) \quad \hat{H} = -2 \sum_i \nabla_i \bar{\nabla}_i$$

Il n'est donc pas libre mais le terme d'interaction correspond en fait à des effets topologiques.

Tout d'abord, remarquons que $(\nabla_i, \bar{\nabla}_i)$ définit une connexion sur un fibré holomorphe au dessus de l'espace de configuration. La courbure de cette connexion est facile à calculer et se trouve concentrée à points coïncidents. Un calcul simple montre:

$$(2.31) \quad [\nabla_i, \nabla_j] = [\bar{\nabla}_i, \bar{\nabla}_j] = 0$$

et de même

$$(2.32) \quad [\nabla_i, \bar{\nabla}_j] = \frac{\delta_{i,j}}{k+2} \sum_{k \neq i} K_{a,b}(\rho_i(T^a) \otimes \rho_k(T^b)) \delta(z_i - z_k)$$

et dans cette approche, les fonctions d'ondes sont monovaluées dans les opérations de monodromie. On peut alors chercher les états du système c'est à dire les fonctions propres de ce Hamiltonien. Pour ce faire, le plus simple consiste à se ramener à un problème libre mais cette fois avec des fonctions d'ondes multivaluées. Nous introduisons donc des fonctions holomorphes $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n)$ à valeurs dans $V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_n}$ et solutions de¹¹:

$$(2.33) \quad \forall i; \quad \bar{\nabla}_i \mathcal{F} = 0$$

$$(2.34) \quad \nabla_i \mathcal{F} = 0$$

Ce système est linéaire et on note $(\mathcal{F}_\alpha)_\alpha$ une base de l'espace des solutions. Une fonction d'onde arbitraire $\psi(z_1, \dots, z_n)$ peut donc s'écrire sous la forme:

$$(2.35) \quad \psi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(z_1, \dots, z_n) \mathcal{F}_{\alpha}(z_1, \dots, z_n)$$

où cette fois, les fonctions ψ_{α} sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

¹¹La première équation est la condition d'holomorphicité.

Les $\mathcal{F}_\alpha$ ne sont pas monovaluées sur l'espace de configuration: ce sont les sections holomorphes d'un fibré non trivial au dessus de celui-ci. Néanmoins, les opérations de monodromie se représentent par des transformations linéaires sur les $\mathcal{F}_\alpha$. Nous verrons dans le chapitre 3 que le système formé des équations 2.33 et 2.34 apparaît naturellement dans l'étude des théories conformes¹². Retenons simplement pour l'instant que le groupe des tresses B_n agit naturellement sur l'espace des solutions:

$$(\gamma, \mathcal{F}_\alpha) \mapsto \sum_{\beta} M(\gamma)_{\alpha}^{\beta} \mathcal{F}_{\beta}$$

dans les transformations de monodromie. Comme les fonctions d'ondes sont monovaluées, les ψ_α sont par contre multivalués et se transforment de manière inverse des $\mathcal{F}_\alpha$ sous l'action du groupe de tresse. Toutefois, on remarque que:

$$\nabla_i \psi_\alpha = \partial_{z_i} \psi_\alpha$$

et l'équation aux valeurs propres pour ψ devient:

$$-2 \sum_i \partial_{z_i} \bar{\partial}_{\bar{z}_i} \psi_\alpha = E \psi_\alpha$$

qui est un problème libre.

Remarque: Ce “truc” est connu dans un contexte plus proche de la matière condensée où l'on part du Hamiltonien usuel des particules non relativistes libres et par une transformation de jauge singulière on introduit une interaction topologique:

$$(2.36) \quad \vartheta \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_i \wedge \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2}$$

où $\mathbf{x}_i$ est le vecteur position de la particule i et $\mathbf{n}$ un vecteur orthogonal au plan de déplacement des particules. Un système de bosons en interaction par ce potentiel est équivalent à un ensemble d'anyons libres de paramètre statistique ϑ . $\square$

Malheureusement, trouver l'espace des fonctions d'ondes à N corps reste un problème irrésolu, même dans cette formulation. Il apparaît toutefois des secteurs de supersélection qui sont indexés par α et sur lesquels le groupe des tresses agit. Ce point a été abondamment développé par les tenants de la TQC algébrique [66][73]. Il ressort de ces travaux une structure tout à fait analogue aux équations de Moore et Seiberg telles que nous les verrons dans le prochain chapitre.

Le principal inconvénient des blocs conformes réside dans leurs propriétés dans les changements d'échelle. En effet, dans un système de matière condensée où les excitations ont une masse M , une échelle de longueur apparaît: la longueur Compton associée à ces excitations. En conséquence, les blocs conformes ne sont pas les mieux adaptés à la description de tels systèmes. Il serait souhaitable de disposer de fonctions ayant de bonnes monodromies¹³ mais qui incorporent une échelle de longueur. Peut-être les blocs obtenus à partir des déformations quantiques des algèbres affines [69] sont-ils un bon point de départ?

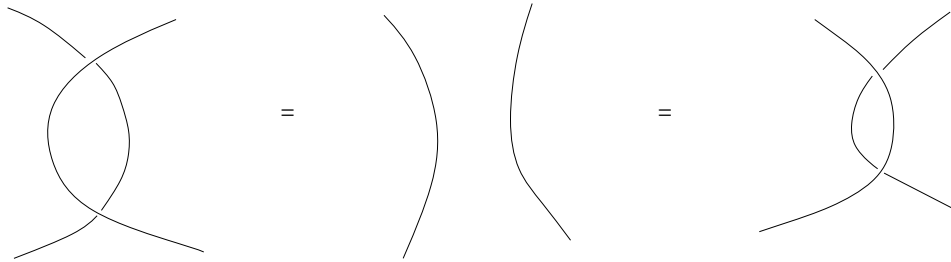
¹²Ce sont les équations de Knizhnik-Zamolodchikov du modèle de Wess-Zumino-Witten associé au groupe G .

¹³Similaires à celles des blocs conformes.

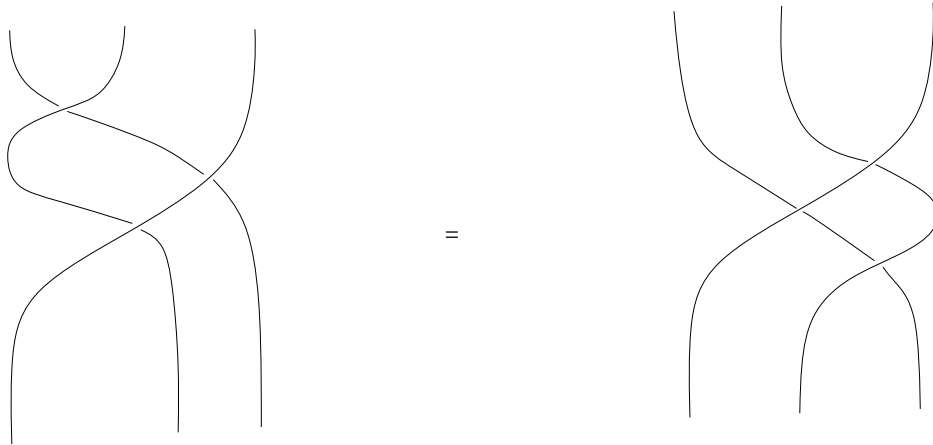
Relations 1, 2:



Relations 3, 4:



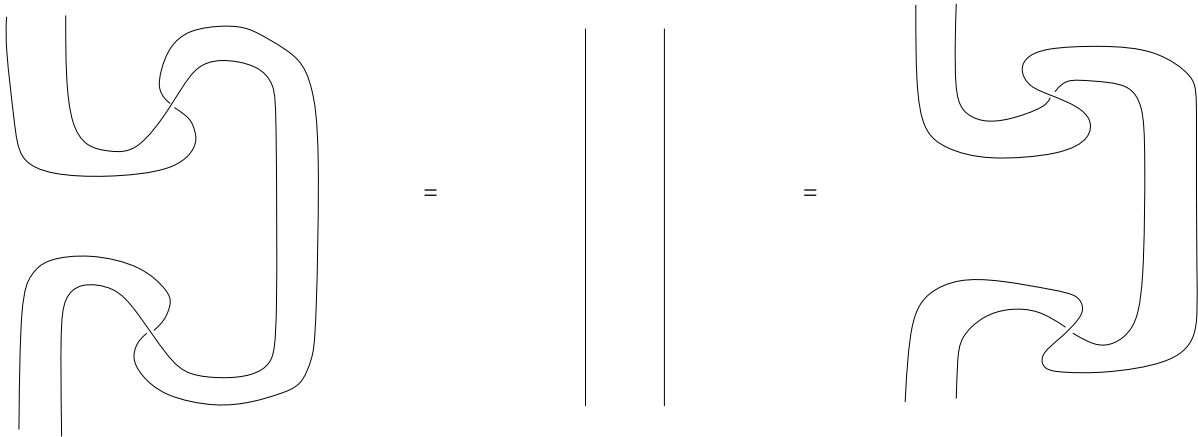
Relation 5:



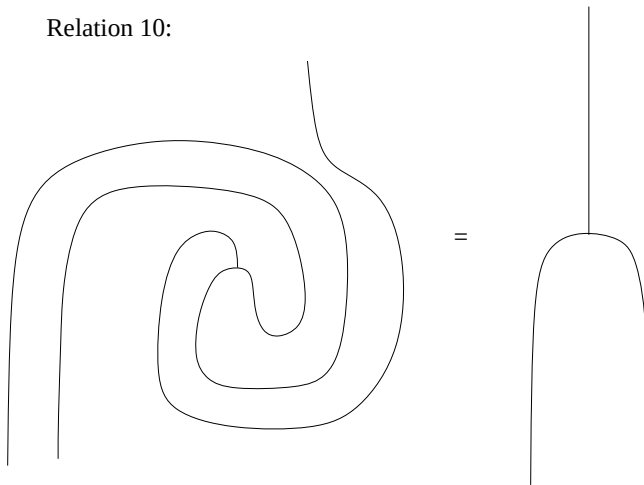
Relation 6, 7:



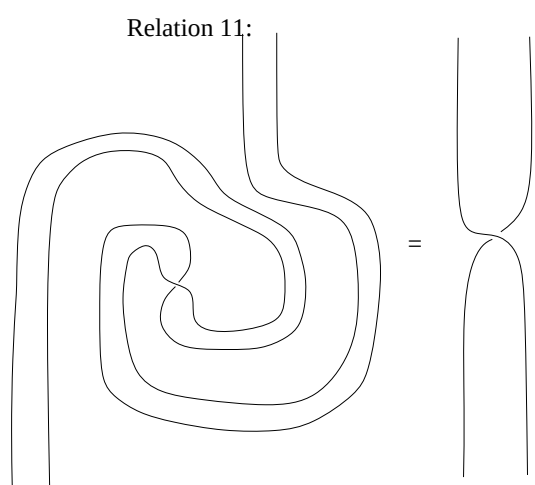
Relation 8, 9:



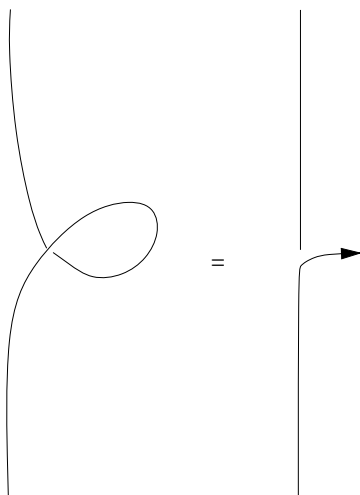
Relation 10:



Relation 11:



Relation 12:



Relation 13:

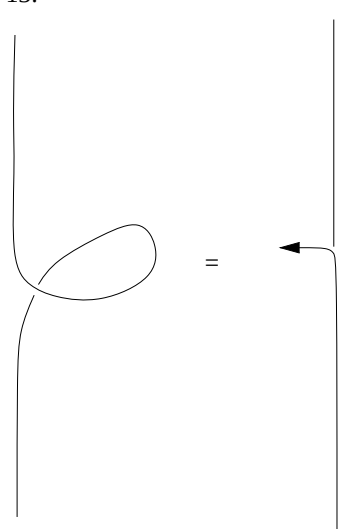


FIG. 2.1 - : Mouvements de Reidemeister-Reshetikhin-Singer-Turaev.

Chapitre 3

Théories conformes 2D, aspects généraux.

Dans ce chapitre, nous allons discuter les propriétés générales des théories des champs invariantes conformes bidimensionnelles. Ces modèles ont des propriétés exceptionnelles en dimension deux du fait de leur énorme symétrie. Conformément à ce que nous avons suggéré dans les premiers chapitres de cette thèse, il suffit de connaître un petit nombre de fonctions de corrélations pour les connaître toutes grâce aux identités de Ward. En particulier, on s'attend à ce que les corrélateurs ne dépendent que de la structure conforme de la surface considérée¹.

Parmi toutes les théories invariantes conformes (TIC), certaines jouissent de propriétés encore plus remarquables. Ce sont les théories rationnelles (TICR).

Leur importance a été perçue par Friedan dans l'optique de la classification des théories conformes pour construire la théorie des cordes en régime non perturbatif. Ces théories se définissent par l'existence d'une algèbre de symétrie si vaste que l'espace des états se décompose en un nombre *fini* de représentations irréductibles de cette algèbre. D'une manière tout à fait surprenante, il est possible d'oublier la structure de l'algèbre de symétrie (algèbre chirale) pour étudier ces théories.

L'argument couramment avancé repose sur une décomposition des fonctions de corrélation de la forme:

$$(3.1) \quad G(m, \bar{m}) = \sum_{I, \bar{I}} \mathcal{F}_I(m) \bar{\mathcal{F}}_{\bar{I}}(\bar{m})$$

où $m, \bar{m}$ sont les coordonnées complexes sur l'espace de Teichmüller relatif à la surface de Riemann considérée. Les $\mathcal{F}_I$ sont les blocs conformes de la théorie sur cette surface. Leurs propriétés de monodromie dans l'espace de Teichmüller ne font pas intervenir la structure de l'algèbre chirale! Cela permet de définir des matrices de monodromie indépendantes de la structure détaillée de l'algèbre chirale. La covariance modulaire et la cohérence des propriétés de dualité des blocs entraînent des conditions sur ces matrices de monodromie. Moore et Seiberg [130] ont “montré” que cette infinité de conditions équivalait à un nombre *fini* d'identités polynomiales sur un nombre fini de matrices (les données de Moore et Seiberg de la théorie). Ce sont ces données et les équations qu'elles vérifient qui seront intensément utilisées dans

¹Ceci doit être un peu précisé: les fonctions de corrélation ne sont pas tout à fait invariantes par les transformations de Weyl, il apparaît un facteur correctif (l'anomalie de Weyl) que nous discuterons plus loin.

les chapitres suivants de cette thèse. C’est pourquoi nous encourageons le lecteur à s’imprégner de cette technologie.

Je dois préciser que la présentation des théories conformes donnée dans ce chapitre est à mon avis très insatisfaisante. En effet, ce sujet présente encore de nombreux aspects dont les relations ne sont pas parfaitement claires pour moi. Le plus élégant consisterait, à partir d’une axiomatique catégorique à la Segal [164], à déduire d’une part l’existence des données de Moore et Seiberg, et les équations qu’elles vérifient; et d’autre part les équations différentielles vérifiées par les fonctions de corrélation. Bien entendu, pour mener ce programme à terme, il importe de savoir retrouver, dans le cas d’une axiomatique catégorique telle que je l’ai exposée au chapitre 1, la notion habituelle de champ “primaire” trouvée par Belavin-Polyakov et Zamolodchikov [9], et de fonction de corrélation de tels champs. Selon moi, ce point n’est pas encore totalement clair. De même, comme le lecteur le verra, le travail de Segal repose sur une hypothèse d’holomorphie énoncée page 122. J’aimerais m’en affranchir mais cela est hors de portée de ma compréhension actuelle.

Enfin, Raymond Stora, Serge Lazzarini, Marc Knecht et Franck Thuillier ont développé [106][107] une approche quelque peu différente, donc le point de départ est l’écriture d’identités de Ward *anormales* exprimant l’action des difféomorphismes. Dans ce point de vue, on raisonne directement sur une structure conforme, qui est paramétrée par une différentielle de Beltrami [1]. L’action des difféomorphismes sur ces différentielles est connue et l’on écrit une identité de Ward *avec* anomalie. Dans ce point de vue, on ne passe pas par l’introduction d’une métrique sur la surface! Cette formulation présente plusieurs attraits. En premier lieu, elle établit le lien avec l’étude des structures conformes au moyen des différentielles de Beltrami, dans la tradition d’Alfors-Bers [1]; ensuite, elle évite l’introduction d’une métrique et l’apparition de l’anomalie de Weyl², enfin et surtout, elle permet une discussion des propriétés de factorisation holomorphe dont aucune preuve générale n’existe. Mais il reste encore beaucoup de travail à faire, et beaucoup de mystères à clarifier pour fondre cette ligne de pensée et celle de Segal dans une perspective commune.

Ce chapitre fait donc plus le bilan de mes ignorances que le lien entre ces différentes approches. Sa présence, j’espère, incitera le lecteur à réfléchir à ces questions fascinantes.

Dans une première section, nous rappellerons l’approche fonctorielle des théories conformes due à Segal. Nous verrons dans quelle mesure elle permet de faire surgir l’algèbre de Virasoro. Une hypothèse de régularité est nécessaire. Cette formulation montre comment reconstruire toute la théorie (*i.e.* calculer toutes les fonctions de corrélation) à partir des opérateurs associés au cylindre et au “pantalon”. L’étude de la théorie sur le cylindre permet de définir un Hamiltonien, de connaître son spectre, et elle fera l’objet de la seconde section. Les identités de Ward conformes constituent l’outil principal de cette analyse. Nous illustrerons ces considérations sur le modèle d’Ising et plus généralement sur les modèles minimaux [9] de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov (que nous désignerons par l’abréviation BPZ). Avant d’aborder les TICR, nous discuterons en détail dans la troisième section le modèle Gaussien (boson libre) et les modèles de Wess-Zumino et Witten (WZW) [189] où les caractéristiques des TICR apparaissent déjà nettement [108]. La dernière section de ce chapitre est consacrée à un exposé des résultats de Moore et Seiberg et à une étude des équations de dualité.

3.1 Approche heuristique des théories conformes.

Dans cette section, nous allons expliquer à partir d’arguments physiques comment arriver à la structure des théories conformes telle que l’a découverte G. Segal en 1987 [164][165]. Bien entendu, les rai-

²Au prix d’une anomalie dans les difféomorphismes.

sonnements présentés ici ne seront pas d’une extrême rigueur mais permettent de bien comprendre les motivations des concepts introduits par la suite. Un point de vue voisin mais étroitement relié a été développé par Friedan et Shenker [78].

Nous commencerons par rappeler quelques points élémentaires sur le rôle du tenseur énergie-impulsion en théorie des champs. Puis nous expliquerons comment s’introduisent naturellement les concepts d’espaces de Teichmüller et d’espaces de modules dans les théories conformes.

3.1.1 A quoi sert le tenseur énergie-impulsion?

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la théorie classique des champs. Nous allons simplement rappeler comment définir le tenseur énergie-impulsion et comment le groupe des difféomorphismes d’une variété M agit sur les métriques définies sur M . Le tenseur énergie-impulsion peut être introduit de deux façons:

- Comme courant conservé associé à l’invariance par translation dans $\mathbb{R}^n$ (théorème de Nøther).
- Comme réponse du système à un changement de métrique.

Nous considérerons ici exclusivement le second point de vue car nous souhaitons étudier les théories conformes bidimensionnelles sur des surfaces de topologie arbitraire et se limiter à un espace Euclidien $\mathbb{R}^2$ est trop restrictif.

Il importe de préciser dès maintenant que l’appellation “invariance conforme” est quelque peu abusive. En effet, qui dit “invariance conforme” suggère symétrie d’un système et donc, dans un point de vue passif, deux observateurs qui considèrent un *unique* objet physique de manière différente. Toutefois, dans le cas des théories conformes bidimensionnelles, ce cadre est beaucoup trop étroit. Nous verrons dans une prochaine sous-section qu’il existe des changements de métrique qui ne découlent *pas* d’un changement d’observateur (c’est à dire un difféomorphisme). Ces changements sont responsables de toute la richesse des théories conformes, à savoir leurs propriétés de *covariance modulaire*.

C’est pourquoi nous choisissons un point de vue actif, où un seul observateur $\mathcal{O}$ étudie un système sur une surface Σ munie d’une métrique g . Cet observateur rapporte ses observations à un carnet de notes³ dans lequel l’expression de la métrique est $g_{\mathcal{O}}$. De même, l’expression des champs ramenée dans un carnet de notes est $\varphi_{\mathcal{O}}$.

Nous supposons qu’il est possible de définir le modèle en présence de n’importe quelle métrique et que de plus, il existe une fonctionnelle des champs φ et de la métrique, telle que, pour toute métrique g , tout observateur $\mathcal{O}$, l’action $S_{\mathcal{O}}[\varphi_{\mathcal{O}}]$ décrivant le système en présence de la métrique g pour l’observateur $\mathcal{O}$ soit⁴ $\Gamma[\varphi_{\mathcal{O}}, g_{\mathcal{O}}]$. Dans ce cas, si nous changeons la métrique g sur le système physique par δg , l’expression de la métrique observée par $\mathcal{O}$ change de $\delta g_{\mathcal{O}}$ et la réponse du système est donnée par

$$(3.2) \quad \delta S_{\mathcal{O}} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \langle T, \delta g_{\mathcal{O}} \rangle$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire relatif à la métrique $g_{\mathcal{O}}$. Cette équation constitue une définition du tenseur énergie-impulsion qui est donc une dérivée fonctionnelle de Γ par rapport à la métrique.

Parmi tous les changements de métrique, ceux qui proviennent d’un difféomorphisme sont particulièrement importants. En effet, imaginons deux observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ qui diffèrent par leur manière

³Une surface $\tilde{\Sigma}$ difféomorphe à Σ .

⁴C’est une sorte de condition “d’universalité”.

de cartographier la surface Σ . S'ils transcrivent dans un carnet de notes commun $\bar{\Sigma}$ les “coordonnées” $(P_{\mathcal{O}}, P_{\mathcal{O}'}) \in (\bar{\Sigma})^2$ d'un point $P \in \Sigma$, celles-ci sont reliées par un difféomorphisme f de $\bar{\Sigma}$:

$$P_{\mathcal{O}'} = f(P_{\mathcal{O}})$$

L'existence de la fonctionnelle universelle Γ montre que la différence entre l'action calculée par les observateurs $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$, pour une même configuration de champs, se calcule à partir de la variation de l'action pour *un seul* observateur dans un changement approprié de la métrique! Les expressions $g_{\mathcal{O}}$ et $g_{\mathcal{O}'}$ sont reliées par:

$$(3.3) \quad g_{\mathcal{O}'}(f(x)) \circ [(df)(x)]^{\otimes 2} = g_{\mathcal{O}}(x)$$

et donc le changement de la métrique g nécessaire est donné par

$$(3.4) \quad g'(P) = g(h^{-1}(P)) \circ ((dh)(P)^{-1})^{\otimes 2}$$

où h est l'antécédent dans l'espace physique Σ de la transformation f agissant dans le carnet de notes commun à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$. Ceci définit une action du groupe des difféomorphismes de Σ sur l'ensemble des métriques sur Σ . Nous venons de voir que ce groupe de transformations *actives* permet d'étudier dans le point de vue *passif* les changements d'observateurs sur Σ . Ceci montre que notre point de vue actif permet d'étudier ce qui se passe dans un point de vue passif. Enfin, une théorie est dite “covariante générale” ou de manière plus appropriée “invariante par difféomorphisme” si et seulement si:

$$(3.5) \quad \Gamma[f \cdot \varphi, f \cdot g] = \Gamma[\varphi, g]$$

Avec ces définitions, il est facile d'exprimer clairement ce qu'une théorie conforme doit vérifier.

3.1.2 Qu'attend on d'une théorie conforme?

Groupe de renormalisation, difféomorphismes et transformations de Weyl.

Les théories des champs que nous voulons analyser sont censées représenter le comportement à grande distance d'un système de mécanique statistique à son point critique. Dans l'image de Wilson des phénomènes critiques [188][119], ce comportement s'obtient à partir de la description microscopique du modèle par des transformations dites “du groupe de renormalisation”. La description microscopique est relative à une échelle de longueur⁵ a et les transformations de Wilson permettent de fabriquer une autre description à l'échelle $a' > a$ qui possède le même comportement à grande distance que la modélisation de départ. A la limite où a tend vers zéro, l'échelle d'observation étant fixée, nous obtenons le comportement “infra-rouge” du système, qui n'existe qu'au point critique. Il est alors décrit par une théorie des champs vu que toute échelle spatiale a disparu de notre problème. Ces considérations sont basées sur des raisonnements dans $\mathbb{R}^n$ (en volume infini). Je ne connais pas de moyen de leur donner un sens précis sur une surface de topologie arbitraire⁶. Toutefois on peut imaginer que la trace de cette procédure de renormalisation soit la possibilité de modifier localement la métrique par une multiplication par un scalaire. Une telle transformations porte le nom de transformation de Weyl:

Définition 37 *Deux métriques g_1 et g_2 sur une même surface Σ sont dites reliées par une transformation de Weyl si et seulement si il existe une fonction f numérique sur Σ telle que $g_2 = e^f g_1$.*

⁵Le pas du réseau lorsque l'on discrétise.

⁶J'invite le lecteur soupçonneux à tenter de donner un sens au modèle d'Ising sur une surface de genre 2 sans utiliser une description par la théorie des champs...

En clair, au point critique, le système perd localement tout souvenir d’une quelconque échelle de longueur microscopique et donc, il est important de s’autoriser la possibilité de redéfinir les étalons de longueur en chaque point. C’est précisément ce que font les transformations de Weyl. Nous introduisons la notion de *classe conforme* de métriques :

Définition 38 *Deux métriques g et g' Riemanniennes sur M sont dites conformément équivalentes si et seulement si il existe une transformation de Weyl paramétrée par une fonction numérique ρ , et un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+(M)$ tels que :*

$$(3.6) \quad g' = e^\rho \times (f \cdot g)$$

A ce stade, je ne prétends pas que la théorie doit être invariante par ces transformations. Nous verrons dans la sous-section suivante que la théorie *n’est pas* invariante par les transformations de Weyl au niveau quantique mais que l’on sait calculer son comportement dans un tel changement de métrique.

Remarque : Remarquons qu’il existe des transformations de Weyl qui ne sont pas obtenues par action du groupe des difféomorphismes sur la métrique de départ. Ce point extrêmement important montre qu’il faut abandonner l’idée qu’une théorie conforme représente un système physique bien précis. Elle permet plutôt d’étudier les propriétés d’une *classe d’universalité* dans toutes les géométries possibles et imaginables⁷. On peut dire que cette idée était déjà présente dans le groupe de renormalisation mais que l’approche fonctorielle des théories conformes l’exprime pleinement. $\square$

Nous allons maintenant formuler le principe dit d’“invariance conforme” qui constitue notre point de départ de l’étude des théories conformes.

Principe d’“invariance conforme”.

Localement, si le modèle étudié est *isotrope*, la physique vue par deux observateurs tournés l’un par rapport à l’autre est “identique”. Au niveau global, deux observateurs qui étudient notre modèle sur la variété M munie d’une métrique g diffèrent par un difféomorphisme que nous supposons C^∞ (sauf indication contraire). Dans un point de vue passif, la traduction globale de l’*isotropie* est l’invariance par les difféomorphismes f qui, *localement*, “ressemblent” à des rotations, c’est à dire tels que la différentielle $(df)(x)$ soit une isométrie⁸ de $[TM_x, g(x)]$ dans $[TM_{f(x)}, g(f(x))]$.

Il est en fait judicieux d’introduire directement l’ensemble des transformations conformes d’une variété Riemannienne M dans une autre M' : $\text{Conf}(M, M')$.

Définition 39 *Les transformations conformes de M dans M' sont des difféomorphismes de M dans M' dont la différentielle en chaque point est une similitude.*

Nous pouvons dores et déjà donner quelques exemples de telles transformations dans $\mathbb{R}^d$:

Translations Elles sont définies par : $x \mapsto x + a$.

Dilatations On a $x \mapsto \lambda x$ où λ est un réel non nul.

Rotations Le groupe des rotations est $SO(d)$, $x \mapsto \Lambda x$ avec $\Lambda \in SO(d)$.

⁷Alors qu’un système physique vit dans une géométrie fixée.

⁸Préservant l’orientation.

Inversions Soit $a \in \mathbb{R}^d$, on définit l'inversion associée à a par:

$$x \longrightarrow \frac{x + |x|^2 a}{1 + 2a \cdot x + |a|^2 |x|^2}$$

Un théorème dû à Liouville [51, Page 140] assure qu'en dimension supérieure ou égale à 3, les seules bijections conformes d'un ouvert de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^d$ sont des composées de telles applications. En revanche, dans le cas bidimensionnel, toute fonction holomorphe et injective sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ définit une bijection conforme de U dans son image. Ceci montre qu'il existe beaucoup plus de domaines conformément équivalents à un domaine fixé en dimension deux qu'en dimensions supérieures.

Le groupe $\text{Conf}(M, M)$ des transformations conformes de M est donc le groupe de symétrie d'une théorie conforme dans le point de vue *passif*. Mais, comme nous l'avons expliqué, il est plus intéressant d'élargir cette remarque et nous arrivons donc à la conclusion suivante, point de départ des travaux de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [9]:

SI NOUS CONNAISSONS LE COMPORTEMENT D'UN MODÈLE SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE, ALORS
NOUS POUVONS EN DÉDUIRE SON COMPORTEMENT SUR TOUTE VARIÉTÉ QUI LUI EST
CONFORMÉMENT ÉQUIVALENTE.

Nous ferons référence à ce principe sous le nom de “principe d'invariance conforme” mais il est bien clair qu'il s'agit plutôt d'un principe de “covariance conforme”.

Pour lui donner du corps, il convient de remarquer que l'on peut obtenir très facilement toutes les variétés Riemanniennes conformément équivalentes à $[M, g]$. Il suffit pour cela de considérer toutes les métriques sur M qui sont obtenues par action du groupe $\text{Diff}_+(M) \times \text{Weyl}(M)$ sur g . Soit g' une telle métrique, alors pour tout $f \in \text{Diff}_+(M)$, nous avons $f \in \text{Conf}([M, g], [M, g'])$ bien évidemment.

Finalement, dans une théorie conforme, il suffit de savoir comment se comporte la théorie (son action dans le cadre classique, les fonctions de corrélation ou les opérateurs d'évolution dans le cadre quantique) dans une métrique g donnée pour connaître son comportement dans une métrique g' déduite de g par une composée de difféomorphismes et de transformations de Weyl. A titre indicatif:

Définition 40 *Une théorie classique des champs est dite invariante conforme si et seulement si elle est covariante générale et invariante sous l'action du groupe de Weyl.*

Il ne reste donc plus qu'à examiner la structure de l'ensemble des classes d'équivalences de métriques par ces transformations pour savoir sur quelles bases géométriques définir une théorie conforme dans l'esprit du chapitre 1: ce sont les théories quantiques qui nous intéressent! Avant de passer à l'acte, nous allons clarifier, dans la mesure de notre compréhension actuelle, les problèmes liés au comportement dans les transformations de Weyl.

De l'anomalie conforme.

En théorie classique des champs, l'invariance de la dynamique par les difféomorphismes entraîne la conservation covariante du tenseur énergie impulsion ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$), et l'invariance par transformations de Weyl entraîne que $T_{\mu\nu}$ est sans trace.

Au niveau quantique, il est usuel de régulariser la théorie, c'est à dire, dans une large classe de schémas, y introduire une échelle de longueur. Ceci brise l'invariance de Weyl et donc on s'attend à ce

que quantiquement $\langle T_\mu{}^\mu \rangle$ soit non nul. Dans le cas bidimensionnel, il est possible de calculer exactement cette anomalie de Weyl.

L'intégrale fonctionnelle fournit une fois de plus un guide utile pour comprendre quelle est l'origine du problème. Lorsque l'on calcule la fonction de partition d'une théorie dont l'action classique est invariante conforme, il faut prendre garde à la possible dépendance en la métrique de la mesure d'intégration sur les champs. En effet, dans un exemple particulièrement simple comme le champ libre, la mesure d'intégration fonctionnelle $\mathcal{D}[\varphi]$ n'est autre qu'une forme volume sur $\text{Map}(\Sigma, \mathbb{R})$ associée à la métrique Q_Σ , forme bilinéaire sur $\text{Map}(\Sigma, \mathbb{R})$ définie par:

$$(3.7) \quad Q_\Sigma(H, K) = \int_\Sigma H(x)K(x)d\Omega_x$$

Comme $d\Omega_x$ dépend de la métrique sur Σ , Q_Σ n'est pas invariante dans les transformations de Weyl, et donc $\mathcal{D}[\varphi]$ ne saurait l'être non plus.

Pour calculer l'anomalie, le plus simple consiste à travailler sur l'exemple du champ libre. Ceci se trouve fait dans de nombreux textes et nous n'infligerons pas au lecteur une nouvelle et sans doute moins bonne mouture de ces considérations. Le résultat final seul nous importera: si Σ est une surface sans bord munie d'une métrique g , alors la fonction de partition du champ libre définie par⁹

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} \log(Z[g]) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \text{Tr}(e^{t\Delta_g} - P_0) dt \right)_{s=0}$$

change dans une transformation de Weyl selon

$$(3.9) \quad \left(\frac{\partial Z[e^f g]}{\partial f(x)} \right)_{|f=0} = \frac{c}{48\pi} R_g(x)$$

où c est un nombre appelé la *charge centrale* et $R_g(x)$ est la courbure scalaire de la métrique g évaluée au point x . Cette équation différentielle fonctionnelle permet de calculer la fonction de partition le long d'une orbite de Weyl. Rappelons, comme l'ont montré Stora et Lazzarini, que la fonction de partition *avec cette renormalisation* est *invariante* sous l'action des difféomorphismes. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet pour le moment. Nous reviendrons sur cette anomalie lorsque se posera le problème de la factorisation holomorphe dans les théories conformes.

J'aimerais conclure en signalant qu'il serait très satisfaisant de retrouver la forme de cette anomalie à partir de considérations basées sur des arguments catégoriques et de localité. Je ne sais pas si cela peut être réalisé.

3.1.3 Espaces de Teichmüller et de modules.

Nous présentons ici deux approches de ces notions qui sont bien évidemment reliées. La première est sans doute la plus élémentaire mais ne permet pas de voir l'aspect analytique complexe qui se cache derrière les théories conformes. Celui-ci n'apparaît qu'en remarquant que chaque point de l'espace des modules correspond à une et une seule classe d'isomorphisme analytique de structure complexe sur notre surface.

⁹Les notations sont évidentes: Δ_g désigne le Laplacien en métrique g , P_0 est le projecteur sur le noyau de Δ_g .

Point de vue différentiel.

Dans un point de vue purement différentiel, nous ne cherchons pas à savoir quels objets se cachent derrière la notion d'espace de Teichmüller. Comme nous l'avons vu, il est intéressant de considérer $\text{Met}(\Sigma)$, l'espace des métriques sur la surface Σ muni de l'action du produit semi-direct $\text{Diff}_+(\Sigma) \times \text{Weyl}(\Sigma)$. L'espace des modules associé à la surface topologique Σ n'est autre que le quotient:

$$(3.10) \quad M_\Sigma = \frac{\text{Met}(\Sigma)}{\text{Diff}_+(\Sigma) \times \text{Weyl}(\Sigma)}$$

Toute métrique appartient à une unique *classe conforme*. D'après nos remarques précédentes, à l'anomalie de Weyl près, la fonction de partition d'une théorie conforme sur une surface Σ munie d'une métrique ne dépend que de la classe conforme de celle-ci.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, il est utile d'introduire le groupe des difféomorphismes de la surface Σ connexes à l'identité: $\text{Diff}_{+,0}(\Sigma)$. Le groupe quotient

$$\frac{\text{Diff}_+(\Sigma)}{\text{Diff}_{+,0}(\Sigma)} = \mathcal{M}(\Sigma)$$

est le groupe modulaire de la surface. Le quotient:

$$(3.11) \quad \mathcal{T}_\Sigma = \frac{\text{Met}(\Sigma)}{\text{Diff}_{+,0}(\Sigma) \times \text{Weyl}(\Sigma)}$$

est l'espace de Teichmüller associé à Σ . Nous verrons qu'il joue un rôle important dans les théories conformes: l'action des difféomorphismes connectés à l'identité peut s'obtenir à partir du tenseur énergie-impulsion car ils correspondent à un changement infinitésimal de métrique. Au contraire, l'action du groupe modulaire ne peut se décrire infinitésimalement. Cette distinction est à la source du "découplage" entre les propriétés modulaires de la théorie conforme et les propriétés "analytiques" dont nous avons parlé dans l'introduction de cette thèse. Mais comme l'espace de Teichmüller est *connexe*, les deux aspects sont quand même reliés!

Point de vue analytique.

Etant donnée une métrique g sur une surface, nous pouvons trouver au voisinage de chaque point des coordonnées, dites isothermes, dans lesquelles elle soit proportionnelle à la métrique usuelle sur $\mathbb{R}^2$ [15]. Il est clair que la différentielle d'une fonction de transition entre deux telles cartes locales est une similitude relativement aux expressions de la métrique dans les deux cartes considérées. Si nous considérons le plan $\mathbb{R}^2$ comme le corps des complexes $\mathbb{C}$, ceci montre que l'on peut munir toute variété Riemannienne bidimensionnelle $[M, g]$ d'une structure de variété complexe de dimension 1, autrement dit, on la considère comme une surface de Riemann.

Toutefois, la correspondance entre structures Riemanniennes et complexes est loin d'être injective. Le résultat principal qu'il convient de rappeler est le suivant:

Théorème 11 *Il existe une correspondance biunivoque entre les points de l'espace des modules associé à Σ et les classes d'isomorphismes analytiques de structures complexes sur Σ .*

Bien entendu, $f \in \text{Conf}([M, g], [M', g'])$, si et seulement si f est un isomorphisme analytique (ou encore une bijection biholomorphe) de M sur M' munies des structures de surfaces de Riemann déduites des métriques g et g' .

C'est à partir de là que l'analyse complexe fait son apparition dans le monde des théories conformes. Comme nous allons le voir, l'approche de Segal est basée sur ce résultat.

3.2 Approche fonctorielle des théories conformes.

Dans cette section, nous allons rappeler les principaux résultats de Segal [164][165]. Il convient une fois encore de souligner que c'est l'analyse des théories conformes et leur formulation en termes de foncteur modulaire¹⁰ qui ont permis de développer l'approche générale des TQCG par ces mêmes méthodes. C'est à mon avis une avancée conceptuelle importante.

Notre objectif ici sera de rappeler les principales étapes du travail de Segal en les adaptant à notre langage. Les difficultés analytiques posées par la régularité des opérateurs et autres problèmes d'analyse fonctionnelle ont été réglés par Segal dans son article. C'est pourquoi nous ne détaillerons pas ces questions ici. Tout au plus, nous livrerons au lecteur quelques réflexions sur la nature de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$. Nous insisterons plus sur les aspects algébriques en montrant comment, dans ce contexte, apparaît naturellement l'algèbre de Virasoro.

Remarquons que l'approche de Segal est basée sur une catégorie analytique, au sens où les morphismes sont des surfaces de Riemann. Nous nous sommes demandés si il était possible de construire une catégorie Riemannienne (dont les morphismes seraient des variétés Riemanniennes) sur laquelle définir une théorie conforme. Ceci aurait l'avantage de supprimer la projectivité due à l'anomalie de Weyl mais des problèmes de régularité dans le recollement des métriques apparaissent. Nous indiquerons juste quels sont les problèmes qui peuvent apparaître.

3.2.1 La catégorie des surfaces de Riemann.

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, il est naturel de chercher à définir les théories conformes sur une catégorie qui distingue seulement entre les différentes structures complexes. C'est ce que Segal a fait en introduisant la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ définie de la manière suivante:

Définition 41 *Les objets de $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ sont les unions disjointes de cercles. L'objet $n.S_1$ désigne l'union disjointe de n cercles et $n.S_1 = \emptyset$. Les éléments de $\text{hom}(n.S_1, m.S_1)$ sont les cobordismes paramétrés qui interpolent entre cercles (supposés de classe C^1 par morceaux), munis d'une structure de surface de Riemann.*

Cette définition mérite quelques commentaires. La notion de surface de Riemann sans bord est bien connue. Mais ici, nous devons savoir comment définir la notion correspondante pour des variétés à bords. La moindre des choses est de supposer que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ est l'intérieur de Σ qui est muni d'une structure de surface de Riemann (cette fois sans bord!). La structure de surface de Riemann est définie par l'utilisation de cartes locales. Cette définition reste valable sur l'intérieur de Σ mais il faut l'étendre au bord. Pour cela, nous supposons que le bord est localement un demi plan: pour tout point $x \in \partial\Sigma$ il existe un voisinage ouvert U_x de x et un homéomorphisme φ_x dans le demi plan de Poincaré qui envoie x sur un point de l'axe réel. La structure est définie par la condition de compatibilité sur deux cartes (U, φ) et (U', φ') locales au voisinage de $x \in \partial\Sigma$; nous supposons que l'application $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ définie sur $\varphi(U \cap U')$ vérifie les conditions:

- Sa restriction à l'image par φ de $(U \cap U') \setminus \partial\Sigma$ est biholomorphe.
- C'est un homéomorphisme de l'image par φ de $U \cap U' \cap \partial\Sigma$ sur l'image par φ' de cet ensemble.

¹⁰Au sens du chapitre 1...

Par le principe de symétrie, on peut voir que la fonction de transition est analytique réelle au bord du demi plan de Poincaré. Une fonction analytique définie sur une surface de Riemann à bords sera une fonction holomorphe sur la surface sans bord obtenue en retirant le bord qui se prolonge par continuité au bord! Ainsi, l'image d'une surface de Riemann à bords par une fonction analytique à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un domaine du plan bordé par une courbe analytique réelle. Réciproquement, si on se donne une courbe de Jordan, le théorème de Carathéodory nous dit que:

Théorème 12 (Carathéodory) *Soit K un compact connexe et simplement connexe du plan complexe dont la frontière est localement connexe, alors il existe une application holomorphe injective de l'intérieur de K dans le disque ouvert qui est continue au bord. Cette application est unique à un automorphisme analytique du disque ouvert près.*

Et donc une courbe de Jordan délimite une surface de Riemann à bords qui n'est autre que le disque unité.

Dans ce cadre, les isomorphismes entre morphismes de $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ sont les isomorphismes de surfaces de Riemann qui respectent les paramétrisations des bords.

Remarque : On peut se demander si ces opérations de recollement sont vraiment licites. Segal prétend avoir démontré que c'est le cas dans [164] mais la version dont je dispose est incomplète et la partie manquante est justement celle censée contenir la démonstration du fait que l'on peut recoller les surfaces! L'hypothèse que j'utilise (recollement par une courbe C^1 par morceaux) permet de montrer que l'on dispose effectivement d'une structure complexe sur la variété recollée.

L'idée consiste à utiliser le théorème de Goursat pour montrer que si on dispose d'une structure complexe sur les intérieurs de Σ_1 et Σ_2 et que $\Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ est le lieu géométrique d'une courbe C_1 par morceaux, alors on dispose d'une structure complexe sur Σ . Si f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes sur Σ_1 (respectivement Σ_2), qui sont la restriction à $\Sigma_{1,2}$ d'une fonction f , alors dans ce cas, considérons γ un chemin C^1 par morceaux tracé dans Σ . Pour montrer que

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

il nous suffit de considérer le cas où γ passe de part et d'autres de la coupure. Mais alors en décomposant le chemin en longeant celle-ci, deux applications du théorème de Goursat [159, Page 221] montrent que

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Ceci permet donc de définir la notion de fonction holomorphe sur Σ à partir des fonctions obtenues en recollant par continuité des fonctions holomorphes sur $\Sigma_{1,2}$. On définit ainsi la structure complexe de la recollée.

Il faut bien comprendre que des précautions sont indispensables car il existe des cas où la structure complexe sur la variété recollée est mal définie. Pour le comprendre, il convient d'utiliser le théorème d'Ahlfors-Bers: la notion clef est celle de structure quasi-conforme. Les arguments qui vont suivre sont sortis d'une discussion avec Thierry Bousch. A titre de bibliographie, le lecteur consultera avec profit l'ouvrage d'Ahlfors [1].

Définition 42 *Une structure quasi-conforme est la donnée d'une différentielle de Beltrami $\mu = \lambda dz/d\bar{z}$ mesurable et telle que il existe $k \in]0, 1[$ vérifiant $\text{Sup}(|\mu_f|) \leq k$.*

En clair c'est la donnée d'un champ d'ellipses d'excentricités bornées par un nombre strictement inférieur à 1. Rappelons que une structure conforme est la donnée d'un champ de *cercles* sur la surface! Les transformations conformes envoient des cercles sur des cercles (leur différentielle est une similitude). De même, une application quasi-conforme est une application f qui envoie un champ d'ellipses sur l'autre, qui est presque partout différentiable et dont la dérivée est de carré sommable. Si f est une application de classe C^1 , préservant l'orientation, définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$, sa différentielle envoie un cercle sur une ellipse dont l'excentricité est donnée par:

$$(3.12) \quad D_f = \frac{|\partial_z f| + |\partial_{\bar{z}} f|}{|\partial_z f| - |\partial_{\bar{z}} f|}$$

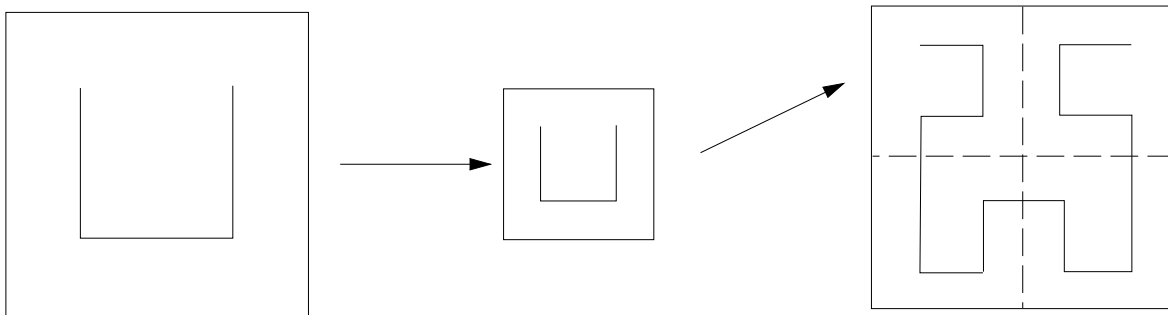
On lui associe la différentielle de Beltrami

$$(3.13) \quad \mu_f = \frac{\partial_z f}{\partial_{\bar{z}} f} \times \frac{dz}{d\bar{z}}$$

L'application f est conforme si et seulement si $D_f = 1$ en tout point. On a clairement $|\mu_f| < 1$. L'application f envoie la structure conforme de $\mathbb{C}$ sur la structure quasi-conforme définie par la différentielle de Beltrami μ_f ! Les hypothèses quelque peu générales que nous avons prises permettent d'énoncer le théorème suivant:

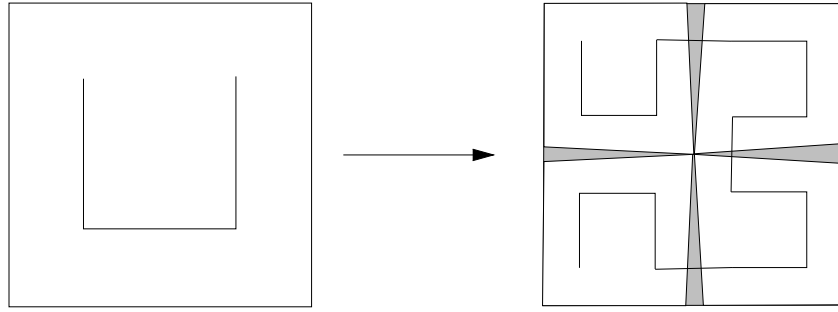
Théorème 13 (L.V. Ahlfors, L. Bers) *Soit $[M, \mu]$ une structure quasi-conforme, il existe un homéomorphisme de M dans une surface de Riemann Y qui est quasi-conforme de $[M, \mu]$ dans Y au sens où $\mu = \mu_f$ presque partout. De plus la différentiabilité de cette application entraîne la continuité de μ presque partout.*

Imaginons alors que nous ayons réussi à recoller Σ_1 et Σ_2 le long d'une courbe C qui soit de mesure $\mu(C)$ strictement positive. Nous définissons alors une forme de Beltrami de manière à ce qu'elle soit non nulle sur C et nulle ailleurs. Ceci définit une nouvelle structure quasi-conforme sur la surface. Par le théorème d'Ahlfors-Bers, on peut la redresser mais comme la mesure de C est non nulle, les deux structures conformes obtenues ne seront pas identiques: si elles l'étaient, l'application qui relie la structure initiale et celle tordue par μ serait différentiable et donc μ serait continue presque partout. Or ce n'est pas le cas. Pourtant, comme μ est nulle sur les intérieurs de $\Sigma_{1,2}$, la nouvelle structure conforme se restreint à celles de $\Sigma_{1,2}$ sur les intérieurs de $\Sigma_{1,2}$! Enfin on exhibe très facilement une courbe ayant les propriétés voulues en modifiant légèrement la construction qui mène à la courbe de Peano: celle ci est définie comme le point fixe d'une transformation du carré que nous noterons f :



A une courbe reliant deux coins du carré, j'en associe une autre et on montre que pour une distance convenable, cette application est k -lipschitzshienne de rapport strictement inférieur à 1. La courbe limite

passer par tous les points du carré: c'est la courbe de Peano. Elle est de plus continue! Toutefois, ce n'est pas une courbe simple (de Jordan). Clairement, sur le schéma précédent, les lieux d'autointersection sont sur les images par les itérations successives de f des deux lignes en pointillé. Pour remédier à ce problème, nous procédons à un léger écartement des quatre morceaux du carré:



A chaque étape, on divise par quatre l'aire de la partie retirée et donc à la fin, la courbe obtenue est simple et remplit une partie du plan d'aire

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{4^n}\right) = \frac{60 - 48\varepsilon_0}{45} < 1$$

où ε_0 est l'aire que l'on a retirée à la première itération qui est indiquée en grisé sur notre dessin. Ainsi, en reliant les deux coins du carré par un arc de cercle, nous fabriquons une courbe de Jordan du plan C de mesure strictement positive! D'après le théorème de Jordan, elle délimite deux ouverts du plan, dont l'un est simplement connexe et d'autre est homéomorphe au complémentaire d'un disque. C'est l'exemple que nous recherchons: ces deux régions sont les intérieurs de $\Sigma_{1,2}$!

Dans le cas où la courbe C est de mesure nulle, alors un théorème qui se trouve dans le livre d'Ahlfors¹¹ nous dit¹²:

Théorème 14 *Si f est une application quasi-conforme, presque partout différentiable et telle que $\partial_{\bar{z}}f = 0$ presque partout, alors f est conforme.*

Ceci montre que la structure complexe définie sur le recollé n'est pas ambiguë! Illustrons ce point par l'exemple d'une courbe C du type considéré tracée sur la sphère S_2 . Elle découpe la sphère en deux ouverts $U_{1,2}$ qui sont homéomorphes à des disques. Un utilisant une différentielle de Beltrami μ dont le support, de mesure non nul, est la courbe en question, nous définissons une structure conforme sur $P_1(\mathbb{C})$. D'après le théorème d'Ahlfors-Bers 13, il existe une application $f : S_2 \rightarrow S_2$, qui est un homéomorphisme et qui envoie la structure conforme définie par μ sur la structure conforme usuelle de S_2 considérée comme la sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$. Cette application est bien holomorphe sur $U_{1,2}$ mais elle n'est pas prolongeable analytiquement sur la courbe C !!!! C'est en ce sens qu'il y a ambiguïté dans le recollement: nous pouvons fabriquer plusieurs structures *conformes* sur la surface recollée mais qui ne sont pas reliées par une application *biholomorphe* sur la recollée! Par contre, parler de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ est donc bien justifié en présence de l'hypothèse de recollement le long de frontières C^1 par morceaux! $\square$

¹¹Toujours le même...

¹²On lit souvent qu'une fonction f "assez régulière" est holomorphe si et seulement si $\partial_{\bar{z}}f = 0$. Ce résultat en est une expression précise!

L'avantage de cette formulation analytique est qu'elle permet au moins en partie de se ramener à des espaces de dimension finie. Plus précisément, l'ensemble $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_2, \mathbb{C}}(n, S_1, m, S_1)$ est une union de $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ correspondant au types topologiques α des surfaces considérées. Pour chaque type topologique, l'ensemble de morphismes correspondant possède une structure analytique. Le genre g_α est défini pour un type topologique connexe comme le genre de la surface obtenue en bouchant chaque cercle frontière de celle-ci par un disque D_2 .

Tout d'abord, nous pouvons nous limiter au cas où le type topologique α est connexe. Le cas non connexe se retrouve par produit cartésien.

- Si $n = m = 0$, l'espace $\text{hom}_\alpha(\emptyset, \emptyset)$ n'est autre que l'espace des modules correspondant au type topologique α .
- Le cas où $n + m \neq 0$ mérite une réflexion plus poussée. L'espace $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ est un fibré au dessus d'un espace de modules approprié:
 - Pour simplifier, nous oublions ici la distinction entre composantes du bord entrantes et sortantes. Pour décrire la base de ce fibré, nous devons tout d'abord caractériser l'ensemble des modules de surfaces de Riemann de genre g avec $n + m$ cercles frontières paramétrés.

Si nous oublions la paramétrisation, nous travaillons avec l'espace des modules de surfaces de Riemann de genre g avec n points marqués. Cet espace $M_{g,n}$ est une variété complexe de dimension complexe $3g - 3 + n$ pour $g \geq 2$, n pour $g = 1$ et $n > 0$, 1 pour $g = 1$ et $n = 0$ et $\max(n - 3, 0)$ pour $g = 0$. Ces dernières valeurs résultent du fait qu'en genre zéro et un, il existe un groupe continu d'automorphismes analytiques des surfaces considérées: les translations dans le cas du tore, et les homographies dans le cas de la sphère [25]. Dans ce dernier cas, $PSL_2(\mathbb{C})$ opère trois fois transitivement sur $P_1(\mathbb{C})$ et comme il existe une unique structure complexe sur la sphère S_2 sans points marqués, il n'y a pas non plus de modules en genre zéro pour $n \leq 3$. De même, les translations opèrent une fois transitivement sur le tore ce qui explique que la dimension de l'espace de modules en genre 1 avec $n > 0$ points marqués soit $n = n - 1 + 1$.

- Pour tenir compte de la paramétrisation, nous introduisons en chaque point marqué z_i sur notre surface Σ un vecteur tangent non nul ξ_i . Le point z_i n'est autre que le centre du disque fermé $\bar{D}(0, 1)$ que nous avons recollé à Σ pour obtenir $\tilde{\Sigma}$. L'ensemble des cobordismes paramétrés Σ qui donnent $\tilde{\Sigma}$ par recollement de disques ouverts $D(0, 1)$ sur les cercles frontières se retrouve en examinant tous les plongements analytiques de disques $D(0, 1)$ dans $\tilde{\Sigma}$ dont les centres sont envoyés sur les points z_i . Un tel plongement est défini par une famille d'applications holomorphes (f_i) sur $D(0, 1)$ à valeurs dans $\tilde{\Sigma}$, injectives et telles que $f_i(0) = z_i$. Le vecteur tangent non nul en z_i n'est autre que la dérivée d'une telle injection. Nous verrons plus loin quelle est son utilité¹³. En conclusion:

Proposition 6 (G. Segal) *L'espace $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ où le type topologique α est celui d'une surface connexe de bord non-vide, est un fibré défini par sa base et sa fibre:*

- La base est l'espace de modules M'_α des surfaces de Riemann de type topologique α , avec $n + m$ points marqués z_i et un vecteur tangent $\xi_i \in T\Sigma_{z_i}$ en chaque point marqué.

¹³Pour anticiper quelque peu, il est en fait relié au “framing” des graphes qui apparaîtront au chapitre 5!! Le lecteur pardonnera cet anglicisme, résultat de l'usage. La seule traduction valable serait l'inesthétique “repérage normal”.

- La fibre au dessus d'un point $[\tilde{\Sigma}, (z_i), (\xi_i)]$ est une union de $n+m$ plongements analytiques de disques $D(0,1)$ par $f_k : D(0,1) \rightarrow \tilde{\Sigma}$ tels que $f_k(0) = z_k$ et $f_k'(0) = \xi_k$.

Ceci montre que chaque espace $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ est muni d'une structure de variété complexe: l'espace des plongements d'un disque dans une surface de Riemann est en effet une variété complexe de dimension infinie. A titre indicatif, il est clair que le plongement du disque est entièrement défini par l'image du cercle unité. Comme nous l'avons vu, ce plongement est analytique réel.

En fixant le centre du disque sur un point marqué, on ne laisse que les rotations globales. La courbe de Jordan étant paramétrée par un point de $S_1 = \partial D_2$, cela fixe la symétrie résiduelle. En conséquence l'espace $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}}(n, S_1, m, S_1)$ est isomorphe à l'espace des modules de surfaces de Riemann avec $m+n$ points marqués et autour de chaque point, une courbe de Jordan analytique réelle, ces courbes ne se coupant pas.

Dans l'étude des théories conformes, nous aurons besoin de savoir comment varie l'opérateur $\phi[\Sigma]$ quand Σ se déplace dans l'espace $\text{hom}(n, S_1, m, S_1)$ et donc, un résultat sur la structure locale de $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ est le bienvenu. Celui-ci précise la nature de son espace tangent:

Proposition 7 (G. Segal) *Si le type topologique α est une surface connexe avec un bord non vide, alors l'espace tangent en Σ à $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ est le quotient*

$$(3.14) \quad T[\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)]_\Sigma = \frac{\text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial\Sigma)}{\text{Vect}(\Sigma)}$$

des champs de vecteurs sur $\partial\Sigma$ tangents à Σ par les restrictions à $\partial\Sigma$ des champs de vecteurs holomorphes sur Σ .

A partir de la proposition 7, Segal démontre:

Théorème 15 *La composition $\sharp$ des morphismes de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ définit des applications holomorphes de $\text{hom}(n, S_1, m, S_1) \times \text{hom}(m, S_1, p, S_1)$ dans $\text{hom}(n, S_1, p, S_1)$*

Enfin, le résultat suivant est évident:

Proposition 8 *Si α et β définissent des types topologiques équivalents et $n+m = n'+m'$, alors les variétés analytiques complexes $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ et $\text{hom}_\beta(n', S_1, m', S_1)$ sont isomorphes.*

ce qui montre que la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ inclut automatiquement tous les cobordismes paramétrés faiblement isomorphes à un cobordisme donné.

3.2.2 Théories conformes à la Segal.

Pour définir une théorie conforme, nous utilisons la définition 6 du chapitre 1. Au vu des considérations précédentes, il faut s'attendre à obtenir une théorie projective. Comme nous l'avons expliqué, dans une formulation heuristique basée sur l'intégrale fonctionnelle, pour calculer les éléments de matrice de l'opérateur associé à un morphisme de $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$, il est usuel de choisir explicitement une métrique. Si nous

admettons qu'il n'apparaît pas d'anomalie dans les difféomorphismes¹⁴ quand la métrique décrit une orbite sous l'action de $\text{Weyl}(\Sigma)$, l'anomalie de Weyl multiplie les éléments de matrice par un nombre. En conséquence, l'opérateur associé au cobordisme est défini à un scalaire près. C'est exactement ce qui se passe dans les théories projectives.

Définition 43 *Une théorie invariante conforme (TIC) est une théorie des champs projective basée sur $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ à valeurs dans une catégorie algébrique.*

Dans notre approche, nous n'avons pas précisé quelle doit être la catégorie algébrique $\mathbf{Sp}$. Elle dépend en fait du modèle et nous allons voir que l'on peut obtenir certaines de ces propriétés à partir de la définition ci-dessus et des propriétés analytiques des espaces $\text{hom}(n, S_1, m, S_1)$. C'est l'objet des sections qui vont suivre.

Remarque : Tout d'abord, je ne sais absolument pas si la localité à la frontière a un sens dans le contexte des théories conformes. C'est une question très intéressante qui, si elle recevait une réponse affirmative, montrerait que cette notion est particulièrement importante.

La seule chose que je connaisse qui aille dans ce sens est la formulation des théories conformes sur des variétés à bord. Ce travail est dû à Cardy [20][24][22]. Il a étudié les théories conformes sur une variété à bord dans un formalisme de matrice de transfert où le bord *n'est pas* une équi-temps. C'est exactement le type de considérations nécessaires pour comprendre la localité à la frontière dans l'esprit du chapitre 1. Cardy a obtenu des états correspondant à des conditions aux limites invariantes conformes et qui sont en nombre fini, indexées par les champs primaires de la théorie¹⁵. De plus ces états ne sont pas des états de norme finie de l'espace H_{S_1} . Je ne sais pas encore si on peut reformuler ce travail dans le langage du chapitre 1 et comment construire les applications de localité à la frontière¹⁶. Clairement il reste encore quelques mystères là-dessous.

Enfin, soulignons que les hypothèses (voir définition 4) que nous avons énoncées au chapitre 1 ne permettent que de considérer des théories unitaires: nous imposons en effet que H_{S_1} est un espace de Hilbert, et donc que le produit scalaire est défini positif. Avec la propriété $\phi[\hat{\Sigma}] = \phi[\Sigma]^\dagger$, cela implique que la théorie est unitaire au sens usuel. Il faudra pourtant tôt ou tard se frotter au monde des théories non unitaires. $\square$

3.2.3 Symétries de la théorie.

Nous aimerions étudier l'influence des changements de la structure conforme sur l'opérateur associé à une surface de Riemann. Ceci va nous fournir les fameuses *identités de Ward* des théories conformes. Mais pour le moment, nous cherchons à quoi correspond un élément de l'espace tangent à $\text{hom}_\alpha(n, S_1, m, S_1)$ donné par un champ de vecteur de $\text{Vect}_\mathbb{C}(\partial\Sigma)$ sur la décomposition donnée par la proposition 6.

Supposons pour simplifier que $\partial\Sigma = S_1$. Comme $\partial\Sigma$ est paramétrée, nous fabriquons naturellement une surface de Riamann $\tilde{\Sigma}$ sans bord en recollant le disque unité $D(0,1)$ à ce bord. Ceci permet de

¹⁴Je renvoie le lecteur à la discussion présentée par Michel Bauer dans sa thèse à la page 10. Raymond Stora et Serge Lazzarini adoptent une approche dans laquelle l'anomalie est liée aux difféomorphismes. Raymond Stora m'a informé d'une preuve de l'équivalence de ces deux interprétations dans la thèse de Lazzarini mais je n'ai pas encore lu la thèse en question, hélas ...

¹⁵Le lecteur pardonnera cette anticipation.

¹⁶Il faudrait déjà comprendre ce qui joue le rôle de Δ_L !

considérer le disque et Σ comme des parties de $\tilde{\Sigma}$. Si ξ est un champ de vecteurs tangents au cercle $\partial\Sigma$, plongé naturellement dans $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial\Sigma)$, il se décompose sous la forme:

$$(3.15) \quad \forall z \in D(0,1), \quad \xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n z^n$$

où les ξ_n sont des nombres complexes. Il est alors bien clair que

- ξ_0 représente un décalage du point marqué z sur $\tilde{\Sigma}$.
- ξ_1 représente un décalage du vecteur tangent $\xi \in T\tilde{\Sigma}_z$.
- La somme pour $n \geq 2$ est associée à un changement du plongement f de $D(0,1)$ dans $\tilde{\Sigma}$ qui préserve $f(0)$ et $f'(0)$.
- La somme pour $n < 0$ est la restriction d'un champ de vecteurs holomorphes sur Σ qui ne se prolongent pas à $\tilde{\Sigma}$. Ils sont associés à un vecteur tangent au groupe des automorphismes analytiques de Σ . Rappelons que ce groupe est continu seulement dans le cas du tore et de la sphère.

Ces résultats profonds proviennent des travaux de Kodaira et Spencer [109] qui ont également montré comment à partir de tels champs de vecteurs on pouvait reconstruire des familles de structures complexes “régulières”. Le problème de la construction d'une déformation de la structure complexe à partir d'un champ de vecteurs constitue la “partie dure” de leur travail.

Comme les champs qui se prolongent holomorphiquement à Σ ne changent ni la paramétrisation du bord, ni la structure complexe de Σ , ils ne changent pas le point de $\text{hom}(n, S_1, m, S_1)$. En conséquence, nous arrivons aux identités de Ward suivantes:

Théorème 16 *Les champs de vecteurs de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial\Sigma)$ qui se prolongent analytiquement à Σ agissent trivialement sur l'opérateur associé à Σ .*

3.2.4 L'action de l'algèbre de Virasoro.

Comme nous allons le voir, l'action de l'algèbre de Virasoro apparaît naturellement dans le formalisme Hamiltonien tel qu'il est décrit dans le chapitre 1, section 1.2.5. Toutefois, nous verrons que l'on doit faire une hypothèse assez forte de régularité sur le foncteur modulaire. A l'heure actuelle je ne sais pas comment m'en affranchir.

Le semi-groupe $\mathcal{A}$.

Pour cela, considérons $\mathcal{A}$ l'espace $\text{hom}_{0,2}(S_1, S_1)$ des morphismes à topologie cylindrique qui interpolent entre deux cercles. Il est clairement difféomorphe à

$$(3.16) \quad \frac{(\text{Diff}_+(S_1)^2) \times]0, 1[}{U(1)}$$

En effet, chaque élément de $\mathcal{A}$, en tant que surface de Riemann, est un cylindre $r \leq |z| \leq 1$ où $r \in]0, 1[$. Les paramétrisations du bord sont codées dans $(\text{Diff}_+(S_1))^2$. Enfin, une fois ce modèle choisi pour un élément de $\mathcal{A}$, seules les rotations du plan complexe subsistent comme isomorphisme global. Elles agissent par conjugaison sur les difféomorphismes de S_1 qui définissent les paramétrisations des cercles frontières.

L'ensemble $\mathcal{A}$ possède une structure de semi-groupe donnée par la loi $\sharp$ de recollement. Dans l'esprit du chapitre 1, section 1.2.5, nous devons explorer la limite $r \rightarrow 1$ pour trouver quelle forme peut revêtir l'opérateur Hamiltonien.

Le domaine $\mathcal{A}$ peut être plongé dans un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension infinie en remarquant qu'un élément de $\mathcal{A}$ est entièrement déterminé par la donnée de deux fonctions holomorphes sur $|z| \leq 1$ et $|z| \geq 1$ respectivement conçus comme des ouverts¹⁷ dans $P_1(\mathbb{C})$ qui envoient 0 en 0 et ∞ en ∞ . De telles fonctions sont définies par leur développement en série entière au voisinage de 0 et de ∞ :

$$(3.17) \quad f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

$$(3.18) \quad f_\infty(z) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^{-n} \right)^{-1}$$

Le plongement en question est défini par la famille $(a_n, b_n)_{n \geq 1}$. Ce plongement donne accès à la “frontière” de $\mathcal{A}$. Avant d'y arriver, quelques éléments de $\mathcal{A}$ méritent le détour: les *anneaux standards*.

Pour $r \in]0, 1[$, considérons l'anneau $\{z \in \mathbb{C}; r \leq |z| \leq 1\}$ et paramétrons les bords par

$$\begin{aligned} \varphi_0(re^{i\vartheta}) &= e^{i(\vartheta - \vartheta_0)} \\ \varphi_\infty(e^{i\vartheta}) &= e^{i\vartheta} \end{aligned}$$

où S_1 est le groupe des nombres complexes unimodulaires. Un tel anneau est appelé *anneau standard* et est défini par $q = r \exp(i\vartheta_0)$ qui appartient au disque $D(0, 1)$ ouvert pointé. Nous le notons $A(q)$.

Pour faciliter les choses, introduisons la fonction q définie sur $\mathcal{A}$:

Définition 44 Si $X \in \mathcal{A}$, $q(X)$ est donné par $q(X) = \exp(2\pi i \tau(X))$ où $\tau(X)$ est le paramètre modulaire du tore $X_{[S_1]}$.

Cette fonction est holomorphe sur $\mathcal{A}$ et prend clairement toutes les valeurs possibles du disque unité pointé $0 < |q| < 1$ car $q(A(q)) = q$. Les deux limites pertinentes sont alors données par

$q \rightarrow 0$ Cette limite correspond à des cylindres de plus en plus longs: $r \rightarrow 0$ et donc $\tau(X) \rightarrow i\infty$. Ce n'est donc pas celle qui nous intéresse ici. Cette partie de la frontière sera notée $\partial_\infty \mathcal{A}$.

$q \rightarrow 1$ Dans ce cas, r tend vers 1. Cela correspond au cas où les deux cercles $f_0(\{|z| = 1\})$ et $f_\infty(\{|z| = 1\})$ coïncident. Un point Y de cette frontière est défini par la donnée de deux applications injectives du type précédent telles que $f_0(\{|z| = 1\}) = f_\infty(\{|z| = 1\})$. Dans ce cas, la seule chose qui survit est un difféomorphisme du cercle

$$(3.19) \quad \varphi(Y) = f_\infty^{-1} \circ f_0$$

Cette “frontière” de $\mathcal{A}$ sera notée $\partial_0 \mathcal{A}$.

Les limites $\phi[M(t + \varepsilon)]$ avec $\varepsilon \rightarrow 0$ sont donc indexées par les difféomorphismes du cercle préservant l'orientation. Nous attendons donc que la théorie conforme fournisse une représentation projective de ce groupe. Mais pour avancer et préciser quelque peu les propriétés de cette représentation, des hypothèses de régularité sur le foncteur modulaire sont nécessaires.

¹⁷Le cas $|z| > 1$ inclut donc le point à l'infini.

Extension centrale de $\text{Vect}(S_1)$.

Avant d'examiner ces questions, rappelons que l'algèbre de Lie du groupe $\text{Diff}_+(S_1)$ n'est autre que l'algèbre des champs de vecteurs tangents au cercle. Il est judicieux de la complexifier. Introduisons les modes de Fourier:

$$X_n(\sigma) = ie^{in\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

où σ est la coordonnée sur le cercle $S_1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous obtenons les relations de commutation classiques:

$$(3.20) \quad [X_n, X_m] = (n - m)X_{n+m}$$

Les extensions centrales par $\mathbb{C}$ sont classées par l'espace $H_2(\text{Lie}(\text{Diff}_+(S_1)), \mathbb{C})$ et on montre [148, Proposition 4.2.11] que

$$(3.21) \quad H_2(\text{Lie}(\text{Diff}_+(S_1)), \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

L'extension centrale est unique. Sa forme est donnée par le cocycle:

$$(3.22) \quad c\left(f(\sigma)\frac{\partial}{\partial \sigma}, g(\sigma)\frac{\partial}{\partial \sigma}\right) = \int_0^{2\pi} f'''(\sigma)g(\sigma)\frac{d\sigma}{2\pi}$$

Nous verrons plus loin comment fixer conventionnellement le cocycle. L'algèbre avec extension centrale que nous venons d'écrire se nomme l'algèbre de Virasoro et se note Vir .

Holomorphic de l'action de $\mathcal{A}$ sur H_{S_1} .

Il est maintenant temps de plonger dans quelques questions de régularité. Je tiens à préciser qu'en ce qui me concerne, je ne sais pas m'affranchir de cette hypothèse que Segal introduit dans son article [164]. Il me semble important de souligner que ce problème subsiste. Pour pouvoir travailler confortablement, Segal rajoute une hypothèse de régularité:

Hypothèse 1 *Nous supposons que la représentation projective de $\partial_0\mathcal{A}$ fournie par la théorie conforme s'étende en une représentation projective holomorphe de $\mathcal{A}$.*

Le groupe des rotations rigides du cercle permet d'énoncer un critère¹⁸ d'extension des représentations de $\text{Diff}_+(S_1)$ en des représentations de $\mathcal{A}$.

Théorème 17 (G. Segal) *Les représentations de $\text{Diff}_+(S_1)$ qui sont les valeurs au bord de représentations holomorphes de $\mathcal{A}$ sont les représentations dites d'énergie positive, c'est à dire telles que l'action du sous-groupe des rotations du cercle soit de la forme*

$$(3.23) \quad \rho(R_\theta) = e^{-\hat{A}\theta}$$

où $\hat{A}$ est un opérateur à spectre positif.

L'espace tangent à $\mathcal{A}$ en un point X est l'algèbre de Lie:

$$(3.24) \quad T\mathcal{A}_X = \frac{(\text{Vect}_{\mathbb{C}}(S_1))^2}{\text{Vect}(X)}$$

et donc ceci montre que l'espace H_{S_1} des états associés au cercle est une représentation de $\text{Vir} \otimes \text{Vir}$. C'est ainsi que dans cette formulation fonctorielle surgissent deux copies de l'algèbre de Virasoro notée Vir . Ma compréhension de ces questions ne va guère plus loin.

¹⁸A noter que ce critère n'apparaît à ma connaissance que dans le travail [164].

Expression du cocycle.

Pour conclure, j'aimerais montrer comment les concepts que j'ai introduits au chapitre 1 à propos des théories projectives peuvent être utilisés ici pour donner une expression du cocycle sur $\text{Diff}_+(S_1)$.

En accord avec les idées de Segal, nous définissons une action de $\text{Diff}_+(S_1)$ sur H_{S_1} par la procédure suivante:

- Nous choisissons un anneau $A \in \mathcal{A}$, et un difféomorphisme f analytique réel¹⁹ du cercle S_1 . Nous notons $[A, f_1, f_2]$ l'anneau de structure complexe identique à celle de A mais dont les paramétrisations des bords ont été composées par f_1 et f_2 pour le bord entrant et sortant respectivement. Nous définissons alors

$$(3.25) \quad \rho_A(f) = \phi[[A, \mathbf{1}, f]] \circ \phi[A]^{-1}$$

- Etant donnés deux anneaux $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, les applications ρ_A et ρ_B sont reliées. Dans le cas où $A = C \sharp B$, un calcul trivial montre que:

$$(3.26) \quad \rho_{C \sharp B}(\varphi) = \frac{\mu(C, [B, \mathbf{1}, \varphi])}{\mu(C, B)} \rho_B(\varphi)$$

où μ est le cocycle de l'équation 1.43 du chapitre 1. Dans le cas général, nous pouvons écrire A et B sous la forme

$$A = C_A \sharp X \quad B = C_B \sharp X$$

et donc, là encore, la relation entre ρ_A et ρ_B est entièrement déterminée par μ . Nous l'écrivons sous la forme

$$(3.27) \quad \rho_A(\varphi) = \lambda_{A/B}(\varphi) \rho_B(\varphi)$$

qui définit $\lambda_{A/B}(\varphi)$.

- Il reste à vérifier un détail important: l'indépendance de $\lambda_{A/B}(\varphi)$ par rapport au X utilisé pour le calculer. L'idée est empruntée à Segal: soient $X_{1,2}$ tels que $A = C_{A,\alpha} \sharp X_\alpha$ et $B = C_{B,\alpha} \sharp X_\alpha$, nous voulons montrer qu'utiliser comme intermédiaire X_1 ou X_2 ne change pas l'expression de $\lambda_{B/A}(\varphi)$. Comme

$$\lambda_{A/B}(\varphi) = \frac{\lambda_{A/X}(\varphi)}{\lambda_{B/X}(\varphi)}$$

décomposons $X_{1,2} = D_{1,2} \sharp Z$ et clairement:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{A/X_1}(\varphi)}{\lambda_{B/X_1}(\varphi)} &= \frac{\mu(C_{A,1}, [D_1 \sharp Z, \mathbf{1}, \varphi]) \mu(C_{B,1}, D_1 \sharp Z)}{\mu(C_{A,1}, D_1 \sharp Z) \mu(C_{B,1}, [D_1 \sharp Z, \mathbf{1}, \varphi])} \\ &= \frac{\mu(C_{A,1}, [D_1 \sharp [Z, \mathbf{1}, \varphi]]) \mu(C_{B,1}, D_1 \sharp Z)}{\mu(C_{A,1}, D_1 \sharp Z) \mu(C_{B,1}, [D_1 \sharp [Z, \mathbf{1}, \varphi]])} \\ &= \frac{\mu(C_{A,1} \sharp D_1, [Z, \mathbf{1}, \varphi]) \mu(C_{A,1}, D_1) \mu(C_{B,1} \sharp D_1, Z)}{\mu(C_{A,1} \sharp D_1, Z) \mu(C_{B,1} \sharp D_1, [Z, \mathbf{1}, \varphi])} \end{aligned}$$

¹⁹Bien entendu, les problèmes de régularité doivent être traités avec attention. Segal les décrit avec soin dans la démonstration de la proposition (3.1) de son article et c'est pour cela que je ne les traiterai pas ici. Le lecteur vérifiera que les arguments présentés ici sont parfaitement compatibles avec les précautions prises par Segal.

où nous avons utilisé la propriété de cocycle de μ pour passer de la seconde à la troisième ligne. Ceci montre que

$$\frac{\lambda_{A/X_1}(\varphi)}{\lambda_{B/X_1}(\varphi)} = \frac{\lambda_{A/Z}(\varphi)}{\lambda_{B/Z}(\varphi)} = \frac{\lambda_{A/X_2}(\varphi)}{\lambda_{B/X_2}(\varphi)}$$

En fait, ρ_A définit une représentation projective de $\text{Diff}_+(S_1)$ sur H_{S_1} . Un calcul direct montre que, si φ_1 et φ_2 sont des difféomorphismes de S_1 , alors

$$(3.28) \quad \rho_{[A,1,\varphi_2]}(\varphi_1) \circ \rho_A(\varphi_2) = \rho_A(\varphi_1 \circ \varphi_2)$$

En utilisant la relation 3.26, il vient

$$\rho_A(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \mu_A(\varphi_1, \varphi_2) \rho_A(\varphi_1) \circ \rho_A(\varphi_2)$$

avec selon la formule 3.27:

$$(3.29) \quad \mu_A(\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_{[A,1,\varphi_2]/A}(\varphi_1)$$

qui fournit une expression de $\mu_A(\varphi_1, \varphi_2)$ en fonction du μ de la théorie projective. Cette expression ne dépend que de A et $\varphi_{1,2}$. Elle se transforme selon 1.51 lorsque l'on change A en B . Les coefficients $\lambda_{A/B}(\varphi)$ définissent une transformation de jauge.

Enfin, on peut vérifier directement que $\mu_A(\varphi_1, \varphi_2)$ est bien un cocycle sur $\text{Diff}_+(S_1)$. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \rho_A(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3) &= \rho_{[A,1,\varphi_2 \circ \varphi_3]}(\varphi_1) \circ \rho_A(\varphi_2 \circ \varphi_3) \\ &= \rho_{[A,1,\varphi_3]}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \rho_A(\varphi_3) \end{aligned}$$

et d'appliquer encore une fois la formule 3.27 et 3.28 pour arriver à l'égalité:

$$\mu_A(\varphi_1, \varphi_2 \circ \varphi_3) \mu_A(\varphi_2, \varphi_3) \rho_A(\varphi_1) \circ \rho_A(\varphi_2) \circ \rho_A(\varphi_3) = \mu_A(\varphi_1 \circ \varphi_2, \varphi_3) \mu_A(\varphi_1, \varphi_2) \rho_A(\varphi_1) \circ \rho_A(\varphi_2) \circ \rho_A(\varphi_3)$$

ce qui démontre que μ_A est un cocycle. Une autre méthode consiste à remplacer directement dans l'identité de cocycle l'expression explicite de $\mu(f, g)$.

3.2.5 Une première définition des opérateurs de vertex (non-chiraux).

Du fait de la fonctorialité projective, la théorie conforme est entièrement déterminée par la donnée du cocycle et des opérateurs associés aux cobordismes ayant la topologie d'un pantalon (voir Chapitre 1, Appendice 1.B pour la terminologie employée).

Décomposons l'espace des états H_{S_1} en somme directe de représentations irréductibles de $\text{Vir}^{\otimes 2}$. Comme nous le verrons plus loin, chacune de ces représentations correspond à un type bien précis de champ du modèle (les champs dits primaires). Cette décomposition s'écrit

$$H_{S_1} = \bigoplus_{\varphi} V_{\varphi}$$

où V_{φ} est une représentation irréductible de $\text{Vir}^{\otimes 2}$. Les opérateurs de vertex non-chiraux sont définis comme les opérateurs d'entrelacement du semi-groupe $\mathcal{A}$ entre trois de ces représentations:

Définition 45 *Un opérateur de vertex entre φ_1 , φ_2 et φ_3 est la donnée d'une application*

$$\Phi : \text{hom}_{0,3}(2, S_1, S_1) \rightarrow \mathcal{L}(V_{\varphi_1} \otimes V_{\varphi_2}, V_{\varphi_3})$$

telles que pour tout $X \in \text{hom}_{0,3}(2 \cdot S_1, S_1)$, $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathcal{A}^3$ tels que $X \sharp (Y_1 \cup Y_2) = Y_3 \sharp X$

$$(3.30) \quad \phi[Y_3] \circ \Phi[X] = \Phi[X] \circ (\phi[Y_1] \otimes \Phi[Y_2])$$

En projetant $\phi[Y]$ sur les représentations $V_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3}$ de $\mathcal{A}$, nous fabriquons des opérateurs de vertex non-chiraux. Ceci permet de définir les règles de fusion pour les opérateurs de vertex non chiraux :

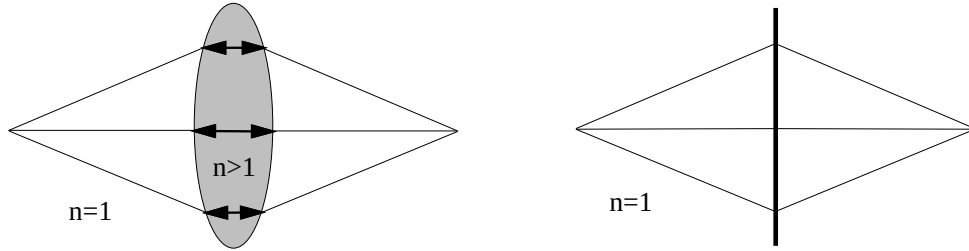
Définition 46 Les règles de fusion sont les dimensions des espaces vectoriels d'opérateurs de vertex. On note $N_{\varphi_1, \varphi_2}^{\varphi_3}$ la dimension de l'espace des opérateurs de vertex non chiraux entre φ_1 , φ_2 et φ_3 .

Moore et Seiberg ont introduit dans [130] la notion d'opérateur de vertex chiral que nous présenterons succinctement en section 3.5.2. Ce sont les “briques” de construction des théories conformes. Pour ces opérateurs chiraux, on définit aussi des règles de fusion qui sont celles qu'utilise Verlinde [181]. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre, lorsqu'il sera temps de présenter les équations de Moore et Seiberg.

3.2.6 Une catégorie Riemannienne?

Il serait intéressant de résoudre le problème de l'anomalie conforme par l'emploi d'une catégorie géométrique plus grosse que $\mathbf{Ma}_{2, \mathbb{C}}$. Le plus naturel consiste à prendre une catégorie dont les objets sont des cercles munis d'une métrique et qui donc sont distingués par leur longueurs respectives. Les morphismes sont alors les cobordismes paramétrés qui interpolent entre ces surfaces et tels que les paramétrisations du bord soient des isométries.

L'opération de recollement des surfaces n'est pas très bien définie au contraire de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2, \mathbb{C}}$. En effet, nous savons bien qu'en recollant des surfaces munies de structures Riemanniennes, il s'introduit, dans certains cas, des singularités de courbure. En conséquence le recollement de métriques de classe C^2 , produit des métriques moins régulières. Ce phénomène est bien connu en optique²⁰ où une lentille peut se voir comme le recollement de deux parties du plan le long de courbes qui ne sont pas des géodésiques :



La partie gauche de ce schéma représente une lentille dont le verre a un indice $n > 1$. Elle est clairement équivalente à la propagation dans un espace vide obtenu en recollant les deux bords de la lentille avec l'identification fournie par les flèches. Ces surfaces *courbes* ne sont pas des géodésiques (i.e. des trajets de rayons lumineux). L'espace recollé est représenté sur la partie droite et présente une singularité de courbure le long du segment vertical tracé en gras.

Ce problème reste à résoudre. En effet Segal [164] préconise de n'autoriser les recollements que le long de géodésiques mais il me semble dommage de se limiter ainsi. Peut être ne faut il pas hésiter à considérer des métriques singulières comme le fait Cardy²¹. Je n'ai pas exploré cette idée plus avant mais elle me semble amusante.

²⁰ Je remercie Thierry Bousch pour nos discussions à ce propos.

²¹ Il a donné la forme des effets de taille finie pour une théorie conforme sur une surface dont le bord présente des “coins” [23].

3.2.7 Champs locaux et fonctions de corrélation.

Nous allons suggérer sans rentrer dans les détails que la notion de champ utilisée par Belavin, Polyakov et Zamolodchikov “sort” de l’axiomatique *à la* Segal des théories conformes. Strictement parlant, comme je l’ai déjà souligné, je n’ai pas réussi à obtenir une présentation monolithique du sujet qui, partant d’une axiomatique catégorique, aboutisse à une formulation exploitable, c’est à dire relativement proche de celle de BPZ. Il me semble qu’un certain travail reste à faire dans cette direction...

Dans la formulation usuelle des théories conformes, il y a une correspondance biunivoque entre les observables *ponctuelles* de la théorie et les états de H_{S_1} . Ceci m’a toujours semblé quelque peu mystérieux surtout depuis que je me suis rendu compte que dans les théories topologiques *à la* Chern-Simons, il fallait considérer des observables associées à des objets non ponctuels comme des graphes de Wilson pour engendrer tous les états physiques. J’aimerais expliquer ici pourquoi cela est en fait naturel dans la formulation fonctorielle. L’idée fondamentale est que les états physiques vivent sur un cercle qui, *à cause* de l’invariance conforme, peut être choisi de n’importe quelle taille²².

Pour construire des fonctions de corrélation à partir du formalisme fonctoriel, la procédure est simple: prenons un élément de $\text{hom}_\alpha(n.S_1, \emptyset)$. C’est la donnée d’une surface de Riemann $\tilde{\Sigma}$ sans bord avec n points marqués $(z_i)_i$ et un vecteur tangent en chaque point $(\xi)_i$ avec en plus, n plongements $f_i : D \rightarrow \tilde{\Sigma}$ de disques tels que $f_i(0) = z_i$ et $f'_i(0) = \xi_i$. Notons Σ ce morphisme. Choisissons φ_i n états de H_{S_1} , alors on *définit* la fonction de corrélation des champs φ_i sur $\tilde{\Sigma}$ par

$$(3.31) \quad \langle \varphi_1(z_1) \dots \varphi_n(z_n) \rangle_\Sigma = \phi[\Sigma](\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n)$$

Ainsi, elle apparaît clairement comme une section d’un fibré en droites au dessus de l’espace des modules des surfaces de Riemann de topologie α avec n points marqués, et une coordonnée holomorphe au voisinage de chacun de ces points²³. Cette formulation a été introduite par Vafa [180][179]. La fonction de corrélation est une section d’un fibré à cause de l’anomalie de Weyl. Nous renvoyons le lecteur au travail de Segal qui mériterait une explicitation bien plus poussée que cela.

Remarque : Dans la plupart des considérations “pratiques”, on se limite à des types topologiques de surfaces comme le tore ou la sphère de Riemann qui sur lesquels les structures complexes admettent un groupe d’automorphisme analytiques continu. Dans le cas du tore, il s’agit de translations et dans le cas de la sphère de Riemann, des homographies qui engendrent un groupe $SL_2(\mathbb{C})$. En conséquence, il est naturel de choisir des plongements de disques au voisinage des points d’insertion qui se déduisent les uns des autres par des automorphismes analytiques de la structure complexe considérée. Nous pouvons alors considérer que la fonction de corrélation est une fonction définie sur l’espace de modules des surfaces avec n points marqués.

Dans le cas du plan, seules comptent les positions de ces insertions $(z_1, \dots, z_n)$ modulo l’action de $SL_2(\mathbb{C})$. Dans le cas du tore, nous exprimons les fonctions de corrélation en termes des positions des points d’insertion sur le tore $z_i \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ et du paramètre modulaire τ modulo l’action de $SL_2(\mathbb{Z})$ explicitée dans l’Appendice 3.C. $\square$

3.2.8 Identités de Ward

Nous allons faire le lien avec la formulation usuelle des théories conformes en montrant que l’on retrouve les identités de Ward telles qu’on les connaît à partir de considérations fonctorielles.

²²Modulo l’anomalie de Weyl mais cela n’est pas un problème.

²³C’est une description alternative de $\text{hom}_\alpha(n.S_1, \emptyset)$.

Identités de Ward et intégrales de contours.

La première étape de ce travail consiste à se ramener à l'action de champs de vecteurs par des intégrales de contour. C'est en effet cette formulation qui apparaît dans le travail de BPZ.

La théorie conforme nous fournit une représentation d'une extension centrale de l'algèbre $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(S_1)$ sur H_{S_1} . Notons ρ cette représentation. Considérons, pour fixer les idées, $\Sigma \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}}(\emptyset, n, S_1)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un élément de $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial\Sigma)$ que nous avons décomposé en champs de vecteurs sur les différents cercles frontière de Σ . L'action de ce champ ξ sur $\phi[\Sigma] \in H_{S_1}^{\otimes n}$ est donnée par

$$(3.32) \quad \rho_n(\xi)\phi[M] = \left(\bigotimes_{j=1}^n \rho(\xi_j) \right) \phi[\Sigma]$$

et en conséquence, comme tout champ de vecteurs qui se prolonge analytiquement sur Σ correspond au vecteur nul dans l'espace tangent à $\text{hom}(\emptyset, n, S_1)$ en Σ , nous avons:

Proposition 9 *Si $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\partial\Sigma)$ se prolonge en un champ de vecteurs tangents holomorphe sur Σ , alors*

$$(3.33) \quad \left(\bigotimes_{j=1}^n \rho(\xi_j) \right) \phi[\Sigma] = 0$$

Cette équation est communément appelée une identité de Ward. Elle diffère cependant de la forme “usuelle” de ces identités, telle que l'on peut la trouver dans l'article original de BPZ [9]. Pour retrouver la forme usuelle, il convient de définir le tenseur énergie-impulsion dans le formalisme fonctoriel. Je ne peux hélas que renvoyer le lecteur au travail de Segal [164] pour plus de détail. Ce point n'est pas encore clair en ce qui me concerne.

Si on admet que l'on sait définir le tenseur-énergie impulsion à partir du formalisme de Segal, il devient possible d'écrire les identités de Ward sur les fonctions de corrélation telles que nous les avons définies en section 3.2.7. Nous choisissons donc Σ une surface de Riemann avec n points (z_i) marqués et f_i des plongements analytiques du disque ouvert $D(0, 1)$ tels que $f_i(0) = z_i$. Choisissons alors n champs de vecteurs tangents à Σ sur les cercles $f_i(\partial\bar{D}(0, 1))$. Si ces champs se prolongent analytiquement aux disques $f_i(D(0, 1))$, alors nous pouvons définir leur action sur des états $|\varphi_i\rangle$ de H_{S_1} grâce à l'action de $\mathcal{A}$ sur H_{S_1} . Notons

$$\delta_\xi \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle_\Sigma$$

la variation de la fonction de corrélation des champs φ_i sur Σ due à cette variation des états $|\varphi_i\rangle$, alors l'identité de Ward s'écrit, suivant [9]

$$(3.34) \quad \delta_\xi \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle_\Sigma = \oint_{\partial f_i(\bar{D}(0, 1))} \langle T, \xi \rangle$$

A ce stade, quelques remarques s'imposent:

- Nous ne connaissons pas encore les lois de transformations des champs sous l'action des transformations conformes. L'équation 3.34 est encore inexploitable...

- Je n’ai pas défini précisément le champ T mais les connaisseurs savent déjà que T et $\bar{T}$ ne sont pas les composantes d’une différentielle quadratique sur Σ . De ce fait, l’intégrale de contour du second membre de 3.34 est mal définie. Ceci est relié à la projectivité de la théorie. Nous y reviendrons plus tard.

Je vais donc montrer sur l’exemple du genre 1 comment certains champs de vecteurs singuliers engendrent des changements de module de la surface sur laquelle on travaille. Puis je vais passer à l’analyse des TIC sur $P_1(\mathbb{C})$. Dans ce cas, il me sera possible d’expliciter la formule 3.34.

Changements de modules du tore.

Dans cette section, nous allons prendre un point de vue plus terre à terre et montrer comment on peut trouver un champ de vecteurs tangent à un tore, défini le long d’un cercle homotopiquement trivial, et qui engendre un changement de module du tore. Considérons un tore muni d’une structure complexe de paramètre modulaire τ : $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$, et on note z une coordonnée complexe sur ce tore.

Soit G_τ une fonction de Green pour l’opérateur $\partial_{\bar{z}}$ sur le tore de paramètre modulaire τ :

$$\partial_{\bar{z}} G_\tau(z, \bar{z}) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}} \delta(z - \omega)$$

Cette fonction existe et est unique à une constante près; c’est la primitive ξ de la fonction $\wp$ de Weierstrass. Nous renvoyons le lecteur à l’Appendice 3.C pour plus de détails. Elle n’est pas doublement périodique mais vérifie:

$$\begin{aligned} \xi(z+1) &= \xi(z) + \eta_1 \\ \xi(z+\tau) &= \xi(z) + \eta_2 \end{aligned}$$

avec la relation $\eta_1 - \tau\eta_2 = 2\pi i$. En coordonnées complexes, choisissons $\varepsilon(z) = \epsilon G_\tau(z)$, comme G_τ est une fonction de Green de $\partial_{\bar{z}}$, cela nous permettra d’étudier une insertion de $T(z)$. De plus ε n’est pas une fonction holomorphe sur le tore mais méromorphe, elle ne représente pas un simple changement de coordonnées mais aussi un changement de module. Heuristiquement, lorsque z devient $z+1$ (respectivement $z+\tau$), $z' = z + \epsilon\xi(z)$ devient $z' + 1 + \epsilon\eta_1$ (respectivement $z' + \tau + \epsilon\tau\eta_2$) et donc les nouvelles périodes définissant le tore sont $(1 + \epsilon\eta_1, \tau + \epsilon\tau\eta_2)$. Ceci montre que le paramètre modulaire a varié au premier ordre en ϵ de

$$\delta\tau = \frac{\tau + \epsilon\tau\eta_2}{1 + \epsilon\eta_1} - \tau \simeq \epsilon(\eta_1 - \tau\eta_2) = 2\pi i\epsilon.$$

3.3 Théories conformes sur $P_1(\mathbb{C})$.

Le but de cette section est de passer en revue les principales propriétés que l’on peut déduire de l’étude des TIC sur la sphère de Riemann. En particulier, nous rappelons comment surgit dans ce cadre la notion de champ primaire Cette notion possède un pendant dans l’approche de Segal et je tenterais, autant que possible, d’expliquer la relation entre ces deux approches.

Considérons la sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$, ses automorphismes analytiques forment un groupe $PSL_2(\mathbb{C})$ d’homographies [25]:

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}).$$

Nous introduisons les coordonnées complexes $z, \bar{z}$ définies par: $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. La métrique usuelle n'est plus diagonale et nous rappelons ici quelques formules utiles dans la pratique:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 = dzd\bar{z}, & dx \wedge dy &= \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} \\ g_{\alpha,\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, & g^{\alpha,\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\ \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) &= i\pi\delta(z) \end{aligned}$$

Le choix de telles coordonnées permet d'introduire les composantes holomorphes et anti-holomorphes pour les différents champs tensoriels qui nous intéressent. En particulier, pour le tenseur énergie-impulsion

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4}(T_{00} - T_{11} + i(T_{01} + T_{10})), & T_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{1}{4}(T_{00} - T_{11} - i(T_{01} + T_{10})) \\ T_{z\bar{z}} &= T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11} + i(T_{01} - T_{10})) \end{aligned}$$

En espace plat, dans le cadre de la théorie classique des champs, en présence d'une invariance conforme, il est symétrique et de trace nulle lorsque l'on l'évalue sur une solution des équations du mouvement. Ceci motive l'introduction des composantes $T = T_{zz}$ et $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$.

3.3.1 Identités de Ward sur la sphère de Riemann.

Considérons une fonction de corrélation à n points des champs $\phi_1, \dots, \phi_n$. Regardons la variation $\delta\langle\phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n)\rangle$ dans une transformation $z \mapsto z + \varepsilon(z)$. Par définition du tenseur énergie-impulsion:

$$(3.35) \quad \delta\langle\phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n)\rangle = \int_{\Sigma} (\partial_{\bar{z}}\varepsilon(z, \bar{z})) \langle T(z, \bar{z}) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle d^2z + c.c.$$

En prenant pour ε_{μ} une fonction nulle au voisinage des points z_i , comme la fonction de corrélation ne change pas (la loi de transformation des champs étant supposée locale), nous avons:

$$\int_{\Sigma} (\partial_{\bar{z}}\varepsilon(z, \bar{z})) \langle T(z, \bar{z}) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle d^2z + c.c. = 0$$

et donc par intégration par parties, les termes de bords étant nuls, il reste:

$$\int_{\Sigma} \varepsilon(z, \bar{z}) \langle (\partial_{\bar{z}}T(z, \bar{z})) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle d^2z = 0$$

pour toute fonction nulle au voisinage des z_i . En conséquence, T et $\bar{T}$ vérifient $\partial_{\bar{z}}T = 0$ et $\partial_z\bar{T} = 0$ au sens des insertions à points non-coïncidents dans une fonction de corrélation²⁴. Nous obtenons donc l'holomorphie du champ T par des considérations élémentaires sur le plan. On notera donc $T(z)$ et $\bar{T}(\bar{z})$. Toutefois, une insertion de T ou $\bar{T}$ dans un corrélateur présente des singularités à points coïncidents qui reflètent les propriétés de transformation des ϕ_j dans la transformation conforme.

²⁴Cette formulation est typique des identités de Ward en théorie des champs, voir par exemple [196, Equation A11.14].

Prenons alors ε holomorphe au voisinage des points z_i et de support compact. Dans ce cas, l'équation 3.35 devient après intégration par parties:

$$(3.36) \quad \delta \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \oint_C \varepsilon(z) \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \frac{dz}{2\pi i}$$

où C est un contour enserrant chacun des points z_i dans la région d'holomorphie de ε . Cette équation est la spécialisation en genre zéro des identités de Ward 3.33 du formalisme de Segal. Comme nous avons des insertions de champs en différents points, le membre de gauche fait son apparition: il traduit la variation des champs due à l'action du champ de vecteurs défini par ε sur les états associés aux champs.

Pour aller plus loin, nous devons disposer de la loi de transformation des champs par transformation conforme. La notion de champ primaire s'introduit alors naturellement.

3.3.2 Champs primaires.

L'intérêt principal des champs primaires réside dans la simplicité de leur loi de transformation dans l'action d'un plongement du disque unité dans lui-même qui préserve le centre.

Champs primaires.

Comme le "principe d'invariance conforme" de BPZ le suggère, il peut être intéressant de relier des systèmes qui ne vivent pas dans la même géométrie. Ceci motive la définition suivante [9]:

Définition 47 Soit $\phi(z, \bar{z})$ un champ d'une TIC, on dit que c'est un champ primaire de dimensions $(h, \bar{h})$ si et seulement si, pour tout changement de coordonnées analytique

$$\begin{cases} z \rightarrow f(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \end{cases}$$

on a

$$(3.37) \quad \phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \times (f'(z))^h (\bar{f}'(\bar{z}))^{\bar{h}} = \phi(z, \bar{z})$$

Le lecteur aura remarqué qu'ici, comme on autorise des transformations conformes qui ne sont pas des automorphismes analytiques du domaine considéré, on se place dans le cadre d'une symétrie conforme à la BPZ. C'est pour cela que j'ai noté $\phi'(f(z), \bar{f}(\bar{z}))$. Cette grandeur est relative à une autre géométrie que $\phi(z, \bar{z})$! Dans le cas où la propriété 3.37 est vraie pour f un automorphisme analytique de $P_1(\mathbb{C})$, alors le champ est dit *quasi-primaire*

Cette définition a aussi une origine naturelle dans l'approche fonctorielle. Je renvoie le lecteur au paragraphe 9 du texte de Segal [164] pour une discussion approfondie de cette question. Grossièrement, si nous calculons une fonction de corrélation de champs primaires sur une surface Σ donnée avec n points marqués fixés, la dépendance dans les plongements de disques $D(0, 1)$ dans Σ est la plus simple possible. C'est là l'intérêt majeur des champs primaires. Voyons quelques exemples:

- Le champ constant 1 est primaire avec $h_0 = \bar{h}_0 = 0$!!!
- Soit $V_\mu(x)$ un champ vectoriel, introduisons ses composantes $(1, 0)$ et $(0, 1)$:

$$V_z(x) = \frac{1}{2}(V_0(x) + iV_1(x)), \quad V_{\bar{z}}(x) = \frac{1}{2}(V_0(x) - iV_1(x))$$

Clairement $V_z(x)dz + V_{\bar{z}}(x)d\bar{z}$ est invariant dans un changement de coordonnées conforme. De ce fait V_z et $V_{\bar{z}}$ sont primaires de dimensions respectives $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Enfin, signalons que la forme des fonctions de corrélations à deux et trois points de champs primaires est facile à obtenir:

$$(3.38) \quad \langle \phi_i(z, \bar{z}) \phi_j(\xi, \bar{\xi}) \rangle = \frac{K_{i,j}}{(z - \xi)^{h_i+h_j} (\bar{z} - \bar{\xi})^{\bar{h}_i+\bar{h}_j}}, \quad K_{i,j} = 0 \text{ si } h_i \neq h_j \text{ ou } \bar{h}_i \neq \bar{h}_j$$

$$(3.39) \quad \langle \phi_i(z_1, \bar{z}_1) \phi_j(z_2, \bar{z}_2) \phi_k(z_3, \bar{z}_3) \rangle = \frac{C_{i,j,k}}{z_{12}^{h_i+h_j-h_k} z_{23}^{h_k+h_j-h_i} z_{13}^{h_k+h_i-h_j}} \times c.c.$$

Les $K_{i,j}$ peuvent être changés par multiplication des champs par un scalaire. Mais une fois la normalisation des champs fixée, il n'est pas possible d'ajuster tous les $C_{i,j,k}$ à n'importe quelle valeur. Finalement $h_i + \bar{h}_i$ s'interprète comme la dimension au sens de l'ingénieur du champ ϕ_i , et $h_i - \bar{h}_i$ comme son spin [9]. Enfin, il sera souvent commode de mettre les fonctions à quatre points sous une forme agréable:

$$(3.40) \quad G_4(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_4, \bar{z}_4) = F(z, \bar{z}) \left(\prod_{i < j} z_{ij}^{h_i+h_j-\sum_l h_l/3} \right) \times c.c.$$

qui fait apparaître le rapport anharmonique des quatre points $z = z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$. BPZ ont montré [9] comment la symétrie conforme permet d'écrire des équations différentielles satisfaites par la fonction F et qui permettent donc de calculer *exactement* les fonctions à quatre points.

Identités de Ward pour des champs primaires.

De la définition d'un champ primaire et de la forme intégrale 3.36 des identité de Ward, on tire la forme différentielle de ces identités pour une fonction de corrélation de champs *primaires*:

$$(3.41) \quad \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \left(\sum_{k=1}^n \frac{h_k}{(z - z_k)^2} + \frac{\partial_{z_k}}{(z - z_k)} \right) \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

A titre indicatif, regardons quelle est la forme des identités de Ward pour des champs primaires sur le tore. La généralisation de ces équations en genre quelconque a été donnée par Eguchi et Ooguri [55].

Avant d'écrire explicitement ces identités, rappelons un point de notation: nous notons $Z(\tau, \bar{\tau})$ la fonction de partition de la théorie sur un tore de paramètre modulaire τ , et

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$$

désigne la valeur moyenne des champs ϕ_j insérés aux points z_j sur le tore. C'est donc le produit de ce nombre par $Z(\tau, \bar{\tau})$ qui constitue "l'intégrale fonctionnelle" dont nous calculons la variation. Cette remarque prise en compte, nous obtenons trivialement lorsque les ϕ_j sont des champs primaires de dimensions respectives $(h_j, \bar{h}_j)$:

$$(3.42) \quad \begin{aligned} Z(\tau, \bar{\tau}) \langle T(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle &= \delta_{G_\tau} (Z(\tau, \bar{\tau}) \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle) \\ &= \left\{ 2\pi i \frac{\partial}{\partial \tau} + \left(\sum_{k=1}^n \xi(z - z_k) \partial_{z_k} - h_k \wp(z - z_k) \right) \right\} \\ &\quad (Z(\tau, \bar{\tau}) \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle) \end{aligned}$$

Dans le cas où tous les points sont proches, cette identité se réduit à l'identité correspondante sur le plan: nous retenons dans le membre de droite les termes dominants qui proviennent des pôles des fonctions $\wp$ et ξ .

Remarquons que cette identité montre comment obtenir la fonction à un point du tenseur énergie-impulsion sur le tore:

$$(3.43) \quad \langle T(z) \rangle_\tau = 2\pi i \frac{d \log(Z(\tau))}{d\tau}$$

qui est donc une dérivée de l'énergie libre par rapport au paramètre modulaire.

3.3.3 Algèbre de Virasoro.

Considérons sur le plan la fonction à deux points du tenseur énergie-impulsion. Comme T et $\bar{T}$ sont de dimensions $(2, 0)$ et $(0, 2)$ et sont quasi-primaires, on obtient:

$$(3.44) \quad \langle T(z)T(\xi) \rangle = \frac{c}{24}(\partial_\xi^3 - \partial_z^3) \frac{1}{z - \xi}, \quad \langle \bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{\xi}) \rangle = \frac{c}{24}(\partial_{\bar{\xi}}^3 - \partial_{\bar{z}}^3) \frac{1}{\bar{z} - \bar{\xi}}$$

L'expression $\partial_z(1/z)$ est à prendre au sens des distributions. Elle désigne la dérivée de la distribution régulière définie par la fonction $z \mapsto 1/z$. Je renvoie le lecteur aux travaux de Stora et Lazzarini pour une approche des théories conformes qui met l'accent sur la construction de fonctions de corrélations bien définies au sens des distribution. Malheureusement, je n'ai pas actuellement de présentation unifiée qui englobe aussi bien l'aspect *à la* Segal, l'aspect *à la* BPZ et l'aspect *à la* Stora *et al.* La fonction $\langle T\bar{T} \rangle$ est nulle²⁵ et c est appelé la *charge centrale* de la théorie.

L'approche fonctorielle suggère que pour étudier une théorie conforme sur le plan en formalisme opératoire, nous devons effectuer une quantification radiale. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ joue le rôle de la coordonnée de temps alors que l'argument de z paramétrise la coordonnée d'espace. A chaque champ φ est associé un opérateur $\hat{\varphi}$ agissant sur H_{S_1} , et la correspondance entre éléments de matrice et opérateurs se fait de la manière usuelle:

$$(3.45) \quad \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \langle 0 | R(\hat{\phi}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \hat{\phi}_n(z_n, \bar{z}_n)) | 0 \rangle$$

où R désigne l'ordre en module²⁶. L'état $|0\rangle$ est appelé "le vide" que nous supposons être unique. Dans l'approche fonctorielle, il est associé avec le disque D_2 dont le bord est muni de son paramétrage naturel.

De même, l'approche fonctorielle montre la nécessité d'introduire le développement des produits d'opérateurs. En effet, si nous considérons un disque $D(0, 1)$ avec un point marqué $z \in D(0, 1)$, et que nous insérons un champs ϕ_i en zéro, et un champ ϕ_j au point z , l'opérateur associé à cette variété définit un vecteur de H_{S_1} vu que $D(0, 1) \in \text{hom}_{0,0}(\emptyset, S_1)$ qui est une fonction de z , bilinéaire en ϕ_i et ϕ_j . Nous pouvons donc la redévelopper sur les états obtenus à partir d'un disque $D(0, 1)$ avec un seul champ inséré en zéro vu que *tous* les états de H_{S_1} s'obtiennent de cette manière! En conséquence, dans une formulation plus ordinaire, soient $\phi_i(z, \bar{z})$ et $\phi_j(\xi, \bar{\xi})$, deux champs que nous prendrons quasi-primaires.

²⁵Ceci est valable en métrique plate. En espace courbe, la fonction à deux points $\langle T\bar{T} \rangle$ n'est plus nulle car on peut utiliser le tenseur de courbure $R_{\mu\nu}$ qui est non nul pour fabriquer des expressions covariantes.

²⁶Les opérateurs sont rangés dans l'ordre $|z_1| > \dots > |z_n|$.

Considérons $\phi_i(z, \bar{z})\phi_j(\xi, \bar{\xi})$ pour $|z| > |\xi|$, on peut redévelopper ce produit sur une famille de champs quasi-primaires:

$$(3.46) \quad \phi_i(z, \bar{z})\phi_j(\xi, \bar{\xi}) = \sum_k \alpha_{i,j}^k (z - \xi)^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} (\bar{z} - \bar{\xi})^{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j} \phi_k(\xi, \bar{\xi})$$

où $(\Delta, \bar{\Delta})$ désigne la dimension de ϕ et les $\alpha_{i,j}^k$ sont les coefficients de ce développement. Nous verrons qu'en fait, il a une forme plus spécifique que celle donnée en 3.11 mais pour cela, nous avons besoin de l'algèbre de Virasoro.

Dans le cas du tenseur énergie-impulsion, le développement du produit des opérateurs prend la forme:

$$(3.47) \quad T(z)T(\xi) = \frac{c}{24}(\partial_\xi^3 - \partial_z^3) \frac{1}{z - \xi} + T(\xi)(\partial_\xi - \partial_z) \frac{1}{(z - \xi)^2} + \frac{\partial_\xi T(\xi)}{(z - \xi)} + \text{termes réguliers}$$

$$(3.48) \quad \bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{\xi}) = \frac{c}{24}(\partial_{\bar{\xi}}^3 - \partial_{\bar{z}}^3) \frac{1}{\bar{z} - \bar{\xi}} + \bar{T}(\bar{\xi})(\partial_{\bar{\xi}} - \partial_{\bar{z}}) \frac{1}{(\bar{z} - \bar{\xi})} + \frac{\partial_{\bar{\xi}} \bar{T}(\bar{\xi})}{(\bar{z} - \bar{\xi})} + \text{termes réguliers}$$

$$(3.49) \quad T(z)\bar{T}(\xi) = 0$$

De là, on peut déduire des relations de commutation pour le développement en série de Laurent de l'opérateur associé au champ $T(z)$:

$$(3.50) \quad T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}}$$

$$(3.51) \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{L}_n}{\bar{z}^{n+2}}$$

$$(3.52) \quad [L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n,-m}$$

$$(3.53) \quad [\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n - m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n,-m}$$

$$(3.54) \quad [L_n, \bar{L}_m] = 0$$

Nous avons retrouvé les deux copies de l'algèbre de Virasoro que Segal avait trouvé directement dans le formalisme fonctoriel. En conclusion, $A = \text{Vir} \otimes \text{Vir}$ est l'algèbre de symétrie minimale de toute théorie conforme! La forme infinitésimale de la loi de transformation de $T(z)$ est donnée par:

$$\delta T(z) = 2(\partial_z \varepsilon(z))T(z) + \varepsilon(z)T(z) + \frac{c}{12}\partial_z^3 \varepsilon(z)$$

qui s'intègre en:

$$(3.55) \quad T'(z) = (f'(z))^2 T(f(z)) + \frac{c}{12} S(f, z), \quad S(f, z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}(f''/f')^2$$

$S(f, z)$ est la dérivée Schwartzienne de f par rapport à z . Bien sûr, elle s'annule si et seulement si f est une homographie.

Le développement du produit de T avec tout champ primaire découle de l'identité de Ward et de la définition du champ primaire. Ainsi²⁷:

²⁷ Je renonce ici à l'écriture en termes de distributions. La formule qui suit est donc valide seulement à points non coïncidents. Nous avons une équation analogue pour le produit avec $\bar{T}$.

$$(3.56) \quad T(z)\phi(\xi, \bar{\xi}) = h \frac{\phi(\xi, \bar{\xi})}{(z - \xi)^2} + \frac{\partial_{\xi} \phi(\xi, \bar{\xi})}{(z - \xi)} + \text{termes réguliers}$$

Grossièrement, identités de Ward, développements des produits d'opérateurs T (ou tout autre courant conservé) et relations de commutation expriment sous différentes formes les propriétés de transformation conforme des champs primaires.

3.3.4 Aspects algébriques: représentations de l'algèbre de Virasoro et TIC.

Il est maintenant possible de décrire la structure de l'espace des états H_{S_1} de la théorie. En effet, $\text{Vir} \otimes \text{Vir}$ est une algèbre de symétrie (non maximale) de la théorie. En conséquence, H_{S_1} est une représentation (en général réductible) de cette algèbre. $\text{Vect}(L_0, \bar{L}_0, \mathbf{1})$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\text{Vir} \otimes \text{Vir}$. Nous *supposons* que l'on peut choisir une base propre de H_{S_1} qui diagonalise L_0 et $\bar{L}_0$ ²⁸.

Caractéristiques générales.

On peut donner quelques restrictions sur cette représentation H_{S_1} : $L_0 + \bar{L}_0$ est le générateur des dilatations et donc joue le rôle du Hamiltonien dans la quantification radiale. Nous supposons qu'il est borné inférieurement et donc les spectres de L_0 et $\bar{L}_0$ sont bornés inférieurement.

On associe au champ ϕ l'état $\phi(0)|0\rangle$. Il est facile de voir que les champs primaires sont caractérisés par:

Proposition 10 *Soit ϕ un champ, $|\phi\rangle$ l'état associé, ϕ est primaire si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad L_n|\phi\rangle = \bar{L}_n|\phi\rangle = 0, \quad L_0|\phi\rangle = h|\phi\rangle, \quad \bar{L}_0|\phi\rangle = \bar{h}|\phi\rangle$$

Soit $\{p\}$ un ensemble fini d'entiers, on note $|\phi, \{p\}\rangle = (\prod_i L_{-p_i})|\phi\rangle$ et $\phi^{\{p\}}$ le champ associé. La valeur propre de L_0 est la dimension h du champ associé. Les primaires sont associés aux états de plus haut poids de $\mathcal{A}$. Du fait des relations de commutations de l'algèbre de Virasoro, le poids de $L_n|\phi\rangle$ est $n + h$. Comme les spectres de L_0 et $\bar{L}_0$ sont bornés inférieurement, tout état s'obtient par application répétée de $L_n, n < 0$ et $\bar{L}_n, n < 0$ sur un état de plus haut poids de $\mathcal{A}$. En conséquence:

Théorème 18 *L'espace des états d'une théorie conforme est de la forme:*

$$H = \bigoplus_{i, \bar{i}} (V_i \otimes V_{\bar{i}})$$

où V_i est une représentation irréductible de plus haut poids de Vir .

Ceci donne la structure de notre théorie! En particulier, tout champ s'obtient comme *descendant* d'un champ primaire, c'est à dire en prenant des commutateurs répétés avec les générateurs des algèbres de Virasoro gauches et droites. D'après l'identité de Ward 3.41, il suffit de connaître les fonctions de

²⁸Comme dans le cas des représentations des algèbres de Lie de dimension finie où on considère l'algèbre de Cartan [95]. Dans l'article de Segal, cette propriété de diagonalisabilité de L_0 et $\bar{L}_0$ est un *postulat*. Je ne sais pas si il est justifiable.

corrélation des champs primaires pour connaître *tous* les corrélateurs de la théorie! De même, le développement des produits d'opérateurs fait intervenir moins de coefficients que prévu. Le développement du produit des champs *primaires* ϕ_i et ϕ_j est de la forme:

$$\begin{aligned} \phi_i(z, \bar{z})\phi_j(\xi, \bar{\xi}) &= \sum_{(k, \{p\}, \{\bar{p}\})} C_{i,j}^k \beta(i, j, k, \{p\}) \bar{\beta}(i, j, k, \{\bar{p}\}) \\ &\quad (z - \xi)^{h_k + \sum p_l - h_i - h_j} (\bar{z} - \bar{\xi})^{\bar{h}_k + \sum \bar{p}_l - \bar{h}_i - \bar{h}_j} \phi_k^{(\{p\}, \{\bar{p}\})}(\xi, \bar{\xi}) \end{aligned}$$

la somme sur k impliquant uniquement des champs primaires et celle sur $\{p\}, \{\bar{p}\}$ se fait sur les éléments d'une base de la représentation de A dont $|\phi_k\rangle$ est le vecteur de plus haut poids. Les coefficients $\beta(i, j, k, \{p\})$ $\bar{\beta}(i, j, k, \{\bar{p}\})$ se calculent à partir des relations de commutation de Virasoro comme l'ont remarqué Belavin, Polyakov et Zamolodchikov [9]. Ceci montre que seuls les $C_{i,j}^k$ constituent vraiment une donnée intrinsèque de la théorie. Ce sont les constantes de structure de l'algèbre des opérateurs de la théorie.

Questions d'unitarité.

Jusqu'à présent, nous avons évité d'entrer dans le détail des questions d'unitarité de la théorie, c'est à dire l'existence d'un produit scalaire défini positif sur H_{S_1} et son interprétation. Comme l'unitarité est une condition très contraignante sur les représentations d'une algèbre de Lie, il importe d'aborder ces problèmes avant d'analyser la théorie des représentations de Vir.

Dans l'approche fonctorielle, nous avons vu un postulat important: si Σ est une surface de Riemann avec bords paramétrés et si $\hat{\Sigma}$ désigne la surface obtenue en renversant son orientation et celle des bords, alors $\phi[\hat{\Sigma}] = \phi[\Sigma]^\dagger$ où $\phi[\Sigma]$ est l'opérateur associé à Σ .

Pour comprendre cet axiome, revenons dans le plan qui peut être vu comme un cylindre interpolant entre deux cercles via l'application exponentielle. Notons $u = t + ix$ (avec $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) la coordonnée sur le cylindre, $z = \exp(u)$ est notre coordonnée sur le plan. Comme nous l'avons vu, les champs primaires sur le cylindre sont reliés aux champs primaires sur le plan par

$$\phi_{cyl.}(u, \bar{u}) = z^h \bar{z}^{\bar{h}} \phi(z, \bar{z})$$

et la relation $\phi[\hat{\Sigma}] = \phi[\Sigma]^\dagger$ sur le cylindre devient exprimée en termes de fonctions de corrélation:

$$\langle \phi_{cyl.,1}(u_1, \bar{u}_1) \dots \phi_{cyl.,n}(u_n, \bar{u}_n) \rangle^* = \langle \phi_{cyl.,1}(-\bar{u}_1, -u_1) \dots \phi_{cyl.,n}(-\bar{u}_n, -u_n) \rangle$$

car $u \mapsto -\bar{u}$ envoie (x, t) sur $(x, -t)$! On dispose d'une involution sur l'ensemble des primaires de la théorie $\phi \mapsto \phi'$ qui provient de l'application de H dans H^* fournie, dans le formalisme de Segal, par le cylindre considéré comme cobordisme interpolant entre $S_1 \cup S_1$ et le vide. Si on revient sur le plan, en écrivant cette relation pour les opérateurs, nous obtenons:

$$[\phi_i(z, \bar{z})]^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi_i\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right)$$

ϕ_i est le *champ conjugué* de ϕ_i . Un certain nombre de champs sont auto-conjugués comme le tenseur énergie-impulsion. Ceci entraîne les relations suivantes sur les modes de Laurent:

$$(3.57) \quad L_n^\dagger = L_{-n} \quad \bar{L}_n^\dagger = \bar{L}_{-n}$$

Il suffit donc de connaître les produits scalaires des primaires pour connaître tous les produits scalaires en utilisant 3.57, la proposition 10 et les relations de commutation de l'algèbre de Virasoro. Le produit scalaire est défini à partir des fonctions à deux primaires:

$$\langle \phi_j | \phi_i \rangle = \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{2h} \bar{z}^{2\bar{h}} \langle \phi_j(z, \bar{z}) \phi_i(0) \rangle)$$

et on choisit un ensemble de primaires tels que

$$\langle \phi_j | \phi_i \rangle = \delta_{i,j}.$$

Nous pouvons alors définir une théorie unitaire:

Définition 48 *Une TIC est dite unitaire si et seulement le produit scalaire défini à partir des corrélateurs à deux champs primaires et des relations de commutation de Virasoro et qui vérifie $L_n^\dagger = L_{-n}$, est défini positif!*

La propriété $\phi[\hat{\Sigma}] = \phi[\Sigma]^\dagger$ est connue sous le nom de “reflexion positivity” dans la littérature anglo-saxonne. Même si nous nous limitons à des théories unitaires, il est de notoriété publique que certains problèmes intéressants comme la percolation, les polymères où la singularité de Lee et Yang sont décrits à leurs points critiques par des théories des champs invariantes conformes *non unitaires*! Je renvoie le lecteur à diverses contributions qui se trouvent dans les Proceedings de la session d'Eté des Houches 1988.

Théorie des représentations de l'algèbre de Virasoro.

Nous allons rappeler ici quelques résultats principaux relatifs aux représentations irréductibles unitaires de plus haut poids de Vir. Comme un certain nombre de points sont communs au cas des algèbres de Kac-Moody, nous avons détaillé ces questions dans l'Appendice 3.A et nous ne donnerons ici que les résultats principaux.

Comme nous l'expliquons dans l'Appendice 3.A, pour une valeur de la charge centrale c et du poids conforme h , il existe, à isomorphisme près une et une seule représentation irréductible qui ait ces valeurs comme plus haut poids. Elle est obtenue en prenant le quotient du module de Verma $M(h, c)$ associé par le noyau de la forme sesquilinéaire canonique sur $M(c, h)$ définie par les conditions $L_n^\dagger = L_{-n}$:

$$V(c, h) \simeq \frac{M(c, h)}{N(c, h)}$$

Les états de $N(h, c)$ sont appelés les états nuls (ou encore les vecteurs singuliers) et forment une représentation de Vir. On peut chercher quelle est la structure de $N(h, c)$. Il suffit de chercher les états de plus haut poids dans $N(h, c)$. On les trouve aux niveaux donnés par l'annulation du déterminant de Kac comme expliqué dans l'Appendice 3.A. Le théorème suivant décrit les possibilités d'annulation du déterminant de Kac:

Théorème 19 *Il existe des états nuls dans $M(h, c)$ si et seulement si $c \leq 1$.*

Enfin, une fois le quotient effectué, il faut voir si le produit scalaire sur $V(h, c)$ garde un signe constant (positif). Cela donne des contraintes sur la charge centrale et le poids conforme comme nous l'expliquons dans l'Appendice 3.A.

Plus précisément, le théorème donnant les valeurs de la charge centrale et du poids conforme associées aux représentations unitaires irréductibles de Vir est dû à Friedan, Qiu et Shenker [76] pour ce qui est de la nécessité des conditions énoncées, et à Goddard, Kent et Olive [88] pour ce qui est de la réciproque.

Théorème 20 *Les représentations unitaires irréductibles de Vir correspondent aux valeurs suivantes de la charge centrale et du poids conforme:*

$0 < c < 1$ Il existe m entier supérieur à 3 et $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 < r \leq m$ et $0 < s \leq m + 1$ avec:

$$(3.58) \quad h_{r,s} = \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)}$$

$$(3.59) \quad c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$$

$c \geq 1$ Toutes les valeurs de c et de $h \geq 0$ sont permises.

Les vecteurs nuls sont extrêmement importants dans l'étude de ces modèles. Ils déterminent les règles de sélection de la théorie; c'est à dire quels champs primaires apparaissent dans le développement de deux primaires donnés. Ces règles sont données en Appendice 3.A et on en déduit le théorème suivant [9]:

Théorème 21 *Pour $c < 1$, il existe des algèbres d'opérateurs ne faisant intervenir qu'un nombre fini de champs primaires. Elles apparaissent pour*

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et font apparaître des champs dont le poids conforme est de la forme²⁹:

$$h_{r,s} = \frac{(pr - qs)^2 - (p - q)^2}{4pq}, \quad 0 < r \leq q \quad 0 < s \leq p \text{ et } pr - qs > 0$$

Un champ de poids $h_{r,s}$ apparaît dans le développement en produit d'opérateurs de poids h_{r_1, s_1} et h_{r_2, s_2} si et seulement si

$$(3.60) \quad |r_1 - r_2| + 1 \leq r \leq 1 + \min(r_1 + r_2, p - r_1 - r_2)$$

$$(3.61) \quad |s_1 - s_2| + 1 \leq s \leq 1 + \min(s_1 + s_2, p - s_1 - s_2)$$

Les théories qui possèdent cette propriétés ne sont pas toutes unitaires mais les théories unitaires à $c < 1$ font partie de ces modèles dont l'algèbre d'opérateurs fait intervenir un nombre fini de champs.

En résumé, la donnée des constantes de structure du développement des produits d'opérateurs et du contenu en champ de la théorie permet de calculer toutes les fonctions de corrélation de tous les champs primaires sur le plan et grâce aux identités de Ward, de tous les champs. C'est en ce sens que les théories conformes sont exactement solubles: à partir d'un petit nombre de données, les propriétés de symétrie, qui sont en un sens des propriétés cinématiques, permettent de tout calculer. L'analyse peut être poussée plus loin dans le cas des théories rationnelles et en fait, tout peut être calculé à partir de propriétés de symétrie! Avant de franchir ce pas, il est bon d'illustrer notre propos par quelques exemples.

²⁹ Avec une restriction de la même forme pour la partie anti-holomorphe.

3.4 Exemples

Les exemples que nous discutons ici font partie de l'inconscient collectif de la physique théorique actuelle. Néanmoins il m'a paru utile de détailler quelques illustrations des considérations précédentes. J'ai choisi de commencer par le modèle d'Ising pour sa profondeur et sa simplicité pour ensuite détailler d'autres exemples importants comme les modèles Gaussiens ou les modèles de Wess-Zumino-Witten.

3.4.1 Le modèle d'Ising.

Un des principaux avantages du modèle d'Ising est qu'il permet de comprendre la plupart des concepts des théories conformes avec un effort limité. C'est pour cela que nous présentons cet exemple en première place.

Nous allons discuter brièvement l'équivalence entre ce modèle et une théorie de fermions libres au voisinage du point critique. Puis nous rappellerons quelques résultats relatifs aux corrélateurs et aux diverses fonctions de partition de ce modèle. Enfin nous donnerons les règles de fusion de ce modèle 125.

La “physique” du modèle.

Bien des méthodes existent pour résoudre ce modèle “universellement” connu, mais les manipulations formelles habituellement présentées ne permettent pas de comprendre *simplement* la physique du modèle, à savoir:

- Pourquoi ce système présente-t'il une transition de phase du second ordre.
- Quelle est la nature des excitations qui se propagent au voisinage du point critique ou en ce point. Comment obtenir le spectre en taille finie à la température critique: on sait bien que la densité de niveaux à la limite thermodynamique code les exposants critiques du modèle.
- Que dire en présence de conditions aux limites non périodiques sur un rectangle.

Une méthode particulièrement élégante apparaît dans le livre de Polyakov [145] et fournit, en combinaison avec d'autres travaux, la réponse à ces questions. En particulier, il ressort de tout cela que:

- On dispose d'une propriété de dualité (due à Kramers et Wanier) remarquable: on sait construire canoniquement à partir du modèle d'Ising sur un réseau carré un modèle d'Ising sur le réseau dual. Le point important est que les comportements des deux modèles sont reliés et que cette opération échange les phases de haute et basse température.

Le paramètre d'ordre (aimantation) du modèle dual est un paramètre d'ordre pour la phase *désordonnée* du modèle de départ. C'est l'opérateur de désordre introduit par Kadanoff.

Dans le cas d'un modèle défini sur un réseau de taille finie rectangulaire, les configurations du modèle de départ avec conditions aux limites périodique-périodique (P, P) sont envoyées sur les configurations du modèle dual avec les différentes périodicités possibles: (P, A) , (A, P) et (A, A) .

- Les excitations élémentaires ont des trajectoires qui ne sont autres, dans la phase de basse température, que les bords des îlots de spins retournés par rapport à l'aimantation macroscopique spontanée.

- La transition de phase provient d’une divergence de la densité de ces excitations et le système se trouve donc décrit, à grande distance, par une théorie des champs qui s’avère être une théorie de fermions libres (dont la masse s’annule au point critique).

Notre objectif n’est pas de faire une revue de tout cela ici. Je renvoie le lecteur aux très beaux textes de Feynman [63], Polyakov [145], Fradkin [65] et plus récemment Distler [47]. Je me contenterais de rappeler pourquoi le modèle d’Ising est décrit par une théorie de fermions libres au voisinage du point critique.

Polyakov a donné un argument très intéressant pour comprendre cette caractéristique essentielle du modèle d’Ising et qui, en plus, se situe tout à fait dans la philosophie des théories conformes. Il construit les champs fermioniques à partir des opérateurs de spin σ et de désordre μ qui vivent sur le réseau dual. Essentiellement, l’objet formé par un spin et les quatre opérateurs de désordre les plus proches définit notre fermion :

- Inséré dans une fonction de corrélation, il obéit à une équation aux différences finies.
- Il contient deux composantes de “spin 1/2” et deux composantes de “spin 3/2” sous l’action du groupe des rotations du réseau carré.
- Dans la limite où l’on ajuste la constante de couplage du modèle et où le pas du réseau tend vers zéro pour sonder le comportement infrarouge du modèle, les composantes de spin 3/2 s’annulent alors que les composantes de spin 1/2 ψ et $\bar{\psi}$ obéissent à une équation de Dirac bidimensionnelle Euclidienne avec un terme de masse. Celui-ci est fonction du pas du réseau et de la constante de couplage³⁰. Bien sûr, il s’annule au point critique!

Cette construction du fermion constitue une version “microscopique” du développement des produits d’opérateurs³¹ comme nous le verrons plus loin!

Remarque : Ceci montre immédiatement par dualité de Kramers-Wanier que pour obtenir la fonction de partition du modèle d’Ising au point critique sur un rectangle avec conditions aux limites (P, P) , on doit sommer sur les quatre périodicités possibles pour les fermions. Enfin les deux composantes ψ et $\bar{\psi}$ ont les mêmes périodicités. $\square$

Nous allons maintenant oublier l’origine microscopique de la théorie des champs pour l’étudier en tant que telle au point critique.

Fermions libres.

L’action pour une théorie de fermions de Majorana de masse nulle est donnée par :

$$S = \frac{1}{2\pi} \int (\psi \partial_{\bar{z}} \psi - \bar{\psi} \partial_z \bar{\psi}) d^2 z.$$

Les équations du mouvement donnent $\partial_z \bar{\psi} = \partial_{\bar{z}} \psi = 0$. Les champs ψ et $\bar{\psi}$ sont des champs primaires de poids respectifs $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$. Les deux composantes du tenseur énergie-impulsion se calculent simplement :

$$T(z) = -\frac{1}{2} \psi \partial_z \psi \quad \bar{T}(z) = -\frac{1}{2} \bar{\psi} \partial_{\bar{z}} \bar{\psi}$$

³⁰Idee de renormalisation: il existe une famille de modèles pour lesquelles on obtient la même théorie des champs effective à grande distance.

³¹D’ailleurs, comment peut on avoir ce type d’idée sans disposer d’un bagage conformiste?

Le contenu en champs du modèle d'Ising est facile à obtenir à partir des fonctions de partition sur le tore avec les différents jeux de conditions aux limites pour les spins. Ce problème a été étudié par Cardy [21] et nous rappelons seulement les résultats principaux ici. Dans le cas (P, P) pour les spins, nous devons calculer les fonctions de partition avec les quatre conditions aux limites possibles pour les fermions: $(\pm, \pm)$. Un tel calcul est standard³² et nous ne donnerons que les résultats, exprimés en fonction des caractères de l'algèbre de Virasoro:

$$(3.62) \quad Z_{PP}(\tau, \bar{\tau}) = |\chi_0(\tau)|^2 + |\chi_{1/16}(\tau)|^2 + |\chi_{1/2}(\tau)|^2$$

$$(3.63) \quad Z_{PA}(\tau, \bar{\tau}) = |\chi_0(\tau)|^2 - |\chi_{1/16}(\tau)|^2 + |\chi_{1/2}(\tau)|^2$$

$$(3.64) \quad Z_{AP}(\tau, \bar{\tau}) = |\chi_{1/16}(\tau)|^2 + \chi_0(\tau)\chi_{1/2}(\bar{\tau}) + \chi_{1/2}(\tau)\chi_0(\bar{\tau})$$

$$(3.65) \quad Z_{AA}(\tau, \bar{\tau}) = |\chi_{1/16}(\tau)|^2 - \chi_0(\tau)\chi_{1/2}(\bar{\tau}) - \chi_{1/2}(\tau)\chi_0(\bar{\tau})$$

où $\chi_h(\tau)$ est le caractère de la représentation de plus haut poids h de $\text{Vir}_{c=1/2}$. Ceci montre que les champs primaires du modèle sont tous sans spins (la théorie est dite “diagonale”). Le champ de dimensions $(1/16, 1/16)$ est impair dans le renversement des spins et comme c'est le seul, nous l'identifions avec l'aimantation σ du système. Le champ de dimensions $(1/2, 1/2)$ s'identifie avec l'énergie du système: ε .

Les fermions font leur apparition en présence de conditions aux limites antipériodiques pour les spins. Comme on s'y attend, ils ont pour dimensions $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$. L'opérateur de désordre apparaît également dans ce secteur et, comme la dualité de Kramers-Wanier le laisse prévoir, il possède les mêmes poids conformes que le spin σ .

Les champs physiques du modèle d'Ising.

Finalement la théorie générale de BPZ permet de donner l'algèbre d'opérateurs du modèle d'Ising en toute généralité. Les différentes représentations de $\text{Vir} \otimes \text{Vir}$ à $c = 1/2$ correspondent aux champs suivants:

- **1** C'est le vide de dimensions $(0, 0)$.
- ε Il s'agit de l'opérateur énergie de dimensions $(1/2, 1/2)$.
- (σ, μ) Les deux opérateurs d'aimantation (opérateurs d'ordre des phases basse et haute température respectivement).

auxquels il faut rajouter les champs *chiraux* qui n'apparaissent pas en présence de conditions aux limites périodiques:

- $(\psi, \bar{\psi})$ Ce sont les fermions qui ont pour dimensions respectives $(1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$.

³²Une méthode simple consiste à passer par la notion de Pfaffien et à tout ramener à l'évaluation de déterminants du Laplacien convenablement régularisés, c'est à dire à un champ bosonique. Pour tenir compte des différentes conditions aux limites fermioniques, on doit introduire des conditions aux limites périodiques ou antipériodiques pour le champ bosonique. Comme nous traitons cet exemple en section 3.4.4, nous ne détaillons pas le calcul ici. Une présentation complète se trouve dans [98]. Une autre méthode consiste à décomposer les fermions en modes de Laurent et à exprimer L_0 et $\bar{L}_0$ en fonction de ces modes: voir [85].

Le tableau suivant résume les règles de fusion de tous ces champs:

(3.66)

	1	σ	ε	μ	ψ
1	1	σ	ε	μ	ψ
σ	σ	$\{1, \varepsilon\}$	σ	ψ	μ
ε	ε	σ	1	μ	ψ
μ	μ	ψ	ψ	$\{1, \mu\}$	σ
ψ	ψ	μ	ψ	σ	ε

Bien entendu, pour le trouver, point n'est besoin d'appliquer les règles de fusion de BPZ dans tous les cas, la symétrie de ces règles ainsi que la dualité (qui montre que σ et μ jouent des rôles équivalents) permet de simplifier le travail!

3.4.2 Les modèles minimaux.

Le modèle d'Ising n'est que le premier d'une série découverte par BPZ appelée série minimale. Notre objectif n'est pas de l'étudier en détail mais de mentionner leur existence.

Si nous nous limitons aux théories unitaires, les valeurs de la charge centrale sont données par 3.59 pour $m \geq 3$. A chaque valeur de la charge centrale, on dispose de deux modèles sauf dans quelques cas exceptionnels. Ces modèles ont été découverts par Cappelli, Itzykson et Zuber (CIZ) dans leur étude du problème d'invariance modulaire sur le tore [19]. Des modèles intégrables ont pu être construits qui correspondent à la "série A" de CIZ [139]. Il est également possible de construire des modèles qui correspondent à la série D: ce sont des modèles à lacunes découverts par Ph. Roche [155] et indépendamment B. Nienhuis *et al* [185].

3.4.3 Le modèle Gaussien général.

La théorie d'un champ bosonique libre à valeurs dans un tore³³ fournit un exemple de théorie conforme où tout est aisément calculable. Nous allons l'utiliser pour exhiber quelques unes des caractéristiques essentielles des théories rationnelles. Pour cela, nous allons commencer par considérer le cas d'un champ à valeurs dans un tore quelconque. Nous calculerons la fonction de partition sur le tore afin d'obtenir le contenu en champs, ce qui nous donnera les conditions de rationalité de la théorie. L'étude détaillée de ces théories rationnelles sera effectuée sur l'exemple du boson libre compactifié sur un cercle. Nous exhiberons sur cet exemple une partie des données de Moore et Seiberg [130] d'une théorie rationnelle. Enfin, la connexion entre les TIC et le Monstre de Griess Fischer [89] sera esquissée dans la section 3.4.8.

Action du modèle.

Soit Λ un réseau engendrant $\mathbb{R}^d$ et $T_\Lambda = \mathbb{R}^d/2\pi\Lambda$ le tore associé. $X(z, \bar{z})$ est un champ défini sur Σ , surface de genre g , à valeurs dans T_Λ . La partie cinétique naïve de l'action est donnée par

$$\begin{aligned}
S_0[X] &= \int_{\Sigma} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} X \partial_{\nu} X \sqrt{g} d^2x \\
&= \int_{\Sigma} \partial_z X \partial_{\bar{z}} X d^2z
\end{aligned}$$

³³On dit aussi "compactifié".

où la seconde équation est valide en coordonnées isothermes. Mais ce n'est pas la seule chose possible. En effet, l'espace des configurations du champ X n'est pas connexe et donc nous pouvons introduire une phase topologique. Les différents secteurs sont indexés par l'application induite par $X(z, \bar{z})$ sur $\pi_1(\Sigma)$ à valeurs dans $\pi_1(T_\Lambda) = \Lambda$. Comme Λ est abélien, nous pouvons la voir comme une application définie sur l'abélianisé du groupe fondamental de Σ qui n'est autre que son premier groupe d'homologie $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. Conformément à la tradition, $(a_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ et $(b_j)_{j \in \langle 1, g \rangle}$ désigne une base pour l'homologie de Σ . Nous notons

$$X[a_i] = \frac{1}{2\pi} \int_{(a_i)} dX, \quad X[b_j] = \frac{1}{2\pi} \int_{(b_j)} dX$$

les holonomies le long de ces différents cycles. Ce sont des éléments de Λ qui classent les différentes composantes connexes de $\text{Map}(\Sigma, T_{2\pi\Lambda})$. Le facteur topologique est une exponentielle d'une fonction S de ces holonomies $\exp(-S[(X[a_i], X[b_i])_i])$. Ce facteur étant topologique, il doit être invariant sous l'action du groupe modulaire de genre g . Son action sur $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ est décrite par la suite exacte courte suivante:

$$1 \rightarrow \text{Tor}_g \longrightarrow \mathfrak{M}(0, g)_g \longrightarrow \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

où Tor_g est le groupe de Torelli en genre g formé par les éléments du groupe modulaire qui agissent trivialement sur l'homologie. Le groupe modulaire agit donc sur $(X[a_i], X[b_i])_i$ par l'intermédiaire de $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Dans la transformation

$$M \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} (X[a_i])_i \\ (X[b_i])_i \end{pmatrix} \longrightarrow M \begin{pmatrix} (X[a_i])_i \\ (X[b_i])_i \end{pmatrix}$$

l'action $S[(X[a_i], X[b_i])_i]$ est invariante. De plus, elle est locale. Si on choisit la base usuelle d'homologie $((a_i), (b_i))_{i \in \langle 1, g \rangle}$, alors

$$S[(X[a_i], X[b_i])_i] = \sum_{i=1}^g S_1[X[a_i], X[b_i]]$$

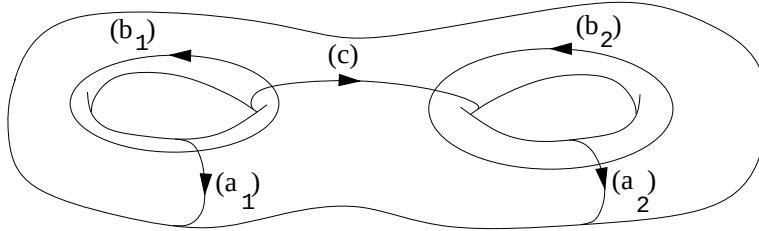
ce qui assure la factorisation à la frontière de l'espace des modules³⁴. Si on impose d'une part que S_1 change de signe quand on change d'orientation sur le tore et d'autre part l'invariance modulaire, les relations vérifiées par S_1 sont

$$(3.67) \quad S_1[a, b] = S_1[-b, a]$$

$$(3.68) \quad S_1[a + b, b] = S_1[a, b]$$

$$(3.69) \quad S_1[a, -b] = -S_1[a, b]$$

Ceci montre que S_1 est une fonction antisymétrique de $(a, b) \in \Lambda^2$. L'invariance modulaire en genre 2 permet d'aller plus loin. Dans le "twist de Dehn"³⁵[13, Chapitre 4, paragraphe 4] par rapport au cycle (c) :



³⁴Quand un cycle dégénère en un point.

³⁵Cette Anglisme étant consacrée par l'usage, je l'utiliserai dans la suite de cette thèse.

les cycles se transforment selon

$$\begin{aligned}(a_1) &\longrightarrow (a_1) \\ (a_2) &\longrightarrow (a_2) \\ (b_1) &\longrightarrow (b_1) + (a_1) - (a_2) \\ (b_2) &\longrightarrow (b_2) + (a_2) - (a_1)\end{aligned}$$

et l'invariance de $S_2[a_1, a_2, b_1, b_2] = S_1[a_1, b_1] + S_1[a_2, b_2]$ dans cette transformation donne après la spécialisation $a_2 = 0$ la relation $S_1[a_1, 0] = S_1[0, b_2 - a_1]$. Tous les $S_1[a, 0]$ et les $S_1[0, b]$ sont donc égaux. Nous fixons $S_1[0, 0] = 0$ par convention. En prenant $b_2 = a_1 - a_2$, nous obtenons la linéarité de S_1 par rapport à la seconde variable. En conséquence, S_1 est une forme bilinéaire antisymétrique sur Λ^2 :

$$S_1[a, b] = B(a, b) = -B(b, a)$$

Réciproquement, il est facile de vérifier qu'un tel forme antisymétrique définit un facteur de phase invariant modulaire par

$$S_g[(a_i, b_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}] = \sum_{i=1}^g S_1[a_i, b_i]$$

car le groupe modulaire Γ_g est engendré par les "twists de Dehn" le long des cycles a_i, b_i et c_j . Cet effet topologique est pris en compte par l'introduction d'un champ antisymétrique B de fond constant sur Σ . Finalement, l'action du modèle est donnée par

$$(3.70) \quad S[X] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \partial_z X \partial_{\bar{z}} X d^2 z + \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} B(\partial_z X, \partial_{\bar{z}} X) d^2 z$$

où B est une forme bilinéaire antisymétrique.

Fonction de partition sur le tore.

Il est facile d'obtenir la fonction de partition sur le tore et par là, le contenu en champs de la théorie. Pour effectuer l'intégrale fonctionnelle sur $\Sigma = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$, nous devons prendre un instanton dans chaque secteur topologique puis calculer l'intégrale gaussienne restante dans chaque secteur. Tous calculs faits, il nous reste avec la notation $q = \exp(2\pi i\tau)$:

$$(3.71) \quad Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \sum_{\substack{k \in \Lambda \\ w \in \Lambda^*}} q^{\frac{1}{2}(k + \frac{1}{2}(\mathbf{1} + B).w)^2} \bar{q}^{\frac{1}{2}(k - \frac{1}{2}(\mathbf{1} - B).w)^2}.$$

w est le nombre d'enroulement et k le moment et B est l'endomorphisme associé à la forme bilinéaire antisymétrique B qui apparaît dans l'action. Les vecteurs

$$(p, \bar{p}) = \left(\left(k + \frac{1}{2}(\mathbf{1} + B).w \right), \left(k - \frac{1}{2}(\mathbf{1} - B).w \right) \right) \in \mathbb{R}^{2d}; \quad k \in \Lambda', \quad w \in \Lambda^*$$

forment un réseau Γ pair et auto-dual pour la métrique canonique de signature (d, d) . η désigne la fonction de Dedekind

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)$$

dont les propriétés modulaires sont connues [167][31].

L'équation 3.71 donne la structure algébrique de ce modèle. L'algèbre de symétrie est plus grande que l'algèbre de Virasoro: le courant $J_a^j = \partial_a X^j$ est conservé! En coordonnées complexes, nous avons:

$$J(z) = \partial_{\bar{z}} X \quad \bar{J}(\bar{z}) = \partial_z X(z)$$

En conséquence, on dispose de d courants supplémentaires dont les modes forment d copies d'une algèbre d'oscillateurs harmoniques:

$$[J_n, J_m] = \delta_{n,-m}, \text{ avec } J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{z^{n+1}}$$

Les représentations irréductibles sont indexées par la valeur propre p du mode zéro J_0 : p . V_p est l'espace de Fock construit en appliquant sur l'état de plus haut poids $|p\rangle$ les opérateurs de création $(J_{-n})_{n>0}$. Il est utile d'introduire le caractère de cette représentation qui est la fonctionnelle génératrice du nombre d'états à niveau donné:

$$(3.72) \quad \chi_p(\tau) = \text{Tr}_{V_p}(q^{L_0-1/24}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dim(V_H^{(n)}) q^{\frac{h_p+n-1}{24}}$$

Dans notre exemple, le tenseur énergie-impulsion se calcule à partir des courants par la construction de Sugawara³⁶:

$$T(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d : J^k(z) J^k(z) :, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d : \bar{J}^k(\bar{z}) \bar{J}^k(\bar{z}) :$$

et donc:

$$\chi_p(\tau) = \frac{q^{p^2/2}}{\eta(\tau)^d}$$

et bien sûr

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma} \chi_p(\tau) \bar{\chi}_{\bar{p}}(\bar{\tau})$$

Nous donnerons plus loin une expression pour les champs primaires relativement à l'algèbre de courants $U(1)^d$. Ce sont les opérateurs de vertex. Nous verrons plus loin comment les définir dans le cadre de l'intégrale fonctionnelle. Ce sont des régularisations d'exponentielles.

3.4.4 Conditions de Rationalité.

Dans le cas du modèle Gaussien compactifié sur un tore $T_{2\pi\Lambda} \mathbb{R}^{2D}/2\pi\Lambda$, avec un champ antisymétrique B , la fonction de partition sur le tore donnée en 3.71 montre que les courants conservés primaires pour l'algèbre de courants abélienne sont donnés par l'intersection du réseau pair auto-dual Lorentzien de signature (d, d) : $\Gamma_{(d,d)}$ avec $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Les vecteurs de cette intersection sont tous dans l'ensemble des vecteurs pairs de Λ . Notons cette intersection $\Gamma_{Chiral} \subset \Lambda$. Soit $a \in \Lambda$, $a \in \Gamma_{Chiral}$ si et seulement si $(1-B)(a)/2 \in \Lambda^*$. Les opérateurs de vertex $V_p(z)$ pour $p \in \Gamma_{Chiral}$ engendrent une algèbre étendue $\mathcal{A}_L$. De même, en considérant la partie anti-holomorphe, nous construisons $\mathcal{A}_R$. A ces deux algèbres correspondent deux sous réseaux $\Gamma_L^{Chiral} \subset \mathbb{R}^g \times \{0\}$ et $\Gamma_R^{Chiral} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^d$ du réseau des plus hauts poids

³⁶: : signifiant comme d'habitude l'ordre normal des modes bosoniques.

de $U(1)_L^d \otimes U(1)_R^d$. Du fait des règles de développement des produits d'opérateurs de vertex, la théorie est rationnelle si et seulement si

$$\frac{\Gamma_{(d,d)}}{(\Gamma_L^{Chiral} \oplus \Gamma_R^{Chiral})} \text{ est fini}$$

Alors on peut organiser l'ensemble des représentations de $U(1)_L^d \otimes U(1)_R^d$ qui apparaissent dans notre modèle en un nombre fini de représentations de $\mathcal{A}_L \otimes \mathcal{A}_R$. Nous allons voir cela en détail dans le cas $d = 1$.

3.4.5 Le boson libre compactifié sur un cercle.

Dans ce cas, le seul paramètre à considérer est le rayon de compactification R . Plus précisément, le réseau Γ est défini par

$$(3.73) \quad (p, \bar{p}) = \left(\frac{n}{R} - \frac{mR}{2}, \frac{n}{R} + \frac{mR}{2} \right), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Dans ce cas, la condition de rationalité de la théorie est facile à écrire: l'existence de courants conservés de spin entier est équivalente à la rationalité de $R^2/2$.

Supposons donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q , premiers entre eux et tels que:

$$\frac{R^2}{2} = \frac{p}{q}$$

Les nouveaux courants conservés sont

$$Q_k(z) =: \exp(2\pi i k \sqrt{2pq} X(z)) : \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^*$$

de dimensions conformes $k^2 pq$. La structure de cette algèbre de symétrie étendue est donnée par le développement des produits d'opérateurs:

$$Q_k(z) Q_l(\xi) = (z - \xi)^{2pqkl} Q_{k+l}(\xi)$$

et nous laissons le lecteur en déduire par la technique usuelle les relations de commutation entre les modes:

$$Q_k(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{Q_{k,n}}{z^{n+k^2 pq}}$$

Cette algèbre, notée $\mathcal{A}_N$ avec $N = 2pq$ est une extension de l'algèbre des courants engendrée par $\partial_z X$. Analysons sa théorie des représentations.

Les représentations irréductibles de plus haut poids de $\mathcal{A}_N$ sont décomposables en sommes de représentations irréductibles de l'algèbre des courants $U(1)$. L'état de plus haut poids $|\phi\rangle$ d'une représentation W de $\mathcal{A}_N$ est de plus haut poids pour $U(1)$. Soit u le poids pour $U(1)$, alors $|\phi\rangle = |u\rangle$ du fait du développement du produit avec les courants Q_k , nous voyons que

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{u+k\sqrt{2pq}} \subset W$$

mais comme le membre de droite est une représentation de $\mathcal{A}_N$, on en déduit que $W = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_{u+k\sqrt{2pq}}$. Déterminons quelles valeurs de u peuvent être des plus haut poids de $\mathcal{A}_N$. Comme

$$Q_k(z) V_u(\xi) = (z - \xi)^{ku\sqrt{2pq}} V_{u+k\sqrt{2pq}}(\xi)$$

nous en déduisons que u est compté modulo $\sqrt{2pq}$. De plus, ce développement doit être monovalué car les deux champs Q_k et V_u appartiennent au contenu en champs du modèle. Ceci entraîne que le développement à courte distance de ces deux champs est monovalué lorsque l'on fait circuler un des points autour de l'autre. Donc le développement du produit $Q_k(z)V_u(\xi)$ ne doit contenir que des puissances entières de $z - \xi$. En conséquence, $u\sqrt{2pq}$ doit être un entier. Ceci assure que les modes de Laurent des opérateurs associés à ces champs obéissent à des relations de *commutation*. Finalement, les représentations irréductibles de plus haut poids de $\mathcal{A}_N$ sont indexées par un plus haut poids pour l'algèbre $U(1)$ qui est quantifié:

$$W_n : \quad p = \frac{n}{\sqrt{2pq}}, \quad h = \frac{n^2}{4pq} \text{ et } n \in \frac{\mathbb{Z}}{2pq\mathbb{Z}}$$

et les règles du développement des produits de champs $\mathcal{A}_N$ primaires sont données par:

$$\phi_n(z)\phi_m(\xi) = (z - \xi)^{nm/2pq} \phi_{n+m}(\xi)$$

avec n, m et $n + m$ dans $\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$.

Caractères de $\mathcal{A}_N$.

Nous pouvons former les caractères de cette algèbre étendue $(\chi_n)_{n \in (\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z})}$. Clairement:

$$\begin{aligned} \chi_n(\tau) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{q^{\frac{1}{2}(\frac{n}{\sqrt{2pq}} + m\sqrt{2pq})^2}}{\eta(\tau)} \\ (3.74) \quad &= \frac{\vartheta \left[\begin{smallmatrix} n/2pq \\ 0 \end{smallmatrix} \right] (0|2pq\tau)}{\eta(\tau)} \end{aligned}$$

où l'on a introduit les fonctions ϑ de Jacobi dont quelques propriétés sont rappelées dans l'appendice 3.C. En particulier, on y trouve leur propriétés modulaires:

$$(3.75) \quad \chi_n(\tau + 1) = \exp \left(2\pi i \left(\frac{n^2}{4pq} - \frac{1}{24} \right) \right) \chi_n(\tau)$$

$$(3.76) \quad \chi_n(-1/\tau) = \frac{1}{\sqrt{2pq}} \sum_{m \in \mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}} e^{2\pi i mn/2pq} \chi_m(\tau)$$

Cela nous permet donc d'introduire les matrices de transformation modulaire des caractères de $\mathcal{A}_N$:

$$T_n^m = \exp \left(2\pi i \left(\frac{n^2}{4pq} - \frac{1}{24} \right) \right) \delta_n^m, \quad S_n^m = \frac{1}{\sqrt{2pq}} \exp(2\pi i mn/2pq), \quad C_{n,m} = \delta_{m,-n}$$

qui vérifient $(ST)^3 = \mathbf{1}$, $S^2 = C$ et $T^{4pq} = \mathbf{1}$. Elles définissent donc une représentation du groupe quotient du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ par

$$\Gamma_{4pq} = \{M \in SL_2(\mathbb{Z}); M \equiv \mathbf{1} \pmod{4pq}\}.$$

Ce quotient est fini, isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z}/4pq\mathbb{Z})$.

De plus, la formule suivante est vérifiée:

$$\delta_{n+m}^p = \sum_k \frac{S_n^k S_m^k S_p^k}{S_0^k}$$

où le δ de Kronecker est sous-entendu dans $\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$. Cette formule fournit donc les règles de fusion de l'algèbre $\mathcal{A}_{2pq}$. Elle a été découverte par E. Verlinde en 1988 [181] et a permis une percée fondamentale dans l'étude des théories conformes. Nous verrons plus loin comment la démontrer grâce aux équations de Moore et Seiberg.

Comment calculer les fonctions de corrélation.

Nous allons expliquer ici comment calculer à partir de l'intégrale fonctionnelle les fonctions de corrélation des opérateurs de vertex. Nous montrerons que les corrélateurs des descendants relativement à l'algèbre de courant $U(1)$ sont entièrement déterminés par les corrélateurs des primaires. Ceci illustre les idées de BPZ.

Dans une approche fonctionnelle, une définition appropriée de l'opérateur de vertex est [6]:

$$(3.77) \quad V_\alpha(z, \bar{z}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-\alpha^2} \oint_{|z-\xi|=\varepsilon} \frac{d\xi}{2\pi i} e^{i\alpha X(\xi, \bar{\xi})})$$

Le calcul des fonctions de corrélation de ces champs se ramène à une intégrale Gaussienne. Il suffit de connaître une fonction de Green du laplacien sur la surface considérée pour conclure. Dans le cas du plan,

$$G(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \log(|z|)$$

convient et finalement

$$(3.78) \quad \langle \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle = \prod_{k \neq l} |z_k - z_l|^{\alpha_k \alpha_l}$$

avec la règle de sélection $\sum_k \alpha_k = 0$. Comme on s'y attend, nous retrouvons la dimension du champ V_α : $\alpha^2/2$.

Pour évaluer la fonction de corrélation de descendants des opérateurs de vertex primaires, nous commençons selon BPZ par calculer tous les corrélateurs avec des insertions de courants $J(x)$ en fonction de corrélateurs avec des seuls primaires. Dans ce but, nous introduisons la fonctionnelle génératrice

$$(3.79) \quad Z[A, \bar{A}] = \int \mathcal{D}[X] e^{-S[X] - \int (A \bar{\partial} X + \bar{A} \partial X)}$$

qui, par différentiation fonctionnelle par rapport au champ de jauge ³⁷ $(A, \bar{A})$, nous redonnera toutes les insertions voulues. La fonctionnelle $Z[A, \bar{A}]$ est une intégrale gaussienne sur le champ X et un calcul élémentaire montre que sur le plan

$$(3.80) \quad \frac{Z[A, \bar{A}]}{Z[0, 0]} = \exp \left(- \int \frac{A(x)A(y)}{(x-y)^2} d^2x d^2y - \int \frac{\bar{A}(x)\bar{A}(y)}{(\bar{x}-\bar{y})^2} d^2x d^2y + \pi \int A(x)\bar{A}(x) d^2x \right)$$

En introduisant les opérateurs de vertex, ce qui peut se faire en prenant pour $[A, \bar{A}]$ un champ astucieusement choisi, nous obtenons les identités de Ward pour les insertions d'un courant:

$$(3.81) \quad \langle (\partial X)(z, \bar{z}) \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{z - z_k} \langle \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle$$

³⁷Cette terminologie provient de l'électrodynamique: J et $\bar{J}$ sont les deux composantes du courant électrique et $(A, \bar{A})$ est un potentiel vecteur extérieur.

La généralisation à plusieurs courants ne pose guère plus de difficultés.

Remarque : Le lecteur aura remarqué que la présence du terme en $A(x)\bar{A}(x)$ dans la fonctionnelle 3.80 fournit dans l'identité de Ward pour une insertion de deux courants un terme en δ . En fait la fonction $\langle(\partial X)(x)(\bar{\partial} X)(y)\rangle$ présente une telle singularité. $\square$

Il est enfin possible d'obtenir une équation importante pour la suite: celle qui permet de calculer un corrélateur avec une insertion de $T(z)$. Par analogie avec les opérateurs de vertex, nous définissons

$$(3.82) \quad T(z) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi-z|=\varepsilon} (\partial X)(\xi)(\partial X)(z) \frac{d\xi}{2\pi i(\xi-z)}$$

En utilisant la formule 3.80 pour obtenir une insertion de deux courants, nous arrivons à

$$(3.83) \quad \langle T(z) \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle = \sum_{k,l} \alpha_k \alpha_l \frac{\langle \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle}{(z-z_k)(z-z_l)}$$

ce qui permet de trouver une équation différentielle pour les fonctions de corrélation. Nous utilisons $(\langle L_{-1}\phi \rangle)(x) = (\partial\phi)(x)$ et en exprimant L_{-1} comme une intégrale de contour d'une insertion de $T(z)$, nous arrivons à l'équation de Knizhnik-Zamolodchikov [108]:

$$(3.84) \quad \left(\partial_{z_j} - \sum_{k \neq j} \frac{\alpha_k \alpha_j}{z_j - z_k} \right) \langle \prod_{j=1}^n V_{\alpha_j}(z_j, \bar{z}_j) \rangle = 0$$

Elle permet bien entendu de retrouver les fonctions de corrélation des opérateurs de vertex. Elle joue le même rôle pour le modèle Gaussien que les équations BPZ dans les modèles minimaux. Nous verrons plus loin qu'elle apparaît dans tous les modèles ayant la symétrie d'une algèbre affine, c'est à dire des courants conservés de spin 1 et qu'elle est la seule importante.

Il serait intéressant de calculer explicitement les blocs conformes du modèle Gaussien rationnel sur la plan. Dans sa thèse [42], et dans l'article [43], R. Dijkgraaf décrit l'évaluation des fonctions de corrélation à un nombre fini de points sur une surface de genre g . Pour cela, lui et ses collaborateurs ont étudié la limite de fonctions de partitions de la théorie Gaussienne au voisinage du bord de l'espace des modules. Un calcul direct par l'intégrale fonctionnelle est également possible. Toutefois, il convient de remarquer que les fonctions de corrélation des champs $\varphi_{p,\bar{p}}$ primaires qui correspondent aux états de plus haut poids pour l'algèbre de courant $(U(1) \otimes U(1))$ ne sont pas toujours des opérateurs de vertex. En effet, si $p - \bar{p} \neq 0$, alors le champ $\varphi_{p,\bar{p}}$ crée des configurations dont le nombre d'enroulement est non trivial. La formule 3.73 montre que la différence $p - \bar{p}$ vaut $2\pi Rm$ où m est la variation du champ $X(z, \bar{z})$ après un tour le long du cycle (a) du tore. En conséquence, le champ $\varphi_{p,\bar{p}}(z, \bar{z})$ crée une configuration de champ X qui s'enroule plusieurs fois dans le cercle de compactification lorsque l'on tourne autour du point d'insertion.

Nous expliquons dans l'Appendice 3.C comment on peut trouver des fonctions de Green du Laplacien qui permettent d'évaluer ce type de corrélateur.

3.4.6 Modèle de Wess-Zumino et Witten.

Un autre exemple de théorie rationnelle est fourni par les modèles de Wess, Zumino et Witten (WZW) [189] dans lesquels il apparaît des courants conservés de spin 1. En fait, le modèle Gaussien compactifié sur un tore de Cartan [95] d'une algèbre de Lie simple et simplement lacée fournit les premiers exemples

de modèles de WZW. Nous allons ainsi revenir brièvement sur le cas de $SU(N)$ au niveau $k = 1$ [97] puis passer à l'analyse générale. Ecrire les identités de Ward de la théorie amènera naturellement aux algèbres de Kac-Moody affines [101] et à leur théorie des représentations.

Modèle WZW $SU(N)$ de niveau 1.

Considérons $LSU(N)$, algèbre de Lie de $SU(N)$. Elle est de rang $N - 1$ et son réseau des racines [95] est pair. Au niveau un, le modèle est obtenu à partir d'un champ bosonique libre compactifié sur le tore de Cartan de l'algèbre $SU(N)$. La charge centrale est donc donnée par la dimension de ce tore, c'est à dire

$$c = N - 1$$

Nous renvoyons le lecteur au travail de C. Itzykson [97] pour une discussion de ce modèle. Les principaux résultats sont les suivants:

- Il existe N champs primaires indexés par $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Leurs dimensions sont données par:

$$(3.85) \quad h_n = \frac{n(N-n)}{2N} \quad n \in <0, N-1>$$

- Les caractères forment une représentation de dimension finie du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ et la matrice S est donnée par

$$(3.86) \quad S_n^m = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i n m / N}$$

Dans ce cas particulier, ces résultats s'obtiennent facilement au parce que le modèle se formule en termes de champs libres. Toutefois, il existe une formulation générale que nous allons exposer maintenant.

Modèle de WZW général.

Le modèle de WZW peut être vu différemment. Plus précisément, on peut le concevoir comme l'analogue du modèle Gaussien où un esprit pervers aurait remplacé le champ à valeurs dans un tore par un champ à valeurs dans un groupe de Lie G que nous prendrons ici connexe, compact et simplement connexe! Bien entendu, la partie cinétique de l'action est donnée par:

$$S_0[g(z, \bar{z})] = \frac{k}{16\pi} \int_{\Sigma} g^{\mu\nu} K(g^{-1} \partial_{\mu} g, g^{-1} \partial_{\nu} g)$$

où K est la forme de Killing sur LG et $dg = \partial_{\mu} g dx^{\mu}$ la différentielle du champ à valeurs dans G . La constante k s'avèrera être entière et est appelée le *niveau*. Toutefois, cette théorie n'est pas intéressante car, comme Witten l'a montré, les symétries de cette action n'étaient pas suffisantes pour avoir invariance conforme [189]. Pour éviter cette situation, il convient de rajouter un facteur de phase topologique. Nous allons procéder comme au chapitre 2: les différentes configurations de champ sur Σ sont homotopes car $\pi_2(G)$ est trivial. Il est donc possible de les prolonger à un tore plein bordant Σ_g . C'est un tel prolongement qui constitue la configuration du système et finalement, le terme topologique que nous utiliserons est:

$$(3.87) \quad W[g] = \frac{k}{24\pi} \int_{T_g} \text{Tr}((\tilde{g}^{-1} d\tilde{g})^{\wedge 3})$$

Le poids associé est $\exp(iW[g])$. Il

Equations du mouvement et courants conservés.

Pour étudier ce modèle, le plus simple est d'écrire les identités de Dyson-Schwinger [196, Chapitre 11] correspondant au changement de variable $u \mapsto uv$ où v est une fonction arbitraire définie sur T_g à valeurs dans G . La variation de l'action se calcule par force brute. Le résultat est donné par la formule de Polyakov-Wiegmann:

$$(3.88) \quad S_{WZW}[uv] = S_{WZW}[u] + S_{WZW}[v] + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(u^{-1}(\bar{\partial}u)(\partial v)v^{-1})$$

Pour prouver cette formule, le plus simple consiste à faire un calcul direct. C'est un exercice quelque peu fastidieux que nous laissons au lecteur. Désignons par $\mathcal{O}[g]$ une fonctionnelle de g qui représente un opérateur de la théorie, alors en utilisant le fait que $\mathcal{D}[g]$ est une mesure de Haar pour le groupe $\text{Map}(T_g, G)$, nous obtenons:

$$(3.89) \quad \langle \mathcal{O}[g] \rangle_{\Sigma} = e^{-S_{WZW}[u]} \langle e^{-k \int \text{Tr}(g^{-1}(\bar{\partial}g)(\partial u)u^{-1})/2\pi} \mathcal{O}[gu] \rangle_{\Sigma}$$

$$(3.90) \quad = e^{-S_{WZW}[u]} \langle e^{-k \int \text{Tr}(u^{-1}(\bar{\partial}u)(\partial g)g^{-1})/2\pi} \mathcal{O}[ug] \rangle_{\Sigma}$$

Ces identités nous seront utiles par la suite. A partir de là, nous obtenons par un calcul au premier ordre les équations de Dyson-Schwinger dans le cas particulier du modèle de modèle de WZW: il suffit de prendre $u = g$ et $v = \mathbf{1} + \varepsilon$ ou l'inverse. Nous obtenons alors:

$$(3.91) \quad \langle \frac{\partial \mathcal{O}[g]}{\partial g(x)} g(x) \rangle_{\Sigma} = -\frac{k}{2\pi} \langle \mathcal{O}[g] \partial(g^{-1} \bar{\partial} g) \rangle_{\Sigma}$$

$$(3.92) \quad \langle g(x) \frac{\partial \mathcal{O}[g]}{\partial g(x)} \rangle_{\Sigma} = -\frac{k}{2\pi} \langle \mathcal{O}[g] \bar{\partial}((\partial g)g^{-1}) \rangle_{\Sigma}$$

Les courants du modèle de WZW sont définis par:

$$(3.93) \quad J(z, \bar{z}) = -\frac{k}{2\pi} g^{-1}(\partial g)$$

$$(3.94) \quad \bar{J}(z, \bar{z}) = \frac{k}{2\pi} (\bar{\partial} g)g^{-1}$$

et ils vérifient:

$$(3.95) \quad J_{uv} = v^{-1} J_u v + J_v$$

$$(3.96) \quad \bar{J}_{uv} = u \bar{J}_v u^{-1} + \bar{J}_u$$

d'où l'on tire leur loi de transformation dans une transformation de jauge:

$$(3.97) \quad \delta_{\omega} g = \omega(z, \bar{z}) g(z, \bar{z}), \quad \delta_{\omega} \bar{J} = [\omega(z, \bar{z}), \bar{J}(z, \bar{z})] + \frac{k}{\pi} \bar{\partial} \omega(z, \bar{z})$$

Remarquons que le courant ne se transforme pas comme un simple élément de LG . Les identités de Dyson-Schwinger signifient que $(J, \bar{J})$ sont les deux composantes $(1, 0)$ et $(0, 1)$ d'un courant conservé. Il s'agit d'une loi de conservation quantique, c'est à dire que $\bar{\partial} J = 0$ en tant qu'insertion dans une fonction de corrélation en un point qui n'appartient pas au support de $\mathcal{O}$: le support de $\mathcal{O}$ est l'adhérence de l'ensemble des points x tels que

$$\frac{\partial \mathcal{O}[g]}{\partial g(x)} \neq 0$$

Il nous reste à donner quelques exemples d'observables. Le plus simple consiste à prendre (ρ_j, R_j) une représentation linéaire³⁸ de G dans R_j et on définit

$$(3.98) \quad \varphi_j(x) = \rho_j(g(x))$$

Clairement, si ρ_j^{Lie} désigne la représentation de LG déduite de ρ_j par différentiation, la variation par l'action à gauche de l'algèbre de Lie LG du champ φ_j est donnée par

$$(3.99) \quad (\delta_{L,\varepsilon}\varphi_j)(x) = \rho_j^{Lie}(\varepsilon(x)) \cdot \varphi_j(x)$$

ce qui va permettre de réécrire les équations de Dyson-Schwinger sous une autre forme comme nous allons maintenant le voir.

3.4.7 Actions effectives du modèle de WZW.

Dans cette section, nous allons définir quelques actions effectives relatives au modèle de WZW. Cette formulation de la symétrie de jauge de cette théorie des champs nous donnera un contact immédiat avec la théorie tridimensionnelle de Chern-Simons comme nous le montrerons au chapitre 5.

Nous remarquons sur l'équation 3.89 que l'on relie les valeurs moyennes d'observables $\mathcal{O}[g]$ et

$$\mathcal{O}[gu]e^{-k \int \text{Tr}(g^{-1}(\bar{\partial}g)(\partial u)u^{-1})/2\pi}$$

En conséquence, pour disposer d'une formulation plus esthétique des équations 3.89 et 3.90 dans laquelle apparaîtrait au plus une famille d'observables, nous introduisons le couplage à un champ de jauge extérieur $(A, \bar{A})$:

$$(3.100) \quad S[g, A] = S_{WZW}[g] - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(g^{-1}(\bar{\partial}g)A)$$

$$(3.101) \quad \bar{S}[g, \bar{A}] = S_{WZW}[g] + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}((\partial g)g^{-1}\bar{A})$$

Les transformations de jauge sur le champ extérieur $(A, \bar{A})$ sont définies par les formules usuelles: ${}^h A = h^{-1}Ah + h^{-1}\partial h$ et ${}^h \bar{A} = h^{-1}\bar{A}h + h^{-1}\bar{\partial}h$. Un petit calcul simple montre que:

$$(3.102) \quad S[g, {}^h A] = S[gh^{-1}, A] - S[h^{-1}, A]$$

$$(3.103) \quad \bar{S}[g, {}^h \bar{A}] = \bar{S}[hg, \bar{A}] - \bar{S}[h, \bar{A}]$$

et donc, si nous définissons des actions effectives par

$$(3.104) \quad e^{-\Gamma[A]} = \int \mathcal{D}[g] e^{-S[g, A]}$$

$$(3.105) \quad e^{-\bar{\Gamma}[\bar{A}]} = \int \mathcal{D}[g] e^{-\bar{S}[g, \bar{A}]}$$

un petit raisonnement à la Dyson-Schwinger montre que

$$(3.106) \quad \Gamma[{}^h A] = \Gamma[A] - S[h^{-1}, A]$$

$$(3.107) \quad \bar{\Gamma}[{}^h \bar{A}] = \bar{\Gamma}[\bar{A}] - \bar{S}[h, \bar{A}]$$

³⁸ $\rho_j \in \text{hom}(G, GL(R_j))$.

qui permet ensuite d'écrire des identités de Dyson où dans les deux membres figure la même observable mais en présence de champs de jauge $(A, \bar{A})$ transformés.

Remarque : La formule 3.80 obtenue en section 3.4.4 fournit évidemment des actions effectives pour le modèle Gaussien non-compactifié. $\square$

Ces deux actions Γ et $\bar{\Gamma}$ ne sont clairement pas invariantes de jauge. Nous verrons au chapitre 7 comment on peut construire une action invariante de jauge.

Identités de Ward.

Le modèle de WZW est un exemple de théorie ayant la symétrie d'une algèbre affine. Nous allons ici écrire les identités de Ward correspondant à cette symétrie. Elles sont valables dans un contexte plus général que celui des modèles de WZW. Nous les écrirons sur le plan et en utilisant des coordonnées complexes pour plus de simplicité.

Ici, $(T^a)_a$ est une base de l'algèbre de Lie LG du groupe G . Les $f^{ab}{}_c$ sont les constantes de structure de cette algèbre et K^{ab} sa forme de Killing. Les courants conservés sont $J^a(z)$ et $\bar{J}^a(\bar{z})$ et une transformation de jauge est caractérisée par la donnée de $\omega_a(z, \bar{z})$ et $\bar{\omega}_a(z, \bar{z})$. L'identité de Ward associée s'écrit, en oubliant la partie antiholomorphe $\bar{\omega}_a$:

$$(3.108) \quad \delta_\omega \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \oint_C \langle J^a(\xi) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \omega_a(\xi, \bar{\xi}) \frac{d\xi}{2\pi i}$$

où le contour entoure les points $(z_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}$. Pour l'obtenir, on procède comme dans le cas des identités de Ward conformes décrites en 3.3.1. On doit aussi définir la notion de champ primaire pour la symétrie de jauge. La loi de transformation des observables $\varphi_j(x)$ est la plus simple possible et donc [108]:

Définition 49 *Un champ ϕ_j primaire pour la symétrie de jauge est champ à valeurs dans une représentation linéaire ρ_j de LG qui soit primaire pour la symétrie conforme et tel que:*

$$(3.109) \quad \delta_\omega \phi(z, \bar{z}) = \omega_a(z, \bar{z}) \rho_i(T^a)(\phi_i(z, \bar{z}))$$

dans une transformation de jauge de paramètre ω .

Ici, chaque composante de ϕ_j est un champ primaire conforme. Pour de tels champs, l'identité de Ward 3.91 devient sous forme [108]:

$$(3.110) \quad \langle J^a(z) \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_{j_k}(T^a) \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle}{z - z_k}$$

que l'on établit comme dans le cas des identités de Ward conformes. Comme dans le cas du modèle de Wess-Zumino-Witten, nous supposons une loi de transformation des courants anormale:

$$\delta_\omega J(z) = \omega_b(z) \text{Ad}(T^b).J(z) + k\partial\omega(z)$$

Ceci revient à postuler la forme suivante pour le développement du produits de deux courants:

$$(3.111) \quad J^a(z)J^b(\xi) = \frac{k}{2} \frac{K^{ab}}{(z - \xi)^2} + \frac{f^{ab}{}_c J^c(\xi)}{z - \xi} + \text{termes réguliers}$$

Je renvoie le lecteur à la thèse de Michel Bauer [6, Pages 23 à 27] pour une discussion de la forme la plus générale du développement de deux champs de poids $(1,0)$. Il montre que l'équation 3.111 constitue la forme la plus générale et que les constantes $f_{a,b}^c$ sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie et que $(K_{a,b})_{a,b}$ est la matrice d'une forme bilinéaire invariante sur cette algèbre. La méthode utilisée repose sur l'introduction de fonctionnelles génératrices pour les corrélateurs des courants! Le lecteur vérifiera que les identités 3.106 et 3.107 contiennent la même information que le développement des produits de deux courants.

Algèbres Affines.

Dans la droite ligne de notre stratégie, on effectue un développement en série de Laurent de $J^a(z)$ et le développement du produit de deux composantes du courant se traduit en relations de commutation entre les modes de Laurent [108]:

$$(3.112) \quad [J_n^a, J_m^b] = f^{ab}_c J_{n+m}^c + nk\delta_{n,-m}$$

Nous avons les mêmes relations pour les modes de Laurent de $\bar{J}$ et ceux ci commutent avec les J_n^a . L'équation 3.112 définit une extension centrale $\widehat{LG}$ de l'algèbre $\mathbb{C}[t] \otimes LG$ des séries formelles à valeurs dans LG par $\mathbb{C}\gamma$:

$$[t^n \otimes x, t^m \otimes y] = t^{n+m} \otimes [x, y] + \omega(t^n \otimes x, t^m \otimes y)\gamma.$$

Le cocycle ω est en fait $\omega(t^n \otimes x, t^m \otimes y) = n\delta_{n,-m}K(x, y)$. Bien sûr J_n^a est identifié avec $t^n \otimes T^a$. Finalement, comme $J^a(z)$ est un champ primaire de Virasoro de poids $(1,0)$, nous avons:

$$[L_n, J_m^a] = -mJ_{m+n}^a.$$

En conséquence, l'algèbre de symétrie d'une théorie invariante conforme ayant la symétrie de jauge G est de la forme³⁹ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est un produit semi-direct de $\widehat{LG}$ par Vir.

La symétrie conforme du modèle de WZW.

Nous sommes en mesure de préciser quelle doit être l'expression du tenseur énergie-impulsion du modèle de WZW quantique. Pour cela, nous repartons des courants $J^a(z)$ et du développement du produit d'opérateurs de deux de ses composantes. Soit

$$X(z) = \frac{1}{2} \lim_{|x-z| \rightarrow 0} \oint_{C_z} \frac{dx}{2\pi i} J^a(x) J^b(z) K_{a,b}$$

le premier terme de la partie régulière du développement du produit de deux composantes du courant. Nous pouvons obtenir très facilement⁴⁰ l'expression des modes de Laurent de $X(z)$:

$$\begin{aligned} X_n &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+2} X(z) = \oint_{C_0} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_z} \frac{dx}{2\pi i} z^{n+2} \frac{K_{a,b}}{2} J^a(x) J^b(z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_{a,b} : J_{n-k}^a J_k^b : \end{aligned}$$

³⁹ A cause des parties holomorphes et antiholomorphes.

⁴⁰ La technique est standard, on exprime tout comme une différence d'intégrales de contours avec $|x| < |z|$ et $|x| > |z|$ puis on utilise le fait que l'on doit ordonner en module au niveau des opérateurs!

où $::$ désigne la prescription bosonique d'ordre normal. Un calcul facile mais ennuyeux permet alors d'obtenir les relations de commutation des X_n :

$$[X_n, X_m] = (k + c_a)(n - m)X_{n+m} + \delta_{n,-m} \frac{\dim(LG)(k + c_a)}{12} n(n^2 - 1)$$

où C_a désigne la valeur du Casimir quadratique dans la représentation adjointe de LG . L'expression du tenseur énergie-impulsion de ce modèle est donc:

$$(3.113) \quad T(z) = \frac{1}{2(k + c_a)} \lim_{|x-z| \rightarrow 0} \oint_{C_z} \frac{dx}{2\pi i} J^a(x) J^b(z) K_{a,b}$$

C'est l'expression de Sugawara [87, Voir références] Dans le modèle de Wess-Zumino et Witten, le tenseur énergie-impulsion est entièrement déterminé par les courants!

Le contenu en champ du modèle de WZW est donc relatif à l'algèbre affine $LG^{(1)}$ au niveau k . Nous montrons dans l'Appendice 3.A que cette algèbre n'a qu'un nombre fini de représentations irréductibles de plus haut poids. En conséquence, la théorie de WZW est rationnelle relativement à cette algèbre et en fait le contenu en champ a été déterminé par Gepner [84]: la théorie est diagonale

$$H = \bigoplus_i (V_i \otimes V_i)$$

où i parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles unitaires de niveau k de $LG^{(1)}$.

Remarque : Toutes les théories invariantes par l'algèbre affine $LG^{(1)}$ n'ont pas cette particularité! Nous discutons dans l'Appendice 3.B cette subtilité! $\square$

Pour terminer, il est possible de donner le spectre du modèle de WZW sur un groupe de Lie connexe, compact et simplement connexe. Les champs s'organisent en représentations de l'algèbre affine $LG^{(1)}$ et chaque représentation intégrable (voir l'Appendice 3.A pour la définition de ces termes) apparaît une et une seule fois. Ces représentations sont en correspondance avec les poids dominants de LG et vérifient

$$k \geq \langle \theta | \bar{\lambda} \rangle$$

où θ est la plus haute racine de LG et k le niveau qui n'est autre que la constante de couplage qui apparaît dans l'action. Comme nous le rappelons dans l'Appendice 3.A, les dimensions et la charge centrale sont données par:

$$(3.114) \quad h_\lambda = \frac{c_2(\lambda)}{k + c_a}, \quad c = \frac{k \dim(G)}{k + c_a}$$

où $c(\lambda)$ est la valeur du Casimir quadratique dans la représentation de LG de plus haut poids λ . Dans le cas de $SU(N + 1)_1$, les expressions ont déjà été données.

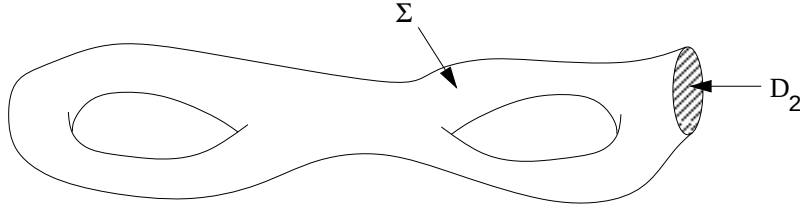
Une autre manière de trouver les états physiques du modèle.

En relation avec le chapitre 2, nous aimerions rappeler qu'il existe une autre manière d'obtenir les états physiques du modèle de WZW. Celle-ci est d'ailleurs nettement plus proche d'une quantification canonique d'un système Hamiltonien que les considérations que nous venons d'exposer.

Nous avons vu que les configurations du modèle de WZW sur une surface Σ fermée sont des applications définies non pas sur Σ mais sur un tore plein qui borde Σ . Un tel prolongement d'une configuration

fixée sur Σ n'est pas unique et l'action change quand on change de prolongement comme nous allons le voir.

Dans le cas d'une surface Σ_1 dont le bord est un cercle, la condition aux limites ne se réduit donc pas à une application du cercle dans G mais à son prolongement à un disque D_2 :



Si $\tilde{g}$ désigne la configuration de champ sur le disque D_2 et $\tilde{h}$ celle sur le tore plein dont le bord est $\Sigma \# D_2$, la fonctionnelle d'onde est alors:

$$(3.115) \quad \psi_{\Sigma}[\tilde{g}] = \int_{\tilde{h}|_{D_2} = \tilde{g}} \mathcal{D}[\tilde{h}] e^{-S_{WZW}[\tilde{h}]}$$

Dans le cadre de la quantification géométrique [183], on passe au complexifié du groupe des boucles $\text{Loop}(S_1, G)$ et les fonctionnelles d'ondes sont supposées être prolongeables analytiquement à ce complexifié. Nous allons ici utiliser les identités de Dyson-Schwinger [196, Chapitre 11] pour expliquer que, dans ce cadre, les fonctionnelles d'ondes sont des *sections* d'un fibré en droite complexe au dessus du complexifié de $\text{Loop}(S_1, G)$ et non pas de simples fonctions définies sur ce complexifié, à valeurs complexes. Choisissons $u : D_2 \mapsto G_{\mathbb{C}}$, une application du disque à valeurs dans le complexifié $G_{\mathbb{C}}$ de G , telle que

$$u|_{\partial D_2} = \mathbf{1}.$$

L'identité de Dyson-Schwinger s'écrit

$$(3.116) \quad \psi_{\Sigma}[u\tilde{g}] = \psi_{\Sigma}[\tilde{g}] e^{-S_{WZW}[u] - k \int_{D_2} \text{Tr}(u^{-1}(\bar{\partial}u)(\partial\tilde{g})\tilde{g}^{-1})/2\pi}$$

Une telle transformation ne change donc pas $\tilde{g}|_{\partial D_2} \in \text{Map}(S_1, G_{\mathbb{C}})$ mais modifie la fonctionnelle d'onde! Elle correspond à un *changement de trivialisation* d'un fibré en droites au dessus du complexifié du groupe de boucles $\text{Loop}(S_1, G)$ quotienté par le sous-groupe formé par les boucles qui se prolongent en des applications holomorphes sur le disque unité à valeurs dans le complexifié $G_{\mathbb{C}}$. Notons que la géométrie de ce fibré ne dépend que de la constante de couplage k [60].

Dans ce cadre, les états physiques du modèle de WZW sont des sections holomorphes de ce fibré. Nous disposons donc d'une action linéaire du groupe des boucles de G sur l'espace des états de la théorie: le groupe de boucles agit par multiplication sur $\text{Loop}(S_1, G_{\mathbb{C}})$ et donc de ce fait, agit sur les fonctionnelles d'ondes. Elle s'étend holomorphiquement en une action du complexifié $\text{Loop}(S_1, G_{\mathbb{C}})$.

Tout ceci a été développé dans un travail de Gawedski et Kupianen [60][83] qui ont montré comment obtenir la théorie des représentations de l'algèbre de Kac-Moody par cette méthode. C'est une généralisation au cas des groupes de boucles de la méthode des orbites co-adjointes due à Kirillov [105]. Le lecteur consultera aussi le livre de Pressley et Segal [148] ainsi que l'article de synthèse [183].

Le lien avec les algèbres affines et la théorie de leurs représentations est dû à Segal dont l'ouvrage [148] constitue une exposition magistrale de ce sujet.

3.4.8 Messe noire sous un clair de lune monstrueux.

Une classe extrêmement importante de TCR est fournie par les théories dites holomorphes. Nous verrons plus loin qu'il s'agit essentiellement des algèbres chirales n'ayant qu'une seule représentation irréductible de plus haut poids, celle associée au vide. Ce sont des théories conformes dont la fonction de partition sur le tore se met sous la forme factorisée:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = |\chi(\tau)|^2.$$

Les coefficients du développement de la fonction de partition en puissances de $q = \exp(2\pi i\tau)$ et $\bar{q}$ sont des entiers positifs⁴¹. Par unicité du vide, le terme le plus singulier dans Z est $(q\bar{q})^{-c/24}$. En conséquence χ admet pour terme le plus singulier $q^{-c/24}$ et il est facile de montrer par récurrence que les coefficients de son développement en puissances de q sont des entiers positifs. La fonction χ est multipliée par une phase dans la transformation⁴² $t : \tau \mapsto \tau + 1$. Dans la transformation $s : \tau \mapsto -1/\tau$, elle est invariante: elle ne pourrait prendre qu'une phase mais celle ci ne peut être que 1 ou -1 car cette transformation est d'ordre 2. La possibilité -1 est exclue à cause des propriétés de positivité des coefficients de son développement en puissances de q . De plus, cela montre que toutes les puissances de q qui apparaissent dans le développement de χ diffèrent de $c/24$ par un entier. Comme $s : \tau \mapsto -1/\tau$ laisse χ invariante et que $(st)^3 = 1$, nous voyons que

$$c \equiv 0 \pmod{8}.$$

Ceci montre que la structure de l'espace de Hilbert H d'une telle théorie est celle d'un produit tensoriel:

$$H = V \otimes V$$

où V est une représentation de Vir ne contenant que des champs de poids entiers.

Parmi toutes ces théories holomorphes, les plus excitantes sont celles dont la charge centrale est multiple de 24. En effet, dans ce cas, la matrice représentant l'action de t sur les caractères de genre un est elle aussi triviale. Nous verrons plus loin l'importance de ces modèles dans la classification des théories conformes. Dans ce cas χ est invariante modulaire. Nous supposons que χ est holomorphe sur le demi plan de Poincaré et donc, c'est une forme invariante modulaire. C'est un polynôme P en la fonction modulaire j [167, Page 146]. Comme $j(\tau) \simeq q^{-1}$ pour $q \rightarrow 0$, $c = 24 \deg(P)$. Par unicité du vide, ce polynôme est unitaire.

Nous allons voir qu'en fait, il existe une théorie holomorphe dont le caractère est précisément la fonction $j(\tau) - 744$. Pour la construire, nous devons partir d'un modèle Gaussien sur un réseau particulier puis effectuer une construction "orbifold".

Théories holomorphes et réseaux.

La fonction de partition d'un modèle Gaussien est de la forme

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2d}} \sum_{(p, \bar{p}) \in \Gamma_{(d, d)}} q^{\frac{p^2}{2}} \bar{q}^{\frac{\bar{p}^2}{2}}$$

⁴¹Ce sont des dimensions d'espaces vectoriels.

⁴²Nous renvoyons le lecteur à l'Appendice 3.C pour les définitions et les notations.

où $\Gamma_{(d,d)}$ est un réseau Lorentzien de signature (d, d) , auto-dual et pair⁴³. Z se factorise si et seulement si $\Gamma_{(d,d)} = \Gamma_d \oplus \Gamma_d$ avec Γ_d réseau auto-dual pair muni d'une métrique définie positive⁴⁴. En conséquence, le caractère de cette théorie holomorphe est:

$$(3.117) \quad \chi_{\Gamma_d}(\tau) = \frac{\sum_{p \in \Gamma_d} q^{p^2/2}}{\eta(\tau)^d}$$

Rappelons que un réseau auto-dual, pair, muni d'une métrique définie positive n'existe qu'en dimension multiple de 8 [167, Chapitre 5, Paragraphe 2, Corrolaire 2]. Nous retrouvons ainsi la condition $c \equiv 0 \pmod{8}$!

Le modèle de Leech.

La classification des réseaux unimodulaires pairs en dimension 24 a été effectuée par Niemaier dans [138]. Il existe précisément 24 réseaux de ce type parmi lesquels le réseau des racines de $SU(25)$ qui possède 600 vecteurs de longueur au carré égale à 2 qui donneront avec les 24 courants dus à l'algèbre de Heisenberg $U(1)^{24}$ les $624 = \dim(SU(25))$ courants de spin 1 de l'algèbre affine $SU(25)$ au niveau 1. Toutefois, parmi ces réseaux, il en existe *un et un seul* qui n'a *aucun* vecteur de longueur carrée égale à 2! C'est le réseau de Leech: Λ_{Leech} . Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour ses propriétés et sa construction: [68].

On considère alors le modèle Gaussien sûr le tore $\mathbb{R}^{24}/2\pi\Lambda_{Leech}$. C'est une théorie holomorphe. Son caractère est un polynôme de degrés 1 unitaire en la fonction j . Comme il n'y a pas de vecteurs de longueur carrée 2 dans Λ_{Leech} , on en déduit que:

$$\chi_{Leech}(\tau) = j(\tau) - 720$$

car les seuls courants de spin 1 proviennent de l'algèbre de Heisenberg. Enfin, on dispose de 196884 courants de spin 2 qui proviennent des 196560 vecteurs de longueur carrée 4 de Λ_{Leech} et des 324 champs de spin 2 obtenus à partir de l'algèbre de Heisenberg $U(1)^{24}$. Nous devons trouver un moyen de supprimer ces 24 courants de spin 1.

Le module du Moonshine.

Le réseau de Leech est symétrique par rapport à l'origine et nous pouvons donc faire agir un groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'algèbre chirale $\mathcal{A}_{Leech}$ décrite précédemment. Son action est définie par:

$$\forall p \in \Lambda_{Leech}, p \mapsto -p \quad \forall k \in <1, 24>, J^k(z) \mapsto -J^k(z).$$

Considérons alors le sous espace $\mathcal{A}_{Leech}^+$ des vecteurs invariants sous l'action de $\mathbb{Z}^2$. C'est bien sûr une algèbre chirale dont nous pouvons faire la théorie des représentations. Ce problème a été traité dans toute sa généralité par les Verlinde, Dijkgraaf et Vafa [45]. Ils ont ainsi obtenu les matrices S et T (qui caractérisent les propriétés de transformations modulaires des caractères dans les transformations s et t) relatives à l'algèbre chirale obtenue en prenant les champs d'une théorie holomorphe invariants par l'action d'un groupe fini G de symétrie de ladite théorie. Nous renvoyons le lecteur à leur travail et surtout à l'exposé de Dijkgraaf [42] pour plus de détails. Ici, nous allons obtenir les caractères de $\mathcal{A}_{Leech}^+$ en ne considérant que la théorie de Leech et en faisant des transformations modulaires sur des traces.

⁴³Tous les vecteurs ont une norme au carré paire.

⁴⁴Si $(p, \bar{p}) \in \Gamma_d$, $\|(p, \bar{p})\|^2 = p^2 - \bar{p}^2$ dans $\Gamma_{(d,d)}$.

Nous notons $\mathcal{A}_{Leech}^-$ le sous espace de $\mathcal{A}_{Leech}$ correspondant à l'action non triviale du groupe de symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il est facile⁴⁵ d'obtenir les caractères χ_{++} de $\mathcal{A}_{Leech}^+$ et χ_{--} de $\mathcal{A}_{Leech}^-$:

$$(3.118) \quad \chi_{++}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_{Leech}(\tau)}{\eta(\tau)^{24}} + \left(\frac{2\eta(\tau)}{\vartheta_2(\tau)} \right)^{12} \right)$$

où les fonctions thêta sont définies par

$$\Theta_{\Lambda}(\tau) = \sum_{p \in \Lambda} \exp(i\pi\tau \frac{p^2}{2})$$

$$\vartheta_2(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \exp(i\pi\tau(m - \frac{1}{2}))$$

et dont les propriétés modulaires sont données dans l'Appendice 3.C. Comme $\chi_{++} + \chi_{+-} = \chi_{Leech}$, nous en déduisons:

$$(3.119) \quad \chi_{+-}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_{Leech}(\tau)}{\eta(\tau)^{24}} - \left(\frac{2\eta(\tau)}{\vartheta_2(\tau)} \right)^{12} \right)$$

Pour obtenir les autres caractères, nous devons effectuer une transformation modulaire⁴⁶ $s : \tau \mapsto -1/\tau$. Nous savons que $\vartheta_2(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \vartheta_4(\tau)$ et donc, nous savons calculer les traces des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur les différents secteurs $\mathcal{H}_{\pm}$. Introduisons la notation suivante:

$$(3.120) \quad \forall (g, h) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, \quad h \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_g (\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_g}(\rho(h) q^{L_0 - c/24})$$

Alors, nous obtenons⁴⁷:

$$(3.121) \quad + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_+ (\tau) = \frac{\Theta_{\Lambda}(\tau)}{\eta(\tau)^{D/2}}$$

$$(3.122) \quad - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_+ (\tau) = \left(\frac{2\eta(\tau)}{\vartheta_2(\tau)} \right)^{D/2}$$

⁴⁵Soit $|p\rangle$ un état de plus haut poids pour l'algèbre de Heisenberg $U(1)^{24}$. Une base de $\mathcal{A}_{Leech}$ est formée par les états obtenus en appliquant un nombre pair de modes des courants à $|p\rangle + |-p\rangle$ et un nombre impair de modes des courants à $|p\rangle - |-p\rangle$. La fonction $2\vartheta_2(\tau)/\eta(\tau)$ possède une expression comme produit infini: $(\prod_{n \geq 1} (1 + q^n))^{-2}$. En conséquence, $(2\vartheta_2(\tau)/\eta(\tau))^{12}$ permet d'éliminer les états indésirables. Ce calcul simple est laissé au lecteur. En fait, les formules que nous allons écrire permettent l'étude de l'"orbifold" $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la théorie obtenue en considérant un boson libre compactifié sur un tore quelconque.

⁴⁶Voir l'Appendice 3.C pour une discussion des transformations modulaires sur le tore.

⁴⁷J'ai mené le calcul pour une valeur arbitraire de D , dimension du réseau considéré, mais ici $D = 12 \dots$

et on voit que:

$$(3.123) \quad + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline - \\ \hline \end{array} (\tau) = \left(2 \frac{\eta(\tau)}{\vartheta_4(\tau)} \right)^{\frac{D}{2}}$$

Et grâce à la transformation $t : \tau \mapsto \tau + 1$, nous obtenons le dernier bloc nécessaire

$$(3.124) \quad - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline - \\ \hline \end{array} (\tau) = \left(2 \frac{\eta(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^{\frac{D}{2}}$$

qui nous donne l'expression des caractères dans le secteur avec conditions aux limites $-$:

$$(3.125) \quad \chi_{-+}(\tau) = 2^{\frac{D}{2}-1} \left(\left(\frac{\eta(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^{D/2} - \left(\frac{\eta(\tau)}{\vartheta_4(\tau)} \right)^{D/2} \right)$$

et

$$(3.126) \quad \chi_{--}(\tau) = 2^{\frac{D}{2}-1} \left(\left(\frac{\eta(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} \right)^{D/2} + \left(\frac{\eta(\tau)}{\vartheta_4(\tau)} \right)^{D/2} \right)$$

Finalement, la fonction $\chi_{orb}(\tau) = (\chi_{++}(\tau) + \chi_{-+}(\tau))/2$ est invariant modulaire. Elle est obtenue en sommant sur les deux secteurs $+$ et $-$ les caractères correspondant aux sous espaces laissés invariants par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Son module au carré correspond à la fonction de partition de la “théorie orbifold” selon Dijkgraaf, Verlinde, Verlinde et Vafa obtenue en quotientant la théorie de Leech par l'action de la symétrie $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que nous avons considérée. Cette théorie “orbifold” est une théorie holomorphe dont le caractère est une forme modulaire invariante! En utilisant les développements en produits infinis des fonctions thêta et de la fonction de Dedekind, il est facile d'obtenir pour un réseau de Niemaier Λ :

$$\begin{aligned} \chi_{orb}(\tau) &= \chi_{\Lambda}(\tau) - 24 - N_2(\Lambda) \\ &= j(\tau) + \frac{N_2(\Lambda)}{2} - 744 \end{aligned}$$

où $N_2(\Lambda)$ est le nombre de vecteurs de longueur carrée égale à deux dans le réseau Λ . En conséquence, $j(\tau) - 744$ est le caractère de l’“orbifold” de la théorie de Leech.

Remarque : Nous remarquons sur cet exemple que par transformation modulaire, il est possible d'obtenir tous les caractères du modèle. Ceci est une caractéristique générale des TICR. Il serait extrêmement intéressant de justifier cela en toute généralité. $\square$

Nous avons choisi d'obtenir la fonction de partition de la théorie holomorphe par des moyens purement analytiques. Nous aurions pu décrire la construction algébrique de ce modèle. Elle est décrite dans la littérature à mainte reprise (voir [85] pour une approche des orbifolds pour physiciens ainsi que [68] pour la construction rigoureuse). L'algèbre chirale sans champs de spin 1 ainsi construite est notée $\mathcal{A}_{FLM}$. C'est le module de dimension infinie construit par Frenkel, Lepowsky et Meurmann [68]. Comme il n'y a aucun courant de spin 1 dans ce modèle, celui-ci n'admet pas de symétrie continue. Pour obtenir les symétries, nous devons considérer les courants de spin 2. La troncation de l'algèbre du développement des

produits d'opérateurs à l'ensemble des champs de spin 2 nous donne une algèbre de dimension 196884 non associative mais commutative qui n'est autre que l'algèbre de Griess [89]. Son groupe d'automorphismes est le groupe de Griess-Fisher F_1 . C'est le plus grand groupe fini simple sporadique. Comme c'est le groupe de symétrie du modèle, chaque espace propre de L_0 dans $\mathcal{A}_{FLM}$ est une représentation (réductible) de F_1 . Cela explique la fabuleuse identité suivante:

$$196884 = 196883 + 1$$

et plus généralement le fait que les coefficients du développement en puissances de q de $j(\tau)$ soient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des dimensions des représentations irréductibles de F_1 . L'intérêt de ce modèle provient de ses connexions profondes avec l'arithmétique. En effet, il est au centre d'un ensemble de conjectures sur les formes modulaires de genre 0 appelé familièrement le “Monstrous Moonshine” ou Clair de Lune Monstrueux.

Le fait que la fonction de partition de la théorie dite “du Monstre” soit un invariant modulaire n'est qu'une des propriétés de ce modèle. Si on évalue les blocs conformes de ce modèle, on se rend en fait compte qu'ils présentent dans l'espace de Teichmüller des monodromies triviales.

Remarque : Comme nous allons le voir dans la suite, ceci entraîne que les données de Moore et Seiberg [130] associées à cette théorie sont triviales. Signalons dès maintenant que ceci rend le problème de la classification des théories conformes *très* difficile.

Comme nous l'avons suggéré dans l'introduction de cette thèse, et comme nous allons l'expliquer dans la section 3.6.3, on peut penser à classer les théories conformes en deux étapes: d'abord en résolvant les équations de Moore et Seiberg, et ensuite en trouvant les théories associées à chacune des solutions.

L'existence du module du Moonshine montre que cette dernière étape est sans doute difficile et fait probablement appel à des résultats profonds de la théorie des groupes finis. Il reste visiblement beaucoup de travail avant de comprendre comment trouver *toutes* les théories conformes qui ont des données de Moore et Seiberg triviales. De récents progrès ont été faits dans ce domaine. Nous invitons le lecteur à consulter [160]. $\square$

3.5 Théories rationnelles.

Dans cette section, nous introduisons brièvement le concept de théorie rationnelle ainsi que la définition d'opérateur de vertex chirale. Comme je ne prétend pas avoir parfaitement compris la nature profonde d'une “algèbre chirale”, le lecteur voudra bien pardonner les imperfections de ce qui va suivre.

Le but de cette section est d'étendre les considérations des sections précédentes afin de pouvoir rapidement séparer les propriétés analytiques des blocs conformes de leur propriétés modulaires.

3.5.1 Algèbre chirale.

Nous avons rencontré divers exemples de théories conformes dont les algèbres de symétrie maximales étaient très variées:

- Les modèles minimaux qui admettent l'algèbre de Virasoro comme algèbre de symétrie maximale.
- Les modèles Gaussien rationnels qui ont des algèbres maximales comportant des champs de spin 1, 2 et parfois au delà.

- Les modèles de WZW où un nombre fini de courants de spin 1 permet de retrouver l’algèbre de symétrie maximale qui est une algèbre de Kac-Moody.

Toutes ces théories présentent une particularité importante: l’espace des états y est somme d’un nombre FINI de représentations de l’algèbre $\mathcal{A}_m$.

Nous aimerions élargir cette définition mais pour cela, une “bonne” définition de l’algèbre chirale est nécessaire. L’idéal serait que cette définition ne fasse pas référence à une théorie conforme sous-jacente. Malheureusement, une telle définition n’est inconnue. Les décompositions en modes ne semblent pas être le bon outil pour faire ce travail: les experts en algèbres W savent bien combien il est difficile de calculer des commutateurs de ces modes. Peut être est-il plus prometteur de revenir à l’esprit des travaux de Segal?

Au lieu d’une définition formelle, je me contenterai donc de donner quelques éléments qui, à mon avis, devraient jouer un rôle important dans l’élaboration de cette définition.

- Dans une approche à la BPZ des théories conformes, l’algèbre chirale de symétrie maximale du modèle est obtenue en regroupant *tous* les champs de dimensions conformes $(h, 0)$ avec h entier. L’ensemble de tous ces champs forme une algèbre stable dans le développement des produits d’opérateurs. Elle est $\mathbb{N}$ -graduée (la graduation correspondant aux poids conformes des champs en question) et contient automatiquement la composante $T(z)$ du tenseur énergie-impulsion.
- Si $Q(z)$ est un champ de l’algèbre chirale de dimension $(h, 0)$ qui est primaire pour l’algèbre de Virasoro, alors il est légitime de considérer l’intégrale

$$(3.127) \quad Q_{[v]}(z) = \oint_{C_z} \frac{d\xi}{2\pi i} v(\xi - z) Q(\xi)$$

pour v un germe de $(1 - h, 0)$ -forme méromorphe en zéro. Rappelons qu’une $(h, 0)$ -forme se transforme selon

$$v_1(\xi, \bar{\xi})(d\xi)^h = v(z, \bar{z})(dz)^h$$

dans un changement de carte. Ceci généralise la notion de décomposition en modes.

- Dans le cas des algèbres de Kac-Moody et de Virasoro, les modes de Laurent des champs forment une algèbre de Lie de dimension infinie. Ceci pouvait constituer une définition de la structure d’algèbre chirale. Dans le cas général, ce n’est plus le cas car les modes de Laurent des primaires de Virasoro *ne forment pas* une algèbre de Lie. Pour obtenir la notion adéquate, prenons le développement des produits d’opérateurs Q_1 et Q_2 . Nous définissons alors

$$(3.128) \quad Q_{1,[v]}(z) Q_{2,[u]}(z) = \int_{\substack{|\xi - z| = r_2 \\ |\xi' - z| = r_1 \\ r_2 > r_1 > 0}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{d\xi'}{2\pi i} v(\xi - z) u(\xi' - z) Q_1(\xi) Q_2(\xi')$$

comme une somme de $Q_{k,[w]}(z)$.

En un sens les équations qui expriment $Q_{1,[v]}(z) Q_{2,[u]}(z)$ comme une somme de $Q_{k,[w]}(z)$ constitue une définition du “produit” sur l’algèbre chirale que nous noterons $*$. Cette loi est associative pour refléter l’associativité du développement des produits d’opérateurs. Enfin elle admet une unité qui correspond au champ 1. Je ne sais pas mettre ces notions sous une forme moins brute...

- Il est également important de pouvoir définir la notion de représentation d’une algèbre chirale. Ce serait donc la donnée de $[\rho, V]$ où V est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et ρ une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans V telle que

$$(3.129) \quad \rho(Q_{1,[v]}(z) * Q_{2,[u]}(z)) = \rho(Q_{1,[v]}(z)) \circ \rho(Q_{2,[u]}(z))$$

Cette définition suggère que en fait, on dispose d’une “représentation” par point du plan.

- On souhaite aussi pouvoir faire une théorie des représentations de l’algèbre chirale et donc manipuler des produits tensoriels de telles représentations. Pour cela, si u est une fonction analytique sur un domaine contenant des voisinages pointés de z_1 et z_2 , on définit un coproduit [130]

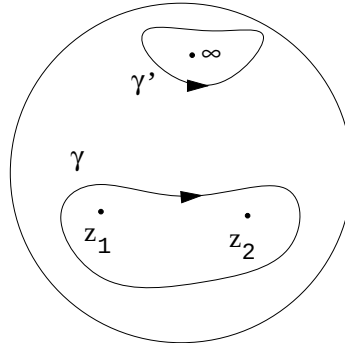
$$(3.130) \quad \Delta_{z_1, z_2} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^{\otimes 2}$$

$$(3.131) \quad Q_{[u]} \longmapsto Q_{[z_1 u]} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes Q_{[z_2 u]}$$

où ${}^z u$ désigne ${}^z u(x) = u(x - z)$. Mais ici apparaissent les premiers ennuis: on aimerait travailler avec une notion de $Q_{[u]}$ basée sur les *germes* de k -formes méromorphes en un point. A partir du moment où l’on utilise deux points, ceci ne suffit plus. L’idéal serait de prolonger le germe analytiquement d’un point à l’autre mais alors l’objet Δ dépendrait du chemin suivi car il est bien connu que le prolongement analytique d’un germe définit une fonction analytique non pas sur la surface de Riemann de départ mais sur son *recouvrement universel*. Ce genre de complication marque la fin de ma compréhension.

Néanmoins, essayons de voir ce qu’une “bonne définition” devrait être.

Nous imposons que Δ_{z_1, z_2} soit un morphisme pour la loi $*$. En effet, $Q_{[u]}(z)$ est associé à une intégrale de contour d’un champ sur un cercle qui entoure le point z . Le coproduit permet de déformer le contour pour se ramener à un contour entourant les deux points z_1 et z_2 [130]:



La loi $*$ correspond à l’ordre dans lequel les contours sont disposés au voisinage du point considéré et à l’application du développement des produits d’opérateurs. Il est bien clair qu’après déformation, les contours sont encore dans le même ordre. Ceci se traduit par le fait que Δ_{z_1, z_2} doit être un morphisme.

La représentation produit de $[V_i, \rho_i]$ et $[V_j, \rho_j]$ est à valeurs dans $V_i \otimes V_j$ et est définie par

$$(3.132) \quad \rho_{i \otimes j}^{[z_1, z_2]}(Q[u]) = (\rho_i \otimes \rho_j)(\Delta_{z_1, z_2}(Q[u]))$$

C’est bien une représentation car Δ_{z_1, z_2} est un morphisme d’algèbre.

Les propriétés vérifiées par ce coproduit doivent permettre de définir sans ambiguïtés le produit tensoriel de n représentations. Plus précisément, nous cherchons à construire un morphisme d'algèbre:

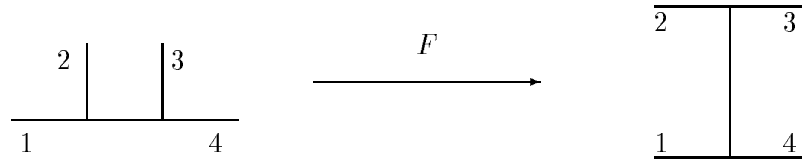
$$\Delta_{z_1, \dots, z_n}^{(n)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes n}$$

L'idée la plus simple consiste à composer deux coproduits. Intuitivement il existe deux manières différentes de faire:

$$(\Delta \otimes 1) \circ \Delta \quad \text{et} \quad (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$$

L'équivalence entre ces deux définitions donne une condition sur Δ . Nous ne l'écrivons pas ici car des problèmes apparaissent dans la notion de composition des coproduits. Tout d'abord, on retrouve ces inesthétiques restrictions sur l'uniformité des champs de k -formes. Ensuite, il faut définir concrètement une procédure de recollement entre les sphères. Je ne sais pas comment mettre sous une forme exploitable ces idées. Si l'on admet que l'on sait surmonter ces obstacles, nous pouvons espérer que le processus de définition par récurrence de $\Delta_{z_1, \dots, z_n}^{(n)}$ soit cohérent par la méthode suivante:

- Remarquons que les différents processus de définition de $\Delta^{(n)}$ sont en correspondance biunivoque avec les graphes en arbre avec n points marqués. Or, dans [130] tout comme dans [110], il est démontré que l'on passe d'un graphe à l'autre par une succession de mouvements élémentaires dits mouvements de type F :



- Mais chacun de ces mouvements correspond à l'application de la relation qui assure une bonne définition de $\Delta^{(4)}$. De ce fait, cela montre que $\Delta^{(n)}$ est défini sans ambiguïtés.
- Les propriétés de covariance conforme des champs Q_a impliquent [130] un certain nombre de contraintes sur Δ_{z_1, z_2} et sur $Q_{[u]}(z)$ considéré comme fonction de z . Là encore, je ne détaillerais rien de plus. L'état de mes réflexions est loin d'être satisfaisant.

Il convient de remarquer que les modes de l'algèbre de Virasoro doivent faire partie de l'algèbre chirale [178][130]. Les conditions de covariance conforme devraient exprimer le produit $*$ d'un tel mode avec un $Q_{[u]}$ à partir de dérivées par rapport à z de $Q_{[u]}(z)$.

3.5.2 Opérateurs de vertex chiraux.

Les opérateurs de vertex chiraux sont les opérateurs d'entrelacement des représentations de l'algèbre chirale. Comme je n'ai pas vraiment de définition de l'algèbre chirale qui me satisfasse, je ne saurais prétendre à une définition satisfaisante de ces objets. Néanmoins, dans l'esprit de ce qui vient d'être dit:

Un opérateur de vertex chirale est une application linéaire de $V_i \otimes V_j$ à valeurs dans V_k , qui dépend de trois points z_1, z_2 et z_3 sur $P_1(\mathbb{C})$ et qui vérifie les propriétés suivantes:

- C’est un opérateur d’entrelacement de l’algèbre chirale:

$$(3.133) \quad \Phi \begin{bmatrix} k & \\ i & j \end{bmatrix} (z_1, z_2, z_3) \circ \rho_{i \otimes j}^{(z_1, z_2)}(Q_{[u]}) = \rho_k(Q_{[u]}(z_3)) \circ \Phi \begin{bmatrix} k & \\ i & j \end{bmatrix} (z_1, z_2, z_3)$$

pour tout champ u de k -formes qui se prolonge analytiquement sur $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$.

- Compatibilité avec la structure complexe: elle exprime essentiellement que l’on puisse définir l’opérateur d’entrelacement au dessus de l’espace des modules des sphères avec trois points marqués et une coordonnée au voisinage de chacun des points marqués; ou, ce qui revient au même selon les arguments donnés en 3.2.1, sur l’espace $\text{hom}_{0,3}(2. S_1, S_1)$. Pour cela, il faudrait avoir compris comment définir l’algèbre chirale elle-même.

Le lecteur est invité à consulter le travail de Moore et Seiberg [130]:

- La définition du coproduit apparaît à la formule (2.4) mais elle fait encore référence à l’intégrale et donc à la notion de champ. Mes contorsions ont pour but de laisser tomber cet accessoire pour aboutir à une définition purement algébrique de l’algèbre. Bien entendu, l’associativité du développement des produits d’opérateurs doit se traduire par des contraintes...
- Leur définition de Δ privilégie les points 0 et z . Par utilisation des homographies, on se doute bien que c’est suffisant mais comme il nous faut plus pour pouvoir ensuite recoller des sphères, autant donner une notion plus générale dès le départ...
- La seconde équation de (2.7) est une condition de compatibilité entre la structure conforme et l’opérateur de vertex chirale. Moore et Seiberg écrivent un peu plus loin:

“In the operator formalism, chiral vertex operators are the conformal blocks associated with the three-holed sphere. In particular, the first equation of (2.7) which we have presented as an intertwining property is known in the operator formalism as the Ward identity defining the state (or vector space of states) created by the three-holed sphere.”

J’espère avoir convaincu le lecteur qu’un gros travail reste à faire pour prouver cette assertion.

Une fois cette construction effectuée, nous pouvons fabriquer ce que le lecteur reconnaîtra facilement comme les blocs conformes par une méthode de recollement:

- Il convient tout d’abord de fabriquer des opérateurs d’entrelacement un peu différents. Le tableau suivant résume les espaces de départ et d’arrivée ainsi que la variété sur laquelle sont définis les objets en question:

V_i	$V_j \otimes V_k$	$\text{hom}_{0,3}(S_1, 2. S_1)$
$\mathbb{C}$	$V_i \otimes V_j \otimes V_k$	$\text{hom}_{0,3}(\emptyset, 3. S_1)$
$V_i \otimes V_j \otimes V_k$	$\mathbb{C}$	$\text{hom}_{0,3}(3. S_1, \emptyset)$

- Nous pouvons alors obtenir des surfaces de Riemann de topologie quelconque en recollant des sphères avec trois disques retirés. Pour cela, il convient de choisir au préalable des difféomorphismes du cercle pour effectuer les recollement et on fabrique comme cela une surface de Riemann avec éventuellement des cercles frontière paramétrés (un morphisme de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$). A chacun de ces cercles est associé une représentation de l’algèbre chirale.

Bien entendu, l’objet obtenu est analytique sur la variété complexe formée par tous les morphismes de $\mathbf{Ma}_{2,\mathbb{C}}$ ayant la topologie de notre surface.

C’est un *bloc conforme*.

- Enfin, notons $|\Sigma, \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}\rangle$ un bloc conforme sur Σ , surface avec juste n cercles frontières, avec les représentations $i_1, \dots, i_n$ associées à chacun d’eux. On imagine sans peine que les identités suivantes sont vérifiées:

$$(3.134) \quad (\rho_{i_1}(Q_{[u_1]}) \otimes \dots \otimes \rho_{i_n}(Q_{[u_n]}))|\Sigma, \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}\rangle = 0$$

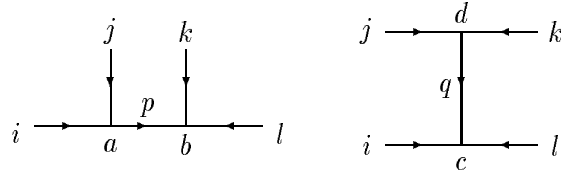
où u_k désigne la restriction d’une k -forme holomorphe sur Σ au k -ème cercle frontière.

Elles constituent une généralisation naturelle des identités de Ward 3.33 présentées dans la section 3.2.7. Ceci établit le lien avec le travail de BPZ.

Remarque : De nombreuses questions subsistent. Par exemple, si nous considérons l’ensemble des équations 3.134 comme définissant les blocs associés à l’algèbre chirale de départ, on associe à chaque modèle topologique de surface un espace vectoriel. Je n’ai pas fait le lien avec la notion de foncteur modulaire de Segal mais on imagine que c’est la même chose. $\square$

Mentionnons enfin qu’il existe une notation graphique *très* utile pour les blocs conformes.

La décomposition d’un bloc en opérateurs de vertex chiraux définit une décomposition du modèle topologique de la surface en “pantalons”. A un tel pantalon, nous associons un graphe trivalent en remplaçant chaque pantalon par un vertex. Ce graphe est *colorié*: chaque vertex porte un opérateur de vertex chirale et chaque ligne une représentation de l’algèbre chirale. Les lignes sont d’ailleurs orientées pour ne pas confondre une représentation et sa conjuguée. Ainsi, pour les blocs de genre zéro avec quatre points marqués, nous avons quelques exemples célèbres:



Nous verrons bien d’autres animaux du même genre par la suite.

Il convient de remarquer:

UN BLOC N’EST PAS COMPLÈTEMENT DÉFINI PAR LA DONNÉE DU GRAPHE.

En effet, il existe bien des ambiguïtés possibles dans le recollement des différents opérateurs de vertex chiraux: on peut utiliser n’importe quel difféomorphisme du cercle. Ceci correspond à l’action des fameux “twists de Dehn” sur les blocs conformes. En effet, nous avons vu sur des exemples que les

difféomorphismes de la surface agissent linéairement et projectivement sur l'espace des blocs associés à cette surface. Un bloc est donc défini qu'une fois les prescriptions de recollement déterminées!

Quelques notations s'imposent à ce stade:

- L'espace des blocs conformes en genre g avec n points marqués sera noté dans la suite $H_{g,n}$. Si nous fixons les représentations associées aux points marqués, nous notons

$$H_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}$$

le sous-espace correspondant.

- Une base de $H_{g,n}$ est obtenue très simplement en fixant des règles de recollement pour les opérateurs chiraux (donc en particulier un graphe trivalent) et en choisissant chacun d'eux parmi une base de $H_{0,3}$.

Par exemple, nous représentons ainsi une base de $H_{0,3}$ et de $H_{0,4}$:

(3.135)

$$H_{0,3} : \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} a \text{---} k \text{---} \\ \uparrow j \\ \text{---} \end{array} \in H_{0,3}^{[i,j,k]} \quad H_{0,4} : \begin{array}{c} \text{---} i \text{---} a \text{---} p \text{---} b \text{---} l \text{---} \\ \uparrow j \quad \uparrow k \\ \text{---} \end{array} \in (H_{0,3}^{[i,j,p]} \otimes H_{0,3}^{[p,k,l]})$$

et une base de $H_{1,1}$:

(3.136)

$$H_{1,1} : \begin{array}{c} \text{---} a \text{---} \text{---} \\ \uparrow j \quad \text{---} i \text{---} \end{array}$$

Les deux graphes en arbre avec quatre points marqués 3.135 définissent deux familles de bases de $H_{0,4}$. Une fois que l'on a fixé les procédures de recollement des opérateurs de vertex chiraux, chacun de ces graphes décrit une base de $H_{0,4}$.

- L'extension à $H_{g,n}$ est triviale et laissée au lecteur.

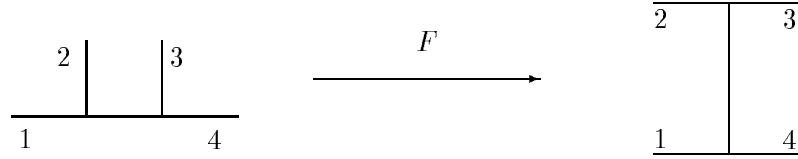
Nous allons maintenant explorer un peu plus avant quelle est l'influence d'un changement dans la manière de recoller les opérateurs de vertex chiraux. Nous verrons que c'est de là que provient toute la structure modulaire des théories rationnelles.

3.5.3 Complexe de dualité.

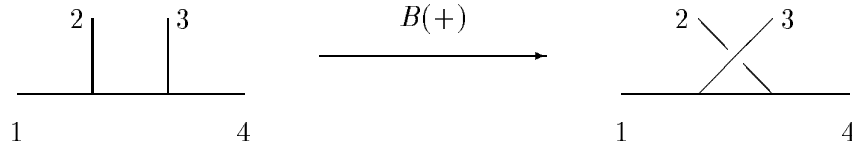
Définition des mouvements $B(\pm)$.

Les différentes manières de composer les opérateurs de vertex chiraux ont une représentation combinatoire très simple. Il suffit de considérer l'ensemble des graphes trivalents avec n pattes externes et g boucles pour obtenir toutes les combinaisons correspondant aux blocs conformes de genre g avec n champs primaires.

Comme nous l'avons vu, il existe des mouvements naturels sur ces graphes: les mouvements F :



De même, comme les pattes des graphes portent des indices, il est bon de considérer le mouvement suivant, dit de⁴⁸ “braiding”:



ainsi que le mouvement $B(-)$ obtenu en prenant le croisement symétrique par rapport au plan de la feuille. La définition suivante tombe sous le sens:

Définition 50 *La catégorie dont les objets sont les graphes trivalents orientés et coloriés selon les prescriptions précédentes, et dont les morphismes sont les composés de mouvements de type F et B forme le complexe de dualité de la théorie conforme.*

Un chemin tracé dans le complexe de dualité est une *transformation du dualité*.

Remarque : Nous donnerons dans le chapitre 7 une autre définition des transformations de dualité qui est reliée à la localité à la frontière dans les théories topologiques. Toutefois, encore beaucoup de travail reste à faire pour que cette relation soit parfaitement claire. $\square$

Qu’attend t’on pour le modèle d’Ising?

Pour préparer les illustrations qui vont suivre, il est bon de faire dès maintenant la liste de *tous* les blocs conformes sur la sphère de Riemann avec quatre points marqués que l’on peut construire à partir des trois champs primaires du modèle d’Ising. Compte tenu des règles de fusion 3.66, ces blocs

⁴⁸Les défenseurs invétérés de la langue Française seront sans doute offusqués par cet anglicisme, mais je n’ai pas trouvé de synonyme élégant dans ma langue maternelle. De même en ce qui concerne le “framing” qui fera son apparition plus tard.

s'organisent suivant leurs pattes externes:

Pattes externes	Blocs
$\begin{Bmatrix} \sigma & \sigma \\ \sigma & \sigma \end{Bmatrix}$	
$\begin{Bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{Bmatrix}$	
$\begin{Bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \sigma & \varepsilon \end{Bmatrix}$	Néant.
$\begin{Bmatrix} \sigma & \sigma \\ \sigma & \varepsilon \end{Bmatrix}$	Néant.
$\begin{Bmatrix} \varepsilon & \sigma \\ \varepsilon & \sigma \end{Bmatrix}$	
$\begin{Bmatrix} \sigma & \varepsilon \\ \varepsilon & \sigma \end{Bmatrix}$	
$\begin{Bmatrix} \sigma & \sigma \\ \varepsilon & \varepsilon \end{Bmatrix}$	

Nous avons omis le champ **1** car cela nous fournit en réalité des blocs à trois points. Une des configurations de pattes externes ne donne pas naissance à des blocs à cause des règles de fusion. Bien entendu, il existe d'autres blocs mais on a choisi une base de l'espace des blocs avec quatre pattes externes données.

3.6 Transformations de dualité et groupes modulaires.

Nous allons rappeler ici les principaux résultats de Moore et Seiberg dont nous aurons besoin dans cette thèse. Rappelons que leur travail a consisté à déterminer les propriétés de transformations des blocs conformes sous l'action du groupe modulaire et des transformations de dualité à partir d'un nombre fini de matrices de dimension finie. D'autre part, ils ont établi que la donnée des expressions des opérateurs de vertex non-chiraux du modèle en termes des opérateurs de vertex chiraux doit vérifier un ensemble fini d'équations (équations d'invariance modulaire) pour que les fonctions de corrélations de la théorie conforme soient effectivement *invariantes* modulaires.

Comme les chapitres 5, 6 et 7 s'appuient essentiellement sur les propriétés de *covariance* de la théorie conforme, nous ne présenterons que cet aspect de leur travail.

De bonnes références sur cette technologie sont:

- L'article le plus complet où est donnée la preuve du théorème 22: [130].
- L'article [131] qui démontre le "théorème de naturalité" qui permet d'obtenir toutes les théories dont l'algèbre chirale maximale produit par sa théorie des représentations un ensemble de données de Moore et Seiberg fixé.
- L'article [129] constitue le travail original mais est le moins détaillé.
- Enfin, j'ai eu connaissance de la revue [132] qui contient énormément de renseignements et de nombreux exercices divers sur le sujet.
- Finalement, des résultats similaires ont été obtenus par divers groupes, notamment Rehren et Schröer [150] qui ont travaillé dans un contexte Minkowskien⁴⁹ et Fröhlich: [58][59].

Il s'agit dans cette section de rappeler comment historiquement ces équations ont été découvertes. Ceci ne constitue pas, à notre sens, une compréhension profonde de leur sens. Clairement, beaucoup de travail reste à faire pour leur donner un statut plus solide.

Nous montrons sur l'exemple du modèle d'Ising comment calculer quelques unes de ces matrices, puis nous rappelons les "justifications" couramment avancées des équations de Moore et Seiberg. Dans la section 3.7, nous aurons un point de vue beaucoup plus axiomatique en posant dès le départ les équations, sans nous poser de questions sur leur origine, afin d'en tirer des conséquences techniques, mais utiles par la suite.

Le lecteur est renvoyé à l'Appendice 3.C pour le bagage géométrique nécessaire.

3.6.1 Exemple du modèle d'Ising.

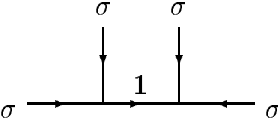
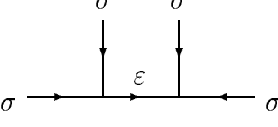
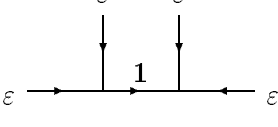
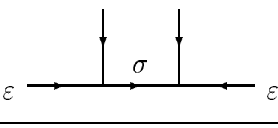
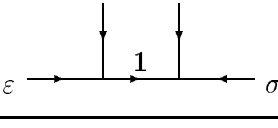
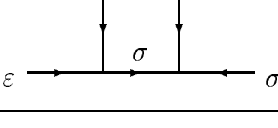
Nous disposons d'expressions explicites pour les différents blocs conformes du modèle d'Ising bidimensionnel. Nous nous limiterons ici aux blocs correspondant aux fonctions à quatre points des opérateurs de spin et d'énergie. Les blocs que nous utiliserons sont donnés en fonction du birapport des quatre points

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}$$

⁴⁹Bien sûr, il est impossible de mettre une structure Minkowskienne sur une sphère ou sur une surface de genre deux. L'invariance modulaire utilisée dans le régime Euclidien ne peut donc plus justifier les équations. C'est l'étude de la causalité qui les fournit. C'est pour moi un grand mystère que deux approches si différentes donnent les mêmes résultats!

par les expressions suivantes:

(3.137)

Blocs	Expression explicite
	$\frac{1}{(z_{12}z_{34})^{1/8}} \frac{(1-x)^{3/8}}{x^{1/8}\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x}}$
	$\frac{1}{(z_{13}z_{24})^{1/8}} \frac{(1-x)^{3/8}\sqrt{2}}{x^{1/8}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{1-x}}$
	$\frac{1}{z_{13}z_{24}} \frac{1-x-x^2}{x(1-x)}$
	$\left(\frac{z_{14}}{z_{13}z_{24}}\right)^{1/8} \frac{1}{z_{14}} \frac{1+x}{\sqrt{x(1-x)^{1/8}}}$
	$\frac{1}{z_{12}z_{34}^{1/8}} \frac{(1-x/2)}{\sqrt{1-x}}$
	$\frac{1}{z_{13}z_{24}^{1/8}} \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}}$

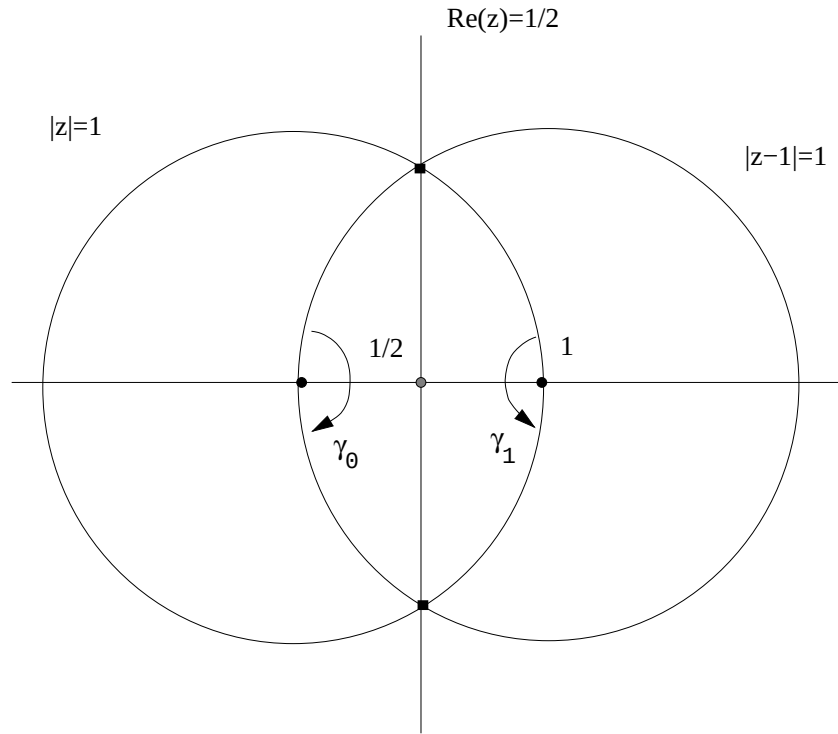
où il est clairement entendu que l'on a choisi des prescriptions bien précises pour les racines carrées. En effet, si nous considérons la courbe algébrique d'équation $Y^2 = X$, elle définit un revêtement ramifié du plan $\mathbb{C}$ à deux feuillets via la projection $\pi : (Y, X) \mapsto X$. La construction d'une application f telle que $\pi \circ f = \text{Id}_{\mathbb{C}}$ n'est donc pas canonique. Il existe bien des fonctions f analytiques sur $\mathbb{C}^*$ qui sont solutions: ce sont les différentes déterminations de la racine carrée. Dans la suite de cette section, nous *choisissons* la détermination:

$$(3.138) \quad \forall \rho \in \mathbb{R}_+, \forall \vartheta \in]-\pi, \pi[, \quad \sqrt{\rho e^{i\vartheta}} = \rho^{1/2} e^{i\vartheta/2}$$

qui présente une coupure le long de l'axe réel négatif et vérifie $\sqrt{z^*} = (\sqrt{z})^*$.

Reprenant l'image donnée dans l'Appendice 3.C, section 3.C de l'espace des modules de genre zéro avec quatre points marqués, nous voyons que ces fonctions possèdent des monodromies non triviales dans

l'espace des modules $\mathcal{M}_{0,4}$ en regardant la variation de chacun des blocs le long des chemins suivants:



Nous devons examiner le comportement du bloc dans la transformation $z \mapsto 1 - z$ pour obtenir la monodromie autour du point $z = 1/2$ et $z \mapsto 1/z$ pour la monodromie autour du point singulier $z = 1$.

Comportement dans “ $z \mapsto 1/z$ ” ou la monodromie le long de γ_1 .

Des calculs triviaux montrent immédiatement que:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \varepsilon \quad \sigma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \sigma \end{array} \right) (1/x) = \frac{i}{2} \left(\begin{array}{c} \sigma \quad \varepsilon \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \sigma \end{array} \right) (x) \\ & \left(\begin{array}{c} \sigma \quad \varepsilon \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \sigma \end{array} \right) (1/x) = 2i \left(\begin{array}{c} \varepsilon \quad \sigma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \sigma \end{array} \right) (x) \\ & \left(\begin{array}{c} \sigma \quad \sigma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \varepsilon \end{array} \right) (1/x) = e^{-i\pi/8} \left(\begin{array}{c} \sigma \quad \sigma \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad \varepsilon \end{array} \right) (x) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} \varepsilon \quad \varepsilon \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \longrightarrow \mathbf{1} \longleftarrow \varepsilon \end{array} \right) (1/x) = - \left(\begin{array}{c} \varepsilon \quad \varepsilon \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \varepsilon \longrightarrow \mathbf{1} \longleftarrow \varepsilon \end{array} \right) (x)$$

Les deux blocs à problèmes sont ceux où les quatre pattes externes portent un champ σ .

Lemme 1 *Les fonctions*

$$\begin{aligned} f_{\pm}(z) &= \sqrt{1 \pm \sqrt{1-z}} \\ g_{\pm}(z) &= \sqrt{\sqrt{z} \pm i\sqrt{1-z}} \end{aligned}$$

avec les conventions précédentes pour les déterminations des racines carrées sont reliées par

$$(3.139) \quad g_{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\pm i\pi/4} f_{+}(z) + e^{\mp i\pi/4} f_{-}(z) \right)$$

Preuve : Comme $\sqrt{z^*} = (\sqrt{z})^*$, il suffit de prouver l'identité relative à g_+ . Pour cela, on peut chercher g_+ sous la forme d'une combinaison de $\exp(\pm i\pi/4)$ dont les coefficients sont des fonctions. On s'aperçoit alors que leurs carrés sont exactement les carrés des $f_{\pm}$ et que le facteur $\sqrt{2}$ fait son entrée en scène où nous l'attendons. Il reste quelques signes à déterminer ce qui se fait en examinant les deux membres de l'égalité pour $z = 1$. $\square$

Finalement si nous notons $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_\varepsilon$ les expressions des blocs avec quatre opérateurs σ sur les pattes externes,

$$(3.140) \quad \mathcal{F}_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}} \mathcal{F}_1(x) + \frac{e^{5i\pi/8}}{2\sqrt{2}} \mathcal{F}_\varepsilon(x)$$

$$(3.141) \quad \mathcal{F}_\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = e^{5i\pi/8}\sqrt{2}\mathcal{F}_1(x) + \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_\varepsilon(x)$$

ce qui nous donne la forme des coefficients $B(\pm)$: d'une manière générale, un bloc conforme avec quatre points marqués est défini, une fois que la procédure de recollement des deux pantalons est fixée, par la donnée de deux opérateurs de vertex chiraux. En conséquence, si nous utilisons la notation graphique pour représenter les blocs, nous introduisons la matrice $B(-)$ comme matrice représentant la demi monodromie suivante:

$$(3.142) \quad B(-) \left(\begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \rightarrow a \xrightarrow{p} b \leftarrow l \end{array} \right) = \sum_{q, c, d} B(-)_{p, q} \left[\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right] \begin{array}{c} j \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \rightarrow c \xrightarrow{q} d \leftarrow l \end{array}$$

En ce qui concerne $B(+)$ il suffit de croiser les lignes portant les indices j et k dans l'autre sens. En clair $B(\pm) \in GL(H_{0,4})$. Nous notons de plus la restriction de $B(\pm)$ au sous espace $H_{0,4}^{[i,j,k,l]}$ sous la forme:

$$B(\pm) \left\{ \begin{array}{cc} j & k \\ i & l \end{array} \right\}$$

Dans notre exemple, comme les règles de fusion valent un ou zéro, il suffit de spécifier les pattes externes et la ligne interne pour spécifier totalement le bloc sur lequel on travaille. Ainsi, nous pouvons oublier les indices a, b, c et d des coefficients des matrices $B(\pm)$ et noter simplement:

$$(3.143) \quad \begin{pmatrix} B_{1,1}(-) & B_{\varepsilon,1}(-) \\ B_{1,\varepsilon}(-) & B_{\varepsilon,\varepsilon}(-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{5i\pi/8}}{2\sqrt{2}} \\ e^{5i\pi/8}\sqrt{2} & \frac{e^{i\pi/8}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Un calcul trivial montre que la matrice $B(+)$ est inverse de $B(-)$. Les autres blocs⁵⁰ de $B(\pm)$ sont des matrices 1×1 . Nous laissons le lecteur les évaluer. Comme le lecteur l'aura compris, la matrice $B(\pm)$ envoie $H_{0,4}^{[i,j,k,l]}$ dans $H_{0,4}^{[i,k,j,l]}$.

Comportement dans “ $z \mapsto -z$ ”, ou la monodromie selon γ_0 .

Les monodromies des blocs en zéro nous donnent aussi des matrices de “braiding”. Il est facile de deviner l'action de ces différentes monodromies sur les blocs. Il suffit pour cela de réexprimer ceux-ci en fonction des quatre points $z_1, \dots, z_4$ et de regarder en détail ce que cela donne. Ainsi, nous prenons maintenant $z_1 = 0, z_2 = z, z - 3 = 1$ et $z_4 = \infty$. Le birapport x vaut exactement z . Dans ce cas, par exemple

$$\mathcal{F}_1(z) = \frac{1}{z^{1/8} z_{43}^{1/8}} \frac{(1-z)^{1/8}}{z^{1/8} \sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1-z}}{1-z}}$$

Finalement, dans la demi-monodromie $z \mapsto -z$, correspondant à γ_0 sur le schéma précédent, seul $z^{-1/4}$ va contribuer. Ainsi, quand nous tournons dans le sens des aiguilles d'une montre, nous avons

$$(3.144) \quad \mathcal{F}_1(-z) = e^{i\pi/4} \mathcal{F}_1(z)$$

D'une manière plus générale, cette demi-monodromie n'agit que sur le premier opérateur de vertex chiral composant notre bloc. Nous la représentons donc par une matrice qui est de la forme $\Omega(\pm) \otimes 1_{H_{0,3}}$ dans notre base. Ici, nous venons de calculer un de ces coefficients. Cette matrice $\Omega(\pm)$ agit sur $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ et l'envoie dans $H_{0,3}^{[j,i,k]}$. La forme générale d'un bloc conforme de genre zéro avec trois points marqués est, pour des indices externes (i, j, k) fixés:

$$(3.145) \quad \mathcal{F}_{i,j,k}(z_1, z_2, z_3) = \frac{\alpha_{i,j,k}}{z_{12}^{h_i+h_i-h_k} z_{23}^{h_k+h_j-h_i} z_{13}^{h_i+h_k-h_j}}$$

où $\alpha_{i,j,k}$ est une constante qui dépend du bloc.

Dans la demi-monodromie qui échange z_2 et z_1 , ce bloc change et prend une phase:

$$\mathcal{F}_{i,j,k}(z_2, z_1, z_3) = e^{i\pi(h_i+h_j-h_k)} \mathcal{F}_{i,j,k}(z_1, z_2, z_3)$$

mais en plus, c'est un bloc de type $\mathcal{F}_{j,i,k}$. Si on applique deux fois la transformation de monodromie, on retombe sur un bloc de type $\mathcal{F}_{i,j,k}$ mais multiplié par un facteur de phase $\exp(2\pi i(h_i + h_j - h_k))$.

⁵⁰Au sens, restriction à des lignes externes fixées.

Transformations de dualité.

Il s'avère que les choses se gâtent considérablement. Je ne sais pas interpréter en termes de monodromies les transformations de dualité. En effet, la transformation F ne s'obtient *pas* par échange de deux points externes. Pour aller plus loin, il faudrait montrer que l'opération F s'obtient par un mouvement *simultané* des quatre points $(z_1, \dots, z_4)$, et voir ce qu'est ce mouvement dans notre espace de modules $\mathcal{M}_{0,4}$. Je n'ai pas encore une vision claire de cette question.

Pourtant, il est de la plus haute importance de comprendre ces transformations d'une façon géométrique dans l'espace des modules. Ceci permettrait de retrouver toutes les équations de covariance modulaire de Moore et Seiberg à partir d'arguments basés sur la géométrie de l'espace des modules. Je reviendrais sur ce problème dans le chapitre 7 mais sous une forme différente. En attendant, nous allons introduire les principaux groupes modulaires qui vont intervenir par la suite.

3.6.2 Groupes modulaires dans les théories conformes.

Notre objectif est ici d'expliquer pourquoi dans une théorie conforme rationnelle apparaît automatiquement une représentation projective de tous les groupes modulaires et comment agissent les transformations de dualité.

Théories conformes: l'image générale.

Les blocs conformes de genre g avec n points externes forment un espace vectoriel de dimension finie. Pour les étudier, nous devons fixer un graphe trivalent avec n points marqués et une procédure de recollement des sphères avec trois cercles frontière. Ceci définit à partir du graphe une fonction analytique sur l'espace de Teichmüller associé à $\text{hom}_{g,n}(\emptyset, n, S_1)$. Nous avons vu en section 3.2.1 que l'espace $\text{hom}_{g,n}(\emptyset, n, S_1)$ est un fibré au dessus de l'espace des modules des surfaces de genre g avec n points marqués et un vecteur tangent en chacun de ces points. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(g, n)$ associé est obtenu en considérant l'espace de Teichmüller des surfaces de genre g avec n points marqués $(x_i)_i$, un vecteur tangent $(\xi_i)_i$ en chaque point, et un plongement holomorphe $(f_i)_i$ du disque unité $D(0, 1)$ en chaque point: $f_i(0) = x_i$ et $f'_i(0) = \xi_i$. L'espace des modules précédent est obtenu par un quotient:

$$\text{hom}_{g,n}(\emptyset, n, S_1) = \frac{\mathcal{T}(g, n)}{\mathcal{M}^*(g, n)}$$

où $\mathcal{M}^*(g, n)$ est le groupe modulaire des surfaces de genre g avec n points marqués et un vecteur tangent en chaque point.

Un bloc conforme n'est pas monovalué sur l'espace de modules correspondant (i.e. sur $\text{hom}_{g,n}(\emptyset, n, S_1)$ lui-même). En effet, changer la procédure de recollement revient en fait à étudier la monodromie de la fonction dans l'espace des modules et nous savons bien que les opérateurs de vertex chiraux étant sensibles aux "twists de Dehn", la fonction va changer. Les exemples précédents ont d'ailleurs montré ce phénomène.

D'une manière générale, nous avons vu que pour un graphe et une procédure de recollement fixée, l'ensemble de tous les coloriage possibles du graphe définit une base de l'espace des blocs. A partir de là, deux constatations s'imposent:

- Les transformations de dualité agissent linéairement sur l'espace des blocs car ils fournissent des changement de bases.

- Les changement de procédure de recollement agissent linéairement sur les blocs conformes.

Ceci suggère que le groupe modulaire agit linéairement sur les blocs conformes, tout simplement parce que chaque transformation modulaire change complètement la procédure de recollement des opérateurs de vertex chiraux utilisés pour fabriquer notre bloc. En conséquence, il semble important de comprendre un peu plus quels sont ces groupes modulaires et comment étudier leur structure.

Les groupes modulaires.

Le groupe des surfaces de genre g avec n points marqués et un vecteur tangent en chaque point est relié à ceux que nous connaissons de la manière suivante:

- Rappelons que l'on avait déjà introduit le groupe modulaire d'une surface avec n points marqués: $\mathcal{M}_{g,n}$. Il est bon d'introduire quelques groupes supplémentaires qui seront bien utiles par la suite:
 - On distingue entre les groupes modulaires de surfaces avec points marqués et ceux de surfaces avec points marqués *et* un vecteur tangent en chaque point! Les second seront notés avec une étoile en exposant.
 - Nous devons distinguer aussi entre les groupes qui permutent les points et ceux qui ne les permettent pas. Finalement, nous utiliserons quatre groupes modulaires:
 - $\mathfrak{M}(g, n)$ Groupe modulaire des surfaces de genre g avec n points marqués, respectant l'ordre des points.
 - $\mathcal{M}(g, n)$ Groupe modulaire des surfaces de genre g avec n points marqués, ne respectant pas l'ordre des points.
 - $\mathfrak{M}^*(g, n)$ Groupe modulaire des surfaces de genre g avec n points marqués, et un vecteur tangent non nul en chaque point, respectant l'ordre des points.
 - $\mathcal{M}^*(g, n)$ Groupe modulaire des surfaces de genre g avec n points marqués, et un vecteur tangent non nul en chaque point, ne respectant pas l'ordre des points.
 - Clairement nous avons la suite exacte [13]:

$$(3.146) \quad \mathbf{1} \longrightarrow \mathfrak{M}(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow \mathbf{1}$$

- Bien entendu, il est clair que si on se place dans la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ définie au chapitre 1, le groupe des composantes connexes du groupe des isomorphismes forts d'un morphisme de topologie (g, n) n'est autre que le groupe $\mathfrak{M}^*(g, n)$ alors que $\mathcal{M}^*(g, n)$ s'identifie au groupe des composantes connexes du groupe des isomorphismes *faibles* de ce morphisme!

Etant donné deux morphismes de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ de même type topologique (g, n) , nous disposons naturellement de morphismes entre les groupes modulaires associés. Notons $(\varphi_k)_{k \in \langle 1, n \rangle}$ les paramétrisations des bords de Σ et $(\varphi'_k)_{k \in \langle 1, n \rangle}$ celles du bord de Σ' . Il est connu [113] depuis longtemps qu'il existe un isomorphisme de Σ sur Σ' : les $\varphi'_k \circ \varphi_k^{-1}$ se prolongent sur la surface! De plus, on peut choisir le prolongement de telle sorte qu'il soit trivial dans la surface obtenue en recollant sur chaque cercle frontière un disque pointé. Deux isomorphismes de la même classe modulaire sont envoyés sur des isomorphismes de la même classe modulaire et ceci légitime la définition d'un groupe modulaire associé à un *type topologique* et non pas à une réalisation particulière comme groupe d'isomorphisme d'un cobordisme paramétré fixé.

- Enfin, nous avons introduit l’espace des modules des surfaces avec des points marqués et une coordonnée locale en chaque point. Le groupe modulaire associé n’est autre que $\mathcal{M}^*(g, n)$ car cet espace de module est aussi l’espace des modules des surfaces avec cercles frontières.
- Les “twists de Dehn” le long de lacets qui enserrant un seul point marqué sont triviaux dans $\mathcal{M}(g, n)$ mais ont une action sur la coordonnée locale. Ce groupe est donc une extension de $\mathcal{M}(g, n)$ et plus précisément, nous avons une suite exacte [93]:

$$(3.147) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathcal{M}^*(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow 1$$

Cette extension n’est clairement pas scindée comme nous le verrons sur des exemples explicites mais elle est centrale. Nous avons également une suite exacte avec les groupes $\mathfrak{M}^*(g, n)$ et $\mathfrak{M}(g, n)$. L’extension est aussi centrale. A titre indicatif, signalons que les groupes $\mathfrak{M}(g, n)$ (respectivement $\mathcal{M}(g, n)$) ne sont autres que les groupes $\pi_0(\mathcal{F}_{g,n})$ et $\pi_0(\mathcal{B}_{g,n})$ introduits par Birman [13]. Le lecteur trouvera quelques descriptions de groupes modulaires dans l’Appendice 3.C en termes de générateurs et relations.

Enfin, pour conclure, soulignons que si $f \in \mathfrak{M}^*(g, n)$, alors l’action de f sur les blocs conformes laisse *stables* les sous espaces $H_{g,n}^{[i_1, \dots, i_n]}$ où l’on a fixé les couleurs des pattes externes!

3.6.3 Quelques équations de Moore et Seiberg: point de vue conformiste.

Nous allons montrer des justifications par les théories conformes de certaines équations de Moore et Seiberg. Ceci nous permettra de les écrire. Ensuite, j’énoncerai le “résultat principal” sous une forme malheureusement un peu trop standard à mon goût. Il serait bien plus intéressant de disposer d’un énoncé dans l’esprit de [91]. J’y reviendrais dans le chapitre 7.

Les matrices de Moore et Seiberg en genre zéro.

Les matrices de Moore et Seiberg sont relativement faciles à introduire grâce à la notation graphique introduite en 3.5.2. Les matrices de dualité définissent des isomorphismes des espaces $H_{0,3}$, $H_{0,4}$, $H_{1,1}$:

$$(3.148) \quad H_{0,3} = \bigoplus_{i,j,k} H_{0,3}^{[i,j,k]}$$

$$(3.149) \quad H_{0,4} = \bigoplus_{i,j,k,l,p} (H_{0,3}^{[i,j,p]} \otimes H_{0,3}^{[p,k,l]})$$

$$(3.150) \quad H_{1,1} = \bigoplus_{i,j} H_{0,3}^{[i,i,j]}$$

Nous définissons la matrice $\Omega(\pm)$ comme la matrice représentant l’action d’une demi-monodromie sur l’espace $H_{0,3}$. De même, nous définissons les matrices $B(\pm)$ comme les matrices représentant les demi-monodromies sur $H_{0,4}$ qui consistent à échanger deux des lignes comme indiqué ici:

$$(3.151) \quad B(-) \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & j & & k & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ i & \xrightarrow{\quad} & a & \xrightarrow{p} & b & \xleftarrow{\quad} & l \end{array} \end{array} \right) = \sum_{q,c,d} B(-)_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & j & & k & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ i & \xrightarrow{\quad} & c & \xrightarrow{q} & d & \xleftarrow{\quad} & l \end{array} \end{array}$$

En ce qui concerne $B(+)$ il suffit de croiser les lignes portant les indices j et k autrement. De la même manière, les matrices $\Omega(\pm)$ et $\Theta(\pm)$ sont définies à partir de demi-monodromies sur la sphère avec trois points marqués:

$$(3.152) \quad \Omega(\pm) \left(\begin{array}{c} \downarrow j \\ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ i & \rightarrow & & \leftarrow & k \\ & a & & & \end{array} \end{array} \right) = \sum_{a'} \Omega(\pm)_{a,a'} \begin{array}{c} \downarrow i \\ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ j & \rightarrow & & \leftarrow & k \\ & a' & & & \end{array} \end{array}$$

$$(3.153) \quad \Theta(\pm) \left(\begin{array}{c} \downarrow j \\ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ i & \rightarrow & & \leftarrow & k \\ & a & & & \end{array} \end{array} \right) = \sum_{a'} \Theta(\pm)_{a,a'} \begin{array}{c} \downarrow j \\ \begin{array}{ccccc} & & & & \\ k & \rightarrow & & \leftarrow & i \\ & a' & & & \end{array} \end{array}$$

La matrice F est définie par un changement de graphe et donc de base dans $H_{0,4}$:

$$(3.154) \quad F \left(\begin{array}{c} \downarrow j \quad \downarrow k \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ i & \rightarrow & & \rightarrow & & \leftarrow & l \\ & a & & p & & b & \end{array} \end{array} \right) = \sum_{q,c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} j & \rightarrow & d & \leftarrow & k \\ & & & & \\ & & q & & \\ i & \rightarrow & & \leftarrow & l \\ & & c & & \end{array} \end{array}$$

Finalement:

$$(3.155) \quad (\Omega(\pm), \Theta(\pm)) \in (GL(H_{0,3}))^4$$

$$(3.156) \quad (F, B(\pm)) \in (GL(H_{0,4}))^3$$

Le lecteur soucieux de précision aura remarqué combien ces définitions sont imprécises et, de fait, très difficilement inutilisables. Je l'invite à passer directement au chapitre 7 et plus particulièrement la section 7.3.6 qui est un essai de mise en forme des idées heuristiques de Moore et Seiberg! Néanmoins, nous allons continuer à décrire l'approche historique de ces équations, en étant parfaitement conscient de ses lacunes!

Quelques équations de Moore et Seiberg pour $g = 0$ et $n = 2, 3, 4$.

Dans cette section, nous montrons de manière élémentaire comment obtenir quelques unes des équations de Moore et Seiberg.

Action des “twists de Dehn” autour des points marqués.

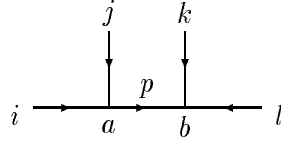
Si x_i désigne le i -ème point marqué sur la surface Σ , nous notons R_i le “twist de Dehn” autour de ce point. Si k_i est le champ primaire inséré en ce point, l'action de R_i est une multiplication par la phase

$$\exp(2\pi i h_{k_i})$$

Ceci est parfaitement compatible avec la centralité de l'extension et la localité.

Quatre points marqués.

Nous partons du bloc usuel:



Du point de vue des blocs conformes comme fonctions du birapport harmonique, le primaire i est inséré en 0, le primaire j en 1, k en z et l en ∞ . Ces points sont numérotés 1, 2, 3 et 4 dans l'ordre. Le générateur⁵¹ ω_2 de $\mathcal{M}^*(0, 4)$ correspond à la matrice

$$(3.157) \quad B_{p,q}(+) \left\{ \begin{array}{cc} j & k \\ i & l \end{array} \right\}$$

Le générateur ω_1 s'obtient facilement, comme dans l'exemple du modèle d'Ising, nous voyons qu'il lui correspond la matrice

$$\Omega(+) \otimes \mathbf{1}$$

Les autres matrices sont tout aussi faciles obtenir.

La relation entre F et $B(\pm)$ provient de l'étude du complexe de dualité en genre zéro avec quatre points marqués:

$$(3.158) \quad B(\pm) = (\Omega(\mp) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))$$

L'argument n'est autre que celui donné dans la littérature.

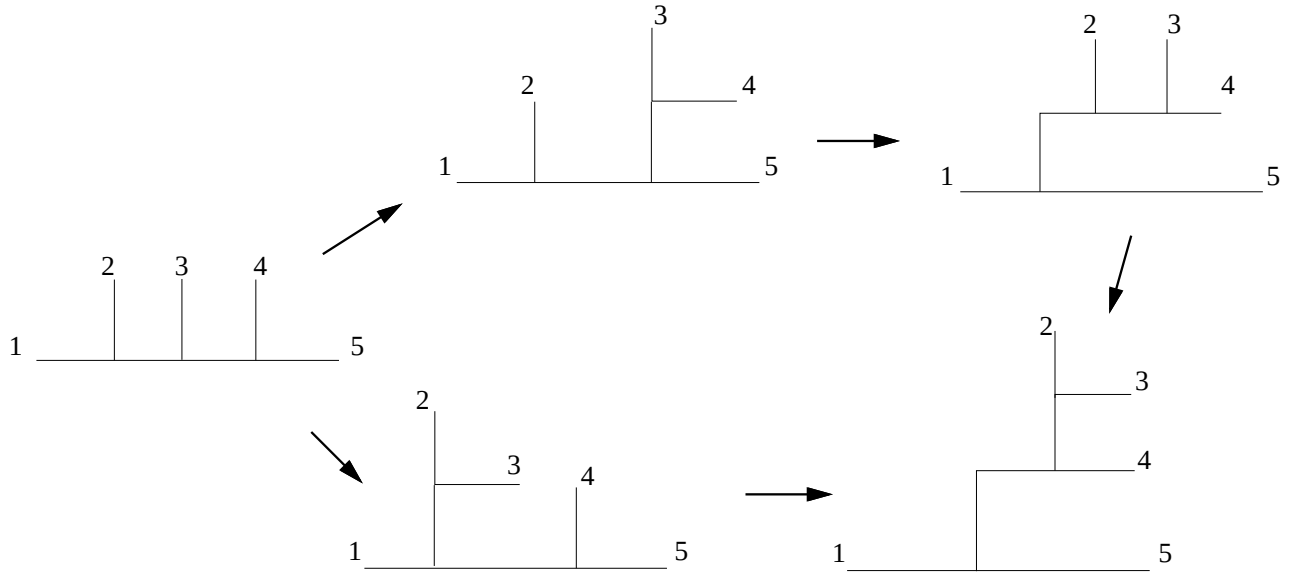
Relations pour $g = 0$ et $n = 5$.

L'identité la plus connue qui sort de l'étude du complexe de dualité à cinq point est l'identité pentagonale de Moore et Seiberg:

$$(3.159) \quad P_{23}F_{13}F_{12} = F_{23}F_{12}F_{23}$$

⁵¹Le lecteur est renvoyé à l'Appendice 3.C pour les notations.

qui possède l'interprétation graphique suivante:



De même, il est facile de montrer que l'équation de Yang-Baxter

$$(B_{12}B_{23}B_{12})(\pm) = (B_{23}B_{12}B_{23})(\pm)$$

découle de la relation 3.306 du groupe modulaire. A partir de cette équation, par spécialisation et utilisation de la relation 3.158 entre F et B nous donne les hexagones⁵²:

$$(3.160) \quad F(\Omega(\pm) \otimes \mathbf{1})F = (\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))$$

Comme ces dérivations sont bien connues, je ne m'étend pas plus dessus. Le lecteur est invité à consulter [130] pour plus de détails.

Bien entendu, nous connaissons l'action des “twists de Dehn” autour des points marqués et donc nous pouvons vérifier explicitement les relations du groupe modulaire $\mathcal{M}^*(0, 4)$. Celles-ci sont légèrement plus complexes que celles du groupe $\mathcal{M}(0, 4)$. Plus précisément:

$$(3.161) \quad \omega_i \omega_j = \omega_j \omega_i \quad \text{quand } |i - j| \geq 2$$

$$(3.162) \quad \omega_i \omega_{i+1} \omega_i = \omega_{i+1} \omega_i \omega_{i+1}$$

$$(3.163) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_3^2 \omega_2 \omega_1 = R_1^2$$

$$(3.164) \quad (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^4 = R_1 R_2 R_3 R_4$$

Cet exercice est laissé au lecteur.

Relations de genre 1.

D'autres relations doivent être prises en compte. En genre 1, nous devons distinguer entre les cas avec $n = 1$ et $n = 2$ points marqués.

⁵²Ce point est détaillé en 3.11

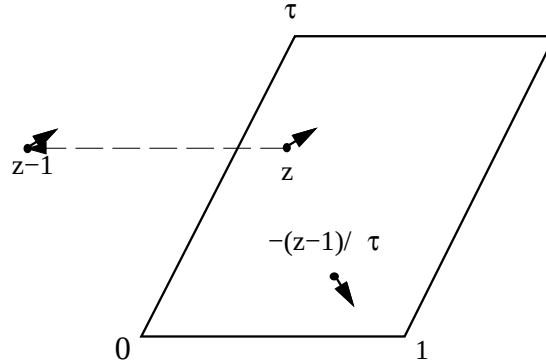
Un seul point marqué.

Dans ce cas, la position du point marqué n'a pas grande importance vu que $\text{Diff}_{+,0}(S_1 \times S_1)$ opère une fois transitivement sur le tore. Le groupe $\mathcal{M}^*(1,1)$ admet donc comme générateurs, d'une part le "twist de Dehn" R autour du point marqué, et d'autre part les difféomorphismes S et T images dans $\mathcal{M}(1,1)$ des transformations s et t de $SL_2(\mathbb{Z})$. Une présentation par générateurs et relations est facile à trouver:

$$(3.165) \quad (ST)^3 = S^2$$

$$(3.166) \quad S^4 = R^{-1}$$

La dernière relation est facile à obtenir en regardant comment un vecteur tangent au tore en le point marqué $z \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ se transforme dans s en $(1-z)/\tau$:



Dans cette opération, le vecteur tangent tourne dans le sens anti-trigonométrique d'un quart de tour. On peut ainsi comprendre que quatre transformations S soient équivalentes à un "twist de Dehn" le long d'un lacet encerclant le point z . Dans une théorie rationnelle, une base de $H_{1,1}$ étant choisie comme nous l'avons expliqué, ces transformations modulaires sont représentées par des matrices. Nous introduisons les matrices dites de genre 1 qui caractérisent les transformations modulaires des blocs conformes en genre 1 avec un point marqué: leurs éléments de matrice seront notés

$$(3.167) \quad S(p)_{(i,a)}^{(i',a')} \quad T(p)_{(i,a)}^{(i',a')}$$

Remarquons suivant Cardy [21] que, comme le caractère en genre zéro sans point marqué, de la représentation i de l'algèbre chirale se met sous la forme

$$\chi_i(\tau) = q^{h_i - c/24} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n$$

où $q = \exp(2\pi i\tau)$ nous obtenons une expression explicite de $T = T(0)$:

$$(3.168) \quad T_i^j = \delta_{i,j} e^{2\pi i(h_i - c/24)}$$

De même, nous montrons facilement que

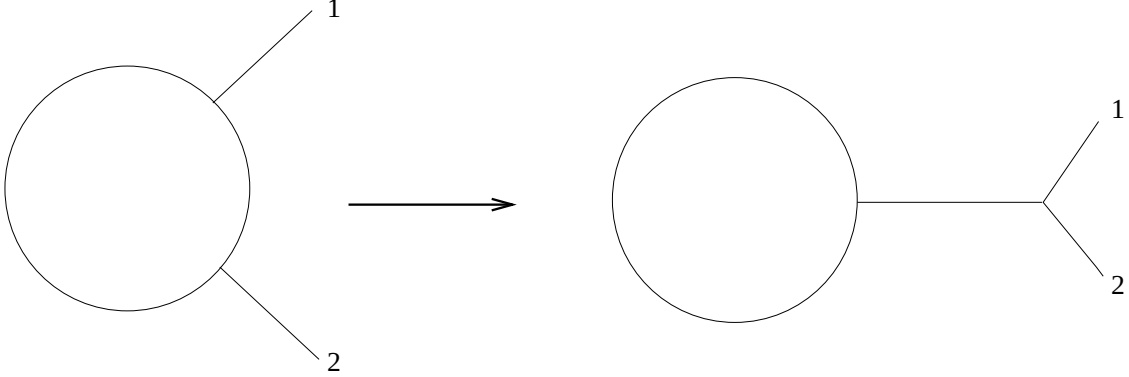
$$T(p)_{(i,a)}^{(i',a')} = \delta_{a,a'} \exp(2\pi i(h_i - c/24))$$

La traduction de notre présentation par générateurs et relations du groupe modulaire $\mathfrak{M}^*(1,1)$ nous fournit les équations ⁵³ suivantes:

$$(3.169) \quad ((S(p)T)^3)_{i,a}^{i',a'} = (S(p)^2)_{i,a}^{i',a'} = \Theta(-)_{a,a'}$$

Deux points marqués sur le tore.

Dans l'Appendice B de [130] se trouve une présentation par générateurs et relations de $\mathcal{M}^*(1,2)$. Comme $\text{Diff}_{+,0}(S_1 \times S_1)$ n'opère qu'une fois transitivement sur le tore, de nouveaux générateurs apparaissent. Ils sont notés a et b par Moore et Seiberg et correspondent au déplacement d'un des points le long du cycle (a) (respectivement (b)). Bien entendu, on dispose toujours des transformations modulaires S et T . L'action de S sur $H_{1,2}$ s'obtient à partir de $S(p)$ qui agit sur $H_{1,1}$ de la manière suivante: on commence par ramener par une transformation F l'espace $H_{2,2}$ à un sous espace de $H_{1,1} \otimes H_{0,3}$:



et donc finalement, l'expression suivante tombe sous le sens:

$$(3.170) \quad S(p_1, p_2)_{(a,b,i,p)}^{(a',b',i',p')} = (F^{-1}(S \otimes \mathbf{1})F)_{p,p'} \left\{ \begin{matrix} p_1 & p_2 \\ i & i \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} a' & b' \\ a & b \end{matrix} \right]$$

La dernière relation exprime alors

$$(3.171) \quad S(p_1, p_2) \circ b \circ S(p_1, p_2)^{-1} = a$$

L'action de a et b est obtenue en examinant le comportement des blocs dans une monodromie d'un des deux points le long des générateurs de $\pi_1(S_1 \times S_1)$. Ces monodromies n'engendrent principalement que des phases qui sont faciles à exprimer en terme des matrices de Moore et Seiberg. Finalement, la relation 3.171 devient:

$$(3.172) \quad S(p_1, p_2) \circ (\mathbf{1} \otimes \Theta(-)\Theta(+)) \circ S(p_1, p_2)^{-1} = FPF^{-1} \circ (\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$$

Le résultat principal de Moore et Seiberg.

Nous allons finalement rappeler le théorème de covariance modulaire de Moore et Seiberg. Il ne s'agit pas ici de rappeler la démonstration de ce résultat ni même d'en donner un énoncé particulièrement

⁵³En toute rigueur, l'équation 3.166 ne suffit pas pour obtenir cette expression. On devrait écrire une relation avec S^4 . Je n'ai rien d'autre à dire...

précis. En effet, à mon avis, il n’a pas encore été mis sous une forme suffisamment claire et intrinsèque faute d’une compréhension suffisamment nette de la géométrie de la tour de Teichmüller [91]. En un sens, la construction d’une théorie tridimensionnelle topologique et projective constitue “la forme” la plus claire du résultat de Moore et Seiberg. Comme je l’ai déjà dit dans l’introduction, il faudrait définir proprement la notion de représentation de la tour modulaire pour donner un énoncé conceptuellement utilisable.

D’où sortent les équations de Moore et Seiberg.

Moore et Seiberg ont introduit la notion de groupoïde de dualité complet. Celui-ci est obtenu en mettant au dessus de chaque vertex du groupoïde de dualité de la définition 50 un sous groupe du groupe modulaire. Ce sous-groupe indexe les différentes manières de composer les différents opérateurs de vertex chiraux de manière compatible avec le découpage imposé par le point du complexe de dualité où l’on se trouve. Nous reverrons une idée similaire au chapitre 7.

Moore et Seiberg conjecturent que ces vertex sont en correspondance avec des régions de l’espace de Teichmüller (voir [130, page 194]). A ma connaissance, cela n’a pas été démontré. Il serait extrêmement important de mettre ces idées en place selon l’esprit de [91] mais cela est hors de portée de ma compréhension actuelle⁵⁴. Dans cet esprit, le groupe modulaire est plongeable dans le groupoïde de dualité complet. Une transformation de dualité et un élément du groupe modulaire correspondent à des déplacements dans l’espace de Teichmüller. Par simple connexité des espaces de Teichmüller, on obtient ainsi des relations entre ces déplacements élémentaires. Le résultat principal de Moore et Seiberg est alors:

Théorème 22 (G. Moore, N. Seiberg) *Les générateurs du groupoïde de dualité pour tout (g, n) s’obtiennent à partir des mouvements de type F , $B(\pm)$ et des transformations modulaires pour (g, n) valant $(1, 0)$ et $(1, 1)$ et que les seules relations indépendantes sont données par les équations⁵⁵ 3.177 à 3.181 et 3.182 à 3.184.*

Je ne détaillerais pas plus un travail qui m’échappe en grande partie. Dans la section suivante, je résume les équations obtenues par Moore et Seiberg sous une forme qui ne fait pas référence aux théories conformes. Les chapitres 5 et 6 amèneront graduellement le lecteur à une interprétation plus simple de ces équations.

Dans cette prochaine section apparaîtront également des hypothèses supplémentaires dont je n’ai pas parlé jusqu’à présent.

Enfin, comme je l’ai mentionné dans l’introduction de cette thèse, Moore et Seiberg ont donné un résultat général [131], connu sous le nom de théorème de naturalité, qui permet de trouver les fonctions de partitions de théories invariantes modulaires d’algèbre chirale donnée. De plus, il est possible de calculer les constantes de structure de l’algèbre d’opérateurs. Je ne détaille rien de tout ceci dans ce chapitre car le suivant illustre en détails ces questions.

⁵⁴Voir [38] pour des essais qui me dépassent largement.

⁵⁵Je préfère faire référence à la section suivante où toutes les équations apparaissent regroupées.

Philosophie conformiste.

A partir de là, il se dégage une méthode générale pour classer les théories conformes rationnelles. Elle procède en deux étapes:

- Tout d’abord, résoudre les équations de covariance modulaire.
- Utiliser le théorème de naturalité pour trouver toutes les fonctions invariantes modulaires. Trouver toutes les constantes de structure des algèbres d’opérateurs (les $C_{i,j}^k$). Je montre dans le chapitre suivant comment on peut, à partir des règles de fusion, retrouver une partie des données de Moore et Seiberg. Des calculs de fonctions de partition invariantes modulaires sont également présentés.
- Trouver toutes les algèbres chirales dont la théorie des représentations corresponde à la solution des équations de covariance modulaire que l’on étudie.

Malheureusement, aucune de ces étapes n’a été menée à terme. Seules quelques illustrations sont disponibles.

3.7 Equations de Moore et Seiberg.

Dans cette section, nous récapitulons les équations de Moore et Seiberg (équations de covariance modulaire). Puis nous démontrons un certain nombre de formules utiles dans la suite de cette thèse. J’encourage le lecteur à passer le temps nécessaire sur cette technologie pour pouvoir comprendre en profondeur les constructions des chapitres 6 et 7.

Cette section est destinée à rappeler les équations, les objets qu’elles mettent en jeu. Son importance est cruciale pour la suite de cette thèse. Dans la section 3.8, nous démontrons quelques relations importantes qui sont des conséquences “de genre zéro” des équations de Moore et Seiberg. La section 3.9 est consacrée à la symétrie de jauge des équations de Moore et Seiberg qui correspond à redéfinir les opérateurs de vertex chiraux en les multipliant par des scalaires. Il existe un choix de jauge qui assure des propriétés de symétrie merveilleuses de la matrice F , comme nous le montrons en section 3.10. Dans cette section, nous donnons également des expressions de $S(p)$ en fonction des données de genre zéro, et de S , et nous étudions les propriétés de symétrie de $S(p)$.

3.7.1 Récapitulatif.

Récapitulons les résultats présentés dans les sections précédentes. Comme dans la suite de cette thèse, nous n’utiliserons que la structure algébrique modulaire des théories conformes qui est contenue entièrement dans les équations de Moore et Seiberg, nous nous attachons ici à ne faire *aucune* référence aux origines conformistes des données de Moore et Seiberg associées à une TIC. Nous ne rappelons que la structure algébrique ainsi obtenue, dépouillée de l’échafaudage utilisé précédemment.

Données de base, notations.

Nous partons d’un ensemble fini d’indices I , muni d’une involution $i \mapsto \hat{i}$ admettant au moins un point fixe $i = 0$. A tout triplet $(i, j, k) \in I^3$ est associé un espace vectoriel $[i, j, k]$ de dimension finie $N_{i,j,k}$. Nous supposons que:

- $N_{i,j,0} = \delta_{i,\hat{j}}$.

- Il existe des isomorphismes $a \mapsto \hat{a}$ de $[i, j, k]$ sur $[\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$ tel que $\hat{\hat{a}} = a$.
- Pour toute permutation $(i, j, k) \mapsto (i', j', k')$, il existe un isomorphisme $\sigma_{(i,j,k) \mapsto (i',j',k')}$ de $[i, j, k]$ sur $[i', j', k']$ tel que:

$$(3.173) \quad \forall (\omega_1, \omega_2) \in (\Sigma_3)^2, \quad \sigma_{\omega_1 \circ \omega_2} = \sigma_{\omega_1} \circ \sigma_{\omega_2}$$

$$(3.174) \quad \forall \omega \in \Sigma_3, \quad \sigma_{\omega}^{-1} = \sigma_{\omega^{-1}}$$

Comme les espaces $[i, j, k]$ et $[i', j', k']$ sont isomorphes quand (i, j, k) et (i', j', k') ne diffèrent que par une permutation, $N_{i,j,k}$ est invariant par permutation de ses arguments. Comme $[i, j, k] \simeq [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$, $N_{i,j,k} = N_{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}}$.

A chaque indice $i \in I$ se trouve associé un réel positif h_i tel que:

$$(3.175) \quad \forall i \in I, \quad h_{\hat{i}} = h_i$$

$$(3.176) \quad h_i = 0 \Leftrightarrow i = 0$$

Nous introduisons alors les espaces $H_{0,3}$, $H_{0,4}$ définis par $H_{0,3}^{[i,j,k]} = [i, j, k]$ et les équations 3.148, 3.149 et 3.150. Il est commode d'introduire une notation graphique pour les éléments d'une base des différents espaces $H_{0,3}$, $H_{0,4}$ et $H_{1,1}$. Celle-ci a été développée en section 3.5.2. Nous y renvoyons le lecteur. Les matrices de dualité définissent des isomorphismes entre les espaces $H_{0,3}$, $H_{0,4}$, $H_{1,1}$.

Equations de Moore et Seiberg.

Nous rappelons ici toutes les contraintes que doivent satisfaire les matrices introduites ci-dessus.

- Equations de genre zéro:

$$(3.177) \quad \forall a \in H_{0,3}^{[i,j,k]}, \quad \Omega(\pm)_{a,a'} = \exp(\pm i\pi(h_k + h_j - h_i)) \delta_{a', \sigma_{12}(a)}$$

$$(3.178) \quad \forall a \in H_{0,3}^{[i,j,k]}, \quad \Theta(\pm)_{a,a'} = \exp(\pm i\pi(h_k + h_i - h_j)) \delta_{a', \sigma_{13}(a)}$$

$$(3.179) \quad F_{23} F_{12} F_{23} = P_{23} F_{13} F_{12}$$

$$(3.180) \quad F(\Omega(\pm) \otimes \mathbf{1}) F = (\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm)) F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))$$

$$(3.181) \quad B(\pm) = (\Omega(\mp) \otimes \mathbf{1}) F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\pm))$$

- Equations de genre 1:

$$(3.182) \quad (S(j)T)^3 = \oplus_i (\Theta_{ji}^i \circ P_{[j,i]})$$

$$(3.183) \quad (S(j))^2 = \oplus_i (\Theta_{ji}^i \circ P_{[j,i]})$$

$$(3.184) \quad (S \otimes \mathbf{1}) F(\mathbf{1} \otimes \Theta(-)\Theta(+)) F^{-1} (S^{-1} \otimes \mathbf{1}) = F P F^{-1} (\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$$

- Conditions de réalité:

(3.185)

$$h_i = h_i$$

(3.186)

$$\left(F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right)^* = F_{\hat{p},\hat{q}} \begin{bmatrix} \hat{c} & \hat{d} \\ \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix}$$

(3.187)

$$(S_i^j)^* = S_i^{\hat{j}}$$

- Hypothèses techniques: un certain nombre d'hypothèses supplémentaires de positivité ou de non annulation de certains coefficients F et S doivent être vérifiées:

(3.188)

$$F_{i,\hat{k}} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ 0 & k \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} t_k & b \\ t_i & a \end{bmatrix} = \delta_{a,\sigma_{123}(b)}$$

(3.189)

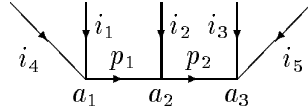
$$F_{p,0} \left\{ \begin{matrix} j & \hat{j} \\ i & \hat{i} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} t_i & t_j \\ a & b \end{bmatrix} = 0 \iff a \neq \hat{b}$$

(3.190)

$$S_0^i > 0$$

avec les conventions évidentes suivantes:

- P_{23} est l'opérateur de permutation qui échange dans $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ les espaces V_2 et V_3 . F et $B(\pm)$ agissent sur deux indices de vertex: $\Omega(\pm) \otimes 1$ signifie que $\Omega(\pm)$ agit sur le premier indice de vertex, pas sur le second.
- La matrice $F_{13}F_{12}F_{23}$ agit sur l'espace $H_{0,5}$ en prenant la base:



indexée par p_1, p_2 et a_1, a_2, a_3 .

- $P_{[j,i]}^i$ projette sur l'espace engendré par les indices de vertex dont les lignes entrantes sont: $i, \hat{i}, j$.

L'ensemble des données introduites dans cette section constitue ce que nous appellerons une solution des équations de Moore et Seiberg.

3.8 Quelques identités utiles.

Dans cette section, nous allons montrer quelques identités à partir des équations de Moore et Seiberg. Elles seront utilisées dans la suite de cette thèse. Nous commençons par donner une autre forme de la relation entre F et $B(\pm)$. Puis nous montrerons quelles sont les équations de compatibilité entre F et $B(\pm)$. Enfin nous vérifierons que les équations de Moore et Seiberg entraînent deux équations de Yang-Baxter, une pour $B(+)$, l'autre pour $B(-)$.

3.8.1 Compatibilité entre F et $B(\pm)$, équations de Yang-Baxter.

Relations fusion/entrelacement.

Théorème 23 *Les matrices F et $B(\pm)$ vérifient:*

$$(3.191) \quad FB(\varepsilon) = (\mathbf{1} \otimes \Omega(-\varepsilon))F$$

$$(3.192) \quad P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12} = F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)$$

Preuve : Démontrons la relation 3.192. Inversons la relation 3.181 entre F et B pour la remplacer dans le pentagone 3.179; nous obtenons alors

$$P_{23}\Omega_1(\varepsilon)B_{13}(\varepsilon)\Omega_3(-\varepsilon)F_{12} = F_{23}\Omega_1(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)\Omega_3(-\varepsilon)$$

Nous pouvons commuter $\Omega_3(-\varepsilon)$ avec $B_{12}(\varepsilon)$ et en simplifiant par les deux matrices $\Omega(\pm\varepsilon)$, nous obtenons 3.192.

En combinant la relation 3.181 et l'hexagone 3.180, nous obtenons l'identité 3.191:

$$\begin{aligned} FB(\varepsilon) &= F(\Omega(-\varepsilon) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(\varepsilon)) \\ &= (\mathbf{1} \otimes \Omega(-\varepsilon))F \end{aligned}$$

□

Bien sûr, l'équation 3.191 est une spécialisation de 3.192.

Inversion de F et $B(\pm)$.

Théorème 24 *L'inverse de $B(\varepsilon)$ est $B(-\varepsilon)$ et ces deux matrices sont unitaires.*

Preuve : L'expression de $\Omega(\pm)$ montre que $\Omega(+)^{-1} = \Omega(-)$. En conséquence l'équation 3.191

$$B(\varepsilon) = F^{-1}(\mathbf{1} \otimes \Omega(-\varepsilon))F$$

entraîne $B(+)B(-) = \mathbf{1}$. □

Théorème 25 *La matrice F est unitaire et de plus*

$$(3.193) \quad (F^{-1})_{q,p} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = F_{\hat{p},\hat{q}} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(c) & \sigma_{12}(d) \\ \sigma_{12}(a) & \sigma_{12}(b) \end{bmatrix}$$

Preuve : Explicitons la relation $B(+)B(-) = \mathbf{1}$ grâce à la relation 3.181 entre F et $B(\pm)$:

$$(B(\varepsilon)B(-\varepsilon))_{p,p'} \begin{bmatrix} a' & b' \\ a & b \end{bmatrix} = \sum_{q,c,d} e^{i\pi(h_{p'}-h_p)} F_{p,q} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(c) & d \\ a & \sigma_{12}(b) \end{bmatrix} F_{q,\hat{p}'} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(a') & b' \\ c & \sigma_{12}(d) \end{bmatrix} = \delta_{a,a'}\delta_{b,b'}$$

qui entraîne trivialement

$$(3.194) \quad \sum_{q,c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} F_{\hat{q},\hat{p}} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(a') & \sigma_{12}(b') \\ \sigma_{12}(c) & \sigma_{12}(d) \end{bmatrix} = \delta_{a,a'}\delta_{b,b'}$$

La relation entre F et F^* confirme que $F^{-1} = F^\dagger$ et enfin, nous disposons d'une expression des éléments de matrice de F^{-1} en terme de ceux de F . □

Equation de Yang-Baxter.

Théorème 26 *Les matrices $B(\pm)$ vérifient l'équation de Yang-Baxter quantique:*

$$(3.195) \quad B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon) = B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)$$

Preuve : Le plus simple consiste à multiplier les deux membres à gauche par F_{23} et à utiliser l'identité 3.192. Ainsi, le membre de gauche devient:

$$(3.196) \quad \begin{aligned} F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon) &= P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12}B_{12}(\varepsilon) \\ &= P_{23}B_{13}(\varepsilon)\Omega_2(-\varepsilon)F_{12} \end{aligned}$$

et d'autre part, le membre de droite se réécrit:

$$(3.197) \quad \begin{aligned} F_{23}B_{23}(\varepsilon)B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon) &= \Omega_3(-\varepsilon)F_{23}B_{12}(\varepsilon)B_{23}(\varepsilon) \\ &= \Omega_3(-\varepsilon)P_{23}B_{13}(\varepsilon)F_{12} \\ &= P_{23}\Omega_2(-\varepsilon)B_{13}(\varepsilon)F_{12} \end{aligned}$$

Les expressions 3.196 et 3.197 sont clairement égales! Ceci montre les deux équations de Yang-Baxter à partir du pentagone, des hexagones et de la relation entre F et $B(\pm)$. $\square$

Remarque : Le lecteur habitué des modèles intégrables aura reconnu la forme dite “IRF” (pour “Interaction Round the Faces” [154]) de l'équation de Yang-Baxter alors que le chapitre précédant nous avait introduit la forme “vertex” de cette équation. $\square$

3.9 Invariance de jauge des équations de Moore et Seiberg.

Comme nous l'avons vu précédemment, la normalisation des opérateurs de vertex chiraux n'est pas unique et nous en avons déduit une symétrie des équations de Moore et Seiberg. Nous allons montrer qu'il est possible de “fixer la jauge”, c'est à dire de déterminer entièrement la normalisation des opérateurs de vertex chiraux tout en assurant certaines propriétés particulières de la matrice F . Ce “bon choix de jauge” fixe complètement certains coefficients F et assure la symétrie tétraédrale complète des F comme nous le verrons dans la prochaine section.

3.9.1 Changements de jauge.

Les équations 3.179 à 3.184 sont clairement invariantes sous le changement:

$$(3.198) \quad F'_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_c \lambda_d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$(3.199) \quad B'_{p,q}(\pm) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_c \lambda_d} B_{p,q}(\pm) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$(3.200) \quad S'(j)_{(i,a)}^{(i',a')} = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a'}} S(j)_{(i,a)}^{(i',a')}$$

$$(3.201) \quad T' = T$$

où $a \mapsto \lambda_a \in \mathbb{C}^*$ est appelé une *transformation de jauge* de paramètre λ . Comme les matrices $\Omega(\pm)$ et $\Theta(\pm)$ s'obtiennent à partir de $B(\pm)$ par spécialisation, nous pouvons directement écrire la loi de transformation

$$(3.202) \quad \Omega'(\pm)_a{}^{a'} = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a'}} \Omega(\pm)_a{}^{a'}$$

$$(3.203) \quad \Theta'(\pm)_a{}^{a'} = \frac{\lambda_a}{\lambda_{a'}} \Theta(\pm)_a{}^{a'}$$

Regardons quelles doivent être les propriétés satisfaites par le paramètre de la transformation de jauge pour préserver les conditions 3.177, 3.178, les conditions de réalité 3.185 à 3.187 et les hypothèses 3.188 à 3.190.

- Les relations 3.177 et 3.178 sont préservées si et seulement si

$$(3.204) \quad \lambda_a = \lambda_{\sigma_{12}(a)} = \lambda_{\sigma_{13}(a)}$$

c'est à dire si et seulement si $\lambda_{\sigma(a)} = \lambda_a$ pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_3$. Clairement

$$(3.205) \quad \Omega'(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon)$$

$$(3.206) \quad \Theta'(\varepsilon) = \Theta(\varepsilon)$$

- La compatibilité entre 3.188 et la transformation de jauge nous donne, en utilisant $\lambda_a = \lambda_{\sigma_{123}(a)}$:

$$(3.207) \quad \forall(i, k); \quad \frac{\lambda_{t_i}}{\lambda_{t_k}} = 1$$

De ce fait, nous voyons immédiatement que

$$(3.208) \quad S'(0) = S(0)$$

et donc $S'(0)$ vérifie 3.187 et 3.190. La condition 3.189 est également vérifiée. Nous choisissons dorénavant la convention suivante:

Hypothèse 2 Fixons $\lambda_{t_0} = 1$.

En conséquence, pour tout vertex dont une ligne porte l'indice zéro, $\lambda_a = 1$.

- La compatibilité entre 3.186 et la transformation de jauge nous donne

$$\left(\frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_c \lambda_d} \right)^* = \frac{\lambda_{\hat{a}} \lambda_{\hat{b}}}{\lambda_{\hat{c}} \lambda_{\hat{d}}}$$

lorsque

$$F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \neq 0$$

En conséquence, $x_a = \lambda_a^* / \lambda_{\hat{a}}$ vérifie $x_a x_b = x_c x_d$. L'équation 3.189 montre alors que $x_a x_{\hat{a}} = 1$ car x_{t_i} vaut par convention 1. D'autre part, $x_a^* x_{\hat{a}} = 1$. Donc finalement

$$x_a^* x_{\hat{a}} = x_a x_{\hat{a}} = 1$$

ce qui montre que $\lambda_a^* \lambda_{\hat{a}}$ est réel. Ainsi, λ_a et $\lambda_{\hat{a}}$ ont des arguments opposés.

Nous utiliserons le terme de transformation de jauge spéciale pour désigner une transformation des données de Moore et Seiberg selon 3.198, 3.199, 3.200, 3.201 qui préserve la totalité des équations de Moore et Seiberg et telle que

$$(3.209) \quad \forall a, \quad \lambda_{\hat{a}} = \lambda_a^*$$

Cette condition assure une compatibilité entre $a \mapsto \hat{a}$ et la redéfinition des opérateurs de vertex chiraux, dans une optique conformiste.

3.9.2 Un “bon” choix de jauge.

Proposition 11 *Il existe un choix de jauge qui préserve la matrice S et tel que:*

$$(3.210) \quad F_{p,0} \left\{ \begin{array}{cc} j & \hat{j} \\ i & \hat{i} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & b \end{array} \right] = \sqrt{\frac{S_0^p S_0^0}{S_0^i S_0^j}} \delta_{a,\hat{b}}$$

Preuve : Considérons $a \mapsto \lambda_a \in \mathbb{C}^*$ une transformation de jauge (pas forcément spéciale!). Nous pouvons fixer λ_{t_0} à 1 par convention et dans ce cas

$$F'_{p,0} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & b \end{array} \right] = F_{p,0} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & b \end{array} \right] \lambda_a \lambda_b$$

Comme nous avons montré que

$$F_{p,0} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & b \end{array} \right] \neq 0 \Rightarrow a = \hat{b}$$

les équations à résoudre sont:

$$\lambda_a \lambda_{\hat{a}} F_{p,0} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & \hat{a} \end{array} \right] = \sqrt{\frac{S_0^p S_0^0}{S_0^i S_0^j}}$$

Nous utilisons alors la propriété de symétrie de F

$$(3.211) \quad F_{p,q} \left[\begin{array}{cc} c & d \\ a & b \end{array} \right] = F_{\hat{p},q} \left[\begin{array}{cc} \sigma_{13}(c) & \sigma_{12}(d) \\ \sigma_{13}(b) & \sigma_{13}(a) \end{array} \right]$$

qui, en utilisant 3.186, montre que

$$F_{p,0} \left[\begin{array}{cc} t_i & t_j \\ a & \hat{a} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^*$$

et donc que notre choix de jauge existe quite à prendre $\lambda_a \lambda_{\hat{a}} < 0$. $\square$

3.10 Propriétés de symétrie des données de Moore et Seiberg.

Il est extrêmement instructif de montrer que les matrices de dualité et de transformation modulaires que nous avons introduit renferment bien moins de coefficients distincts que ce que l'on pourrait imaginer. Nous allons utiliser les équations de Moore et Seiberg pour montrer l'égalité de certains coefficients F ainsi que quelques propriétés de symétrie des matrices $S(p)$. Les résultats que nous obtenons ici semblent miraculeux mais nous verrons au chapitre 5 qu'ils possèdent une interprétation tridimensionnelle

merveilleusement simple. Le lecteur est invité à consulter la section 5.3.6 du chapitre 5 pour en savoir plus. Je tiens au passage à remercier N. Reshetikhin pour nos discussions sur ce problème des symétries tétraédrales de la matrice F .

Nous étudierons aussi les propriétés de symétrie de la matrice $S(p)$. Pour cela, nous aurons besoin d'expressions tout à fait fascinantes de cette matrice en fonction de la matrice $S = S(0)$ et des matrices $B(\pm)$ et F . C'est de ces expressions que sort la démonstration du théorème de Verlinde telle que l'ont trouvée Moore et Seiberg.

3.10.1 Propriétés de symétrie de F .

L'étude du complexe de dualité en genre zéro avec quatre points marqués nous a déjà donné trois propriétés de symétrie des matrices F :

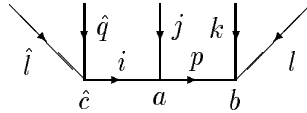
$$(3.212) \quad F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = F_{\hat{p},q} \begin{bmatrix} \sigma_{13}(c) & \sigma_{12}(d) \\ \sigma_{13}(b) & \sigma_{13}(a) \end{bmatrix}$$

$$(3.213) \quad = F_{p,\hat{q}} \begin{bmatrix} \sigma_{23}(d) & \sigma_{23}(c) \\ \sigma_{23}(a) & \sigma_{12}(b) \end{bmatrix}$$

$$(3.214) \quad = F_{\hat{p},\hat{q}} \begin{bmatrix} \sigma_{132}(d) & \sigma_{132}(c) \\ \sigma_{132}(b) & \sigma_{123}(a) \end{bmatrix}$$

qui expriment l'invariance de F sous l'action d'un groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ car les deux premières transformations commutent et leur produit est la troisième. Il est impossible d'obtenir plus en regardant les propriétés des fonctions à quatre points.

L'équation pentagonale est la seule du complexe de genre zéro avec cinq points marqués à ne faire apparaître que F . Comme elle contient deux matrices F dans un membre et trois dans l'autre, nous devons la spécialiser astucieusement pour obtenir une symétrie de F . Un élément de matrice F dont une des pattes externes porte l'indice 0 vaut 0 ou 1, ce qui suggère de projeter l'équation pentagonale sur le secteur $q_2 = 0$ avec les notations de la section 3.7.1. Le premier membre du pentagone agissant sur le bloc



devient

$$(3.215) \quad F_{p,r} \begin{bmatrix} x & y \\ a & b \end{bmatrix} F_{i,q_2} \begin{bmatrix} a'_1 & z \\ c & x \end{bmatrix} F_{\hat{q},q_1} \begin{bmatrix} a'_2 & a'_3 \\ z & y \end{bmatrix}$$

et le membre de droite se réécrit

$$(3.216) \quad F_{i,q} \begin{bmatrix} x & a'_3 \\ \hat{c} & a \end{bmatrix} F_{p,q_2} \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 \\ x & b \end{bmatrix}$$

Spécialisons $q_2 = 0$ et notons $a'_3 = d$, dans ce cas, comme un élément de matrice F dont une ligne externe est mise à zéro est trivial, les expressions 3.210 et 3.216 deviennent respectivement:

$$(3.217) \quad F_{p,q} \begin{bmatrix} x & d \\ a & b \end{bmatrix} F_{i,0} \begin{bmatrix} t_l & t_i \\ \hat{c} & x \end{bmatrix}$$

et

$$(3.218) \quad F_{i,\hat{k}} \begin{bmatrix} x & d \\ \hat{c} & a \end{bmatrix} F_{p,0} \begin{bmatrix} t_l & t_k \\ x & d \end{bmatrix}$$

Il est impossible d'aller plus loin sans fixer la jauge au sens de 11. Avec un "bon" choix de jauge, les éléments de matrice F ayant une ligne interne mise à zéro sont connus et nous trouvons

$$(3.219) \quad \sqrt{\frac{S_0^i S_0^k}{S_0^p S_0^q}} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = F_{i,\hat{k}} \begin{bmatrix} \hat{b} & d \\ \hat{c} & a \end{bmatrix}$$

Ceci n'est pas à proprement parler une propriété de symétrie de la matrice F mais nous avons montré que la combinaison suivante est invariante:

$$(3.220) \quad W_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{S_0^i S_0^j S_0^k S_0^l}}{S_0^0} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Si nous numérotions les vertex a, b, d, c de 1 à 4 dans cet ordre, les équations 3.212 3.213 et 3.214 sont associées respectivement aux permutations

$$(12), (34), (12)(34), (124)$$

lesquelles engendrent le groupe Σ_4 des permutations de $\langle 1, 4 \rangle$. Ainsi la symétrie générique de F est d'ordre 24. Elle possède une interprétation géométrique naturelle car Σ_4 n'est autre que le groupe des isométries du tétraèdre régulier. Cette remarque se traduit d'ailleurs naturellement sur le symbole W introduit plus haut: la correspondance

$$(3.221) \quad W_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \mapsto \begin{array}{c} \hat{c} \\ \uparrow \\ \text{---} q \text{---} \\ \downarrow \hat{d} \\ \text{---} p \text{---} \\ a \quad b \end{array}$$

nous fournit une action du groupe des isométries du tétraèdre sur W qui laisse ce symbole est invariant. Cette symétrie porte, par abus de langage, le nom de symétrie tétraédrale de la matrice F . Nous en verrons une interprétation naturelle au chapitre 5.

3.10.2 Expression de $S(p)$ en termes de $B(-)$.

Nous allons donner ici quelques expressions alternatives de la matrice $S(p)$ de transformation modulaire des blocs de genre un avec un point marqué. Ceci nous permettra au passage de démontrer le fameux théorème de Verlinde 3.223.

Première expression de $S(p)$.

Théorème 27 *La matrice $S(p)$ s'exprime en fonction des autres données de Moore et Seiberg via la formule suivante:*

$$(3.222) \quad S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} = \frac{S_0^i S_0^j}{S_0^0} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^p}} e^{-i\pi h_p} (B(-)B(-))_{0,p} \left\{ \begin{array}{cc} i & j \\ \hat{i} & j \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \hat{a} & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix}$$

Nous énonçons également le théorème de Verlinde [181].

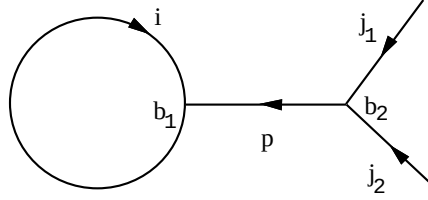
Théorème 28 *Les règles de fusion s'expriment en fonction de la matrice S par*

$$(3.223) \quad N_{i,j,k} = \sum_n \frac{S_n^i S_n^j S_n^k}{S_0^n}$$

et sont les constantes de structure d'une algèbre commutative, associative avec unité et involution.

Cette algèbre est appelée l'*algèbre de Verlinde* ou *algèbre de fusion* associée à la solution des équations de Moore et Seiberg. Il est plus simple de prouver ces deux résultats simultanément. En effet, nous allons utiliser la dernière identité de Moore et Seiberg pour obtenir l'expression 3.222 de $S(0)$ en fonction des matrices $B(-)$ et des S_0^i . La formule de Verlinde 3.223 apparaîtra donc comme un corrolaire de notre analyse. Nous ne montrerons pas ici la formule 3.222 en général. Les techniques tridimensionnelles développées aux chapitres 5 et 6 sont considérablement plus efficaces⁵⁶!

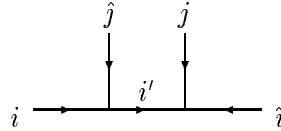
Preuve : La dernière identité de Moore et Seiberg 3.184 peut être écrite explicitement dans une bonne base:



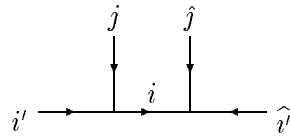
Nous obtenons alors:

$$(3.224) \quad S(p')_{(i_1,d)}^{(i',b'_1)} F_{q,p'} \begin{bmatrix} d & b'_2 \\ x & y \end{bmatrix} F_{p,q} \begin{bmatrix} x & y \\ c & b_2 \end{bmatrix} e^{2\pi i(h_q - h_{i_1})} S^{-1}(p)_{(i,b_1)}^{(i_1,c)} = \\ e^{i\pi(h_p - h_{j_1} - h_{j_2})} F_{p,q} \left\{ \begin{matrix} j_2 & j_1 \\ i_1 & \hat{i}_1 \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} c & d \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix} F_{i_1,p'} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 \\ q & \hat{q} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 \\ d & c \end{bmatrix}$$

La *subtilité* dans ce calcul provient de la lecture du membre de droite $FPF^{-1}(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$ dans la dernière identité de Moore et Seiberg. Il ne faut pas perdre de vue que l'on souhaite calculer l'effet d'un mouvement (b) sur le bloc conforme. En conséquence, F^{-1} nous amène dans la base



mais ensuite, on passe via l'opérateur de permutation P dans la base



⁵⁶L'argument consiste à utiliser les équations de Moore et Seiberg pour construire une théorie topologique projective rationnelle en dimension trois comme au chapitre 6, puis à utiliser l'invariance topologique comme dans le chapitre 5 pour montrer notre identité! Ceci à titre anticipatif bien sûr.

car nous avons fait tourner la ligne portant l'indice $\hat{j}$ le long du cycle (b) ! Ceci explique la présence d'une matrice $F_{q,p'}$ dans le membre de droite de l'équation 3.224!

Ensuite, le plus simple consiste à faire apparaître dans le membre de gauche le produit de deux matrices $B(-)$. Nous utilisons:

$$\begin{aligned} F_{p,\hat{q}} \left\{ \begin{array}{cc} j_2 & i_1 \\ j_1 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} x & y \\ b_2 & c \end{bmatrix} &= B_{p,q}(-) \left\{ \begin{array}{cc} j_2 & \hat{i}_1 \\ j_1 & i_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} x & y \\ b_2 & c \end{bmatrix} e^{i\pi(h_{i_1}+h_{j_1}-h_p-h_q)} \\ F_{q,p'} \left\{ \begin{array}{cc} j_2 & j_2 \\ i_1 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} d & b'_2 \\ x & y \end{bmatrix} &= B_{q,p'}(-) \left\{ \begin{array}{cc} i_1 & j_2 \\ j_1 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} b'_2 & d \\ x & y \end{bmatrix} e^{i\pi(h_{j_1}+h_{i_1}-h_q-h_{p'})} \end{aligned}$$

et le membre de gauche devient

$$(3.225) \quad S(p')_{(i_1,d)}^{(i',b'_1)} (B(-)B(-))_{p,p'} \left\{ \begin{array}{cc} j_2 & i_1 \\ j_1 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} b'_2 & d \\ b_2 & c \end{bmatrix} e^{i\pi(2h_{j_1}-h_p-h_{p'})} S^{-1}(p)_{(i,b_1)}^{(i_1,c)}$$

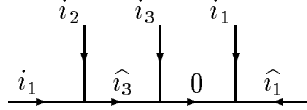
Le membre de droite, spécialisé à $p = 0$ devient en notant $j_1 = j$ et $j_2 = \hat{j}$:

$$(3.226) \quad e^{i\pi(h_p-h_{j_1}-h_{j_2})} F_{0,i'} \left\{ \begin{array}{cc} j & \hat{i} \\ \hat{j} & i \end{array} \right\} \begin{bmatrix} x & y \\ t_j & t_i \end{bmatrix} F_{i,p'} \left\{ \begin{array}{cc} j & \hat{j} \\ i' & \hat{i}' \end{array} \right\} \begin{bmatrix} b'_1 & b'_2 \\ y & x \end{bmatrix}$$

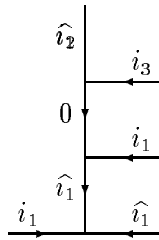
Spécialisons nous au cas $p = p' = 0$, nous obtenons:

$$(3.227) \quad \sum_n S_n^k \left((B(-)B(-))_{0,0} \left\{ \begin{array}{cc} n & \hat{j} \\ \hat{n} & j \end{array} \right\} \begin{bmatrix} t_n & t_i \\ t_n & t_j \end{bmatrix} \right) S_n^i = \sum_\alpha F_{0,i_1} \left\{ \begin{array}{cc} \hat{j} & \hat{i} \\ j & i \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \alpha & \hat{\alpha} \\ t_j & t_i \end{bmatrix}$$

Pour avancer, le membre de droite doit être simplifié. Nous utilisons pour cela l'équation pentagonale appliquée au bloc suivant:



On utilise le fait qu'une matrice F agissant sur un bloc donc une des lignes externes est mise à 0 est trivial et finalement lorsque le bloc final est:



nous arrivons à:

$$(3.228) \quad F_{0,0} \left\{ \begin{array}{cc} \hat{i}_1 & i_1 \\ i_1 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} t_{i_1} & t_{i_1} \\ t_{i_1} & t_{i_1} \end{bmatrix} = F_{0,i_2} \left\{ \begin{array}{cc} i_3 & i_1 \\ \hat{i}_3 & \hat{i}_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \hat{\alpha} & \alpha \\ t_{i_3} & t_{i_1} \end{bmatrix} F_{\hat{i}_3,0} \left\{ \begin{array}{cc} i_2 & \hat{i}_2 \\ \hat{i}_1 & i_1 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} t_{i_1} & t_{i_2} \\ \alpha & \hat{\alpha} \end{bmatrix}$$

Enfin, nous sommes sur les couplages α , nous arrivons à l'équation⁵⁷

$$(3.229) \quad \sum_n S_n^k \left((B(-)B(-))_{0,0} \left\{ \begin{matrix} n & \hat{j} \\ \hat{n} & j \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} t_n & t_i \\ t_n & t_j \end{matrix} \right] \right) S_n^i = N_{i,j,k} F_j$$

La formule 3.229 exprime les règles de fusion en termes de $B(-)$ et de S , et fait apparaître la quantité

$$(3.230) \quad X_i^j = (B(-)B(-))_{0,0} \left\{ \begin{matrix} i & \hat{j} \\ \hat{i} & j \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} t_i & t_j \\ t_i & t_j \end{matrix} \right]$$

Celle ci vaut 1 pour $i = j = 0$. Enfin, de la symétrie des $N_{i,j,k}$ nous déduisons en reportant dans 3.229

$$\sum_n \left(\frac{X_n^i S_n^j}{F_i} - \frac{S_n^i X_n^j}{F_j} \right) S_n^k = 0$$

Comme la matrice S est inversible, ses différentes colonnes sont linéairement indépendantes. En conséquence

$$(3.231) \quad \forall(i, j), \quad \frac{X_i^j}{S_i^j F_j} = \frac{X_i^k}{S_i^k F_k}$$

Il n'est pas difficile de montrer que X_i^j est symétrique en i et j : nous transformons les matrices $B(-)$ en matrices F et nous utilisons les propriétés de symétrie de F . En conséquence, ceci montre que le rapport

$$\frac{X_i^j}{F_i F_j S_i^j}$$

est indépendant de i et de j . Spécialiser tout le monde à $i = j = 0$ nous donne la valeur du quotient ci-dessus car $F_0 = X_0^0 = 1$. Nous arrivons alors à:

$$\frac{S_i^j}{S_0^0} = \frac{(B(-)B(-))_{0,0} \left\{ \begin{matrix} i & \hat{j} \\ \hat{i} & j \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} t_i & t_j \\ t_i & t_j \end{matrix} \right]}{F_i F_j}$$

On doit juste montrer la fameuse identité

$$(3.232) \quad F_i = \frac{S_0^0}{S_0^i}$$

Pour cela, nous spécialisons

$$\frac{X_i^j}{F_i F_j S_i^j} = \frac{1}{S_0^0}$$

à $i = 0$. Finalement, en reportant dans l'équation 3.229, nous trouvons la formule de Verlinde. $\square$

⁵⁷En identifiant les indices comme il faut!

Expression alternative de $S(p)$.

Pour étudier les propriétés de symétrie de $S(p)$, une autre expression en termes de matrices B est utile:

Lemme 2

$$(3.233) \quad S(p)_{(i,a)(j,b)} = \frac{S_0^i S_0^j}{S_0^0} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^p}} (B(+))_{0,p} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ \hat{i} & \hat{j} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{23}(\hat{a}) & b \\ t_{\hat{i}} & t_j \end{bmatrix}$$

Preuve : L'expression $(B(-)B(-))_{0,p}$ qui nous interesse devient en utilisant la relation entre F et $B(-)$

$$(3.234) \quad (B(-)B(-))_{0,p} \begin{bmatrix} a & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix} = (B(-)(\Omega(+) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-)))_{0,p} \begin{bmatrix} a & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix}$$

Introduisons alors $\Omega(+)\Omega(-) = \mathbf{1}$ ce qui nous donne:

$$(3.235) \quad (\Omega(+) \otimes \mathbf{1})(\Omega(-) \otimes \mathbf{1})B(-)(\Omega(+) \otimes \mathbf{1})F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$$

Mais $\Omega(\pm)$ n'est qu'un cas particulier de matrice $B(\pm)$ ce qui permet en identifiant $(\Omega(\pm) \otimes \mathbf{1})$ dans la formule 3.235 avec $B_{12}(\pm)$ et $B(\pm)$ avec $B_{23}(\pm)$ de calculer $B_{12}(-)B_{23}(-)B_{12}(+)$ à partir de l'équation de Yang-Baxter et de $B(\pm)^{-1} = B(\mp)$:

$$(3.236) \quad \begin{aligned} B_{12}(-)B_{23}(-)B_{12}(-) &= B_{23}(-)B_{12}(-)B_{23}(-) \\ B_{23}(+)B_{12}(-)B_{23}(-) &= B_{12}(-)B_{23}(-)B_{12}(+) \end{aligned}$$

La matrice 3.235 devient alors

$$(3.237) \quad (\Omega(+) \otimes \mathbf{1})B(+)(\Omega(-) \otimes \mathbf{1})B(-)F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$$

La relation entre F et $B(+)$ permet de faire apparaitre le produit $B(+)$:

$$(3.238) \quad (\Omega(+) \otimes \mathbf{1})B(+)(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))F^{-1}B(-)F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$$

Nous devons donc calculer l'action de $(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))F^{-1}B(-)F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-))$ sur le bloc considéré:

$$((\mathbf{1} \otimes \Omega(-))F^{-1}B(-)F(\mathbf{1} \otimes \Omega(-)))_{0,p'} \left\{ \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ i & j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} x & y \\ t_i & t_j \end{bmatrix} = e^{2\pi i h_i} \delta_x \delta_y,$$

et de même

$$(\Omega(+) \otimes \mathbf{1})_{p',p} \left\{ \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ i & j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix} = e^{i\pi(h_p - 2h_i)} \delta_{p,p'} \delta_{a,\sigma_{23}(x)} \delta_{b,y}$$

Finalement

$$(3.239) \quad (B(-)B(-))_{0,p} \left\{ \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} \\ i & j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{a} & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix} = e^{i\pi h_p} (B(+))_{0,p} \left\{ \begin{matrix} i & j \\ \hat{i} & \hat{j} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{23}(\hat{a}) & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix}$$

ce qui montre le Lemme. $\square$

Remarque : Le lecteur aura compris que je n'ai pas trouvé cette preuve avant d'avoir disposé de l'interprétation tridimensionnelle des équations de Moore et Seiberg. Ce n'est qu'en utilisant cet outil que l'on peut prouver simplement la formule 3.233. J'ai néanmoins tenu à en donner une preuve indépendante afin que le lecteur puisse se convaincre de l'utilité des outils introduits au chapitre 5. A ce stade, nous l'invitons tout particulièrement à consulter la section 5.3.6 du chapitre 5. $\square$

3.10.3 Symétries de S .

Les propriétés de symétries de S sont de deux types:

- Celles qui ne font pas appel à la conjugaison complexe.
- Celles qui font appel à la conjugaison complexe et qui sont indispensables pour prouver l'unitarité de $S(0)$.

Dans le premier cas, les propriétés de symétrie de $B(-)$ suffisent pour conclure comme nous allons le voir mais dans le second cas, nous allons transformer $B(+)$ en $B(-)$ dans l'expression 3.222 de $S(p)$.

Propriétés de symétrie de S ne faisant pas appel à la conjugaison complexe.

Rappelons l'expression de $S(p)$ en fonction de $B(-)$ et S :

$$(3.240) \quad S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} = \frac{S_0^i S_0^j}{S_0^0} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^p}} e^{-i\pi h_p} (B(-)B(-))_{0,p} \left\{ \begin{matrix} i & \hat{j} \\ \hat{i} & j \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{a} & b \\ t_i & t_j \end{bmatrix}$$

En vertu de la relation entre F et $B(-)$, nous pouvons traduire sur $B(-)$ les propriétés de symétrie de F :

- Permutons tout d'abord les pattes externes par

$$\left\{ \begin{matrix} i & \hat{j} \\ \hat{i} & j \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} j & \hat{i} \\ \hat{j} & i \end{matrix} \right\}$$

ce qui nous amène à transformer le matrice $B(-)$ de la manière suivante:

$$(3.241) \quad \begin{aligned} B_{p,q}(-) \left\{ \begin{matrix} j & k \\ i & l \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} &= F_{p,q} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(c) & d \\ a & \sigma_{12}(b) \end{bmatrix} e^{i\pi(h_i+h_l-h_p-h_q)} \\ &= F_{\hat{p},q} \begin{bmatrix} \sigma_{12}(c) & d \\ \sigma_{12}(b) & a \end{bmatrix} e^{i\pi(h_i+h_l-h_p-h_q)} \\ &= B_{\hat{p},q}(-) \left\{ \begin{matrix} k & j \\ l & i \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans notre contexte, cela montre que

$$(B(-)B(-))_{0,p} \left\{ \begin{matrix} j & k \\ a & l \end{matrix} \right\} = (B(-)B(-))_{0,\hat{p}} \left\{ \begin{matrix} j & \hat{i} \\ \hat{j} & i \end{matrix} \right\}$$

La matrice $S(p)$ est donc reliée à $S(\hat{p})$ par

$$(3.242) \quad S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} = S(\hat{p})_{(j,b)}^{(i,a)}$$

- D'autre part, nous pouvons permuter les pattes externes par:

$$\left\{ \begin{matrix} i & \hat{j} \\ \hat{i} & j \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \hat{i} & j \\ i & \hat{j} \end{matrix} \right\}$$

La symétrie tétraédrale de F nous donne, par le même genre de raisonnement que précédemment :

$$(3.243) \quad B_{q,p}(-) \left\{ \begin{array}{cc} \hat{j} & i \\ \hat{i} & j \end{array} \right\} \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = B_{\hat{q},\hat{p}}(-) \left\{ \begin{array}{cc} j & \hat{i} \\ i & \hat{j} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} a & b \\ \hat{\alpha} & \hat{\beta} \end{bmatrix}$$

$$(3.244) \quad B_{0,q}(-) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ t_i & t_j \end{bmatrix} = B_{0,\hat{q}}(-) \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ t_{\hat{i}} & t_{\hat{j}} \end{bmatrix}$$

ce qui montre que

$$(3.245) \quad S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} = S(p)_{(\hat{i},\sigma_{13}(a))}^{(\hat{j},\sigma_{13}(b))}$$

Matrice $S(p)$ et conjugaison complexe.

Le complexe conjugué de l'élément de matrice $S(p)_{(i,a)}^{(j,b)}$ s'obtient facilement grâce à la relation

$$\left(B(-)_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \right)^* = B_{\hat{p},\hat{q}}(+) \begin{bmatrix} \hat{c} & \hat{d} \\ \hat{a} & \hat{b} \end{bmatrix}$$

Ainsi, en utilisant l'expression alternative 3.233 de $S(p)$, nous obtenons la loi de transformation de S par conjugaison complexe :

$$(3.246) \quad \left(S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} \right)^* = S(\hat{p})_{(\hat{i},a)}^{(\hat{j},b)} e^{i\pi h_p}$$

Remarque : Ces propriétés expriment l'invariance sous l'action d'un produit semi-direct de $\mathbb{Z}_2$ agissant sur $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. En effet, les relations 3.242, 3.245 s'obtiennent comme invariance sous l'action d'un groupe $(\mathbb{Z}_2)^2$ et d'un autre coté, la loi de transformation par conjugaison engendre la dernière composante $\mathbb{Z}_2$. Ces considérations trouveront une interprétation géométrique simple dans la section 5.3.6 du chapitre 5.

Spécialisons maintenant les équations 3.246, 3.245, 3.242 au cas $p = 0$, nous obtenons :

$$(3.247) \quad SC = S^*, \quad CSC = S, \quad {}^tS = S$$

comme on s'y attend. $\square$

3.11 Quelles sont les équations minimales.

Une question importante concerne la minimalité des équations de Moore et Seiberg: lorsque l'on écrit explicitement les équations de Moore et Seiberg, on réalise qu'un certain nombre d'équations peuvent se déduire des autres. Ceci pose immédiatement le problème de la détermination du jeu d'équations minimales. Je n'ai pas la réponse à cette énigme. Un des résultats utiles par la suite est le suivant :

Proposition 12 *L'équation de Yang-Baxter sur $B(\pm)$ et les relations entre F et $B(\pm)$ impliquent les deux héragones.*

Nous laissons la preuve au lecteur! Un des points les plus délicats concerne le genre un: quelles sont dans la dernière équation de Moore et Seiberg, les équations indépendantes. Moore et Seiberg [132] prétendent que l'expression 3.222 de $S(p)$ en fonction des autres données remplace la dernière équation.

Je n'ai pas eu le temps de vérifier ces dires. En utilisant les techniques développées au chapitre 5, cela semble tout à fait plausible. J'ai quelque peu détaillé la preuve de la formule de Verlinde pour que le lecteur puisse disposer de bases afin d'explorer ces questions. Une grande question en suspens est de savoir quel est le nombre minimal d'équations en genre un: en admettant les dires de Moore et Seiberg, on peut quand même se demander si l'expression 3.222 vérifie les relations du groupe modulaire $\mathfrak{M}^*(1,1)$?

3.A Représentations des Algèbres de Lie de dimension infinie.

Cet Appendice est un rappel des propriétés des algèbres de Lie de dimension infinie comme les algèbres de Kac-Moody et l'algèbre de Virasoro. Nous décrirons également la théorie des représentations de ces objets. Nous commencerons par rappeler la structure de telles algèbres, puis la méthode générale pour en faire la théorie des représentations en suivant l'exposé de Dixmier [48]. Enfin, nous appliquerons cela au cas de l'algèbre de Virasoro et aux algèbres de Kac-Moody. Cet Appendice présuppose une connaissance minimale des techniques utilisées dans la théorie des représentations des algèbres simples de dimensions finies sur $\mathbb{C}$.

3.A.1 Modules de plus haut poids et modules de Verma.

Algèbres de Lie.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie de dimension éventuellement infinie. Nous supposons que $\mathcal{G}$ admet la décomposition suivante:

$$(3.248) \quad \mathcal{G} = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_- \oplus \mathcal{H}$$

où $\mathcal{H}$ est une sous algèbre commutative maximale de $\mathcal{G}$ (algèbre de Cartan) et si on note $\mathcal{G}_\alpha$ l'espace des vecteurs propres associés à la racine $\alpha \in \mathcal{H}^*$, on a:

$$\mathcal{N}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in R_\pm} \mathcal{G}_\alpha$$

R_+ et R_- étant deux ensembles de racines non nulles tels que $R = R_+ \cup R_-$ et qui sont mis en bijection par $\alpha \mapsto -\alpha$. Une telle décomposition sera appelée une bonne décomposition dans toute la suite.

Deux exemples s'imposent immédiatement:

- Considérons l'algèbre de Virasoro $\text{Vir} = \mathbb{C}c \oplus \text{Vect}((x_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ avec c central et

$$[x_n, x_m] = (n - m)x_{n+m} + n^2(n - 1)\delta_{n,-m}c.$$

Dans ce cas:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_+ &= \text{Vect}((x_n)_{n > 0}) \\ \mathcal{N}_- &= \text{Vect}((x_n)_{n < 0}) \\ \mathcal{H} &= \mathbb{C}x_0 \oplus \mathbb{C}c \end{aligned}$$

- Dans le chapitre 1 du livre de Kac [101] est introduite la notion de matrice de Cartan généralisée et de réalisation de cette matrice. Rappelons que

Définition 51 (V. Kac) *Une matrice de Cartan généralisée est une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que:*

$$\begin{aligned} \forall i \in \langle 1, n \rangle, \quad a_{i,i} &= 2 \\ \forall (i, j) \in \langle 1, n \rangle^2, \quad a_{i,j} = 0 &\implies a_{j,i} = 0 \\ \forall i \neq j, \quad a_{i,j} &\in \mathbb{Z}^- \end{aligned}$$

et:

Définition 52 (V. Kac) *Une réalisation de A est la donnée d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{H}$ et*

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathcal{H}^*$$

et

$$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathcal{H}$$

tels que Π et $\Pi^\vee$ définissent des familles libres et:

$$\forall (i, j) \in \langle 1, n \rangle^2, \quad \langle \alpha_i^\vee | \alpha_j \rangle = a_{i,j}, \quad \dim(\mathcal{H}) = 2n - \text{rg}(A).$$

Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Kac pour les théorèmes d'existence et unicité de telles réalisations. L'important pour nous est qu'il est possible d'associer à une telle matrice de Cartan généralisée une algèbre de Lie $\mathcal{G}(A)$.

Celle-ci est définie par générateurs et relations: nous introduisons $(e_i, f_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}$ tels que

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{i,j} \alpha_j^\vee \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h) e_i \\ [h, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i \end{aligned}$$

et si $\hat{\mathcal{G}}(A)$ est engendrée par $\mathcal{H}$ et $\{(e_i, f_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}\}$, il existe un unique idéal maximal I dans $\hat{\mathcal{G}}$ n'intersectant pas $\mathcal{H}$. Nous posons:

$$\mathcal{G}(A) = \hat{\mathcal{G}}(A)/I.$$

Ceci nous donne une algèbre de Lie et comme on montre que $I = (I \cap \hat{\mathcal{G}}_+(A)) \oplus (I \cap \hat{\mathcal{G}}_-(A))$ avec $\hat{\mathcal{G}}_+(A) = \mathcal{H} \oplus \text{Lie}((e_i)_i)$ et $\hat{\mathcal{G}}_-(A) = \mathcal{H} \oplus \text{Lie}((f_j)_j)$, nous voyons que

$$\mathcal{G}(A) = \mathcal{H} \oplus \frac{\hat{\mathcal{G}}_-}{I \cap \hat{\mathcal{G}}_-} \oplus \frac{\hat{\mathcal{G}}_+}{I \cap \hat{\mathcal{G}}_+}$$

et donc $\mathcal{G}(A)$ a bien une décomposition de la forme considérée. On dit que c'est l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice A .

Bien entendu, les algèbres de Lie de dimension finies simples sont des exemples d'algèbres de Kac-Moody mais il en existe aussi de dimension infinie. Classer toutes les matrices de Cartan généralisées semble quelque peu désespéré mais on peut, par un choix d'hypothèses judicieux, donner un théorème de classification intéressant. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 du livre de Kac [101] pour l'énoncé de ce résultat. Le cas des matrices de Cartan affines: $\text{rg}(A) = n - 1$ et $(A.v)_i \geq 0$ pour tout i entraîne $v = 0$ est particulièrement intéressant car il nous fournit des algèbres de dimension infinie. Parmi celles-ci, nous ne considérerons ici que les algèbres non-tordues. Elles correspondent aux diagrammes $(A_n^{(1)})_{n \geq 1}$, $(B_n^{(1)})_{n \geq 2}$, $(C_n^{(1)})_{n \geq 1}$, $(D_n^{(1)})_{n \geq 3}$, $F_4^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ et $(E_l^{(1)})_{l=6,7,8}$ de la page 48 de [101]!

En effet, leur intérêt pour la construction de TIC ne fait pas de doute: on peut montrer ([101, Chapitre 7]) que si LG est une algèbre de Lie simple de dimension finie alors $LG^{(1)}$ est obtenue à partir de l'extension centrale de $\mathbb{C}[t] \otimes LG$ par $\mathbb{C}c$ introduite dans l'étude du modèle de WZW en 3.4.6! Soit $\widehat{LG}$ cette extension, nous posons $LG^{(1)} = \widehat{LG} \oplus \mathbb{C}d$ où:

$$[d, t^n \otimes x] = nt^n \otimes x, \quad [d, c] = 0$$

Cela nous donne une réalisation explicite de ces algèbres.

Représentations de plus haut poids.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre bien décomposée, et ρ une représentation linéaire à valeurs dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel V . Nous supposons qu'elle est $\mathcal{H}$ -diagonalisable et que les espaces propres communs à tous les éléments de $\mathcal{H}$ sont de dimensions finies! On note $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des $\mathcal{G}$ modules ayant cette propriété.

Définition 53 Une représentation $\rho \in \mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ est dite de plus haut poids si et seulement si il existe $v \in V$ tel que $\rho(\mathcal{N}_+).v = 0$ et il existe $\lambda \in \mathcal{H}^*$ tel que:

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \rho(h).v = \lambda(h)v.$$

La forme linéaire λ est appelé le poids de cette représentation. Il est clair que dans ce cas, si $U(\mathcal{N}_-)$ est l'algèbre enveloppante de $\mathcal{N}_-$, alors:

$$V = \rho(U(\mathcal{N}_-)).v.$$

Remarque: Il existe des représentations qui ne sont pas de plus haut poids! Il suffit de considérer l'algèbre $LSU(2)$ et les opérateurs J_z et $J_{\pm}$ bien connus et $V = Vect((|n\rangle)_{n \in \mathbb{Z}})$ et l'action usuelle de J_z et $J_{\pm}$ sur les états $|j, m\rangle$ qui n'est pas une des représentation usuellement considérées. $\square$

Nous pouvons chercher à classer tous les modules de plus haut poids de $\mathcal{G}$. Nous disposons alors du théorème suivant:

Théorème 29 (V. Kac) Pour tout $\lambda \in \mathcal{H}^*$, il existe à isomorphisme près un et un seul module $\mathcal{V}(\lambda)$ de plus haut poids λ tel que tout $\mathcal{G}$ -module de plus haut poids λ soit un quotient de $\mathcal{V}(\lambda)$ par un de ses sous-modules. De plus, il existe un vecteur v tel que:

$$\mathcal{V}(\lambda) = U(\mathcal{G}) \otimes_{U(\mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_-)} \mathbb{C}v$$

On appelle $\mathcal{V}(\lambda)$ le module de Verma de poids λ . Il jouit d'une propriété universelle très utile. Plus prosaïquement, le module de Verma est engendré en tant qu'espace vectoriel par les vecteurs

$$\rho(x_1) \dots \rho(x_n).v$$

avec $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathcal{H} \oplus \mathcal{N}_-)^n$. Nous pouvons aussi considérer les représentations irréductibles. En effet:

Théorème 30 *Soit $\lambda \in \mathcal{H}^*$, son module de Verma admet un et un seul sous module propre maximal et donc il existe une et une seule représentation irréductible de plus haut poids λ que nous noterons $L(\lambda)$.*

En fait, soit $N(\lambda)$ le sous module propre maximal de $\mathcal{V}(\lambda)$, $L(\lambda) = \mathcal{V}(\lambda)/N(\lambda)$. Dans $N(\lambda)$, il existe aussi des états de plus haut poids⁵⁸ et de tels états sont appelés des *états nuls*! Il suffit de les annuler formellement dans le module de Verma pour obtenir le $\mathcal{G}$ -module irréductible correspondant.

Il faut encore obtenir une caractérisation de $N(\lambda)$! Pour cela nous devons rajouter un peu de structure à notre cadre de travail. L'exemple des TIC suggère d'utiliser une involution sur $\mathcal{G}$ qui relie $\mathcal{N}_+$ à $\mathcal{N}_-$. Plus précisément, nous supposons donnée ϖ une involution de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que

$$\begin{aligned}\varpi|_{\mathcal{G}_\alpha} &\in GL(\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_{-\alpha}) \\ \varpi|_{\mathcal{H}} &= \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

Alors, dans ce cas, nous pouvons définir une forme sesquilineaire sur tout $\mathcal{G}$ -module de plus haut poids. En effet, si on impose:

$$\forall x \in \mathcal{G}, \quad \rho(x)^\dagger = \rho(\varpi(x))$$

nous définissons une forme sesquilineaire B sur toute représentation de $\mathcal{G}$. Appliquons cela au cas du module de Verma $\mathcal{V}(\lambda)$. Le noyau de cette forme est un sous espace vectoriel de $\mathcal{V}(\lambda)$ mais comme la forme est invariante, c'est aussi un sous module. Tout vecteur de plus haut poids de $\mathcal{V}(\lambda)$ est trivialement dans $\ker(B)$. Finalement $N(\lambda)$ est inclus dans le noyau et par maximalité, $N(\lambda)$ est le noyau de la forme sesquilineaire que nous avons construite. Cela nous donne une description quasi-explicite des états nuls!

Recherche d'états nuls: un exemple.

Pour illustrer notre propos, nous allons effectuer la recherche d'états nuls dans le cas de Vir. L'involution ϖ est définie par $\varpi(L_n) = L_{-n}$. Rappelons que toute représentation V de plus haut poids de l'algèbre de Virasoro est graduée par $\mathbb{N}$

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{(n)} \quad V^{(n)} = \text{Ker}(L_0 - (h + n)\mathbf{1})$$

où h est le plus haut poids de V . L'espace $V^{(n)}$ est aussi appelé l'espace des vecteurs *de niveau n* . Dans ce cas, nous pouvons pour une représentation de plus haut poids (h, c) écrire la matrice de B . C'est une matrice par bloc: les différents espaces propres de L_0 sont deux à deux orthogonaux. L'exemple non-trivial le plus simple est fourni par le niveau 2. Une base de ce sous-espace du module de Verma $\mathcal{V}(h, c)$ est $(L_{-2}|h, c\rangle, L_{-1}^2|h, c\rangle)$ et la matrice de B est:

$$\begin{pmatrix} 4h + c/2 & 6h \\ 6h & 4h(1 + 2h) \end{pmatrix}$$

⁵⁸C'est en effet un $\mathcal{G}$ -module somme de $\mathcal{G}$ -modules de plus haut poids (car inclus dans un module de plus haut poids).

La présence d'états nuls au niveau 2 est signalée par l'annulation du déterminant de cette matrice:

$$32h \left(h - \frac{1}{16}(5-c) - \frac{1}{16}\sqrt{(1-c)(25-c)} \right) \left(h - \frac{1}{16}(5-c) + \frac{1}{16}\sqrt{(1-c)(25-c)} \right)$$

Pour $h = 0$, $L_{-1}^2|0, c\rangle$ est dans le noyau de B mais c'est un descendant de l'état nul $L_{-1}|0, c\rangle$. Par contre pour $c < 1$, il apparaît à $h = (5-c)/16 \pm \sqrt{(1-c)(25-c)}/16$ un état nul au niveau 2. Il est facile d'obtenir son expression dans la base utilisée ici:

$$|\phi\rangle = \left(L_{-2} + \frac{3}{2(2h+1)}L_{-1}^2 \right) |h_{2,1}, c\rangle$$

avec $h_{1,2} = (5-c)/16 + \sqrt{(1-c)(25-c)}/16$.

Structure générale pour $\mathcal{G} = Vir$.

Il est possible de calculer le déterminant de la matrice représentant B dans l'espace de niveau n du module de Verma $\mathcal{V}(h, c)$. La formule obtenue par Kac est:

$$(3.249) \quad D_n(h, c) = \prod_{\substack{(r,s) \in \leq 1, n > 2 \\ rs \leq n}} (h - h_{r,s}(c))^{p(n-rs)}$$

où $p(k)$ est le nombre de partition de l'entier k et

$$(3.250) \quad h_{r,s} = \frac{c-1}{24} + \frac{(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2}{4}, \quad \alpha_{\pm} = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}}$$

Et si $c \notin [0, 1]$, nous n'avons aucun état nul dans $\mathcal{V}(h, c)$ avec h réel. Plaçons nous dans le cas $c \in [0, 1]$, les états nuls apparaissent pour des valeurs de $h = h_{r,s}$ dès le niveau rs . La structure de $N(c, h)$ est facile à étudier. Cherchons les couples (r', s') tels que $h_{r,s} = h_{r',s'}$. Deux cas se présentent:

$\alpha_+/\alpha_- \notin \mathbb{Q}$ Alors, le problème arithmétique $h_{r,s} = h_{r',s'}$ n'a qu'une solution et donc, on n'a qu'un seul état nul qui se trouve au niveau rs :

$$N(h_{r,s}, c) \simeq \mathcal{V}(rs + h_{r,s}, c).$$

$\alpha_+/\alpha_- \in \mathbb{Q}$ Si $\alpha_+/\alpha_- = -p/q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $p \wedge q = 1$, $h_{r',s'} = h_{r,s}$ admet une infinité de solutions que l'on peut grouper en deux familles:

$$\begin{aligned} r' &= r + pk & \text{et} & & s' &= s - qk \\ r' &= -r + kp & \text{et} & & s' &= s - qk \end{aligned}$$

La structure du module $N(h_{r,s}, c)$ est alors assez complexe: les états nuls apparaissent à différents niveaux. En effet, très grossièrement, l'ordre du zéro $h_{r,s}$ augmente plus rapidement que le nombre de partitions [92] de l'entier $n - rs$ suivant le niveau n et donc cela suggère qu'il existe des états nuls aux niveaux $r's'$ avec $h_{r,s} = h_{r',s'}$. Le lecteur intéressé par la structure de $N(h_{r,s}, c)$ consultera [57]. Les emboîtements de modules de Verma qui sont exhibés dans cet article trouvent leur reflet dans les formules de caractères de Rocha-Caridi [153].

Cas des algèbres de Kac-Moody affines.

C'est l'autre exemple standard à considérer ici. Soit H une algèbre de Cartan de LG , $\mathcal{H} = H \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ est une algèbre de Cartan⁵⁹ pour $\mathcal{G} = LG^{(1)}$. Toute racine α de LG est considérée comme une racine de $LG^{(1)}$ par $\alpha(c) = \alpha(d) = 0$. On introduit de plus Λ_0 et δ tels que:

$$\Lambda_0(c) = \delta(d) = 0 \text{ et } \Lambda_0(d) = \delta(c) = 1$$

et en adjoignant une base de racines de LG , nous obtenons une base de $\mathcal{H}^*$. Il est facile de prolonger la forme invariante de Killing de LG en une forme invariante sur $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \langle t^n \otimes x | t^m \otimes y \rangle &= \langle x | y \rangle \delta_{n, -m} \\ \langle c | t^n \otimes x \rangle = \langle d | t^n \otimes x \rangle &= \langle c | c \rangle = \langle d | d \rangle = 0 \\ \langle d | c \rangle &= 1 \end{aligned}$$

qui est Lorentzienne de signature $(-, +, \dots, +)$. Cette forme invariante met en dualité $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$. Nous notons ν l'isomorphisme associé. On note que $\delta = \nu(c)$ et $\nu(d) = \Lambda_0$.

Considérons les représentations de cette algèbre. Nous nous limitons bien sûr aux représentations de plus haut poids mais il nous faut en plus rajouter une hypothèse pour obtenir des résultats intéressants. Nous ne regarderons ici que des représentations *intégrables* de $LG^{(1)}$. Le lecteur intéressé consultera [101, Chapitre 3] et nous ne rappelons ici que les résultats.

Soit $\lambda \in \mathcal{H}^*$ le plus haut poids de la représentation considérée, nous développons:

$$\lambda = \bar{\lambda} + k\Lambda_0 + \mu\delta$$

avec $\bar{\lambda} \in H^*$. Kac a montré que la condition d'intégralité équivalait aux propriétés géométriques suivantes⁶⁰:

- $\bar{\lambda}$ est un poids dominant de LG .
- $k \geq \langle \theta | \bar{\lambda} \rangle$ où θ est la plus haute racine de LG .
- $2k / \langle \theta | \theta \rangle$ est entier.

Nous remarquons que μ n'est pas contraint. Le fixer revient à définir l'action de d sur la représentation considérée. Notons toutefois que le groupe de Weyl de l'algèbre $LG^{(1)}$ laisse δ fixe et donc son action n'interfère pas avec la liberté de choix de μ . Nous travaillons en oubliant pour le moment l'action de d . Nous verrons plus loin quelle est l'interprétation physique de ce phénomène.

Les conditions écrites ci-dessus définissent un simplexe dans l'espace des poids et la première condition entraîne que l'on en prend l'intersection avec le réseau dual des racines duales⁶¹ de LG . Ceci nous donne un nombre fini de représentations intégrables de plus haut poids à k fixé, en correspondance biunivoque avec les poids dominants de LG vérifiant $k \geq \langle \theta | \bar{\lambda} \rangle$.

⁵⁹ H est plongée dans $\widehat{LG}$ par $x \mapsto 1 \otimes x$.

⁶⁰Comme dans la cas des algèbres de dimension finies, il est possible d'exhiber dans $LG^{(1)}$ des sous algèbres $LSU(2)$. Outre celles déjà présentes dans LG , il en existe d'autres engendrées par les $t^{-1} \otimes e_{\alpha_i}, t \otimes e_{-\alpha_i}, 2(k - \langle \alpha_i | \bar{\lambda} \rangle h_i) / \alpha^2$ et on impose que dans le $LG^{(1)}$ -module considéré n'apparaissent que des représentations de dimensions finies de ces algèbres, qui du coup peuvent être intégrées au groupe $SU(2)$.

⁶¹Les racines duales sont les $\mathbb{Z}$ -combinaisons linéaires des $2\alpha_i / \langle \alpha_i | \alpha_i \rangle$, les α_i étant les racines simples de LG .

La détermination des états nuls a été effectuée, nous présentons ici le résultat:

Théorème 31 *Soit $\mathcal{V}(\lambda)$ un module de Verma intégrable de plus haut poids λ au niveau k , les seuls états nuls sont d’une part l’état nul de la représentation de dimension finie de LG à la graduation 0 et d’autre part, si v est un vecteur de plus haut poids pour $\mathcal{V}(\lambda)$, $(t^{-1} \otimes e_\theta)^{1+\langle \lambda | \theta^\vee \rangle} . v$*

L’analogie du déterminant de Kac est le déterminant de Shapovalov.

3.A.2 Questions d’unitarité.

Nous considérons une algèbre bien décomposée et munie d’une involution ϖ . Cela munit chaque représentation de plus haut poids d’une forme sesquilinéaire. Nous dirons que la représentation est unitaire si et seulement si la forme ainsi construite est définie positive. Cette notion joue un rôle extrêmement important dans les TIC comme nous l’expliquons dans le chapitre 3. Clairement, seule une représentation irréductible peut être unitaire et de plus haut poids! En effet, le théorème 30 allié à la caractérisation du sous-module propre maximal du module de Verma comme noyau de la forme sesquilinéaire considérée nous montre que l’on doit quotienter par ce noyau pour avoir une forme non-dégénérée! Donc nécessairement, un $\mathcal{G}$ -module de plus haut poids unitaire est irréductible.

Comme dans le cas des moments cinétiques, c’est à dire des représentations de $SU(2)$, l’unitarité restreint considérablement le domaine des plus hauts poids possibles. Nous allons illustrer cette idée sur l’exemple de l’algèbre de Virasoro.

Dans ce cas, nous avons des restrictions sur la charge centrale et sur le poids conforme h . Par exemple, comme $L_1^\dagger = L_{-1}$, en utilisant les relations de Virasoro et en calculant le carré scalaire de $L_{-1}|c, h\rangle$, on voit que h doit être positif ou nul. L’étude générale de ce problème a été menée par Friedan, Qiu et Shenker [76]. Le lecteur trouvera une explication de la preuve dans [85]. Nous nous contentons de rappeler leur résultat:

Théorème 32 *Les représentations unitaires irréductibles de Vir correspondent aux valeurs suivantes de la charge centrale et du poids conforme:*

$0 < c < 1$ Il existe m entier supérieur à 3 et $(r, s) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 < r \leq m$ et $0 < s \leq m + 1$ avec:

$$\begin{aligned} h_{r,s} &= \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)} \\ c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \end{aligned}$$

$c \geq 1$ Toutes les valeurs de c et de $h \geq 0$ sont permises.

3.A.3 Etats nuls et “règles de fusion”.

Soient ϕ_i et ϕ_j les primaires considérés, on connaît un état nul pour ϕ_i

$$|\psi\rangle = \sum_{\{p\}} \lambda_{\{p\}} (\prod L_{-p}) |c, h\rangle$$

qui correspond à un champ nul ψ . Inséré dans une fonction de corrélation, il donne 0. Mais d'après les identités de Ward, ce nouveau corrélateur est relié au corrélateur avec une insertion de ϕ_i à la place de ψ par l'application d'un opérateur différentiel. Nous renvoyons le lecteur à la littérature [9] pour plus de détails. Ceci est à l'origine des équations différentielles BPZ correspondantes qui sont un outil essentiel dans le calcul des corrélateurs de champs primaires.

Pour obtenir les règles de sélection de la théorie, il suffit de considérer une insertion de $\psi(z, \bar{z})\phi_j(\xi, \bar{\xi})$ dans un corrélateur de primaires, puis on écrit l'équation différentielle BPZ et on remplace $\phi_i(z, \bar{z})\phi_j(\xi, \bar{\xi})$ par son développement dans le corrélateur auquel est appliqué l'opérateur différentiel. En regardant la puissance la plus singulière à $z \rightarrow \xi$, on obtient une condition sur les dimensions h_i, h_j et h_k . Ce sont les règles de sélection recherchées. Toutefois, pour le faire dans les cas où existent des états nuls pour l'algèbre de Virasoro, il faut procéder indirectement car l'expression des états nuls est en général peu aisée à obtenir. On utilise alors un champ primaire pour lequel il existe un état nul facile à trouver comme $\phi_{2,1}$. Ceci produit alors les "règles de sélection" pour $\phi_{2,1}\phi_i$ et par récurrence, on obtient les règles de fusion complètes.

3.B La symétrie affine sans Wess, Zumino ni Witten...

Nous allons dans cet Appendice discuter les théories conformes unitaires ayant la symétrie d'une algèbre affine $LG^{(1)}$ mais où la construction de Sugawara n'est pas forcément réalisée. Pour commencer, nous donnerons un critère de rationalité de ces théories au travers du théorème d'équivalence quantique qui permet d'assurer l'équivalence de deux représentations de Vir à partir de l'égalité des charges centrales. Nous discuterons la théorie des représentations de l'algèbre de symétrie de tels modèles⁶². Enfin, nous donnerons quelques exemples de tels modèles dont les fonctions de partitions ne peuvent s'obtenir comme un produit d'une fonction de partition relative à l'algèbre affine et une fonction de partition relative à une algèbre de Virasoro.

3.B.1 Théorème d'équivalence quantique.

L'énoncé est alors celui-ci:

Théorème 33 (P. Goddard and D. Olive) *On se donne deux représentations unitaires de plus haut poids sur un même espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire définie positive telles que la différence des représentations de ces algèbres commute avec l'une d'entre elles, alors l'action de ces deux algèbres de Virasoro est égale si et seulement si les charges centrales sont égales.*

Preuve : Notons $(L_n)_n$ et $(\mathcal{L}_n)_n$ ces deux algèbres et $K_n = \mathcal{L}_n - L_n$ la différence. Si K et L commutent,

$$[K_n, K_m] = [K_n, \mathcal{L}_m] = [\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] - [L_n, \mathcal{L}_m]$$

et

$$[L_n, L_m] = [L_n, L_m + K_m] = [L_n, \mathcal{L}_m]$$

donc $(K_n)_n$ est une algèbre de Virasoro de charge centrale $c_{\mathcal{L}} - c_L$. De plus, si L et $\mathcal{L}$ agissent unitairement sur E , il en est de même pour K et donc E est une représentation unitaire de cette algèbre K . Le théorème de Friedan-Qiu-Shenker permet alors de conclure que K_n agit trivialement sur E si et seulement si $c_{\mathcal{L}} = c_L$ ce qui prouve le théorème. $\square$

⁶²C'est un produit semi-direct de $LG^{(1)}$ par Vir

3.B.2 Condition de rationalité des modèles $LG^{(1)} \times \text{Vir}$.

Prenons alors un modèle ayant la symétrie $LG^{(1)}$ mais dont le tenseur énergie-impulsion ne s'obtient pas forcément par la construction de Sugawara on peut néanmoins considérer $\mathcal{L}_n$ calculé à partir des courants par cette construction. Cela nous donne une algèbre de Virasoro Vir_s agissant de manière unitaire sur l'espace des états du modèle. L'action de cette algèbre coïncide avec celle provenant du tenseur-énergie-impulsion Vir si et seulement si la construction de Sugawara est réalisée. Le théorème d'équivalence quantique nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit le cas:

Proposition 13 *Dans une TIC unitaire ayant la symétrie de l'algèbre affine $LG^{(1)}$,*

$$c \geq \frac{k \dim(LG)}{k + c_a},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si la construction de Sugawara est réalisée.

La théorie des représentations du produit semi-direct de $LG^{(1)}$ par Vir est facile à construire: on utilise l'algèbre auxiliaire $K = L - \mathcal{L}$ pour se ramener à un produit direct. Les états de plus haut poids pour le produit semi-direct coïncident trivialement avec les états de plus haut poids pour le produit direct et donc on peut se contenter de regarder le produit direct de $LG^{(1)}$ par K . Cela nous donne alors la condition de rationalité:

Proposition 14 *Une théorie unitaire ayant la symétrie $LG^{(1)}$ est rationnelle relativement au produit semi-direct $LG^{(1)} \ltimes \text{Vir}$ si et seulement si:*

$$\frac{k \dim(LG)}{k + c_a} \leq c < \frac{k \dim(LG)}{k + c_a} + 1.$$

3.B.3 Equations de Knizhnik-Zamolodchikov généralisées.

Plaçons nous dans le cas où le modèle est rationnel relativement au produit semi-direct. Dans ce cas, nous savons qu'il existe des états nuls pour K_n ! L'action d'un K_n au sein d'un corrélateur de champs primaires est donnée par un opérateur différentiel et donc à chaque état nul correspond une équation différentielle sur chaque fonction de corrélation de primaires. Dans le cas où la construction de Sugawara est réalisée, nous avons annulation de tous les K_n et les équations de Knizhnik-Zamolodchikov [108] s'obtiennent grâce à K_{-1} . Il est facile de montrer que ce sont les seules.

En effet, supposons que $|\phi\rangle$ soit un état annulé par K_0 et K_{-1} , montrons que $K_{-2}|\phi\rangle = 0$. Pour cela, on remarque que $[K_p, K_{-2}] = (p-2)K_{p-2}$ et donc pour tout état $|\psi\rangle$ et tout entier $p \geq 1$:

$$\langle \psi | (K_p K_{-2} | \phi \rangle) = 0$$

ce qui montre que $K_{-2}|\phi\rangle$ est orthogonal à tout descendant d'un primaire pour K . Comme il est trivialement orthogonal à un primaire pour K , $K_{-2}|\phi\rangle$ est nul! La preuve s'étend aux autres K_{-n} et donc:

Proposition 15 *Dans une TIC unitaire où la construction de Sugawara est réalisée, les seules équations pertinentes sur les corrélateurs sont les équations de Knizhnik-Zamolodchikov.*

3.B.4 Invariants modulaires exotiques.

Pour se persuader que de tels modèles peuvent être intéressants et que la classification des TICS est loin d'être simple, nous allons donner des exemples de fonctions de partitions invariantes modulaires construites à partir des caractères de Vir et $A_1^{(1)}$ qui ne sont pas des produits de fonctions de partition apparaissant dans la classification *ADE* de Cappelli, Itzykson et Zuber [19] et Kato [102].

D'un point de vue conceptuel l'existence de tels invariants provient de l'identité entre les règles de fusion des modèles minimaux et celles des théories $A_1^{(1)}$:

$$\text{modèle minimal FQS } c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \simeq SU(2)_{k=m} \times SU(2)_{k=m+1}.$$

Le cas de deux algèbres $A_1^{(1)}$ est déjà instructif. Soient $k_{1,2}$ leur niveaux respectifs et $n_{1,2} = k_{1,2} + 2$. L'application σ définie pour $n_1 + n_2 \equiv 2 \pmod{4}$ par

$$\begin{aligned} (\lambda_1, \lambda_2) &\mapsto (\lambda_1, \lambda_2) \text{ si } \lambda_1 + \lambda_2 \equiv 0 \pmod{2} \\ (\lambda_1, \lambda_2) &\mapsto (n_1 - \lambda_1, n_2 - \lambda_2) \text{ si } \lambda_1 + \lambda_2 \equiv 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de l'algèbre de Verlinde⁶³ produit tensoriel des algèbres de Verlinde des théories WZW $SU(2)$ de niveaux k_1 et k_2 . Les dimensions conformes sont données dans un modèle WZW $SU(2)$ niveau k par:

$$H_\lambda = \frac{\lambda^2 - 1}{4(k+2)}.$$

En conséquence la condition $h_{\sigma(\lambda_1, \lambda_2)} \equiv h_{(\lambda_1, \lambda_2)} \pmod{1}$ est réalisée, et donc

$$Z = \sum_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \langle 1, n_1-1 \rangle \times \langle 1, n_2-1 \rangle} \chi_{(\lambda_1, \lambda_2)} \overline{\chi_{\sigma(\lambda_1, \lambda_2)}}$$

est un invariant modulaire *non factorisé* construit à partir d'un automorphisme de l'algèbre de Verlinde! On s'attend donc à observer le même genre de phénomène avec Vir et $A_1^{(1)}$. Nous allons exhiber quelques invariants non factorisés en utilisant un procédé quelque peu différent: la construction de Goddard-Kent et Olive [88]. Cette méthode était d'ailleurs la seule disponible jusqu'à l'apparition du théorème de Verlinde et Dijkgraaf [44].

Remarque : L'automorphisme σ ne nous donne que la moitié d'une famille infinie d'invariants:

$$(3.251) \quad Z = \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 \equiv 0 \pmod{2}} \chi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\tau) \overline{\chi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\tau)} + \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 \equiv (n_1 + n_2) \pmod{2}} \chi_{(\lambda_1, \lambda_2)}(\tau) \overline{\chi_{(n_1 - \lambda_1, n_2 - \lambda_2)}(\tau)}$$

qui est l'exact analogue de la série D de Cappelli, Itzykson et Zuber. D'ailleurs l'orbifold du modèle de WZW sur $SU(2) \times SU(2)$ par le sous groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ diagonal du centre⁶⁴ produit précisément la fonction de partition 3.251 et correspond au modèle de WZW sur le groupe quotient $SO(4)$ de même que la série D de Capelli, Itzykson et Zuber correspond au modèle de WZW sur le groupe $SO(3)$. $\square$

⁶³Définie page 192.

⁶⁴ $Z(SU(2) \times SU(2)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

La construction G.K.O.

Cette construction, due à Goddard, Kent et Olive [88], exprime la possibilité de retrouver les représentations de l'algèbre de Virasoro à partir de deux algèbres de Kac-Moody par un quotient. Notons $V^A(k, \lambda)$ (respectivement $V^{Vir}(c, h)$) la représentation irréductible de $A_1^{(1)}$ au niveau k de plus haut poids $(\lambda - 1)/2$ (respectivement de Virasoro à charge centrale c et de poids h). Alors:

$$V^A(1, \varepsilon) \otimes V^A(m-2, r) = \bigoplus_{\substack{s \in \langle 1, m \rangle \\ s \equiv r + \varepsilon \pmod{2}}} \left(V^A(m-1, s) \otimes V^{Vir}\left(1 - \frac{6}{m(m+1)}, h_{r,s}(m)\right) \right)$$

qui s'exprime par une identité sur les caractères:

$$(3.252) \quad \chi_{(1, \varepsilon)}^A(\tau) \chi_{(m-2, r)}^A(\tau) = \sum_{\substack{s \in \langle 1, m \rangle \\ s \equiv r + \varepsilon \pmod{2}}} \chi_{(m-1, s)}^A(\tau) \chi_{(1 - \frac{6}{m(m+1)}, h_{r,s}(m))}^{Vir}(\tau)$$

avec une notation évidente pour les caractères. L'idée consiste alors à partir d'une fonction de partition pour le produit des deux algèbres $A_1^{(1)}$ de départ, puis de la contracter avec une fonction de partition relative au $A_1^{(1)}$ du membre de droite pour obtenir une fonction de partition relative à la seule algèbre de Virasoro. Dans notre exemple, nous partirons de trois algèbres $A_1^{(1)}$ pour aboutir à $\text{Vir} \times A_1^{(1)}$.

Le Lemme qui nous permet d'appliquer cette technique est dû à Bouwknegt [17]:

Lemme 3 *Soient $(\chi_i)_i$ et $(\psi_j)_j$ deux ensembles de caractères se transformant linéairement et unitairement sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ et relatifs aux algèbres $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$. Si*

$$\sum_{(i,j); (\bar{i}, \bar{j})} N_{(i,j) (\bar{i}, \bar{j})} \chi_i \psi_j \overline{\chi_{\bar{i}}} \overline{\psi_{\bar{j}}}$$

est une fonction de partition physique pour $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et

$$\sum_{j, \bar{j}} M_{j, \bar{j}} \psi_j \overline{\psi_{\bar{j}}},$$

est une fonction de partition physique relativement à $\mathcal{A}_2$ alors

$$\sum_{i, \bar{i}} \left(\sum_{j, \bar{j}} N_{(i,j) (\bar{i}, \bar{j})} M_{j, \bar{j}} \right) \chi_i \overline{\chi_{\bar{i}}}$$

est une fonction de partition physique relative à $\mathcal{A}_1$.

La preuve est laissée au lecteur! On vérifie sans peine que les invariants $A_1^{(1)} \times A_1^{(1)}$ factorisés et non-factorisés fournissent par ce procédé des invariants de la classification *ADE*.

Exemples.

Appliquons cela au cas de $A_1^{(1)} \times \text{Vir}$. Nous partons de fonctions de partition de niveaux $(1, m-2, n-2)$. Le premier exemple non trivial est donné par l'utilisation d'un invariant de la forme:

$$N_{(m,n)} \otimes N_3$$

avec $n + m$ pair. L'invariant $N_{(m,n)}$ est celui exhibé en 3.251. Nous devons prendre m pair et alors on obtient:

$$(3.253) \quad Z = \sum_{\lambda+r \equiv 0 \pmod{2}} |\chi_{r,s}^{Vir} \chi_\lambda^A|^2 + \sum_{\lambda+r \equiv (m+n)/2 \pmod{2}} \chi_{r,s}^V \chi_\lambda^A \overline{\chi_{m-r,s}^{Vir} \chi_{n-\lambda}^A}$$

qui n'est pas factorisée!

D'autres exemples sont obtenus en prenant une fonction de partition non-factorisée sur les trois algèbres affines de départ! Une telle fonction de partition se construit par exemple en effectuant une construction orbifold avec un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ diagonal:

$$Z = \sum_{\lambda_j \equiv N \pmod{2}} \left| \prod_{j=1}^N \chi_{\lambda_j}(\tau) \right|^2 + \sum_{\lambda_j \equiv (\sum n_j)/2 \pmod{2}} \prod_{j=1}^N \chi_{\lambda_j}(\tau) \overline{\chi_{n_j-\lambda_j}(\tau)}$$

pour N algèbres $A_1^{(1)}$ de niveaux $k_1 = n_1 - 2, \dots, k_N = n_N - 2$. Il faut bien sûr que $\sum n_i$ soit pair!

Ici, cette condition nécessaire s'écrit $n + m$ impair. La contraction avec un invariant A sur l'algèbre $A_1^{(1)}$ à éliminer ne donne pas d'invariant neuf par rapport à l'exemple précédent mais la contraction avec un invariant D donne un nouvel invariant non factorisé dès que m est impair⁶⁵:

$$(3.254) \quad Z = \frac{1}{2} \left(\sum_{\lambda+s \equiv 0 \pmod{2}} |\chi_{r,s}^V \chi_\lambda^A|^2 + \sum_{\lambda+s \equiv (m+1)/2 \pmod{2}} \chi_{r,s}^{Vir} |\chi_\lambda^A|^2 \overline{\chi_{r,m+1-s}^{Vir}} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{s \equiv 1 \\ \lambda+s \equiv (m+n+1)/2 \pmod{2}}} \chi_{r,s}^{Vir} \chi_\lambda^A \overline{\chi_{m-r,s}^{Vir} \chi_{n-\lambda}^A} + \sum_{\substack{s \equiv (m+1)/2 \pmod{2} \\ \lambda+s \equiv (m+n+1)/2 \pmod{2}}} |\chi_{r,s}^{Vir}|^2 \chi_\lambda^A \overline{\chi_{n-\lambda}^A} \right)$$

qui n'est pas factorisée pour $m \equiv -1 \pmod{4}$ et qui vaut $Z^{Vir}(A_{m-1}, D_{(m+3)/2})Z^A(D_{(n+1)/2})$ si $m \equiv 1 \pmod{4}$.

Il est possible d'obtenir d'autres exemples en contractant avec les invariants exceptionnels. Quoiqu'il en soit, il existe des invariants de théories $A_1^{(1)} \times \text{Vir}$ qui ne se factorisent pas. On peut se poser divers problèmes:

Problème ouvert 1 *Est ce que la classification complète des invariants $(A_1^{(1)})^3$ épuise grâce à la construction GKO la liste de tous les invariants modulaires $A_1^{(1)} \times \text{Vir}$?*

Bien entendu, cela amène:

Problème ouvert 2 *Quelle est la classification des invariants modulaires de $(A_1^{(1)})^n$?*

Cette question n'est pas résolue même dans le cas $n = 2$!!! En fait une méthode pour obtenir le commutant en toute généralité existe [7]. On dispose même d'une base de matrices à coefficients entiers mais la classification des invariants physiques⁶⁶ n'a pas été effectuée.

Enfin, on sait que les modèles de WZW donnent des exemples de théories où la construction de Sugawara est réalisée mais cela pose la question suivante:

Problème ouvert 3 *Existe t'il des modèles relativement "naturels" fournissant une des fonctions de partition non factorisées $\text{Vir} \times A_1^{(1)}$?*

⁶⁵Et donc n pair!

⁶⁶C'est à dire, suivant Cardy [21], de combinaisons sesquilineaires de caractères à coefficients *entiers positifs* où le module au carré du caractère de la représentation associée au vide n'apparaisse qu'une fois.

Par modèle “naturel”, on entend une théorie qui ne s’obtienne pas par une construction GKO. Enfin le lecteur courageux essayera de calculer toutes les données de Moore et Seiberg relatives à ces modèles, en particulier les coefficients de l’algèbre d’opérateurs.

3.C Quelques rappels sur les fonctions elliptiques et modulaires.

Dans cet Appendice, nous allons rappeler brièvement les principales propriétés des fonctions elliptiques et modulaires dont nous avons besoin dans le chapitre 3. Il ne s’agit pas d’une revue sur le sujet et en particulier, nous n’indiquerons aucune démonstration. Le lecteur fasciné par cette merveilleuse branche des mathématiques consultera⁶⁷ avec plaisir les traités suivants: [25][116][167] [56] et surtout [186]. J’ai aussi beaucoup utilisé quelques documents plus confidentiels mais d’excellente qualité [15] et [40].

Nous commencerons par rappeler quelques résultats concernant les fonctions elliptiques et leur utilité. Puis nous verrons comment obtenir des fonctions de Green du Laplacien sur un tore. Enfin nous rappellerons comment les différentes structures complexes sur un tore sont classées par l’invariant modulaire j . Enfin, nous décrivons l’exemple de l’espace des modules $M_{0,4}$ pour lequel nous trouvons un analogue de la fonction j .

3.C.1 Fonctions elliptiques.

La manière la plus naturelle d’introduire les fonctions elliptiques est sans doute de faire le lien avec la trigonométrie usuelle (ou avec la trigonométrie hyperbolique). En effet, grâce aux fonctions sinus et cosinus, nous savons paramétrer n’importe quelle ellipse, et de même, les fonctions hyperboliques nous fournissent une paramétrisation des hyperboles. Travailler sur le corps des réels conduit à distinguer artificiellement ces deux cas. Nous savons bien que ces fonctions sont prolongeables analytiquement à $\mathbb{C}$ et que les fonctions trigonométriques usuelles sont reliées aux hyperboliques par une simple rotation dans le plan complexe. Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π et elles paramètrent la courbe algébrique définie par

$$(3.255) \quad X^2 + Y^2 = 1$$

C’est à dire que si (X, Y) est un couple de nombres complexes vérifiant 3.255, il existe un et un seul $z \in \mathbb{C}$ modulo 2π tel que

$$(3.256) \quad X = \cos(z) \quad Y = \sin(z)$$

Plus généralement, ces fonctions permettent de paramétrer toute courbe lisse du type

$$(3.257) \quad Y^2 = X^2 + bX + c$$

Les fonctions elliptiques sont une généralisation naturelle de ces considérations. Elles fournissent la réponse aux deux problèmes suivants:

- On peut se demander comment paramétrer la courbe définie par $Y^2 = P(X)$ où P est un polynôme de degrés trois. Elle admet clairement un point à l’infini. Le lecteur ne sera pas étonné qu’il soit

⁶⁷Ou reconsultera.

naturel de passer dans l'espace projectif $P_2(\mathbb{C})$. Si $P(X) = X^3 - g_2X - g_3$ désigne notre polynôme⁶⁸, l'équation

$$(3.258) \quad Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$$

décrit la courbe d'équation $Y^2 = P(X)$ dans $\mathbb{C}^2$ avec son point à l'infini.

- Les fonctions trigonométriques ont une seule période dans le plan complexe. Il est alors légitime de se demander si il existe des fonctions qui admettent deux périodes dans le plan complexe et si il est possible de les trouver toutes lorsqu'elles sont méromorphes.

Nous allons examiner ces deux aspects tour à tour en commençant par le second.

3.C.2 Fonctions doublement périodiques.

Par définition, une fonction elliptique de périodes (ω_1, ω_2) (où ces deux nombres forment une famille libre dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$) est une fonction méromorphe qui admet ω_1 et ω_2 comme périodes. Il est facile de démontrer le résultat suivant:

Théorème 34 *Une fonction elliptique est entièrement déterminée par la donnée de ses zéros et de ses pôles avec leurs ordres.*

Enfin, nous disposons de deux fonctions importantes qui ont été découvertes par Weierstrass: $\wp$ et $\wp'$. Elles sont données comme séries absolument convergentes de fractions rationnelles:

$$(3.259) \quad \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in (\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

$$(3.260) \quad \wp'(z) = \sum_{\substack{\omega \in (\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2) \\ \omega \neq 0}} \frac{-2}{(z - \omega)^3}$$

Remarquons que $\wp$ est paire et $\wp'$ est impaire. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'introduire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui ait des zéros simples seulement sur $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$. La fonction σ est définie par un produit absolument convergent sur tout compact de $\mathbb{C}$:

$$(3.261) \quad \sigma(z) = z \prod_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) e^{z/\omega + z^2/2\omega^2}$$

Comme elle est holomorphe et non constante sur tout le plan complexe, une telle fonction admet nécessairement une monodromie non triviale dans les translations par $\omega \in \Gamma$. Il est facile de démontrer que

$$(3.262) \quad \sigma(z + \omega_\alpha) = -\sigma(z) \exp \left(\eta_\alpha \left(\frac{\omega_\alpha}{2} + z \right) \right)$$

où $\alpha \in \{1, 2\}$ et

$$(3.263) \quad \eta_\alpha = 2\xi \left(\frac{\omega_\alpha}{2} \right)$$

⁶⁸Nous pouvons toujours éliminer le terme de degré $\deg(P) - 1$ par une translation.

où pour finir, la dérivée logarithmique de cette fonction n'est autre que ξ définie par:

$$(3.264) \quad \xi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

où cette somme est entendue dans un sens destiné à assurer la convergence. C'est une primitive de $-\wp$. Le théorème des résidus appliqué à l'intégrale de ξ sur un parallélogramme passant par z_0 , $z_0 + \omega_1$, $z_0 + \omega_1 + \omega_2$, et $z_0 + \omega_2$ ($z_0 \neq 0$) relie η_1 et η_2 par:

$$(3.265) \quad \omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2i\pi$$

Nous fixons alors $(\bar{a}_i, n_i)_i$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}/\Gamma$ munis d'entiers relatifs n_i (on appelle cela un diviseur sur le tore $\mathbb{C}/\Gamma$). Nous cherchons une fonction elliptique qui admette les a_i comme zéros ou pôles suivant le signe de n_i avec ordre de multiplicité $|n_i|$. Pour démontrer le théorème 34, il faut prouver deux identités sur le diviseur (a_i, n_i) :

$$(3.266) \quad \sum_i n_i = 0$$

$$(3.267) \quad \sum_i \bar{a}_i n_i = 0 \pmod{\Gamma}$$

Ces faits élémentaires sont d'ailleurs des cas particuliers du théorème de Riemann-Hurwitz. Nous choisissons donc des représentants (a_i) des classes $(\bar{a}_i)$ modulo Γ tels que $\sum_i n_i a_i = 0$ dans $\mathbb{C}$. Alors l'expression de la fonction recherchée est donnée par

$$(3.268) \quad F(z) = \prod_i (\sigma(z - a_i))^{n_i}$$

Les propriétés 3.266 et 3.267 montrent à partir de 3.262 et 3.263 que la fonction ainsi construite est doublement périodique. Elle admet bien les singularités et les zéros considérés. Comme corollaire du théorème 34, il est facile de voir que les seules fonctions elliptiques holomorphes sont les constantes et donc nous en déduisons que finalement toute fonction elliptique de diviseur $(n_i, a_i)_i$ est proportionnelle à la fonction F . Une application triviale de ces idées permet de montrer que

$$(3.269) \quad \wp(z) - \wp(a) = - \frac{\sigma(z - a)\sigma(z + a)}{\sigma(z)^2 \sigma(a)^2}$$

ce qui montre que toute fonction elliptique paire est une fraction rationnelle en la fonction $\wp$. Le cas des fonctions impaires est réglé en divisant par $\wp'$. En conséquence,

Théorème 35 *Toute fonction elliptique est une fraction rationnelle en $\wp$ et $\wp'$*

Equation différentielle pour $\wp$.

Le premier résultat fondamental pour comprendre que les fonctions elliptiques permettent de paramétrer toute courbe $Y^2 = P(X)$ où P est de degré trois est une équation différentielle satisfaite par $\wp$:

Théorème 36 *Les fonctions $\wp$ et $\wp'$ vérifient l'équation algébrique*

$$(3.270) \quad (\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

où g_2 et g_3 sont données par

$$(3.271) \quad g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

$$(3.272) \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

Enfin, si nous considérons la courbe $\mathcal{C}_{g_2, g_3}$ d'équation homogène

$$Y^2 Z = 4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3$$

plongée dans $P_2(\mathbb{C})$; elle est lisse si et seulement si le polynôme $4X^3 - g_2 X - g_3$ n'a que des racines distinctes. On peut se demander si il est possible de la paramétrer par des fonctions elliptiques. La réponse est donnée par

Théorème 37 *Si $4X^3 - g_2 X - g_3$ n'a que des racines simples, i.e. $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, alors il existe un et un seul réseau Γ tel que les fonctions elliptiques $\wp$ et $\wp'$ associées à Γ paramètrent $\mathcal{C}_{g_2, g_3}$ qui est alors analytiquement isomorphe au tore $\mathbb{C}/\Gamma$.*

Ceci montre comment les fonctions elliptiques permettent de paramétrer judicieusement tous les tores. Les fonctions $\wp$ et $\wp'$ constituent en un sens le plongement le plus simple d'un tel tore dans un espace projectif complexe. C'est un cas particulier du théorème d'uniformisation de Riemann [15] pour les surfaces de Riemann compactes connexes: elles sont toutes plongeables dans un espace projectif.

Pour ne pas perdre le lecteur, remarquons que les périodes $\omega_{1,2}$ se retrouvent très facilement à partir de g_2 et g_3 , en deux étapes:

- Nous savons que $\wp(\omega_1/2)$, $\wp(\omega_2/2)$ et $\wp((\omega_1 + \omega_2)/2)$ sont les racines de $4X^3 - g_2 X - g_3 = 0$. Selon Cardan, il est facile de résoudre l'équation générique du troisième degré: les solutions de $4X^3 - g_2 X - g_3 = 0$ sont données par

$$(3.273) \quad \wp(\omega_1/2) = -\frac{\alpha + \beta}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta - \alpha)$$

$$(3.274) \quad \wp(\omega_2/2) = -\frac{\alpha + \beta}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\beta - \alpha)$$

$$(3.275) \quad \wp((\omega_1 + \omega_2)/2) = -\wp(\omega_1/2) - \wp(\omega_2/2)$$

où l'on a introduit

$$\alpha = \left(\frac{g_3}{8} - \frac{\sqrt{27g_3^2 - g_2^3}}{72} \right)^{1/3} \quad \beta = \left(\frac{g_3}{8} + \frac{\sqrt{27g_3^2 - g_2^3}}{72} \right)^{1/3}$$

- Il reste à inverser $\wp$. Nous remarquons que dans l'équation différentielle 3.270 nous donne

$$\frac{dz}{d\wp} = \frac{1}{\sqrt{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}}$$

Les périodes sont donc obtenues à partir d'intégrales⁶⁹

$$(3.276) \quad \frac{\omega_1}{2} = \int_{\mathcal{C}_{\wp(\omega_1/2)}} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

$$(3.277) \quad \frac{\omega_2}{2} = i \int_{\mathcal{C}_{\wp(\omega_2/2)}} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}}$$

exactement de la même manière que, en trigonométrie usuelle:

$$\pi = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.C.3 Fonctions de Green du Laplacien sur le tore.

Pour résoudre complètement la théorie bosonique libre, ou encore les théories fermioniques libres sur une surface de Riemann, nous avons besoin d'une fonction de Green du Laplacien. Pour illustrer le fait que l'on sait calculer les fonctions de corrélations des bosons et fermions libres sur un tore, ainsi que les fonctions de corrélation des champs primaires dans ces modèles, nous allons montrer que les fonctions elliptiques nous donnent naturellement accès à une fonction de Green du Laplacien sur un tore.

Bien entendu, ce sujet pourrait être poursuivi bien au delà des considérations très élémentaires qui vont suivre mais cela n'est pas l'objet de cette thèse.

Le plus simple consiste à partir des fonctions elliptiques pour fabriquer une fonction de Green du laplacien sur le tore qui possède des propriétés de monodromie non triviales le long des deux cycles d'homologie du tore. Puis, en ajoutant une fonction harmonique sur le tore, on trouve la fonction de Green voulue.

Fonctions elliptiques et laplacien.

La fonction σ définie par l'équation 3.261 est reliée à la fonction de Weierstrass $\wp$ par

$$(3.278) \quad \partial_z^2 \log(\sigma(z)) = -\wp(z)$$

et donc, cela montre que

$$(3.279) \quad \partial_z \partial_{\bar{z}} \log(\sigma(z)) = \frac{\pi}{2} \sum_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \delta(z - \omega)$$

Finalement, la fonction

$$\frac{1}{2\pi} \log(\sigma(z))$$

est une fonction de Green du Laplacien sur le tore $\mathbb{C}/\Gamma$ mais elle n'est pas monovaluée du fait de l'équation 3.262 ni réelle.

En vue de l'application au calcul des fonctions de corrélations, nous cherchons à atteindre les deux objectifs suivants:

- Obtenir qu'elle vérifie une équation modifiée:

$$(3.280) \quad \Delta G = \delta - \frac{1}{\mathcal{A}}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire du tore.

⁶⁹Le contour part du point à l'infini sur $P_1(\mathbb{C})$ pour aboutir à $\wp(\omega_{1,2}/2)$.

– Rendre la fonction monovaluée sur le tore et à valeurs réelles.

Pour commencer, il suffit de trouver une fonction f sur le tore qui vérifie $\Delta f = 1/\mathcal{A}$. Le plus simple est de prendre une fonction polynomiale de degré deux en les coordonnées z et $\bar{z}$. Rappelons que

$$\Delta(z^2) = \Delta(\bar{z}^2) = 0 \quad \Delta(z\bar{z}) = 4$$

Un minimum de réflexion montre qu'une fonction possible est

$$(3.281) \quad f(z) = \frac{(\Im(z/\omega_1))^2}{\Im(\omega_2/\omega_1)} + \Im(z/\omega_1)$$

Nous rajoutons cela à la fonction

$$\frac{1}{2\pi} \log(|\sigma(z)|)$$

qui à le bon goût d'être réelle et d'être une fonction de Green du Laplacien sur le tore.

Pour la rendre monovaluée sur le tore, nous calculons la monodromie de l'expression ci-dessus et nous complétons de manière à obtenir une monodromie totale nulle. Finalement, la fonction recherchée est

$$(3.282) \quad G(z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{(\Im(z/\omega_1))^2}{\Im(\omega_2/\omega_1)} + \Im(z/\omega_1) \right) + \frac{1}{2\pi} \log \left(\left| \sigma(z) \exp \left(-2i\pi \frac{z}{\omega_1} - \frac{z^2}{2} \sum_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^2} \right) \right| \right)$$

Pour finir, il est possible de donner une expression intéressante pour la fonction σ comme produit infini. C'est une généralisation du produit Eulerien

$$(3.283) \quad \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

au cas d'un réseau bidimensionnel:

$$(3.284) \quad z \prod_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) = \frac{\omega_1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{\omega_1} \right) \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - xq^n)(1 - x^{-1}q^n)}{(1 - q^n)^2}$$

avec $q = \exp(2\pi i \omega_2/\omega_1)$ et $x = \exp(2\pi i z/\omega_1)$. Pour la démontrer, une utilisation intensive du produit Eulerien 3.283 est d'ailleurs nécessaire.

Expressions en termes de fonctions thêta.

Le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - xq^n)(1 - x^{-1}q^{n-1})$$

possède des propriétés intéressantes. Tout d'abord, l'identité

$$(3.285) \quad \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - xq^n)(1 - x^{-1}q^{n-1}) = \frac{q^{-1/8}}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-x)^m x^{1/2} q^{(m+1/2)^2/2}$$

est un avatar de la formule du triple produit de Jacobi:

$$(3.286) \quad \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^{2n})(1 - xq^{2n-1})(1 - x^{-1}q^{2n-1}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-x)^m q^{m^2}$$

qui exprime que l'on peut calculer de deux manières différentes la fonction de partition d'un gaz formé de deux espèces de particules fermioniques. Cet argument particulièrement élégant m'a été signalé par Michel Bauer. Il est dû à Claude Itzykson et Andrews l'aurait découvert dans des temps bien plus ancestraux encore. Nous laissons au lecteur le soin de le redériver.

Ceci permet de relier notre fonction de Green à une des fonctions thêta définies par Jacobi:

$$(3.287) \quad \vartheta_1(z, \tau) = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{2\pi i z(n+1/2)} q^{(n+1/2)^2/2}$$

qui sont un cas particulier des fonctions

$$(3.288) \quad \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|\tau) = \sum_{n-\alpha \in \mathbb{Z}} \exp(i\pi n^2 \tau + 2\pi i n(z + \alpha))$$

Tout ce que vous désirez savoir sur les fonctions thêta sans jamais avoir osé le demander se trouve dans [136]. L'expression finale de G en terme de fonctions thêta s'obtient alors en remplaçant $\sigma(z)$ par son expression en fonction de ϑ_1 :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - xq^n)(1 - x^{-1}q^{n-1})}{(1 - q^n)^2} = i q^{-1/8} \frac{\vartheta_1(\frac{z}{\omega_1}, \tau)}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^3} = 2\pi i \frac{\vartheta_1(\frac{z}{\omega_1}, \tau)}{\vartheta'_1(0, \tau)}$$

où la dérivée est prise par rapport à z :

$$\vartheta'_1(0, \tau) = 2\pi (\eta(\tau))^3 = 2\pi q^{1/8} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^3$$

Finalement, nous obtenons

$$(3.289) \quad \sigma(z) = i \omega_1 e^{i\pi z/\omega_1 + z^2 \sum_{\substack{\omega \in \Gamma \\ \omega \neq 0}} \omega^{-2}} \frac{\vartheta_1(\frac{z}{\omega_1}, \tau)}{\vartheta'_1(0, \tau)}$$

Fonctions de Green pour le modèle compactifié.

Dans le cas du modèle compactifié, les champs primaires dont le spin (entier) est non nul créent des configurations de champs dont le nombre d'enroulement dans le cercle de compactification est non nul. En conséquence, nous devons disposer de fonctions de Green du Laplacien dans ces secteurs pour évaluer les fonctions de corrélation. Pour cela, il nous suffit d'ajouter à la fonction G une fonction harmonique ayant la monodromie voulue. Nous laissons au lecteur le soin de dériver par lui-même les expressions voulues pour la fonction de Green du Laplacien dans chacun des secteurs [98]. Il existe des expressions en termes de fonctions ϑ mais ce sont justement les autres fonctions de Jacobi qui interviennent.

3.C.4 Formes modulaires.

Finalement, nous aimerions caractériser aussi simplement que possible les différentes classes d'isomorphismes analytique de tores.

Classes d'isomorphismes analytiques de tores.

Le résultat suivant permet de caractériser les différents réseaux qui donnent des tores quotients analytiquement isomorphes.

Théorème 38 *Les tores $\mathbb{C}/\Gamma$ et $\mathbb{C}/\Gamma'$ sont analytiquement isomorphes si et seulement si Γ se déduit de Γ' par une similitude directe.*

Au niveau des périodes (ω_1, ω_2) , le critère d'équivalence est légèrement plus complexe. En effet,

$$\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 = \mathbb{Z}\omega'_1 \oplus \mathbb{Z}\omega'_2$$

si et seulement si il existe une matrice M de $SL_2(\mathbb{Z})$ (invertible dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$) telle que

$$(3.290) \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Dans une similitude paramétrée par un nombre complexe non-nul a , les périodes sont multipliées par a ce qui montre que le rapport $\tau = \omega_2/\omega_1$ est un invariant. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur le quotient des périodes comme un groupe d'homographies:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

et donc l'ensemble des classes d'équivalences de réseaux par similitude n'est autre que l'ensemble des classes d'équivalences de rapports de périodes sous l'action homographique de $SL_2(\mathbb{Z})$. Le sous groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ formé par les matrices $\mathbf{1}$ et $-\mathbf{1}$ agit trivialement sur H et donc, c'est en fait le groupe projectif $PSL_2(\mathbb{Z})$ qui agit sur H .

Nous allons maintenant exhiber une fonction de ce rapport τ qui est invariante sous $SL_2(\mathbb{Z})$ et qui *sépare* les différentes orbites. Une telle fonction caractérisera les différentes classes d'isomorphismes analytiques de tores.

L'invariant j .

Considérons le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ de l'équation $4X^3 - g_2X - g_3 = 0$. Il ne dépend que du réseau $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ et possède une loi de transformation simple dans les similitudes: si a désigne un nombre complexe non nul,

$$(3.291) \quad \Delta(a.\Gamma) = a^{-6}\Delta(\Gamma)$$

Pour obtenir un invariant par similitude, il nous suffit de faire un quotient dont Δ soit le dénominateur⁷⁰ et dont le numérateur présente la même loi de transformation par similitude. Le plus simple consiste à prendre g_2^3 et nous posons:

$$(3.292) \quad J(\Gamma) = \frac{1728 g_2(\Gamma)^3}{g_2(\Gamma)^3 - 27g_3(\Gamma)^2}$$

⁷⁰Le discriminant est non nul car l'équation $4X^3 - g_2X^2 - g_3 = 0$ admet trois racines *distinctes*.

Le coefficient 1728 est là pour des raisons esthétiques qui apparaîtront claires plus loin. Clairement cette fonction ne dépend que du réseau et est invariante par similitude. C'est donc un invariant de la structure complexe de $\mathbb{C}/\Gamma$.

Pour que cet invariant soit intéressant, il faut qu'il prenne des valeurs distinctes sur deux structures complexes différentes. Plus précisément:

Théorème 39 *Les courbes elliptiques $\mathcal{C}_{g_2, g_3}$ et $\mathcal{C}_{g'_2, g'_3}$ sont analytiquement isomorphes si et seulement si*

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_2'^3 - 27g_3'^2}$$

et donc, en vertu du théorème 38,

Théorème 40 *La fonction J réalise une bijection entre l'ensemble des structures complexes inéquivalentes sur le tore et $\mathbb{C}$.*

L'espaces de modules $M_{1,0}$.

Ceci permet de visualiser la géométrie de l'espace des modules $M_{1,0}$. En effet, la fonction j peut se voir comme une fonction holomorphe sur le demi-plan de Poincaré

$$(3.293) \quad H = \{\tau \in \mathbb{C}, \quad \Im(\tau) > 0\}$$

par

$$j(\tau) = J(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$$

Elle est holomorphe et elle est invariante sous l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ car elle ne dépend que du réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ et pas simplement de la base $(1, \tau)$ que nous avons choisie. On dit que c'est une forme modulaire de poids zéro. Plus généralement, on introduit la notion de forme modulaire de poids $2k$ où $k \in \mathbb{Z}$:

Définition 54 *Une forme modulaire de poids $2k$ est une fonction f méromorphe sur H telle que*

$$(3.294) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad f(z) = \frac{1}{(cz + d)^{2k}} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

Le théorème 40 nous dit que j est bijective de $H/SL_2(\mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'espace des modules est donc

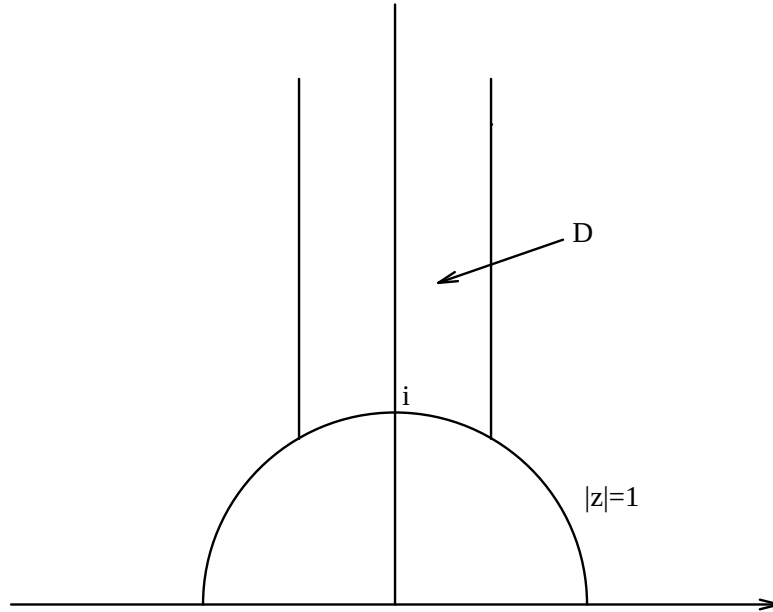
$$(3.295) \quad M_{1,0} = \frac{H}{SL_2(\mathbb{Z})}$$

La groupe modulaire est formé des classes de difféomorphismes non connectés à l'identité. En admettant qu'une telle classe de difféomorphismes est caractérisée par son action sur les périodes (ω_1, ω_2) qui définissent le tore, nous lui associons une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. L'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur H est en fait une action de $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{1, -1\}$. Ce groupe n'agit pas librement sur H : les points i , et $\exp(i\pi/3)$ ont des stabilisateurs non triviaux:

$$(3.296) \quad Z_{PSL_2(\mathbb{Z})}(i) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$(3.297) \quad Z_{PSL_2(\mathbb{Z})}(\exp(i\pi/3)) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

et donc l'espace des modules présente des singularités en ces points:



où D est le fameux domaine fondamental dans H pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$. Chacun de ces points correspond à un tore qui possède un ensemble d'automorphismes analytiques “plus gros” que la normale. Plus précisément, il est facile de montrer que

Proposition 16 *Les automorphismes analytiques d'un tore de paramètre modulaire $\tau \neq i, \exp(i\pi/3)$ modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ sont induits sur $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau)$ par les translations et la symétrie centrale $z \mapsto -z$ dans $\mathbb{C}$.*

Preuve : Un tel automorphisme permet de construire une fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. La bijectivité de l'automorphisme entraîne que f doit être bijective. En conséquence, c'est une fonction affine: $f(z) = az + b$. Les translations induisant clairement des automorphismes analytiques du tore, on peut supposer que $b = 0$. La similitude de rapport a doit envoyer le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ sur lui même bijectivement. Dans le cas générique où τ est distinct de i et $\exp(i\pi/3)$, il subsiste deux possibilités $a = \pm 1$ ce qui prouve la proposition. $\square$

Dans le cas où $\tau = i$, il apparaît un automorphisme supplémentaire d'ordre quatre donné par $z \mapsto iz$ dans $\mathbb{C}$. Dans le cas $\tau = \exp(i\pi/3)$, l'automorphisme est d'ordre six donné par $z \mapsto \exp(\pi i/3)z$. Ces cas exceptionnels correspondent aux réseaux du plan ayant une symétrie par rotation non triviale.

Remarque : Les singularités de l'espace des modules apparaissent nettement associées aux surfaces avec automorphismes. Ce point est général comme nous le montrerons aussi sur l'exemple du genre zéro avec quatre points marqués. Le rôle de ces surfaces si particulières est souligné par Grothendieck dans son “Esquisse d'un programme” [91]. Ces surfaces seraient les pièces fondamentales à utiliser pour reconstruire toute la géométrie de la tour de Teichmüller. L'idée étant d'obtenir une description de l'espace des modules par une décomposition en cellules de l'espace de Teichmüller associé. Cette décomposition en cellules proviendrait de l'utilisation des surfaces avec automorphismes. Je reviendrais sur ces questions plus loin. $\square$

Mentionnons enfin que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ admet une présentation par générateurs et relations particulièrement simple. Ce résultat se trouve exposé dans [167, pages 129 à 131]. Les générateurs seront

notés

$$(3.298) \quad s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui obéissent aux relations $(st)^3 = s^2$ et $s^4 = 1$. Remarquons que $s^2 = -1$ ce qui donne une présentation de $PSL_2(\mathbb{Z})$ immédiatement.

Dans la suite de cette thèse, nous noterons s et t les *classes modulaires* sur le tore associées aux générateurs s et t de $SL_2(\mathbb{Z})$. Les formules 3.298 décrivent d'ailleurs l'action de ces classes modulaires sur $\pi_1(S_1 \times S_1)$ et déterminent entièrement s et t dans le groupe modulaire $\mathcal{M}(1, 0)$.

Expressions diverses de l'invariant j .

Il existe différentes expressions très intéressantes de l'invariant j . En effet, il est commode d'introduire le paramètre $q(\tau) = \exp(2\pi i\tau)$ qui envoie le demi-plan de Poincaré sur le disque ouvert unité $D(0, 1)$. La fonction j est alors méromorphe sur ce disque privé de l'origine.

Pour trouver son développement de Laurent, il suffit de connaître le développement de Laurent en q des différentes formes modulaires g_2 et g_3 . Pour l'obtenir, revenons à l'expression initiale

$$g_k(\tau) = \sum_{\substack{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \\ (n, m) \neq (0, 0)}} \frac{1}{(n + m\tau)^{2k}}$$

et de décomposer la somme en $(n, 0)$ avec $n \neq 0$ et (n, m) avec $m \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Ceci permet de montrer

$$(3.299) \quad g_k(\tau) = 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{2k-1}(n) q(\tau)^n$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann, et $\sigma_l(n)$ est la somme des puissances l -èmes des diviseurs de n . Un intermédiaire indispensable dans ce calcul est le développement de la fonction cotangente en série de fonctions rationnelles. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages classiques pour ces calculs [167][16]. Enfin, il est possible d'établir une expression pour Δ qui remonte à Jacobi:

$$(3.300) \quad \Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q(\tau) \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q(\tau)^n)^{24}$$

Tout ceci donne accès au développement de Laurent de la fonction j . Le coefficient 1728 trouve sa justification dans le résidu à l'origine de $j(q)$:

$$(3.301) \quad j(\tau) = \frac{1}{q(\tau)} + 744 + 196884 q(\tau) + 21493760 q(\tau)^2 + \dots$$

Les coefficients de ce développement sont tous des *entiers positifs* ce qui provient de l'existence du module du Moonshine comme nous le rappelons dans la section 3.4.8.

Finalement, on prouve le théorème suivant qui permet de donner à priori la forme de certaines fonctions de partition à $c \equiv 0 \pmod{24}$:

Théorème 41 *Une forme modulaire de poids zéro est une fonction rationnelle de l'invariant j . Elle est holomorphe sur le demi-plan de Poincaré si et seulement si elle est polynomiale en j .*

Ce résultat justifie en un sens notre choix arbitraire pour l'invariant j : il est en effet possible de construire de bien des façons une forme invariante sous $PSL_2(\mathbb{Z})$ à partir de g_2 et g_3 mais par ce résultat nous voyons que si f est une fonction holomorphe sur H , invariante modulaire, qui réalise une bijection de $H/PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{C}$, alors f est une fonction affine de j .

3.C.5 Espace des modules $M_{0,4}$.

Pour finir, nous aimerions présenter brièvement une description de l'espace des modules $M_{0,4}$ des sphères avec quatre points marqués. C'est le premier cas, en genre zéro, de dimension modulaire non nulle.

Description.

Soient (z_1, z_2, z_3, z_4) quatre points distincts sur $P_1(\mathbb{C})$, comme le groupe d'automorphismes de la sphère de Riemann agit trois fois transitivement sur celle-ci, nous pouvons fixer $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ et $z_3 = \infty$. Dans ce cas, le birapport harmonique des quatre points devient

$$z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)} = \frac{1}{z}$$

L'espace des modules n'est autre que l'ensemble des orbites de $z \in P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ sous l'action des homographies qui permutent les trois points $\{0, 1, \infty\}$. Ces transformations forment un groupe $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ isomorphe à Σ_3 :

Transpositions Nous avons indiqué l'action des homographies sur les points 0, 1 et ∞ .

	0	1	∞
$1 - z$	1	0	∞
$1/z$	∞	1	∞
$z/(z - 1)$	0	∞	1

Cycles De la même manière:

	0	1	∞
$1/(1 - z)$	1	∞	0
$1 - 1/z$	∞	0	1

et il est facile de trouver les points de $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ stabilisés par un élément non trivial de ce groupe:

$z = 1/2$ possède un groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par $z \mapsto 1 - z$. Son orbite sous Σ_3 compte trois éléments: $1/2, 2, -1$ qui correspondent à la même structure complexe.

$\rho = \exp(i\pi/3)$ admet un groupe d'automorphismes A_4 : en effet, il existe une transformation affine qui donc envoie ∞ en ∞ et qui permute cycliquement les trois points 0, 1, et ρ :

$$z \mapsto (\rho - 1)z + 1$$

De même, il existe une homographie qui laisse fixe 0 mais qui permute 1, ρ et ∞ :

$$z \mapsto \frac{z}{z - \rho}$$

Le lecteur est invité à continuer ce jeu pour se convaincre qu'il existe un groupe A_4 d'homographies qui permutent $0, 1, \rho$ et ∞ . En plus des six homographies de $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, nous avons

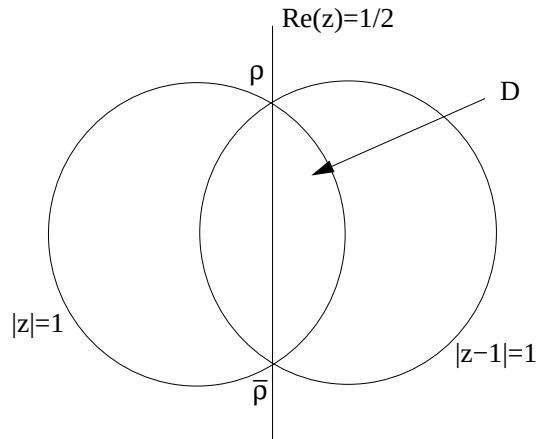
$$\begin{aligned} z &\mapsto (\rho - 1)z + 1 \\ z &\mapsto \frac{z}{z - \rho} \\ z &\mapsto \frac{1 - \rho}{z - \rho} \\ z &\mapsto \frac{z - \rho}{z - 1} \\ z &\mapsto \rho \frac{z - 1}{z - \rho} \\ z &\mapsto \frac{\rho}{z} \end{aligned}$$

Les quatre points $0, 1, \rho$ et ∞ peuvent donc être vus comme les sommets d'un tétraèdre inscrit dans la sphère $P_1(\mathbb{C})$. Les automorphismes analytiques pour la structure héritée de la métrique usuelle de $\mathbb{R}^3$ sont alors les rotations qui stabilisent le tétraèdre: elles forment un groupe A_4 . Le normalisateur de $\{0, 1, \infty\}$ est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le complexe conjugué $\bar{\rho}$ est l'autre élément de son orbite sous l'action de $SL_2(\mathbb{F}_2)$.

Un domaine fondamental pour l'action de $SL_2(\mathbb{F}_2)$ sur $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ est donné par

$$(3.302) \quad \mathcal{D}_{0,4} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1, \quad \Re(z) \geq \frac{1}{2}\}$$

dessiné sur le schéma suivant:



Finalement, l'espace des modules $M_{0,4}$ possède deux singularités correspondant aux deux structures complexes de groupes d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et A_4 et une frontière correspondant aux points $0, 1$ et ∞ ce qui est la limite dans laquelle le quatrième point tend vers les trois autres⁷¹.

⁷¹Le lecteur aura remarqué la similitude entre la structure de $M_{0,4}$ et celle de $M_{1,0}$ mais il faut remarquer qu'il n'existe pas d'isomorphisme analytique de $\mathcal{D}_{1,0}$ sur $\mathcal{D}_{0,4}$ qui envoie le point de stabilisateur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{D}_{0,1}$ sur le point de stabilisateur A_4 dans $\mathcal{D}_{0,4}$, le point singulier $i\infty \in \mathcal{D}_{1,0}$ sur $1 \in \mathcal{D}_{0,4}$ et idem avec les points de stabilisateur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Un problème amusant consiste à trouver l'analogue de la fonction modulaire j , c'est à dire une fonction $j_{0,4}$ méromorphe sur $P_1(\mathbb{C})$ qui soit $SL_2(\mathbb{F}_2)$ -invariante et qui réalise une bijection de $\mathcal{D}_{0,4}$ sur $\mathbb{C}$. J'ai pu trouver⁷² cet invariant qui envoie $\{0, 1, \infty\}$ en ∞ , $\{-1, 1/2, 2\}$ en zéro et $\{\rho, \bar{\rho}\}$ en 1:

$$(3.303) \quad j_{0,4}(z) = -\frac{(z+1)^2(2z-1)^2(z-2)^2}{27(z-1)^2z^2}$$

Cet invariant réalise une bijection entre le domaine fondamental $\mathcal{D}_{0,4}$ et $\mathbb{C}$ vu que la résolution de $P(z) = a$ donne lieu à une équation polynomiale de degré 6. Mentionnons enfin qu'il serait intéressant d'exprimer les fonctions de corrélation⁷³ à quatre points des théories à $c \equiv 0 \pmod{24}$, en particulier de la théorie correspondant au module de Frankel-Lepowsky et Meurmann, en fonction de ce paramètre de la même façon que la fonction de partition sur le tore s'exprime en fonction de l'invariant j . De même, dans le cas de la théorie de WZW associée à l'algèbre affine E_8 au niveau $k = 1$, dont la fonction de partition sur le tore est une racine cubique de l'invariant j , on doit pouvoir exprimer les fonctions de corrélation à quatre points en fonction de ce paramètre.

Groupe modulaire.

Pour conclure, nous pouvons donner une description du groupe modulaire de la sphère de Riemann avec quatre points marqués. Elle fait bien entendu intervenir des groupes de tresse suivant les idées de Joan Birman. Nous commençons par le groupe modulaire restreint puis nous donnerons une description du groupe modulaire complet.

Le groupe des difféomorphismes de la sphère avec quatre points marqués se plonge dans le groupe des tresses à quatre brins par la procédure usuelle de Birman:

- Un élément de $\mathcal{M}(0, 4)$ définit un difféomorphisme de S_2 qui est donc homotope à l'identité.
- Cette homotopie définit une tresse à quatre brins, c'est à dire un chemin

$$t \mapsto (z_i(t))_{1 \in \langle 1, 4 \rangle} \in S_2^4$$

où les trajectoires des différents points ne se croisent pas.

Inversement, à partir d'une telle tresse, on reconstruit facilement un chemin dans $\text{Diff}_+(S_2)$ de point de départ 1_{S_2} dont le point d'arrivée est un difféomorphisme normalisant l'ensemble des quatre points considéré. Nous notons

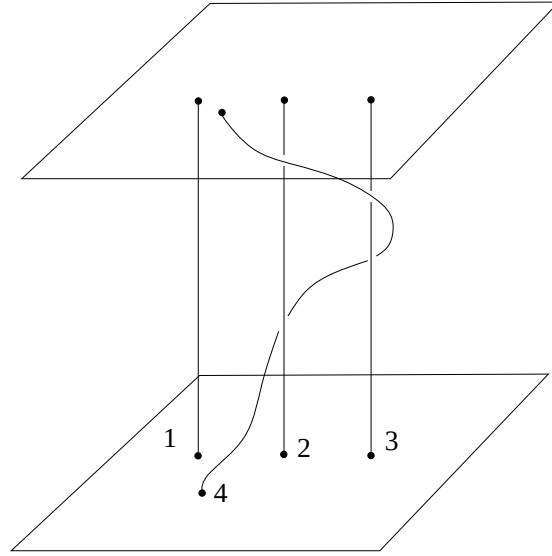
$$\mathcal{I}_{0,4} : \mathcal{B}_{0,4} \rightarrow \mathcal{M}(0, 4)$$

le morphisme que nous venons de construire. Toutefois, $\mathcal{I}_{0,4}$ n'est pas injectif. En effet, le groupe de Lie connexe $SL_2(\mathbb{C})$ agit trois fois transitivement sur la sphère de Riemann et donc, si $f \in \mathcal{M}(0, 4)$, il existe un représentant $\tilde{f}$ de la classe modulaire de f qui stabilise trois points sur quatre. En conséquence, il est beaucoup plus judicieux de définir l'application $\mathcal{I}_{0,4}$ sur le sous-groupe de $\mathcal{B}_{0,4}$ image du groupe

⁷²De l'utilité de MAPLE...

⁷³Il s'agit bien entendu de corrélateurs de descendants vu que le seul état primaire est le vide!

fondamental $\pi_1(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ formé par les tresses où seul le quatrième point bouge:



Ce groupe que nous notons $\pi_{0,3}$ admet une présentation par générateurs et relations. Si $\rho_{0,1,\infty}$ désignent les lacets qui s'enroulent autour des points 0, 1 et ∞ respectivement, alors

$$(3.304) \quad \rho_0 \rho_1 \rho_\infty = 1$$

autrement dit $\pi_{0,3}$ est engendré par deux éléments: c'est le groupe libre à deux générateurs.

Dans l'étude des théories conformes sur le plan, les blocs conformes sur la sphère avec quatre points marqués ont des monodromies autour de trois points. Elles forment une représentation de ce groupe. Cette idée est développée en section 3.6. Remarquons que l'on accède par cette procédure aux difféomorphismes de la sphère qui laissent fixe chacun des quatre points. Ceci n'est pas le groupe modulaire complet qui permute éventuellement les différents points.

Pour finir, il est possible de décrire le groupe modulaire complet. Les résultats de Birman sont extrêmement utiles: il suffit de se reporter au théorèmes 4.3 et 4.5 de [13] pour obtenir ce que nous cherchons:

Théorème 42 (J. Birman) *Le groupe modulaire $\mathcal{M}(0, n)$ admet une présentation par générateurs et relations. Les générateurs sont les $(\omega_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}$ et ils obéissent aux relations:*

$$(3.305) \quad \omega_i \omega_j = \omega_j \omega_i \quad \text{quand } |i - j| \geq 2$$

$$(3.306) \quad \omega_i \omega_{i+1} \omega_i = \omega_{i+1} \omega_i \omega_{i+1}$$

$$(3.307) \quad \omega_1 \dots \omega_{n-2} \omega_{n-1}^2 \omega_{n-2} \dots \omega_1 = 1$$

$$(3.308) \quad (\omega_1 \dots \omega_{n-1})^n = 1$$

où ω_i correspond à une tresse qui échange les points i et $i + 1$.

Nous retrouvons les relations 2.17, 2.18 et 2.19 du chapitre 2 avec en plus l'équation 3.308 qui exprime que l'on a effectué un quotient du groupe des n -tresses sur la sphère par son centre.

– Pour $n = 2$, nous obtenons:

$$(3.309) \quad \mathcal{M}(0, 2) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \quad \mathfrak{M}(0, 2) = \{1\}$$

– Dans le cas $n = 3$, nous voyons que:

$$(3.310) \quad \mathfrak{M}(0, 3) = \{1\} \quad \mathcal{M}(0, 3) = \Sigma_3$$

– Mais le cas qui nous occupe correspond à $n = 4$:

$$(3.311) \quad \mathfrak{M}(0, 4) = \pi_{0,3}$$

$$(3.312) \quad \mathcal{M}(0, 4) = \frac{\pi_1(\mathcal{B}_{0,4})}{\{1, (\omega_1 \dots \omega_{n-1})^2\}}$$

Le lecteur aura remarqué qu'il est facile de fabriquer les générateurs ρ_0 , ρ_1 et ρ_∞ en fonction des générateurs $\omega_{1,2,3}$ du groupe modulaire complet.

Dans la présentation que nous donnons de l'espace des modules $M_{0,4}$, un difféomorphisme peut se comprendre comme un chemin tracé dans l'espace des modules. Les générateurs de $\pi_{0,3}$ sont des lacets autour des points singuliers de $M_{0,4}$. Il est donc relativement facile d'obtenir une description de $\mathcal{M}(0, 4)$ par générateurs et relations grâce à cette méthode. Toutefois, comme nous l'avons vu plus haut, les monodromies autour des différents points ne sont simples à calculer que dans certaines bases. Jusqu'à présent ceci m'a empêché de trouver une interprétation simple des équations de Moore et Seiberg dans ce cadre de travail.

Enfin, j'aimerais mentionner que le travail de description de $M_{0,5}$ selon les mêmes idées n'est pas encore fait. La géométrie semble considérablement plus complexe et riche. Mes premiers et derniers essais ne sont pas présentables ici.

Chapitre 4

Théories associées à un groupe.

Le but de ce chapitre est la discussion des TCR dont les règles de fusion¹ sont les constantes de structure de l'algèbre des représentations d'un groupe fini. Ces théories fournissent des exemples où il est possible de retrouver une partie des données de Moore et Seiberg facilement. Elles nous serviront à illustrer le programme de reconstruction des théories conformes rationnelles tel que l'on peut l'imaginer.

Nous commencerons par discuter le cas général afin de voir les problèmes qui se posent notamment dans le cas où le groupe est non abélien. Nous discuterons dans cette première section quelques résultats partiels. Le cas abélien en revanche ne souffre pas les mêmes contraintes et sera discuté dans la section suivante. Nous verrons comment calculer les matrices S et T facilement et comment déterminer les classes d'équivalence de théories. La troisième section détaillera ces résultats dans le cas d'un groupe cyclique d'ordre N et fera le lien avec des exemples connus.

Pour illustrer la puissance des méthodes de classification des TCR, nous classerons tous les invariants modulaires des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans la quatrième section [34]. Nous présenterons une méthode combinatoire qui ne nécessite aucune connaissance préalable, puis nous verrons que le résultat peut être déduit d'un théorème de Moore et Seiberg [131] sur les TCR. Le cas d'un groupe abélien quelconque sera aussi considéré. Nous discuterons des exemples réalisant certaines des fonctions invariantes modulaires que nous avons obtenues.

4.1 Théories associées à un groupe.

Considérons un groupe fini G . Il admet un nombre fini de représentations linéaires irréductibles [166] de dimension finie $(\pi_i)_i$ parmi lesquelles la représentation triviale π_0 . A toute représentation π , on peut associer la représentation conjuguée $\hat{\pi}$ définie par [166]

$$\forall g \in G, \forall x \in V_\pi^*, \quad \hat{\pi}(g).x = {}^t\pi(g^{-1}).x$$

où ${}^tu$ est la transposée de u . Nous noterons $\pi_{\hat{i}}$ la conjuguée de π_i . Ceci définit une permutation d'ordre 2 sur l'ensemble des représentations irréductibles de G .

Le produit tensoriel de deux représentations de G est encore une représentation de G à cause de l'existence d'un coproduit naturel:

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad (\pi_{i \otimes j})(g) = (\pi_i \otimes \pi_j)(\Delta(g))$$

¹Définies au chapitre précédent.

$\pi_{i \otimes j}$ se décompose sur les représentations irréductibles de G

$$\pi_{i \otimes j} = \bigoplus_k (\mathbb{C}^{N_{i,j}^k} \otimes \pi_k)$$

On peut voir $N_{i,j}^k$ comme la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement entre π_i , π_j et π_k . Nous noterons π_0 la représentation triviale de G . Bien sûr, ces coefficients jouissent des propriétés suivantes:

$$(4.1) \quad N_{i,j,k} = N_{i,j}^{\hat{k}} \text{ symétrique en } i, j \text{ et } k$$

$$(4.2) \quad N_{0,i}^j = \delta_i^j$$

De plus, l'algèbre des représentations de G est engendrée par les représentations irréductibles et est commutative, associative² et unitaire. De ce fait, c'est un bon candidat pour être l'algèbre de Verlinde³ d'une théorie conforme. Nous allons voir dans quels cas on peut effectivement trouver une TICR qui permette de retrouver l'algèbre des représentations de G .

4.1.1 Matrice S .

Le premier pas dans cette reconstruction est la détermination d'une matrice S possible (au sens de l'Appendice 4.A). Nous devons pour cela diagonaliser les matrices $\hat{N}_i$ définies par $(\hat{N}_i)_j^k = N_{i,j}^k$. Soit χ_i le caractère de la représentation π_i de G , c'est une fonction définie sur l'ensemble des classes de conjugaison de G . Il y a autant de classes que de représentations irréductibles de G [166]. Prenons une indexation des classes par les représentations de G : $i \mapsto C_i$, et qui vérifie

$$C_0 = \mathbf{1}_G, \quad C_i = C(x) \Rightarrow C_{\hat{i}} = C(x^{-1}).$$

Posons alors

$$(4.3) \quad S_i^j = \sqrt{\frac{|C_i|}{|G|}} \chi_i(C_j)$$

où $|X|$ désigne le cardinal (ou ordre dans le cas d'un groupe) de l'ensemble X . Cette matrice est unitaire d'après les relations d'orthogonalité des caractères [166]. De plus, on sait que $\chi_i(g^{-1}) = \chi_i(g)^*$ et donc $S_i^j = (S_i^j)^*$. De plus, $S_i^0 = \sqrt{|C_i|/|G|} \dim(\pi_i)$ est un réel strictement positif. Toutefois, cela ne suffit pas pour avoir une matrice S possible. L'obstruction principale est la symétrie de S . Il n'existe pas en général de correspondance privilégiée entre les classes et les représentations irréductibles d'un groupe et donc en général, S ne sera pas symétrique!!

Tout ceci nous conduit à la définition suivante:

Définition 55 *Un groupe fini G est dit auto-dual si et seulement si il existe une indexation de ses caractères irréductibles par ses classes de conjugaisons C_i telle que:*

$$\sqrt{|C_j|} \chi_i(C_j) = \sqrt{|C_i|} \chi_j(C_i)$$

et qui vérifie:

$$C_0 = \mathbf{1}_G, \quad C_i = C(x) \Rightarrow C_{\hat{i}} = C(x^{-1}).$$

²Par suite des propriétés correspondantes du produit tensoriel.

³Voir page 192.

Nous verrons dans la section suivante le cas des groupes commutatifs. Toutefois, il est évident que:

Proposition 17 *Tout groupe abélien fini est auto-dual.*

Avant d’aller plus loin, donnons quelques exemples de groupes non commutatifs pour lesquels aucune correspondance entre les classes et les représentations ne produit une matrice S symétrique.

- Soit Σ_n le groupe symétrique sur $n \geq 3$ éléments [140]. Si la matrice S définie en 4.3 est symétrique, alors $S_0^i = S_i^0$ entraîne que $|C_i| = (\dim(\pi_i))^2$ est un *carré*. Pour prouver que Σ_n ne peut fournir une matrice S symétrique, nous allons montrer que les éléments d’ordre n de Σ_n définissent des classes dont le cardinal n’est pas un carré. Cherchons le nombre d’éléments dans la classe d’un cycle de longueur n . Pour cela nous devons chercher l’ordre du stabilisateur de ce cycle. Le stabilisateur n’est autre que le groupe engendré par le cycle. Il est d’ordre n et donc le cardinal de la classe est $(n-1)!$. Cette classe est en fait formée des cycles de longueur n et il y en a bien $(n-1)!\dots$ Mais $n!$ n’est pas un carré pour $n > 2$. En effet, le plus grand nombre premier p divisant $n!$ est aussi le plus grand nombre premier inférieur à n . Dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$, il ne peut apparaître qu’à la puissance 1 car sinon, il existerait un multiple kp de p inférieur à n . Mais alors d’après le théorème de Bertrand [92, Théorème 418], il existe un nombre premier p' tel que $p < p' < 2p \leq kp \leq n$ ce qui contredit la maximalité de p . En conclusion, Σ_n n’est pas auto-dual pour $n > 2$.
- Soit A_n le groupe alterné sur n éléments, le même genre de raisonnement s’applique. Le lecteur vérifiera que dans le cas où n est impair, la classe de conjugaison d’un cycle de longueur n est de cardinal $(n-1)!/2$ qui n’est pas un carré⁴ dès que $n \geq 3$. Dans le cas où n est pair, les cycles de longueur n ne sont plus dans le groupe alterné. Nous considérons les cycles de longueur $n-1$ et le cardinal de la classe d’un tel cycle est $(n-2)!/2$ qui n’est pas un carré dès que $n \geq 4$. La présence du facteur 2 est due au caractère pair des permutations considérées. Plus précisément, l’ordre du stabilisateur n’est pas divisé par deux car c’est toujours le groupe engendré par le cycle mais l’ordre du groupe alterné est la moitié de celui du groupe symétrique!
- Il existe 26 groupes simples dits sporadiques et leur table de caractères a été calculée ainsi que les cardinaux des classes de conjugaison [27]. Le lecteur vérifiera “expérimentalement” qu’aucun de ces groupes ne convient!
- Soit p un nombre premier et G un groupe d’ordre p^2 , comme G est un p -groupe, son centre $Z(G)$ est non trivial. Si G est non abélien, ce centre est un groupe d’ordre p [140] donc est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Un lemme permet alors de conclure:

Lemme 4 *Soit G un groupe fini tel que $G/Z(G)$ soit cyclique, alors G est abélien.*

Preuve: En effet, soit a un représentant d’un générateur de $G/Z(G)$ dans G , prenons $g \in G$. Il existe $h_g \in Z(g)$ et $k_g \in \mathbb{Z}$ tel que $g = h_g a^{k_g}$. Nous avons

$$gg' = h_g a^{k_g} h_{g'} a^{k_{g'}} = h_g h_{g'} a^{k_g + k_{g'}} = h_{g'} a^{k_{g'}} h_g a^{k_g} = g'g.$$

⁴Il suffit de se rappeler de la démarche suivie pour montrer que $n!$ n’est pas un carré: le plus grand diviseur premier de $n!$ apparaît avec une puissance impaire!

En conséquence, G est commutatif et le groupe $G/Z(G)$ est trivial⁵. $\square$

- Soit G un groupe non commutatif d'ordre p^3 . Là encore, le centre est non trivial et d'ordre p ou p^2 . Dans le second cas, l'ordre du groupe $G/Z(G)$ est p et donc le même argument que précédemment fonctionne. L'autre cas se résoud grâce à l'équation aux classes

$$(4.4) \quad |G| = |Z(G)| + \sum_{C_i; |C_i| > 1} |C_i|.$$

Si le cardinal des classes de conjugaison est un carré, 4.4 devient

$$p^3 = p + mp^2$$

où m est le nombre de classes de cardinal p^2 . Modulo p^2 , cela nous donne $p \equiv 0 \pmod{p^2}$ ce qui est absurde. Donc un groupe d'ordre p^3 dont les cardinaux des classes de conjugaison sont des carrés est commutatif.

- Prenons un groupe d'ordre p^2q non commutatif dont les cardinaux des classes sont des carrés, l'ordre de son centre peut valoir p , p^2 , pq ou 1. Dans les trois premiers cas, le groupe quotient $G/Z(G)$ a pour ordre respectif pq , q , p et se trouve donc être commutatif et le Lemme 4 permet d'éliminer ces trois cas. Dans le dernier cas, l'équation aux classes devient

$$p^2q = 1 + mp^2$$

ce qui élimine aussi ce cas. Finalement, les groupes d'ordre p^2q auto-duaux sont commutatifs.

- De même, on peut montrer que le même résultat est vrai pour les groupes d'ordre p^3q . Les seuls cas non résolus par le Lemme 4 sont donnés par les valeurs suivantes de $|Z(G)|$: p , pq et 1. Si m est le nombre de classes de cardinaux p^2 , les équations aux classes dans chacun de ces trois cas sont respectivement:

$$\begin{aligned} p^3q &= p + mp^2 \\ p^3q &= pq + mp^2 \\ p^3q &= 1 + mp^2 \end{aligned}$$

qui n'ont clairement pas de solutions entières en m . Ceci montre le résultat.

Nous pourrions multiplier les exemples du même tonneau et éliminer des classes entières de groupes sur le critère des cardinaux des classes de conjugaison. Néanmoins, cette condition nécessaire d'auto-dualité n'est pas suffisante comme en témoigne l'exemple suivant dû à C. De Calan.

Nous partons d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ [80][167][174]. Soit G le produit semi-direct [140] des groupes $(\mathbb{F}_q^*, \times)$ et $(\mathbb{F}_q^2, +)$ défini par l'action suivante de $\mathbb{F}_q^*$ sur $\mathbb{F}_q^2$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \psi : \mathbb{F}_q^* \times (\mathbb{F}_q^2) &\longrightarrow \mathbb{F}_q^2 \\ (a, x) &\longmapsto ax \end{aligned}$$

⁵La preuve ne marche pas pour $G/Z(G)$ abélien non cyclique car dans ce cas $G/Z(G)$ est engendré par plusieurs éléments dont on doit faire commuter les représentants ce qui introduit des éléments du centre. Ceci nous empêche d'identifier gg' et $g'g$.

La loi de composition est définie par:

$$\forall((a, x); (b, y)) \in (\mathbb{F}_q^* \times (\mathbb{F}_q^2))^2, \quad (a, x)(b, y) = (ab, x + ay)$$

et l'élément neutre est $(1, 0)$. L'inverse de (a, x) est bien sûr $(a^{-1}, -a^{-1}x)$. Bien entendu, ce groupe n'est pas abélien et il est facile de trouver toutes ses classes de conjugaison. En effet, si (a, x) et (b, y) sont deux éléments de G ,

$$(a, x)(b, y)(a, x)^{-1} = (ab, x + ay)(a^{-1}, -a^{-1}x) = (b, x(1 - b) + ay)$$

Différents cas se présentent:

- Si $y = 0$ et $b \neq 1$, alors les éléments de la classe de $(b, 0)$ sont tous de la forme $(b, x(1 - b))$ avec $x \in \mathbb{F}_q^2$. Dans ce cas, comme $b \neq 1$, $1 - b$ est non nul modulo q et donc le cardinal de la classe vaut q^2 .
- Si $b = 1$ et $y \neq 0$, alors dans ce cas, les éléments de la classe de $(1, y)$ sont tous de la forme $(1, ay)$ et cette classe est donc de cardinal $q - 1$.
- Si $y \neq 0$ et $b \neq 1$, alors la classe est de cardinal q^2 car $x(1 - b) + ay$ parcourt $\mathbb{F}_q^2$ quand x décrit $\mathbb{F}_q^2$.

Pour que les cardinaux des classes soient des carrés, il faut donc que $q - 1$ soit un carré. C'est par exemple [167, Chapitre 1] le cas avec $q = 5$ et $q = 17$. Comme le groupe multiplicatif d'un corps est cyclique [167][140], on a donc construit un groupe d'ordre $(p_1 p_2)^2$ dont les cardinaux des classes soient des carrés:

$$\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \left(\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \right)^2$$

Un camarade désirant garder l'anonymat a montré que ce groupe n'était pas autodual.

4.1.2 Vers de nouvelles théories conformes?

Nous espérons avoir persuadé le lecteur que la classification des groupes auto-duaux non abéliens n'est pas évidente et reste un problème ouvert actuellement. Raphaël Rouquier a analysé ce problème et a trouvé des exemples de groupes auto-duaux non abéliens mais pas de classification générale. Nous allons ici citer quelques uns de ces résultats partiels mais néanmoins très intéressants. Nous les citons sans preuve en renvoyant le lecteur au rapport de R. Rouquier [157]. Cette section est en fait une ébauche d'un travail qui reste à faire.

Tout d'abord, il convient de remarquer que pour obtenir des renseignements sur le groupe, nous devons traduire sur le groupe lui-même les propriétés de la table de caractère. Ceci est obtenu grâce à la proposition suivante:

Proposition 18 *Soit H et K distingués dans G . Nous définissons H^* par:*

$$(4.6) \quad H^* = \bigcap_{i / C_i \subset H} \ker(\chi_i)$$

et nous avons:

$$\begin{aligned} H^{**} &= H \\ |H||H^*| &= |G| \\ \text{Si } H \subset K, \text{ alors } &K^* \subset H^* \\ (H \cap K)^* &= H^* \cup K^* \end{aligned}$$

En clair, nous disposons d'une involution sur l'ensemble des sous-groupes distingués de G . Ceci permet de démontrer quelques propriétés des groupes auto-duaux :

Proposition 19 *Soit G un groupe auto-dual, DG son groupe dérivé, alors $Z(G)^* = DG$ et $Z(G) \simeq G/DG$.*

Enfin, on peut se demander si un groupe autodual est nilpotent ou non. Si la réponse est affirmative, alors, c'est un produit direct de p -groupes qui sont à leur tour auto-duaux. La classification des p -groupes auto-duaux est sans doute moins inabordable que le problème général. Pour les longues soirées d'hiver :

Problème ouvert 4 *Tout groupe auto-dual est-il nilpotent?*

Une réponse partielle a été apportée par M. Isaacs. Lors d'un séjour à Chicago, R. Rouquier a posé le problème à celui-ci. Le résultat obtenu par Isaacs est le suivant :

Théorème 43 (M. Isaacs) *Tout groupe autodual résoluble est nilpotent.*

Enfin, citons des exemples de groupes auto-duaux non commutatifs :

Théorème 44 (R. Rouquier) *Un groupe G tel que :*

$$1 \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}} \rightarrow G \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^3\mathbb{Z}} \rightarrow 1$$

est auto-dual.

L'autre exemple est nettement moins intuitif et nécessite quelques définitions. Soit $n \in \mathbb{N}$ et θ un automorphisme non trivial du corps fini $\mathbb{F}_{2^n}$. Nous utilisons le groupe de Heisenberg $A(n, \theta)$ donné comme étant le sous groupe de $PSL_3(\mathbb{F}_{2^n})$ formé des matrices de la forme :

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & \theta(a) & 1 \end{pmatrix} \quad (a, b) \in (\mathbb{F}_{2^n})^2$$

Son ordre est 2^{2n} et nous disposons du résultat suivant :

Théorème 45 (R. Rouquier) *Si $n \geq 3$, alors si θ et θ' sont non inverses l'un de l'autre, les algèbres de groupe de $A(n, \theta)$ et $A(n, \theta')$ sont isomorphes sans que les groupes le soient. De plus ces groupes sont autoduaux.*

Il est intéressant de noter que ces groupes non isomorphes ont la même table de caractères.

Bien sûr, il importe alors de voir si un tel groupe peut être utilisé pour reconstruire une théorie conforme. Pour cela, il faut résoudre l'équation $(ST)^3 = 1$. Ce travail n'a pas encore été mené à son terme. Si la matrice T existe, alors il faut aller encore plus loin et tenter de trouver une matrice F et les matrices Ω et Θ définies dans le chapitre précédent. Je n'ai pas résolu le problème compte tenu des difficultés techniques que cela présentait.

4.2 Le cas abélien.

Le cas des groupes abéliens ne souffre pas de cette obstruction (cf Proposition 17). Rappelons tout d'abord que tout groupe abélien fini est un produit de groupes finis cycliques [123]:

$$G \simeq \prod_{i=1}^n \frac{\mathbb{Z}}{N_i \mathbb{Z}}.$$

Un élément g de G sera noté $(g_1, \dots, g_n)$ où g_i est un entier modulo N_i . Nous définissons alors

$$\forall (g, g') \in G^2, \quad \langle g, g' \rangle = \sum_{i=1}^n g_i g'_i / N_i \pmod{1}$$

et la représentation irréductible associée à l'élément g est définie par

$$g' \longrightarrow \exp(2\pi i \langle g, g' \rangle).$$

En conséquence

$$N_{g, g'^{g''}} = \delta_{g+g'^{g''}}.$$

et les valeurs propres de $\hat{N}_g$ sont les $\exp(2\pi i \langle g, g' \rangle)$ pour g' dans G . Une matrice S possible est donnée par

$$S_g^{g'} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \exp(2\pi i \langle g, g' \rangle).$$

En conséquence, d'après le Théorème 51 qui classe toutes les matrices S possibles à règles de fusion fixées, pour toute matrice S possible, il existe un automorphisme σ de l'algèbre de fusion considérée tel que:

$$(4.8) \quad S_g^{g'} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \exp(2\pi i \langle g, \sigma(g') \rangle)$$

Bien sûr σ définit un automorphisme de G car dans le cas abélien, l'algèbre des représentations est isomorphe à l'algèbre du groupe. Un tel automorphisme est défini par $B_{i,j} \in \mathbb{Z}/(N_i \wedge N_j)\mathbb{Z}$:

$$\sigma(g) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{B_{i,j} g_j}{(N_i \wedge N_j)} \right)_i$$

et il est utile de noter $K(g, g') = \langle g, \sigma(g') \rangle$. La symétrie de $\exp(2\pi i K(g, g'))$ se traduit par la symétrie de B .

On peut alors obtenir les dimensions des opérateurs et la charge centrale. Pour cela, nous allons chercher les matrices T possibles de ce modèle en résolvant $(ST)^3 = \mathbf{1}$. Si nous écrivons cette relation explicitement sous la forme $STS = (TST)^{-1}$, nous avons:

$$(4.9) \quad e^{2\pi i \frac{c}{8}} e^{-2\pi i (h_g + h_{g'} + K(g, g'))} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{k \in G} e^{2\pi i (h_k + K(g + g', k))}$$

et nous notons $\exp(2\pi i h_g) = \psi_g \exp(i\pi K(g, g))$. Avec $h_0 = 0$ et $h_{-g} = h_g$, $2h_g \equiv K(g, g) \pmod{1}$; et donc, $\psi_g = \pm 1$. Ceci nécessite un choix de représentants de $B_{i,j}$ modulo $2(N_i \wedge N_j)$. Tout changement $B_{i,j} \rightarrow B_{i,j} + W_{i,j}(N_i \wedge N_j)$ où $W_{i,j}$ sont entiers, est compensé dans une redéfinition de ψ_g par un signe.

En conséquence, nous allons choisir des représentants de la classe de $B_{i,j}$ qui aient de bonnes propriétés. Nous imposons en particulier que $B_{i,j} = B_{j,i}$ dans $\mathbb{Z}$ et pas seulement dans $\mathbb{Z}/(N_i \wedge N_j)\mathbb{Z}$! L'équation 4.9 devient alors:

$$(4.10) \quad \psi_g \psi_{g'} e^{2\pi i \frac{g}{8}} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{k \in G} \psi_k e^{i\pi K(k+g+g', k+g+g')}$$

Nous choisissons $B_{i,i}$ pair quand N_i est impair⁶. Ceci rend $\exp(i\pi K(g, g))$ insensible aux choix des représentants des g_i . Alors, nous voyons que $\psi_{-g} = \psi_g$ et $\psi_{g+u} = \psi_g$ où u est un vecteur de $\mathbb{Z}^n$ qui représente l'élément neutre de G . En conséquence, l'équation 4.10 prise à $g' = 0$ donne

$$\psi_g e^{2\pi i \frac{g}{8}} = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{k \in G} \psi_k e^{i\pi K(k+g, k+g)}$$

et donc $\psi_g \psi_{g'} = \psi_{g+g'}$. Donc, $g \mapsto \psi_g$ définit un morphisme ψ de G dans $\{-1, 1\}$. Il est entièrement déterminé par ses valeurs sur les générateurs de G . Soient $g^{(j)} = (\delta_i^j)_i$ les générateurs de G , on a $\psi(g^{(j)}) = 1$ si N_i est impair et $\psi(g^{(j)}) = \pm 1$ dans le cas contraire. Théoriquement, nous pouvons écrire toutes les matrices S et T des théories associées à un groupe abélien. Toutefois, il n'est pas du tout facile de faire ce travail explicitement!

Pour se convaincre de la difficulté du problème, le lecteur remarquera que nous pouvons nous ramener au cas des p groupes abéliens. Remarquons que si σ est un automorphisme de G , en utilisant la décomposition de G sous la forme de produits de facteurs cycliques eux-mêmes décomposables en produits de p groupes abéliens:

$$(4.11) \quad G = \prod_p \left(\prod_{\alpha} \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{\alpha}\mathbb{Z}} \right)^{n_{\alpha}} \right)$$

nous pouvons voir que σ laisse stable chaque “ p -composante” de G

$$G_p = \prod_{\alpha} \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{\alpha}\mathbb{Z}} \right)^{n_{\alpha}}$$

En conséquence, nous pouvons obtenir la matrice S sous forme d'un produit tensoriel de matrices S relatives à chacune des p -composantes de G .

Toutefois, trouver tous les automorphismes d'un p -groupe abélien n'est pas très facile. Ainsi, il est bien connu que [140][168]

$$\text{Aut} \left(\left(\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} \right)^n \right) = GL_n(\mathbb{F}_p)$$

et que dans le cas de $(\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z})^n$, ce groupe est décrit par les matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}$ dont la réduite modulo p est inversible. Dans le cas où plusieurs puissances de p apparaissent, cela devient rapidement inextricable comme le lecteur s'en convaincra. Je n'exclue pas de pouvoir arriver à mettre un peu d'ordre dans tout cela mais ce n'est pas encore fait. A défaut d'un résultat exhaustif, nous présentons deux exemples simples où les matrices S et T peuvent être explicitement évaluées.

4.3 Deux exemples choisis.

Les groupes considérés ici sont d'une part le groupe cyclique dont on connaît facilement les automorphismes et d'autre part le groupe $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ pour lequel l'arithmétique sur le corps fini $\mathbb{F}_p$ est d'un grand secours.

⁶En décalant $B_{i,i}$ de N_i si besoin est!

4.3.1 Théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Matrices S et T .

Le cas le plus simple est celui d'un groupe cyclique $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Tout est calculable explicitement et nous allons donner les résultats pour les matrices S et surtout T . Le lecteur vérifiera ces calculs qui sont par ailleurs explicités dans [32]. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, il importe de distinguer suivant la parité de N . Nous introduisons aussi les sommes de Gauss définies par:

$$(4.12) \quad S_N(a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \exp(2\pi i \frac{ak^2}{N})$$

où on se limitera à a inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Alors on obtient:

N pair Dans ce cas, a est impair. Nous avons donc deux possibilités:

$$(4.13) \quad h_k \equiv \frac{an^2}{2N} \pmod{1}, \quad e^{2\pi ic/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{2N}(a)$$

et

$$(4.14) \quad h_k \equiv \frac{an(N+n)}{2N} \pmod{1}, \quad e^{2\pi ic/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{2N}(a) \exp(-\frac{2\pi i Na^{-1}}{8})$$

Ces deux possibilités peuvent se décrire d'une seule manière en prenant a modulo $2N$.

N impair Ici, a est pris modulo $2N$ et est pair. Soit $b = a/2$ modulo N . Nous avons une seule solution:

$$(4.15) \quad h_n \equiv \frac{an^2}{2N} \pmod{1}, \quad \exp(2\pi i \frac{c}{8}) = S_N(b)$$

Finalement, nous obtenons la liste complète des matrices S et T possibles:

Théorème 46 *Les dimensions modulo 1 et la charge centrale modulo 8 d'une théorie $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dont la matrice S est*

$$(4.16) \quad S_n^m = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(2\pi i \frac{anm}{N})$$

avec a inversible modulo N sont décrites par les équations 4.13 et 4.14 pour N pair et 4.15 pour N impair.

Equivalences entre matrices S .

Enfin, le problème de l'équivalence entre les théories est explicitement soluble. Il suffit de déterminer l'ensemble

$$\frac{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(2)}}$$

des inversibles de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ modulo les carrés de cet anneau. Ce problème est facile à résoudre pourvu que l'on dispose de quelques techniques arithmétiques élémentaires. Comme des équations quadratiques sur des anneaux quotients de $\mathbb{Z}$ apparaîtront aussi dans la prochaine section, nous avons regroupé ces

rappels dans l'Appendice 4.B. Le lecteur intéressé y trouvera les détails nécessaires. Rappelons seulement les résultats.

Théorème 47 Soit $N = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_j}$ la décomposition de N en facteurs premiers, alors:

$$\frac{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(2)}} \simeq \prod_{j=1}^k \frac{U(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})^{(2)}}$$

et si p est premier impair,

$$\frac{U(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^{(2)}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Dans le cas $p = 2$,

$$\begin{aligned} U(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) &= U(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(2)} = \{1\} \\ \frac{U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{(2)}} &= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \forall \alpha \geq 3, \alpha \in \mathbb{Z}; \quad \frac{U(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^{(2)}} &= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2. \end{aligned}$$

Il y a donc $2^{I(N)}\alpha(N)$ possibilités inéquivalentes de matrices S et T , $I(N)$ étant le nombre de facteurs premiers impairs de N et $\alpha(N)$ étant 1, 2 ou 4 suivant que 2 apparaît à la puissance 0 ou 1, respectivement 2, respectivement 3 ou plus dans la décomposition en facteurs premiers de N .

Exemples.

Il est possible d'identifier quelques modèles connus. En effet, nous avons vu dans la section 3.4.5 du chapitre 3 le cas du modèle Gaussien compactifié sur un cercle de rayon carré rationnel: $R^2/2 = p/q$. Les règles de fusion sont celles d'une théorie $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ avec $N = 2pq$. Cela correspond au cas N pair, $a = 1$ et $h_n \equiv n^2/2N \pmod{1}$ et $c = 1$.

On peut aussi regarder les modèles de WZW au niveau 1 qui sont réalisés comme modèles Gaussiens sur le tore de Cartan de l'algèbre de Lie de dimension finie du modèle [97]. Les différents exemples sont

- Les modèles WZW sur $SU(N)$ au niveau 1 correspondent à $c = N - 1$ et $h_n = n(N - n)/2N$ et $a = N - 1$. Claude Itzykson a calculé à partir de la formule de caractères de Kac [101] les matrices S et T de ces théories [97]. La section suivante classe tous les invariants modulaires des théories rationnelles par rapport à l'algèbre $A_N^{(1)}$ de niveau 1. Dans le cas de $SU(3)$, la charge centrale vaut $c = 2$ et les dimensions valent $0, 1/3, 1/3$. Les règles de fusion sont du type $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Les “trois sœurs” E_6 , E_7 et E_8 donnent aussi des exemples illustrant notre classification⁷. Nous considérons les modèles de WZW sur ces trois algèbres au niveau 1. Nous avons:

E_6 Les règles de fusion sont de type $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et la charge centrale est $c = 6$ avec $N = 3$ et $a = 1$. Les dimensions sont $0, 2/3, 2/3$.

E_7 Les règles de fusion sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $c = 7$, $h = 0, 3/4$.

⁷Je remercie E. Verlinde pour m'avoir signalé ces exemples en 1989.

E_8 On a $N = 1$ avec un seul champ primaire de dimension 0 et $c = 8$. Si on dispose d'une TCR dont les règles de fusion sont $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, on peut en tensorisant par E_8 niveau 1 augmenter la charge centrale de 8 sans modifier les dimensions des champs primaires et la matrice S . Le caractère de E_8 niveau 1 est la racine cubique de la fonction $j(\tau)$ ce qui explique ses propriétés modulaires (voir par exemple [85]).

On aimerait regarder toutes les théories rationnelles basées sur un modèle gaussien qui ont les règles de fusion d'un groupe cyclique. On peut se demander si cela épuise toutes les possibilités inéquivalentes de matrices S et T . Le problème posé est le suivant:

Problème ouvert 5 *Est ce que toutes les matrices S et T trouvées en 4.2 sont réalisées physiquement? Si oui, quel est l'ensemble des modèles qui correspond à S et T données?*

Je n'ai pas la réponse à ces questions.

4.3.2 Théories $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$.

Il existe un autre cas facile à résoudre, c'est celui où $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. En effet, nous disposons d'une classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$ qui remonte au siècle dernier[81]. La classification des matrices S possibles revient en effet à classer toutes les classes d'équivalence de matrices $K \in M_n(\mathbb{F}_p)$ symétriques, de déterminant non nul, modulo la relation d'équivalence $M' \simeq {}^t\Sigma K \Sigma$ où $\Sigma \in GL_n(\mathbb{F}_p)$. La classification des formes quadratiques modulo p est donnée par:

Théorème 48 (K. F. Gauss) *En caractéristique impaire, une forme quadratique non dégénérée sur $(\mathbb{F}_p)^n$ est équivalente à:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

où $a \neq 0$ est défini modulo un carré de $\mathbb{F}_p$.

Dans ce cas, cela signifie qu'il existe une indexation des champs par des n -uplets de $\mathbb{F}_p$ tels que

$$(4.17) \quad S_{(x_i)_i}^{(y_i)_i} = \frac{1}{\sqrt{p^n}} \exp \left(2\pi i \frac{x_1 y_{n-1} + \cdots + x_{n-1} y_1 + a x_n y_n}{p} \right)$$

Pour évaluer les dimensions des opérateurs et la charge centrale, nous prenons a modulo p^2 pair, ce qui est toujours possible car ici, p est impair. Ceci nous donne donc:

$$(4.18) \quad h_{(x_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}} \equiv \frac{(p-1)(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2) + a x_n^2}{2p^2} \pmod{1}$$

La charge centrale modulo 8 est donnée par un produit de sommes de Gauss:

$$(4.19) \quad e^{2\pi i c/8} = \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i k^2/2p} \right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{p-1} e^{2\pi i a k^2/2p} \right)$$

Nous avons vu dans l'Appendice 4.B comment évaluer ces sommes, la formule 4.75 nous donne alors la charge centrale de ces modèles:

- Si a est un carré modulo p , alors

$$(4.20) \quad c \equiv \frac{n(p^2 - 1)}{2} + 2(1 - p) \pmod{8}$$

- Si a n'est *pas* un carré modulo p , alors

$$(4.21) \quad c \equiv 4 + \frac{n(p^2 - 1)}{2} + 2(1 - p) \pmod{8}$$

Je n'ai pas d'exemple nouveau qui relève explicitement des considérations ci-dessus. Toutefois, il convient de remarquer qu'en fait, le nombre de théories $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ inéquivalentes au niveau des matrices S et T est indépendant de n ce qui peut sembler surprenant. Cela est dû au fait que le groupe $\text{Aut}((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n)$ n'est autre que $GL_n(\mathbb{F}_p)$ dans lequel se trouvent des transformations qui ne sont pas des produits d'automorphismes de chacun des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Remarque : Pour aller plus loin, il nous faudrait chercher les matrices F , $\Omega(\pm)$ et $\theta(\pm)$ de Moore et Seiberg. Dans le cas des théories de type groupe abélien, ce problème se résout grâce à la cohomologie du groupe sous jacent [130]. Mais la cohomologie d'un produit de groupes n'est pas toujours donnée par la cohomologie des différents facteurs du produit⁸. Il n'est donc pas exclu que des phénomènes compliqués se produisent dans le cas considéré ci-dessus dès que l'on s'attache à calculer explicitement les matrices F . Parmi les perversités possibles, on peut trouver plusieurs matrices F , $\Omega(\pm)$ et $\Theta(\pm)$ pour S et T de la liste précédente. Il se peut aussi qu'il n'en existe aucune. Je n'ai pas exploré plus avant ces perspectives.

Il serait aussi extrêmement intéressant de regarder ce qui se passe dans l'exemple $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^n$ pour $\alpha > 1$. Il serait intéressant de savoir exactement ce qui se passe dans ces cas (relativement) simples ne serait-ce qu'au niveau des matrices S et T puis, dans un deuxième temps, des autres données de Moore et Seiberg. $\square$

4.4 Classification des invariants modulaires des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Nous allons ici trouver toutes les expressions possibles des fonctions de partition sur le tore des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en termes des caractères de l'algèbre chirale. Une telle fonction de partition est de la forme [21]

$$Z = \sum_{(n,m) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} N_{n,m} \chi_n(\tau) \bar{\chi}_m(\bar{\tau})$$

où $N_{n,m} \in \mathbb{N}$ est la multiplicité du champ (n, m) et par unicité du vide $N_{0,0} = 1$. Introduisons d'abord les matrices $\Omega^{(\delta)}$. Soit $n = N$ si N est impair, $N/2$ dans le cas contraire et δ un diviseur de n ; on pose $\alpha = \delta \wedge (n/\delta)$. Il existe alors $(a', b') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a'n/\delta\alpha - b'\delta/\alpha = 1$ et on définit $\omega(\delta) = a'n/\delta\alpha + b'\delta/\alpha \pmod{N/\alpha^2}$. La matrice $\Omega^{(\delta)}$ est définie par⁹ [19]

$$(4.22) \quad \Omega_{\lambda, \bar{\lambda}}^{(\delta)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \text{ ou } \bar{\lambda} \text{ est non nul mod } \alpha, \\ \sum_{\xi \in \mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}} \delta_{\bar{\lambda}, \omega(\delta)\lambda + \xi N/\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

⁸Ph. Roche, D. Altschüler et A. Coste ont eux aussi été gênés par ce problème.

⁹Dans le cas N impair, changer (a', b') change $\omega(\delta)$ d'un multiple de $2N/\alpha^2$ mais seul compte la congruence modulo N/α^2 pour calculer $\Omega^{(\delta)}$.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème de classification des invariants modulaires [34]:

Théorème 49 *Les fonctions de partition invariantes modulaires des théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sont de la forme:*

$$(4.23) \quad Z_\delta(\tau) = \sum_{(\lambda, \bar{\lambda}) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2} \Omega_{\lambda, \bar{\lambda}}^{(\delta)} \chi_\lambda(\tau) \overline{\chi_{\bar{\lambda}}(\tau)}, \quad \delta|n$$

Remarquons que ce résultat est *indépendant* de a et de la solution prise pour T à N fixé!!! Nous allons obtenir ce théorème par deux méthodes distinctes. L'une d'elle utilise les résultats de Moore et Seiberg [131] sur les TICR et donne le résultat rapidement; l'autre ne repose sur aucun bagage préalable et est une démonstration combinatoire directe [34]. Avant de décrire ces démarches, il est bon de rappeler le formalisme utilisé.

Notons (χ_λ) les caractères de notre théorie, la fonction de partition sur le tore est de la forme $Z = \sum \hat{N}_{\lambda, \bar{\lambda}} \chi_\lambda \overline{\chi_{\bar{\lambda}}}$ avec les multiplicités $\hat{N}_{\lambda, \bar{\lambda}} \in \mathbb{N}$. L'invariance modulaire de Z est équivalente aux équations:

$$(4.24) \quad S^\dagger \hat{N} S = \hat{N}, \quad T^\dagger \hat{N} T = \hat{N}$$

et l'unicité du vide donne $\hat{N}_{0,0} = 1$. Bien sûr la phase due à la charge centrale ne joue aucun rôle ici et nous l'oublions.

4.5 Preuve directe.

Notre méthode est une adaptation des techniques utilisées par Cappelli, Itzykson et Zuber dans la classification *ADE* des modèles minimaux [97]. Nous allons tout d'abord résoudre l'équation 4.24 avec $\hat{N} \in M_N(\mathbb{C})$ et obtenir un espace vectoriel appelé commutant et noté¹⁰ C_a . Puis nous imposerons les conditions d'intégralité et de positivité $\hat{N}_{\lambda, \lambda'} \in \mathbb{N}$ et $\hat{N}_{0,0} = 1$.

4.5.1 Recherche du commutant.

Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur $M_N(\mathbb{C})$ par

$$\begin{aligned} \hat{N} &\rightarrow S^\dagger \hat{N} S \\ \hat{N} &\rightarrow T^\dagger \hat{N} T \end{aligned}$$

et le commutant est le sous espace des invariants sous $SL_2(\mathbb{Z})$. Pour le trouver, nous allons d'abord exhiber une base où la trivialité de l'action de $M \in \Gamma_{2N}$ est manifeste. Rappelons que les $(P^k \bar{Q}^l)_{k,l}$ avec $(k,l) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ et

$$P_{\lambda, \lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'+1} \quad \bar{Q}_{\lambda, \lambda'} = \delta_{\lambda, \lambda'} \exp(2\pi i a \lambda / N)$$

forment une base de $M_N(\mathbb{C})$. Alors, il est facile de montrer que

$$(4.25) \quad \forall \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \quad \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \cdot P^k \bar{Q}^l = \exp\left(2\pi i \frac{a}{2N} (\bar{a} \bar{b} k^2 + \bar{c} \bar{d} l^2 + 2\bar{b} \bar{c} k l)\right) P^{\bar{a}k + \bar{c}l} \bar{Q}^{\bar{b}k + \bar{d}l}$$

¹⁰ S et T dépendent de a .

ce qui montre que Γ_{2N} agit trivialement. Bien sur, a est pris modulo $2N$. De ce fait, l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur les caractères se réduit à celle d'un de ses quotients d'indice fini. Les invariants s'obtiennent en moyennant sur le groupe Γ^{2N} les $P^k \bar{Q}^l$. Pour avoir une famille libre, il faut restreindre $(k, l) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ à un domaine fondamental sous l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ puis s'assurer que la moyenne considérée n'est pas nulle. En effet, soit G fini agissant sur un espace vectoriel V , $(X_i)_i$ une famille libre de vecteurs de V telle que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.X_i = \sum_{j \in O_i} \alpha_j^i e_j$$

où les e_j sont des vecteurs d'une base de V et les O_i forment une partition de l'ensemble des vecteurs de cette base. Nous supposons que pour chaque i , un α_j^i est non nul¹¹, alors $\sum_{i,g} (\lambda_i/|G|)g.X_i = 0$ force la nullité de tous les λ_i , c'est à dire l'indépendance linéaire des moyennes des X_i . Dans notre contexte, nous obtenons grâce à cette remarque une base du commutant:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\Gamma^{2N}|} \sum_{A \in \Gamma^{2N}} A.\bar{Q}^{2\delta}, \quad \delta|n, \quad \text{pour } N \text{ pair} \\ & \frac{1}{|\Gamma^N|} \sum_{A \in \Gamma^N} A.\bar{Q}^\delta, \quad \delta|n, \quad \text{pour } N \text{ impair} \end{aligned}$$

Le lecteur trouvera les détails techniques dans [32]. Comme Cappelli, Itzykson et Zuber l'ont suggéré [19], il est possible de trouver une base du commutant formée de matrices à coefficients entiers. Le cas N pair et $a = 1$ a déjà été considéré par ces auteurs et cela nous amène à introduire les matrices $\Omega^{(\delta)}$ pour $\delta|n$ définies par la formule 4.22. On sait que la dimension de C_a est égale au nombre de diviseurs de n et on vérifie que pour N pair, $a \wedge N = 1$, $\Omega^{(\delta)} \in C_a$ pour tout $\delta|n$. Comme c'est une famille libre, on a obtenu une base de C_a indépendante de a pour N pair. Dans le cas où N est impair, on part de l'identité

$$\frac{\delta}{N} \sum_{k|\frac{N}{\delta}} \frac{k\delta}{N} |\Gamma^{\frac{N}{k\delta}}| M_{k\delta} = \frac{\delta}{N} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/N/\delta\mathbb{Z})^2} e^{2\pi i \frac{axy\delta^2}{2N}} P^{\delta x} \bar{Q}^{\delta y}$$

où $M_{\delta'}$ est la moyenne de $\bar{Q}^{\delta'}$. Pour l'obtenir, il suffit de partir du membre de droite et d'introduire $k = x \wedge y \wedge (N/\delta)$. Enfin, on réécrit $M_{k\delta}$ comme une moyenne sur $\Gamma^{N/\delta}$ que l'on explicite pour avoir le résultat. Finalement, on montre par un calcul des éléments de matrice que

$$\Omega^{(\delta)} = \frac{\delta}{N} \sum_{(x,y) \in (\mathbb{Z}/N/\delta\mathbb{Z})^2} e^{2\pi i \frac{axy\delta^2}{2N}} P^{\delta x} \bar{Q}^{\delta y}.$$

Ceci montre le Lemme:

Lemme 5 $(\Omega^{(\delta)})_{\delta|n}$ est une base de C_a .

4.5.2 Intégralité et Positivité.

Considérons une combinaison linéaire des $\Omega^{(\delta)}$ de la forme:

$$\hat{N} = \sum_{\delta|n} c_\delta \Omega^{(\delta)}.$$

¹¹La moyenne de X_i sur G est non nulle.

Clairement $\hat{N}_{0,0} = \sum_{\delta|n} c_\delta$. L'unicité du vide nous donne donc: $\sum_{\delta|n} c_\delta = 1$. Pour prouver le Théorème 49, il suffit de prouver que les c_δ sont tous des entiers positifs ou nuls. Pour cela, une idée consiste à trouver des éléments de matrice de $\hat{N}$ qui sont égaux à un c_δ . Concrétiser cette idée impose un examen sérieux de la structure des $\Omega^{(\delta)}$.

Prenons $\delta|n$, la colonne $\alpha(\delta) = \delta \wedge (n/\delta)$ est la première hormis celle à $\lambda = 0$ contenant des éléments de matrice de $\Omega^{(\delta)}$ non nuls. Pour identifier un élément de matrice de $\hat{N}$ avec un c_δ , il est judicieux de considérer une colonne où un petit nombre de $\Omega^{(\delta')}$ ont des éléments de matrice non nuls. Dans une colonne λ , ne vont contribuer que les $\Omega^{(\delta')}$ tels que $\alpha(\delta')|\lambda$. En conséquence, la colonne $\alpha(\delta)$ semble la mieux adaptée car c'est la première non triviale où contribue $\Omega^{(\delta)}$. Précisément, nous allons montrer le Lemme suivant:

Lemme 6 *Si N est impair ou si N et $n/\alpha(\delta)^2$ sont pairs, il existe dans la colonne $\alpha(\delta)$ au moins un élément de matrice égal à $c_{(\delta)}$. Dans le cas N pair et $n/\alpha(\delta)^2$ impair, il existe deux diviseurs δ_+ et δ_- de n tels que $c_\delta + c_{\delta_+}$ et $c_\delta + c_{\delta_-}$ apparaissent comme éléments de matrice dans la colonne $\alpha(\delta)$ et $\alpha(\delta_\pm) = \alpha(\delta)/2$.*

Le Lemme suffit à prouver le Théorème 49.

Preuve du Théorème 49 : Le cas N impair est réglé de suite par le Lemme 8. Regardons le cas N pair. D'après le Lemme, tous les c_δ tels que $n/\alpha(\delta)^2$ soit pairs sont entiers positifs ou nuls. Prenons alors δ tel que $n/\alpha(\delta)^2$ soit impair; soient $\delta_\pm$ les deux diviseurs tels que $c_\delta + c_{\delta_\pm} \in \mathbb{N}$, $c_{\delta_\pm} \in \mathbb{N}$ d'après le Lemme. Soient

$$A = \{\delta / \frac{n}{\alpha(\delta)^2} \equiv 1 \pmod{2}\}, \quad B = \{\delta / \delta|n\} \setminus \bigcup_{\delta \in A} \{\delta, \delta'_+, \delta'_-\}$$

l'unicité du vide se réécrit

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{\delta|n} c_\delta &= \sum_{\delta \in B} c_\delta + \sum_{\delta \in A} (c_\delta + c_{\delta_+}) + c_{\delta_-} \\ (4.26) \qquad &= \sum_{\delta \in B} c_\delta + \sum_{\delta \in A} (c_\delta + c_{\delta_-}) + c_{\delta_+} \end{aligned}$$

où $\sum_{\delta \in B} c_\delta, c_{\delta_\pm}$ et $c_\delta + c_{\delta_\pm}$ sont des entiers naturels.

$\exists \delta'' \in B, c_{\delta''} \neq 0$ Le Lemme 6 et l'unicité du vide permettent une conclusion immédiate.

$\forall \delta \in B, c_\delta = 0$ Il existe donc un et un seul δ_0 dans A tel que $c_{\delta_0} + c_{\delta_{0,+}} + c_{\delta_{0,-}} = 1$ donc, ceci nous montre que:

$$\forall \delta \neq \delta_0, c_\delta = c_{\delta_\pm} = 0.$$

et il nous reste les quatre possibilités suivantes:

c_{δ_0}	$c_{\delta_{0,+}}$	$c_{\delta_{0,-}}$
1	0	0
0	1	0
0	0	1
-1	1	1

mais la dernière est éliminée car $\hat{N}_{0,N/\alpha(\delta_0)} = -1$.

Ceci prouve le théorème 49. $\square$

4.5.3 Preuve du Lemme.

C'est la partie la plus complexe de la preuve. Nous introduisons les notations suivantes:

$$(4.27) \quad P_\delta = \{ \alpha(\delta)\omega(\delta) + N\xi/\alpha(\delta) / \quad \xi \in \mathbb{Z}/\alpha(\delta)\mathbb{Z} \}$$

qui est l'ensemble des indices de ligne pour lesquels $\Omega^{(\delta)}$ contribue dans la colonne $\alpha(\delta)$ et si δ' est un autre diviseur de n :

$$(4.28) \quad P_{\delta', \alpha(\delta)} = \{ \alpha(\delta)\omega(\delta') + N\xi/\alpha(\delta') / \quad \xi \in \mathbb{Z}/\alpha(\delta')\mathbb{Z} \}$$

qui donne les indices de ligne où $\Omega^{(\delta')}$ contribue dans la même colonne. Cet ensemble est non vide pour $\alpha(\delta')|\alpha(\delta)$. Notre preuve est basée sur un comptage du nombre d'éléments de

$$P_\delta \setminus \bigcup_{\delta'|n} (P_{\delta', \alpha(\delta)} \cap P_\delta)$$

Le calcul de ce cardinal est facilité par quelques Lemmes qui précisent les positions relatives de ces différents ensembles.

Lemmes de positionnement.

On peut distinguer deux types de Lemmes de positionnement: d'une part ceux qui décrivent la position des P_δ et des $P_{\delta, \alpha(\delta)}$ par rapport à ceux-ci; d'autre part ceux qui décrivent la position relative des $P_{\delta', \alpha(\delta)}$ entre eux. Les Lemmes 7 et 8 appartiennent à la première catégorie et les Lemmes 9 et 10 la seconde. La preuve de ces Lemmes procède de l'arithmétique élémentaire et nous les énonçons sans démonstration:

Lemme 7 *Si $\alpha(\delta) = \alpha(\delta')$, alors*

$$P_\delta \cap P_{\delta'} \neq \emptyset \iff P_\delta = P_{\delta'} \iff \Omega^{(\delta)} = \Omega^{(\delta')} \iff \delta = \delta' \iff \omega(\delta) \equiv \omega(\delta') \pmod{N/\alpha(\delta)^2}$$

Lemme 8 *Si $\alpha(\delta')|\alpha(\delta)$, alors*

$$P_\delta \cap P_{\delta', \alpha(\delta)} \neq \emptyset \iff P_{\delta', \alpha(\delta)} \subset P_\delta \iff \omega(\delta') \equiv \omega(\delta) \pmod{N/\alpha(\delta)^2}$$

Lemme 9 *Si $\alpha(\delta') = \alpha(\delta'') = \alpha'$ divise $\alpha(\delta)$, alors*

$$P_{\delta'', \alpha(\delta)} \cap P_{\delta', \alpha(\delta)} \neq \emptyset \iff P_{\delta'', \alpha(\delta)} = P_{\delta', \alpha(\delta)} \iff \omega(\delta') \equiv \omega(\delta'') \pmod{N/\alpha(\delta)\alpha'}$$

Lemme 10 *Si $\alpha(\delta'')|\alpha(\delta')$ et $\alpha(\delta')|\alpha(\delta)$ alors*

$$(P_{\delta'', \alpha(\delta')} \subset P_{\delta'} \text{ et } P_{\delta', \alpha(\delta)} \subset P_\delta) \implies P_{\delta'', \alpha(\delta)} \subset P_\delta$$

Notons que P_δ contient $\alpha(\delta)$ éléments et $P_{\delta', \alpha(\delta)}$ en contient $\alpha(\delta')$. Le dernier Lemme de positionnement nous dit que chaque $P_{\delta', \alpha}$ pour $\alpha^2|n$ et $\alpha(\delta')|\alpha$ est contenu dans un P_δ avec $\alpha = \alpha(\delta)$:

Lemme 11 *Soient α tel que $\alpha^2|n$ et $\delta'|n$ avec $\alpha(\delta')|\alpha$, alors il existe $\delta|n$ tel que $\alpha = \alpha(\delta)$ et $P_{\delta', \alpha} \subset P_\delta$.*

Preuve : Il suffit de montrer que $P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta$ est non vide pour un diviseur δ de n vérifiant $\alpha(\delta) = \alpha$ pour conclure grâce au Lemme 8. Pour cela, nous allons construire une matrice $\Omega^{(\omega^{(\delta')},\alpha)}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

- Dans la ligne α , les éléments de matrice $\Omega_{\alpha,\lambda}^{(\omega^{(\delta')},\alpha)}$ sont non nuls pour les indices de colonne λ pour lesquels les éléments de matrice de $\Omega^{(\delta')}$ sont également non nuls:

$$(4.29) \quad \forall \lambda \in \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}, \quad \Omega_{\alpha,\lambda}^{(\delta')} \neq 0 \Rightarrow \Omega_{\alpha,\lambda}^{(\omega^{(\delta')},\alpha)} \neq 0$$

- La matrice $\Omega^{(\omega^{(\delta')},\alpha)}$ est une combinaison linéaire des $\Omega^{(\delta')}$ pour $\alpha|\alpha(\delta)$. Ceci montre que les indices de colonne des éléments de matrice non nuls de $\Omega^{(\delta')}$ dans la ligne α sont dans l'union des P_δ pour $\alpha(\delta)|\alpha$ et $\alpha|\alpha(\delta)$.

Parmi les matrices $\Omega^{(\delta)}$, celles qui correspondent à $\alpha|\alpha(\delta)$ vérifient

$$(4.30) \quad \{\alpha(\delta) \nmid \lambda \text{ ou } \alpha(\delta) \nmid \bar{\lambda}\} \Rightarrow \Omega_{\lambda,\bar{\lambda}}^{(\delta)} = 0$$

et en fait cela constitue une caractérisation de $\text{Vect}((\Omega^{(\delta)})_{\alpha|\alpha(\delta)})$. Introduisons donc:

$$C^\alpha = \{M \in C \mid \lambda \neq 0 \pmod{\alpha} \text{ ou } \lambda' \neq 0 \pmod{\alpha} \Rightarrow M_{\lambda,\lambda'} = 0\}$$

Clairement, $\text{Vect}((\Omega^{(\delta)})_{\alpha|\alpha(\delta)}) \subset C^\alpha$. Réciproquement, si $M \in C^\alpha$, décomposons la sur notre base favorite de C :

$$M = \sum_{\delta|n} c_\delta \Omega^{(\delta)}$$

et choisissons δ_0 tel que $c_{\delta_0} \neq 0$ et $\alpha(\delta_0)$ soit minimal. Les seuls diviseurs δ de n contribuant à la ligne $\alpha(\delta_0)$ de M vérifient donc $\alpha(\delta_0) = \alpha(\delta)$. Comme les différents P_δ sont disjoints, cela montre que c_{δ_0} apparaît comme un élément de matrice de M et donc que $\alpha|\alpha(\delta_0)$. En réitérant le raisonnement sur $M - c_{\delta_0}\omega^{(\delta_0)}$, nous montrons que si $c_\delta \neq 0$, alors $\alpha|\alpha(\delta)$. En conséquence

$$C^\alpha = \text{Vect}((\Omega^{(\delta)})_{\alpha|\alpha(\delta)})$$

La matrice $\Omega^{(\omega^{(\delta')},\alpha)}$ recherchée doit donc appartenir à C^α . Le plus simple consiste à prendre:

$$\Omega_{\lambda,\lambda'}^{(\omega^{(\delta')},\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ ne divise pas } \lambda \text{ ou } \lambda', \\ \sum_{\xi \in \mathbb{Z}/\alpha'\mathbb{Z}} \delta_{\lambda',\omega'\lambda + N\xi/\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier l'implication 4.30. Cette matrice est bien dans C^α comme le montre un calcul direct. Il convient toutefois de remarquer que l'on peut introduire:

$$\begin{aligned} G_\alpha &= \{\omega \in \mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z} \mid \omega^2 = 1 \pmod{N/\alpha^2}\}, \quad N \text{ impair} \\ &= \{\omega \in \mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z} \mid \omega^2 = 1 \pmod{2N/\alpha^2}\}, \quad N \text{ pair} \end{aligned}$$

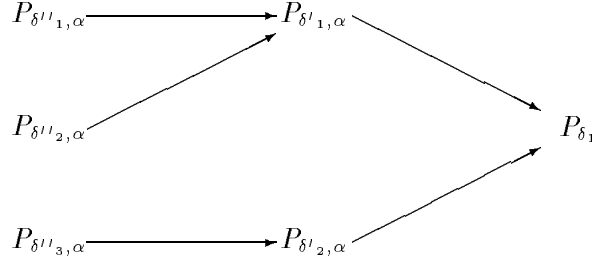
pout tout α tel que $\alpha^2|n$. Un calcul direct montre que $\Omega^{(\omega,\alpha)} \in C^\alpha$ pour tout $\omega \in G_\alpha$. Enfin, $\alpha(\delta')|\alpha$ entraîne clairement que $G_{\alpha(\delta')} \subset G_\alpha$. Ceci conclut notre démonstration. $\square$

Simplification du problème.

Notre but était de calculer le cardinal de

$$\bigcup_{\substack{\delta'; \alpha(\delta')|\alpha \\ \alpha(\delta') \neq \alpha}} P_{\delta', \alpha}$$

et de le comparer à $\alpha(\delta)$. Toutefois, les $P_{\delta', \alpha(\delta)} \cap P_\delta$ se disposent suivant les prescriptions des Lemmes 7 à 10. Ceci peut être résumé sur la figure suivante où les flèches dénotent les inclusions des différents ensembles:



avec $\alpha(\delta''_1)$ et $\alpha(\delta''_2)$ divisent $\alpha(\delta'_1)$ qui divise $\alpha(\delta_1)$. De même $\alpha(\delta''_3)|\alpha(\delta'_2)$ et $\alpha(\delta'_2)|\alpha(\delta_1)$. Si δ'' est tel que $\alpha(\delta'')|\alpha(\delta)$, il existe un nombre premier p tel que $\alpha(\delta'')|(\alpha(\delta)/p)$. D'après le Lemme 11, il existe alors δ' tel que $\alpha(\delta') = \alpha(\delta)/p$ et $P_{\delta'', \alpha(\delta)/p} \subset P_{\delta'}$ ce qui implique d'après le Lemme 10 $P_{\delta'', \alpha(\delta)} \subset P_{\delta', \alpha(\delta)}$. Ceci prouve le

Lemme 12 *Soit α tel que $\alpha^2|n$, alors:*

$$(4.31) \quad \bigcup_{\substack{\delta'; \alpha(\delta')|\alpha \\ \alpha(\delta') \neq \alpha}} P_{\delta', \alpha} = \bigcup_{\substack{p \text{ premier} \\ p|\alpha}} \left(\bigcup_{\delta'; \alpha(\delta') = \alpha/p} P_{\delta', \alpha} \right)$$

Ceci simplifie considérablement l'analyse: beaucoup de $P_{\delta', \alpha(\delta)}$ sont inclus les uns dans les autres!!! Il suffit essentiellement de se limiter aux diviseurs δ' de la forme δ/p où p est un nombre premier.

Algébrisation du problème.

Comme préliminaire à tout calcul de cardinal, nous devons énumérer les ensembles qui interviennent. C'est à dire trouver tous les δ' tels que $\alpha(\delta') = \alpha(\delta)/p$ et $P_{\delta', \alpha(\delta')} \cap P_\delta \neq \emptyset$. L'outil essentiel qui nous permet de tout ramener à la résolution d'équations polynômiales est le Lemme suivant:

Lemme 13 *Si $\omega \in G_\alpha$ avec $\alpha^2|n$, alors il existe un unique diviseur δ de n tel que $\alpha(\delta) = \alpha$ et $\omega(\delta) = \omega$.*

En clair, comme la position d'un $P_{\delta', \alpha(\delta)}$ équivaut¹² à des relations de congruences sur $\omega(\delta')$ et que $\alpha(\delta') = \alpha(\delta)/p$ force $\omega(\delta') \in G_{\alpha(\delta)/p}$, nous avons tout ramené à des équations algébriques et à des congruences.

Le résultat final est le suivant:

¹²C'est un des contenus des Lemmes de positionnement.

Lemme 14 Soit $\delta|n$, p un diviseur premier de $\alpha(\delta) = \alpha$, alors

N impair Nous avons:

$$(4.32) \quad Si \ p \mid \frac{N}{\alpha^2}, \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_\delta \cap P_{\delta',\alpha}) = P_{\delta'_0,\alpha}$$

$$(4.33) \quad Si \ p \nmid \frac{N}{\alpha^2}, \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_\delta \cap P_{\delta',\alpha}) = P_{\delta'_+,\alpha} \cup P_{\delta'_-,\alpha}$$

N pair Là aussi, nous avons:

$$(4.34) \quad Si \ p \mid \frac{n}{\alpha^2}, \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_\delta \cap P_{\delta',\alpha}) = P_{\delta'_0,\alpha}$$

$$(4.35) \quad Si \ p \nmid \frac{n}{\alpha^2}, \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_\delta \cap P_{\delta',\alpha}) = P_{\delta'_+,\alpha} \cup P_{\delta'_-,\alpha}$$

Preuve du Lemme 13 : L'unicité est évidente car $\Omega^{(\delta)}$ est entièrement définie par $\alpha(\delta)$ et $\omega(\delta)$.

Pour l'existence, prenons $\omega \in G_\alpha$, il existe $(\rho, \bar{\rho})$ tels que $\rho\bar{\rho} = N/\alpha^2$ (respectivement $2N/\alpha^2$) si N est impair (respectivement N pair) et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\omega - 1 = x\rho$ et $\omega + 1 = y\bar{\rho}$. Pour N impair, on peut en décalant ω de N/α^2 prendre x et y pairs¹³. Alors, en posant $\delta = \rho\alpha$, nous obtenons

$$\omega = \frac{x}{2} \frac{\delta}{\alpha} + \frac{y}{2} \frac{N}{\delta\alpha} \pmod{\frac{N}{\alpha^2}}, \quad 1 = \frac{y}{2} \frac{N}{\delta\alpha} - \frac{x}{2} \frac{\delta}{\alpha}.$$

Dans le cas N pair, $\rho\bar{\rho}$ est un multiple de 4 et donc deux cas se présentent: ρ et $\bar{\rho}$ sont pairs, ou bien pour fixer les idées $\bar{\rho}$ est impair. Dans le premier cas, on pose¹⁴ $\delta = \alpha\rho/2$ et dans l'autre cas, on remarque que $y \equiv 2 \pmod{4}$ et en posant $\delta = \rho\alpha/4$:

$$\omega = 2x \frac{\delta}{\alpha} + \frac{y}{2} \frac{n}{\delta\alpha} \pmod{\frac{N}{\alpha^2}}, \quad 1 = \frac{y}{2} \frac{n}{\delta\alpha} - 2x \frac{\delta}{\alpha}.$$

□

Nous pouvons maintenant prouver le Lemme 14.

Preuve du Lemme 14 : Fixons δ et notons $\omega = \omega(\delta)$ et $\alpha = \alpha(\delta)$. Soit δ' tel que $\alpha(\delta') = \alpha/p$ et $P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta \neq \emptyset$, alors $\omega(\delta') \equiv \omega \pmod{N/\alpha^2}$. Mais la définition de G_α dépendant de la parité de N , on doit distinguer deux cas. Les problèmes algébriques que nous devons résoudre sont les suivants:

N impair On sait que $\omega(\delta')^2 \equiv 1 \pmod{Np^2/\alpha^2}$. A chaque solution du problème algébrique

$$(4.36) \quad \omega'^2 \equiv 1 \pmod{Np^2/\alpha^2}, \quad \omega' \equiv \omega \pmod{N/\alpha^2}$$

est associé un unique diviseur $\delta'|n$ tel que $\omega(\delta') \equiv \omega \pmod{Np^2/\alpha^2}$ et $\alpha(\delta') = \alpha/p$. Enfin, d'après le Lemme 9, nous ne prenons en compte les solutions de 4.36 que modulo Np/α^2 .

¹³ ρ et $\bar{\rho}$ sont impairs!

¹⁴ Ici, changer de représentant de ω ne change pas sa parité.

N **pair** Là aussi, nous avons la congruence $\omega' \equiv \omega \pmod{N/\alpha^2}$ mais cette fois, nous devons résoudre

$$(4.37) \quad \omega'^2 \equiv 1 \pmod{2Np^2/\alpha^2}, \quad \omega' \equiv \omega \pmod{N/\alpha^2}$$

où ω' est pris en compte modulo Np/α^2 .

Ces congruences se résolvent très facilement. Le cas N pair est le plus subtil comme nous allons le voir.

Résolution de 4.36 Nous introduisons $x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ tel que $\omega' = \omega + xN/\alpha^2$ et r défini par ¹⁵ $\omega^2 = 1 + rN/\alpha^2$; alors 4.36 devient:

$$(4.38) \quad \frac{N}{\alpha^2}x^2 + 2\omega x + r \equiv 0 \pmod{p^2}$$

L'Appendice 4.B décrit comment résoudre une telle équation et nous obtenons immédiatement la première partie du Lemme.

Résolution de 4.37 Nous choisissons un représentant de ω et on pose $\omega^2 = 1 + 2Ns/\alpha^2$ et soit $\omega' = \omega + xN/\alpha^2$ avec $x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, l'équation 4.37 devient

$$\frac{n}{\alpha^2}x^2 + \omega x + s \equiv 0 \pmod{p^2}$$

et deux solutions congruentes modulo p seront identifiées au sens où les $P_{\delta',\alpha}$ associés coïncident.

Si $p \neq 2$, la discussion précédente marche parfaitement et nous obtenons le résultat partiel suivant:

$$\text{Si } p|N/\alpha^2; \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta) = P_{\delta'_0,\alpha}$$

$$\text{Si } p \nmid N/\alpha^2; \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta) = P_{\delta'_+,\alpha} \cup P_{\delta'_-,\alpha}$$

Par contre si $p = 2$, nous devons faire plus attention. Réduisons alors notre équation modulo 2, nous avons

$$(\frac{n}{\alpha^2} + 1)x + s \equiv 0 \pmod{2}$$

Cette équation du premier degré a une seule solution quand n/α^2 est pair. Cette solution se remonte en une unique solution modulo 4. En conséquence:

$$\text{Si } 2|\frac{N}{\alpha^2}; \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta) = P_{\delta'_0,\alpha}.$$

Si n/α^2 est impair l'équation modulo 2 devient $s \equiv 0 \pmod{2}$. Mais si n/α^2 est impair, alors δ/α et $n/\delta\alpha$ le sont et si (a,b) sont deux entiers tels que $an/\delta\alpha - b\delta/\alpha = 1$, alors $a \equiv b + 1 \pmod{2}$. Mais $\omega^2 = 1 - 4abn\alpha^2$ ce qui montre que $s \equiv ab \pmod{2}$ est pair. En conséquence, la réduite modulo 2 de notre équation du second degré possède deux solutions modulo 2 qui se relèvent en 2 solutions modulo 4, inéquivalentes modulo 2. Donc,

$$\text{Si } n\alpha^2 \text{ est impair; } \quad \bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta) = P_{\delta'_+,\alpha} \cup P_{\delta'_-,\alpha}, \quad \alpha(\delta_\pm) = \alpha/2.$$

Ceci prouve la formule 4.35 et donc le Lemme 14. $\square$

Il est maintenant possible de calculer les cardinaux qui nous intéressent.

¹⁵On a pris un représentant de ω !

Analyse Combinatoire, cas simples.

Pour tout diviseur premier p de α , nous savons maintenant décrire l'ensemble

$$\bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta)$$

mais pour calculer le cardinal de

$$\bigcup_{\substack{p \text{ premier} \\ p|\alpha}} \left(\bigcup_{\alpha(\delta')=\alpha/p} (P_{\delta',\alpha} \cap P_\delta) \right)$$

nous devons prendre en compte les intersections de ces différents ensembles. Celles-ci proviennent des diviseurs δ'' de n tels que $\alpha(\delta'') = \alpha/pq$ où p et q sont deux diviseurs premiers distincts de α ¹⁶. Soit $\alpha = \prod_{j=1,\dots,k} p_j^{\alpha_j}$ la décomposition en facteurs premiers de α , nous introduisons les indices ε_j qui distinguent entre les différents $P_{\delta',\alpha}$ inclus dans P_δ et tels que $\alpha(\delta') = \alpha/p$. Nous avons vu que ε_j vaut 1 ou 2. On note P_{j,ε_j} les différents ensembles $P_{\delta',\varepsilon_j,\alpha}$. A j fixé et ε distincts, ces ensembles sont deux à deux disjoints. Afin d'évaluer les cardinaux, nous utiliserons

$$(4.39) \quad X_\delta = \left| \bigcup_{j=1}^k \left(\bigcup_{\varepsilon_j} P_{j,\varepsilon_j} \right) \right| = \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} \sum_{[\varepsilon_j]} \left| \bigcap_{m=1}^l (P_{j_m, \varepsilon_{j_m}}) \right|$$

qui découle trivialement de la formule¹⁷

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{i \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} \left| \bigcap_{m=1}^l A_{j_m} \right|.$$

Le calcul de $\left| \bigcap_{m=1}^l (P_{j_m, \varepsilon_{j_m}}) \right|$ est immédiat. Nous remarquons que les éléments de cette intersection sont en correspondance biunivoque avec les solutions du système linéaire:

$$\forall (r, s) \in \langle 1, l \rangle; \quad \frac{N}{\alpha} (p_{j_r} \xi_{j_r} - p_{j_s} \xi_{j_s}) + \alpha (\omega(\delta'_{j_r, \varepsilon_{j_r}}) - \omega(\delta'_{j_s, \varepsilon_{j_s}})) \equiv 0 \pmod{N}$$

avec $\xi_j \in \mathbb{Z}/(\alpha/p_j)\mathbb{Z}$. Ce système est équivalent à

$$(4.40) \quad \forall m \in \langle 1, l-1 \rangle; \quad \frac{N}{\alpha} (p_{j_m} \xi_{j_m} - p_{j_{m+1}} \xi_{j_{m+1}}) + \alpha (\omega(\delta'_{j_m, \varepsilon_{j_m}}) - \omega(\delta'_{j_{m+1}, \varepsilon_{j_{m+1}}})) \equiv 0 \pmod{N}$$

dont il est facile de montrer qu'il a exactement $\alpha / \prod_{m=1}^l p_{j_m}$ solutions. En effet,

$$\psi : \prod_{m=1}^l \left(\frac{\mathbb{Z}}{(\alpha/p_{j_m})\mathbb{Z}} \right) \longrightarrow \left(\frac{\mathbb{Z}}{\alpha\mathbb{Z}} \right)^{l-1}$$

$$(\xi_{j_m})_{m \in \langle 1, l \rangle} \longmapsto (p_{j_m} \xi_{j_m} - p_{j_{m+1}} \xi_{j_{m+1}})_{m \in \langle 1, l-1 \rangle}$$

est un morphisme de groupes surjectif dont le noyau est

$$\ker \psi \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\frac{\alpha}{\prod_{m=1}^l p_{j_m}} \mathbb{Z}}.$$

¹⁶Utiliser les Lemmes de positionnement!

¹⁷Je n'ai pas de référence précise à ce sujet...

Soit $(\xi_{j_m})_m$ annulé par ψ , alors nous avons pour $m \neq r$, $p_{j_m} \xi_{j_m} \equiv p_{j_r} \xi_{j_r} \pmod{\alpha}$ ce qui par réduction modulo p_{j_m} donne $\xi_{j_r} \equiv 0 \pmod{p_{j_m}}$. En conséquence, $\xi_{j_m} = k_m \prod_{r \neq m} p_{j_r}$ et $k_l - k_{l+1} \equiv 0 \pmod{\alpha/p_{j_1} \dots p_{j_l}}$ ce qui montre que $(\xi_{j_m})_m$ est un multiple de $(\prod_{r \neq m} p_{j_r})_m$ et donc détermine $\ker \psi$. La surjectivité s'en déduit trivialement.

Finalement nous voulons calculer $\alpha - X_\delta$ qui représente le nombre de coefficients de la colonne α_δ égaux à c_δ dans la combinaison linéaire $\sum_\delta c_\delta \Omega^{(\delta)}$.

$$\alpha - X_\delta = \alpha + \sum_{l=1}^k (-1)^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} \left(\sum_{[\varepsilon_{j_m}]} \frac{\alpha}{\prod_{m=1}^l p_{j_m}} \right)$$

qui se resomme en introduisant le nombre θ_j de valeurs que peut prendre ε_j :

$$(4.41) \quad \alpha - X_\delta = \frac{\alpha}{\prod_{j=1}^k p_j} \prod_{j=1}^k (p_j - \theta_j).$$

Discutons la positivité de ce nombre:

- Quand N est impair, p est impair, de plus θ_j vaut 1 ou 2; donc $\alpha - X_\delta$ est un entier strictement positif!
- Quand N est impair, et que $n/\alpha(\delta)^2$ est impair, $\theta_2 = 1$ et donc $\alpha - X_\delta$ est encore strictement positif!
- Par contre quand N est impair et n/α^2 est pair, alors $\theta_2 = 2$ et $X_\delta = \alpha(\delta)!$

Ceci prouve la première partie du Lemme 6. Examinons le dernier cas.

Analyse Combinatoire: N pair et $n\alpha^2$ impair.

En fait, nous avons vu qu'il existe deux diviseurs $\delta_\pm$ tels que $P_\delta = P_{\delta_+, \alpha(\delta)} \cup P_{\delta_-, \alpha(\delta)}$ et $P_{\delta_+, \alpha(\delta)} \cap P_{\delta_-, \alpha(\delta)} = \emptyset$. Pour prouver la seconde partie du Lemme 6, il suffit de montrer que

$$|P_{\delta'_+, \alpha} \setminus \left(\bigcup_{\substack{\delta'', \alpha(\delta'')|\alpha \\ \alpha(\delta'') \neq \alpha, \alpha/2}} P_{\delta'', \alpha} \right)|$$

est strictement positif.

Considérons δ'' tel que $\alpha(\delta'')|\alpha$, $\alpha/\alpha(\delta'')$ soit distinct de 1 et 2, deux cas peuvent se produire:

- Il existe p premier distinct de 2 divisant $\alpha/\alpha(\delta'')$.
- $\alpha(\delta'') = \alpha/2^k$ avec $k \geq 2$.

Analysons le cas où $\alpha/2$ est impair. Alors la seconde alternative ne peut se produire et on adapte trivialement la méthode de la sous-section précédente. Finalement, le cardinal recherché est

$$\frac{\alpha}{2} + \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \sum_{2 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k} \left(\sum_{[\varepsilon_{j_m}]} \frac{\alpha}{2 \prod_{m=2}^{l+1} p_{j_m}} \right)$$

que l'on resomme en

$$(4.42) \quad |P_{\delta'_+, \alpha} \setminus (\bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta'_+, \alpha} \cap P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha}))| = \frac{\alpha}{\prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} p} \prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} (p - \theta_p).$$

Ceci prouve notre assertion dans ce cas. Passons au cas pervers où $\alpha/2$ est pair.

La seconde alternative peut alors se produire et nous devons chercher quels diviseurs δ'' de n vérifient

$$\alpha(\delta'') = \alpha/4 \text{ et } P_{\delta'', \alpha} \subset P_{\delta'_+, \alpha}.$$

La traduction algébrique de ces propriétés via les Lemmes de positionnement et le Lemme 11 est le comptage des solutions de

$$(4.43) \quad \omega'' \equiv \omega'_+ \pmod{8n/\alpha^2}, \quad \omega''^2 \equiv 1 \pmod{64n/\alpha^2}$$

où ω'' est modulo $32n/\alpha^2$. Posons $\omega'' = \omega'_+ + 8nx\alpha^2$ ($x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$), nous obtenons alors comme $\omega'_+{}^2 \equiv 1 + 16nt/\alpha^2$, $x \equiv t \pmod{4}$. En conséquence, la solution est unique: il existe δ'' unique tel que $\alpha(\delta'') = \alpha/4$ et $P_{\delta'', \alpha} \subset P_{\delta'_+, \alpha}$. Bien sûr,

$$\begin{aligned} |P_{\delta'_+, \alpha} \setminus (P_{\delta'', \alpha} \cup (\bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta'_+, \alpha} \cap P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha})))| &= |P_{\delta'_+, \alpha} \setminus (\bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta'_+, \alpha} \cap P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha}))| \\ &= |P_{\delta'', \alpha} \setminus \bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha} \cap P_{\delta'', \alpha})| \end{aligned}$$

et chaque terme du membre de droite peut être calculé et comme précédemment on obtient,

$$|P_{\delta'_+, \alpha} \setminus (\bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta'_+, \alpha} \cap P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha}))| = \frac{\alpha}{\prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} p} \prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} (p - \theta_p).$$

De la même façon, la même méthode convenablement adaptée donne

$$|P_{\delta'', \alpha} \setminus \bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha} \cap P_{\delta'', \alpha})| = \frac{\alpha}{2 \prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} p} \prod_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} (p - \theta_p).$$

Ainsi, nous trouvons le cardinal recherché

$$(4.44) \quad |P_{\delta'_+, \alpha} \setminus (P_{\delta'', \alpha} \cup (\bigcup_{\substack{p|\alpha \\ p \neq 2}} \bigcup_{\varepsilon_p} (P_{\delta'_+, \alpha} \cap P_{\delta_p, \varepsilon_p, \alpha})))|$$

qui est un entier strictement positif. L'argument est symétrique pour δ'_- et donc ceci prouve la seconde partie du Lemme 6.

4.6 Preuve par les équations de Moore et Seiberg.

Dans cette section, nous donnons une preuve qui utilise les résultats de Moore et Seiberg concernant l'invariance modulaire des théories rationnelles [131]. En un sens, cette démarche est plus rapide mais moins élémentaire que l'approche combinatoire. Nous commençons par rappeler le résultat général dont nous aurons besoin, puis nous l'appliquons au cas des modèles $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

4.6.1 Le “petit” théorème de naturalité.

Nous allons rappeler les résultats obtenus par Moore et Seiberg [131], et par Verlinde, Verlinde et Dijkgraaf [44] concernant la forme générique de la fonction de partition sur le tore d'une théorie invariante conforme rationnelle. Les résultats que nous utilisons ici constituent ce que l'on peut appeler le “petit” théorème de naturalité:

Théorème 50 (G. Moore, N. Seiberg, R. Dijkgraaf, E. et H. Verlinde) *Si $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre de symétrie maximale d'une TCCR, et $(\chi_i)_i$ les caractères de cette algèbre chirale sur le tore, alors il existe un automorphisme σ de l'algèbre de Verlinde relative à $\mathcal{A}$ tel que la fonction de partition de la TCCR soit de la forme*

$$(4.45) \quad Z(\tau, \bar{\tau}) = \sum_i \chi_i(\tau) \chi_{\sigma(i)}(\bar{\tau})$$

Enfin, ce résultat est complété par la proposition suivante:

Proposition 20 *Si σ est un automorphisme de l'algèbre de Verlinde de $\mathcal{A}$ tel que*

$$\begin{aligned} \forall(i, j), \quad h_{\sigma(i)} &\equiv h_i \pmod{1} \\ S_{\sigma(i)}^{\sigma(j)} &= S_i^j \end{aligned}$$

alors $\sum_i \chi_i(\tau) \chi_{\sigma(i)}(\bar{\tau})$ est invariante modulaire.

Ces deux résultats montrent qu'en fait, le contenu en champs de la théorie ne dépend que des données de Moore et Seiberg une fois que l'on a identifié la symétrie maximale du modèle. Pratiquement ceci revient à identifier *tous* les opérateurs de dimension $(h, 0)$ où $h \in \mathbb{N}$ et à considérer cet ensemble comme l'algèbre chirale maximale $\mathcal{A}$ du modèle. Nous allons voir une illustration de cette technologie dans le cas du modèle Gaussien rationnel. Rappelons brièvement la preuve de ces deux théorèmes.

Preuve du Théorème 50 : La preuve la plus simple a été donnée par E. et H. Verlinde et R. Dijkgraaf [44], nous nous contentons de la rappeler sans entrer dans les détails.

En considérant l'algèbre de symétrie maximale de la théorie, nous considérons tous les champs primaires dont une des dimensions h où $\bar{h}$ est nulle dans l'algèbre chirale. Du point de vue des multiplicités $N_{i,j}$ des champs primaires relativement à cette algèbre maximale, cela entraîne que $N_{i,0} = N_{0,i} = \delta_{i,0}$. L'invariance selon S s'écrit en divisant par S_0^0

$$\frac{S_i^k}{S_0^0} N_k^j = N_i^k \frac{S_k^j}{S_0^0}$$

qui, spécialisé à $i = 0$ devient

$$\frac{S_0^k}{S_0^0} N_k^j = \frac{S_0^j}{S_0^0}$$

Comme $S_0^i \geq S_0^0$ et $N_i^j \in \mathbb{N}$, cela montre qu'à j fixé un et un seul k n'annule pas N_k^j . En conséquence il existe une application $i \mapsto \sigma(i)$ telle que $N_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Elle vérifie de plus $S_i^j = S_{\sigma(i)}^{\sigma(j)}$ et ceci montre que σ est bijective. En remplaçant dans la formule de Verlinde S_i^j par $S_{\sigma(i)}^{\sigma(j)}$ nous voyons que $N_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)} = N_{i,j,k}$ et en utilisant le fait que les colonnes de S forment une base de $\mathbb{C}^n$, $\sigma(\widehat{i}) = \widehat{\sigma(i)}$. En termes plus intrinsèques: σ définit un automorphisme de l'algèbre de Verlinde. $\square$

Preuve de la Proposition 20 : La condition $h_{\sigma(i)} \equiv h_i \pmod{1}$ assure l'invariance sous la transformation modulaire T . L'autre condition assure l'invariance sous S . $\square$

Remarque : Nous n'avons pas cherché à utiliser le théorème de naturalité proprement dit car cela nécessiterait de connaître la forme explicite des matrices F et B du modèle. Nous n'avons pas eu le temps de les calculer. Toutefois, ceci ne pose aucune difficulté de principe. Par ce biais, nous pourrions accéder à toutes les algèbres de développement des produits d'opérateurs dans les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Bien entendu, un tel résultat n'est intéressant que s'il est *explicite*.

Dans le cas des théories associées à un produit de groupes cycliques, il est vraisemblable que vont apparaître des algèbres de développement en produit d'opérateurs qui ne sont pas obtenues comme produit tensoriel d'algèbres relatives aux différents facteurs du produit. Ceci prolonge les remarques faites dans l'Appendice 3.B du chapitre 3. $\square$

4.6.2 Cas d'un groupe abélien quelconque.

Dans notre cas, comme les règles de fusion définissent l'algèbre de groupe de G abélien, il est aisé de caractériser les extensions de l'algèbre chirale de départ $\mathcal{A}_0$. Nous pouvons voir les représentations de $\mathcal{A}_0$ comme indexées par les éléments de G . Les extensions de $\mathcal{A}_0$ correspondent aux sous-groupes de G formés d'éléments dont les champs primaires associés ont des dimensions entières. Soit H un tel sous-groupe, l'extension de l'algèbre chirale $\mathcal{A}_0$ est définie par

$$\mathcal{A}_H = \bigoplus_{h \in H} V_h.$$

Les représentations irréductibles de cette algèbre sont des représentations réductibles de $\mathcal{A}_0$ et sont de la forme

$$\bar{V}_g = \sum_{h \in H} V_{g+h}$$

où $g \in G$. Nous imposons que le développement du produit de ϕ_g et des $(\phi_h)_{h \in H}$ soit monovalué car dans la nouvelle théorie, les $(\phi_h)_{h \in H}$ comme ϕ_g font partie du contenu en champs du modèle et donc le développement à courte distance de deux tels champs ne doit faire apparaître que des puissances entières de la différence entre les positions (dans le plan complexe) des points d'insertion. Nous avons alors des relations de commutation entre les modes et cela définit les représentations de $\mathcal{A}_H$. Le champ primaire ϕ_g relativement à $\mathcal{A}_H$ est un champ primaire relativement à $\mathcal{A}_0$. L'ensemble des $g \in G$ vérifiant cette propriété de localité est un sous-groupe de G contenant bien sûr H . En effet, nous avons vu comment la dimension du champ ϕ_g s'exprimait en fonction de g dans la section 4.2: $h_g \equiv K(g,g)/2 \pmod{1}$ où K est bilinéaire symétrique. Comme pour tout $h \in H$, $K(h,h)/2$ est entier, la condition de localité est $\forall h \in H, K(g,h) \in \mathbb{Z}$ qui définit un groupe $L_H(G)$ contenant H . Les représentations irréductibles de $\mathcal{A}_H$ sont indexées par les éléments du groupe quotient $G_H = L_H(G)/H$. Ce groupe décrit les règles de fusion

relatives à $\mathcal{A}_H$. Finalement, si $\mathcal{A}_H$ est l'algèbre de symétrie maximale du modèle considéré, il existe σ automorphisme de G_H tel que $h_{\sigma(g)} \equiv h_g \pmod{1}$ et la fonction de partition sur le tore est donnée par

$$Z = \sum_{\bar{g} \in G_H} \left(\sum_{h \in \bar{g}} \chi_h(\tau) \right) \left(\sum_{k \in \sigma(\bar{g})} \bar{\chi}_k(\bar{\tau}) \right).$$

Ceci classe les fonctions de partition invariantes modulaires de ces modèles.

4.6.3 Classification des invariants $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dans le cas de $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous pouvons ainsi redémontrer le théorème 49. Considérons une théorie $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de paramètre a ; les dimensions des opérateurs sont données en 4.2 Nous allons d'abord examiner les différentes extensions possibles de l'algèbre chirale $\mathcal{A}_0$ puis classer les fonctions de partition invariantes modulaires.

Structure du modèle.

Pour tout diviseur α de N , il existe un et un seul sous groupe H_α de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'ordre α , c'est le groupe cyclique engendré par N/α . Les dimensions $(h_k)_{k \in H}$ sont entières si et seulement si

$$\frac{aN}{2\alpha^2} \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\alpha|N$ est que N est premier avec a , cela donne en prenant en compte les conditions de parité sur a :

$$(4.46) \quad \alpha^2 | n$$

Supposons cette condition réalisée. L'algèbre chirale $\mathcal{A}_H$ existe et nous pouvons faire la théorie de ses représentations. La condition de localité pour un champ ϕ_n est

$$\frac{an}{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

et donc $\alpha | n$. Finalement,

$$(4.47) \quad L_{H_\alpha} \left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \right) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha)\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \frac{L_{H_\alpha} \left(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \right)}{H_\alpha} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha^2)\mathbb{Z}}$$

La dimension d'un champ primaire $\bar{\phi}_n = \phi_{n\alpha}$ par rapport à $\mathcal{A}_{H_\alpha}$ est modulo 1:

$$h_n = \frac{a\alpha^2}{2N} n^2.$$

La matrice S est donnée par:

$$S_n^m = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \exp \left(2\pi i \frac{a\alpha^2 n m}{N} \right)$$

ce qui montre que nous disposons d'une théorie $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ de paramètre a .

Invariants modulaires.

L'algèbre de symétrie maximale de notre modèle est une extension de $\mathcal{A}_0$ que, pour fixer les idées, nous supposons être $\mathcal{A}_{H_\alpha}$ construite dans la section précédente. Les invariants modulaires sont alors classés par les automorphismes σ de $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ qui vérifient¹⁸

$$\forall n \in \frac{\mathbb{Z}}{(N/\alpha^2)\mathbb{Z}}, \quad h_n - h_{\sigma(n)} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Un automorphisme de $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$ est défini par un inversible de l'anneau $\mathbb{Z}/(N/\alpha^2)\mathbb{Z}$, *id est* un nombre ω premier avec N/α^2 . La condition d'invariance par T implique que $a(\omega^2 - 1) \equiv 0 \pmod{\frac{2N}{\alpha^2}}$. Compte tenu des conditions de parité sur a , cela donne:

$$\begin{aligned} \omega^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{\frac{N}{\alpha^2}} \text{ Si } N \equiv 1 \pmod{2} \\ \omega^2 - 1 &\equiv 0 \pmod{\frac{2N}{\alpha^2}} \text{ Si } N \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

ce qui signifie $\omega \in G_\alpha$ avec les notations de 4.5. Enfin, le Lemme 13 montre que la fonction de partition est de la forme Z_δ avec $\alpha(\delta) = \alpha$ et $\omega(\delta) = \omega$. Le théorème 49 est donc prouvé.

Remarque : Une telle preuve ne marche que parce que l'on travaille avec des groupes abéliens qui, pour parler très grossièrement, jouissent d'une stabilité par quotient de leur algèbre de groupe. Dans le cas des TCR générales ou plus simplement des TCR associées à un groupe non abélien, cette propriété est perdue comme par exemple dans la classification *ADE* des modèles $A_1^{(1)}$ de Cappelli, Itzykson et Zuber. $\square$

4.7 Exemples.

Nous allons voir quelles fonctions de partition peuvent être réalisées par des modèles physiques. Ainsi, dans la classification *ADE* des modèles $A_1^{(1)}$ de Capelli, Itzykson et Zuber, les théories *A* (invariants diagonaux) correspondent au modèle de Wess, Zumino et Witten basé sur le groupe $SU(2)$ et la série *D* correspond aux modèles de WZW sur le groupe $SO(3)$, c'est à dire à un orbifold $\mathbb{Z}_2$ du modèle de WZW $SU(2)$ de départ. Nous allons examiner ce problème pour les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en considérant le cas du modèle gaussien rationnel puis celui des théories $A_N^{(1)}$ de niveau 1.

4.7.1 Modèle gaussien.

Nous avons calculé la fonction de partition du boson libre compactifié sur un cercle de rayon $R = \sqrt{2p/q}$ en 3.4.3. Nous savons que pour cette valeur du rayon, le théorie est rationnelle et que l'on peut exprimer sa fonction de partition comme combinaison sesquilinéaire des caractères de l'algèbre étendue $\mathcal{A}_N$ avec $N = 2pq$. Les règles de fusion sont de type $\mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$. Plus précisément, la fonction de partition est

$$Z_{p,q} = \frac{1}{|\eta(\tau)|^2} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} q^{\frac{(pn+qm)^2}{4pq}} \bar{q}^{\frac{(pn+qm)^2}{4pq}}$$

qui se met sous la forme:

$$Z_{p,q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}} \tilde{\chi}_k \overline{\tilde{\chi}_{\omega k}}$$

¹⁸C'est la condition d'invariance par T .

avec $\delta = p$, et ω défini comme précédemment. En conséquence, $Z_{p,q}$ est un des Z_δ . Ici $\alpha(p) = 1$, et nous voyons que $\mathcal{A}_{2pq}$ est bien l'algèbre de symétrie maximale de ce modèle.

Pour avoir d'autres fonctions de partition, il nous faut restreindre notre algèbre de symétrie, c'est à dire prendre une sous- algèbre par rapport à laquelle la théorie est encore rationnelle. Dans notre exemple, $\mathcal{A}_{2pqb^2}$ est une sous- algèbre de $\mathcal{A}_{2pq}$ engendrée par les opérateurs de vertex

$$Q_k(z) = \exp(ikb\sqrt{2pq}X(z)).$$

La théorie est rationnelle relativement à cette algèbre avec des règles de fusion $\mathbb{Z}/2pqb^2\mathbb{Z}$. Soit n un entier modulo $2pqb^2$, le caractère de la représentation n de $\mathcal{A}_{2pqb^2}$ est

$$\tilde{\chi}_n = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{l \in \mathbb{Z}} q^{\frac{(n+2b^2 pql)^2}{4b^2 pq}}$$

et la fonction de partition du modèle gaussien s'exprime en fonction de ces caractères

$$Z_{p,q} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}/2pqb^2\mathbb{Z} \\ l \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}}} \tilde{\chi}_{kb} \overline{\tilde{\chi}_{\omega kb + 2pqlb}}$$

qui est un Z_δ avec $\delta = pb$. Le modèle gaussien le plus simple ne réalise donc pas toutes les fonctions de partition que nous avons obtenues.

4.7.2 Modèles $A_N^{(1)}$ de niveau 1.

Les modèles rationnels relativement à l'algèbre de Kac-Moody $A_N^{(1)}$ au niveau 1 ont des règles de fusion de type $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Gepner [84] a montré que le modèle de WZW associé au groupe $SU(N+1)$ correspondait à l'invariant diagonal $\delta = n$. Nous cherchons si les autres invariants peuvent être réalisés physiquement. A titre d'information:

- L'invariant correspondant à $\delta = 3$ pour l'algèbre $SU(9)$ au niveau 1 est la racine cubique de la fonction modulaire $j(\tau)$.
- En prenant l'algèbre $SU(25)$ au niveau 1, nous obtenons un invariant qui est le carré du module de $\sum_{k \in \langle 1,5 \rangle} \chi_{5k}(\tau)$. Cette théorie a pour charge centrale 24 et donc cette somme est affine en la fonction modulaire $j(\tau)$. En utilisant la dimension de l'algèbre $SU(25)$ et l'unicité du vide, nous identifions

$$\sum_{k=1}^5 \chi_{5k}(\tau) = j(\tau) - 120$$

4.7.3 Modèles orbifold à la Dijkgraaf-Vafa-Verlinde-Verlinde.

Pour conclure, il nous a paru utile de faire le lien avec les travaux existants, notamment ceux de Dijkgraaf, Vafa, Verlinde et Verlinde (denotés par DVVV dans la suite) [45]. Notre but est de montrer que les résultats obtenus par ces auteurs sont parfaitement compatibles avec les nôtres dans le cas où ils se recoupent; c'est à dire quand les règles de fusion sont de type $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dans sa thèse [42], R. Dijkgraaf montre que les règles de fusion d'un orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sont de type groupe. Les orbifolds $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'une théorie holomorphe sont indexés par un entier a modulo N^2 , pair dans le cas où N est également pair. L'algèbre de fusion est alors donnée par le groupe

$$\frac{\mathbb{Z}}{\frac{N^2}{N \wedge a} \mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{(N \wedge a) \mathbb{Z}}$$

Ce groupe est cyclique si et seulement si $N^2/(N \wedge a)$ et $N \wedge a$ sont premiers entre eux, ce qui est le cas pour $a \wedge N = 1$. Dans ce cas, le groupe est $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$. Notons que N est impair car dans le cas N pair, nécessairement $2|(N \wedge a)$.

Choix de jauge et équivalence des théories.

Le travail de DVVV montre que, pour un modèle orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, les champs primaires relativement à la nouvelle algèbre chirale sont indexés par un double indice (A, α) où A indexe une classe de conjugaison dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (c'est à dire un élément du groupe), et α indexe une représentation de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (qui est le stabilisateur de chacun de ses éléments).

Dans ce cas, la loi de transformation des différents secteurs de la théorie est donnée par une phase $\sigma : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \rightarrow U(1)$:

$$S : \begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{m} \quad \quad \text{n} \end{array} \longrightarrow \sigma(n, m) \begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{n} \quad \quad \text{-m} \end{array}$$

dont l'expression est donnée par:

$$(4.48) \quad \sigma(n, m) = \exp(2\pi i a m n / N^2)$$

où a est premier avec N . Bien entendu, nous devons pour chaque $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ faire un choix de représentant modulo N^2 . Le lecteur vérifiera que changer de représentant: $n \mapsto n + Np_n$ revient à faire ce que DVVV appellent une transformation de jauge sur σ , c'est à dire

$$(4.49) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma'(n, m)}{\sigma(n, m)} &= \varepsilon_{p_n}(m) \varepsilon_{p_m}(n) \\ \varepsilon_{p_m}(n) &= \exp\left(2\pi i \frac{ap_n m}{N}\right) \end{aligned}$$

Clairement une transformation de jauge au sens de DVVV est équivalente à un nouveau choix de représentants de chaque élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Pour faire des calculs explicites, nous fixons dès maintenant une indexation commode des représentations et une forme canonique pour σ : pour tout $A \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous notons $\bar{A}$ l'unique représentant de A dans $\mathbb{Z}$ qui est compris entre 0 et $N - 1$. Avec cette notation:

$$(4.50) \quad \sigma(A, B) = \exp\left(2\pi i \frac{a \bar{A} \bar{B}}{N^2}\right)$$

$$(4.51) \quad \varepsilon_\alpha(A) = \exp\left(2\pi i \frac{a \alpha A}{N}\right)$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ indexe les différentes représentations du groupe cyclique d'ordre N .

Calcul des matrices S et T .

Nous partons de la forme canonique pour σ et l'indexation 4.49 pour les représentations de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la matrice S se met sous la forme¹⁹

$$(4.52) \quad S_{(A,\alpha)}^{(B,\beta)} = \frac{1}{N} e^{-2\pi i a(A-N\alpha)(B-N\beta)/N^2}$$

Ceci nous amène à introduire l'indexation suivante pour les éléments de $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \Psi : < 0, N-1 > \times \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{N^2\mathbb{Z}} \\ (\bar{A}, \alpha) &\mapsto \bar{A} - N\alpha \end{aligned}$$

Nous introduisons alors $\alpha(\bar{A}, \bar{B}) = \overline{\bar{A} + \bar{B}} - \bar{A} - \bar{B}$ et clairement

$$\Psi(\bar{A}, \alpha) + \Psi(\bar{B}, \beta) = \Psi(-\alpha(\bar{A}, \bar{B}), \alpha + \beta)$$

En substituant dans la formule de Verlinde 3.223 l'expression 4.52 de la matrice S , nous obtenons une algèbre de fusion dont les constantes de structure valent 1 si et seulement si

$$\begin{cases} \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} \equiv 0 \pmod{N} \\ (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})/N \equiv \alpha + \beta + \gamma \pmod{N} \end{cases}$$

et sont nulles dans le cas contraire. En traduisant cette condition dans $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ via Ψ , nous obtenons

$$\Psi(\bar{A}, \alpha) + \Psi(\bar{B}, \beta) + \Psi(\bar{C}, \gamma) \equiv 0 \pmod{N^2}$$

Ainsi, le dictionnaire recherché entre l'approche DVVV et la nôtre n'est autre que Ψ ! Pour être sûr de cette affirmation, nous devons également obtenir les matrices T . Comme l'ont montré DVVV, il existe $\psi : < 0, N-1 > \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ telle que

$$(4.53) \quad e^{2\pi i h(\bar{A}, \alpha)} = \psi_{\bar{A}} e^{2\pi i a(2\alpha\bar{A}N - \bar{A}^2)/2N^2}$$

La condition $(ST)^3 = 1$ entraîne que

$$(4.54) \quad \psi_{\bar{A}}\psi_{\bar{B}} = \psi_{\overline{\bar{A}+\bar{B}}} e^{i\pi a\alpha(\bar{A}, \bar{B})/N}$$

Pour achever l'identification avec nos travaux sur les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, nous devons distinguer entre le cas a impair et le cas a pair.

a pair: La phase $\psi_{\bar{A}}$ disparaît puisqu'elle définit un morphisme de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui est trivial par parité de N . Clairement

$$h_{(\bar{A}, \alpha)} \equiv -\frac{a(\Psi(\bar{A}, \alpha))^2}{2N^2} \pmod{1}$$

Ceci n'est autre que la formule 4.15.

¹⁹Nous utilisons dans ce chapitre la convention $(ST)^3 = 1$, pour se ramener à l'équation $(ST)^3 = C$, il suffit de changer S en $CS = S^*$ ce qui explique la différence entre l'expression 4.52 et celle apparaissant par exemple dans la thèse de R. Dijkgraaf. Le lecteur aura compris qu'il s'agit d'un point de détail.

a impair : Nous nous ramenons au cas précédent en décalant a de N^2 . Notons $h_m^{(a)} = am^2/2N^2$ la dimension modulo 1 dans une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ donnée par la formule 4.15. Le décalage de a se traduit par l'identité

$$h_m^{(a+N^2)} \equiv h_m^{(a)} + \frac{am}{2} \pmod{1}$$

En conséquence,

$$(4.55) \quad h_{\Psi(\bar{A}, \alpha)}^{(a+N^2)} \equiv \frac{a(\Psi(\bar{A}, \alpha))^2}{2N^2} + \frac{a(\bar{A} - \alpha)}{2} \pmod{1}$$

Dans le cas où a est impair, cette dimension coïncide avec celle obtenue par DVVV modulo 1 si et seulement si

$$(4.56) \quad \psi_{\bar{A}} = (-1)^{\bar{A}}$$

Mais nous savons que la seule contrainte sur ψ est donnée par

$$\psi_{\bar{A}}\psi_{\bar{B}} = \psi_{\overline{A+B}} (-1)^{((\overline{A+B}) - \bar{A} - \bar{B})/N}$$

avec $\psi_0 = 1$. L'expression $(-1)^{\bar{A}}$ vérifie clairement cette identité. En considérant $\bar{A} \mapsto (-1)^{\bar{A}}\psi_{\bar{A}}$, nous construisons une application de $\langle 0, N-1 \rangle$ dans $\{-1, 1\}$ qui définit un morphisme de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\{-1, 1\}$. En conséquence, ceci prouve l'unicité de $\psi_{\bar{A}}$. Finalement la dimension calculée par DVVV coïncide avec celle d'une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ de paramètre $N^2 - a$. Finalement,

$$(4.57) \quad h_{(\bar{A}, \alpha)} \equiv -\frac{a(\Psi(\bar{A}, \alpha))^2}{2N^2} + \frac{\Psi(\bar{A}, \alpha)}{2} \pmod{1}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer la charge centrale de ces modèles. Pour cela, nous fixons a modulo N^2 pair, alors:

$$e^{2\pi ic/8} = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}} \exp(2\pi i \frac{ak^2}{2N^2}) = S_{N^2}(a/2)$$

Cette somme de Gauss se calcule facilement en décomposant N en produit de facteurs premiers

$$N = \prod_{j=1}^n p_j^{\alpha_j}$$

tous impairs. Alors, la somme de Gauss devient par application du théorème 53 (voir page 267):

$$S_{N^2}(b) = \left(\frac{b}{N}\right)^2 S_{N^2}(1) = S_{N^2}(1) = 1$$

et nous obtenons finalement

$$(4.58) \quad \exp(2\pi i \frac{c}{8}) = 1$$

La charge centrale est donc un multiple de 8 comme nous l'avons vu au chapitre 3. Notre travail est donc parfaitement compatible avec les travaux de DVVV, et au niveau des matrices S et T , le "dictionnaire" entre ces deux approches est donné par:

Proposition 21 *Un orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ d'une théorie holomorphe, de paramètre a premier avec N est une théorie $\mathbb{Z}/N^2\mathbb{Z}$ de paramètre $-a$ quand a est pair et $N^2 - a$ quand a est impair. La "charge" modulo N^2 d'un champs indexé par $\bar{A}$ et α avec les notations employées ci-dessus est $\bar{A} - N\alpha$.*

4.A Propriétés des algèbres de Verlinde.

Dans cet Appendice, nous allons donner quelques propriétés des algèbres de Verlinde. Nous rappelons qu'une telle algèbre est de dimension finie sur le corps des complexes, est commutative, unitaire et qu'elle est munie d'une involution $C : x \mapsto \hat{x}$. Nous partons de $(e_i)_i$ base de A algèbre de Verlinde telle que l'involution agisse comme une permutation d'ordre 2 sur les indices. Nous notons $C_{i,j,k}$ les constantes de structure de A qui sont réelles. Nous désignerons par e_0 l'élément neutre de l'algèbre. Enfin, nous choisissons la base $(e_i)_i$ de telle sorte que $C(e_i) = e_{\hat{i}}$ où $i \mapsto \hat{i}$ est une involution sur l'ensemble des indices des éléments de notre base.

4.A.1 Diagonalisation simultanée.

Introduisons les matrices $\hat{N}_i$ définies par $(\hat{N}_i)_i^j = C_{i,j,\hat{k}}$. L'associativité de A entraîne que les $\hat{N}_i$ forment une représentation de A de dimension n . En particulier:

$$\hat{N}_i \hat{N}_j = C_{i,j,k} \hat{N}_k.$$

Nous noterons aussi C la matrice $(\delta_{i,j})_{i,j}$ représentant l'action de C sur la base $(e_i)_i$. Alors, nous avons:

Proposition 22 *Il existe S , matrice unitaire qui diagonalise simultanément les $\hat{N}_i$ et telle que:*

- S_0^i est un nombre réel strictement positif.
- $CS = S^*$.

Preuve : En effet, $\hat{N}_i$ commutent deux à deux et $\hat{N}_i = \hat{N}_i^\dagger$. En conséquence, on dispose d'une famille d'endomorphismes normaux commutant et donc, il est possible de les diagonaliser simultanément dans une même base orthonormée. Le choix d'une telle matrice diagonalisante est celui d'une base propre commune aux $\hat{N}_i$. Soit P une telle matrice unitaire qui diagonalise les $\hat{N}_i$, on introduit $w^{(j)} = P(e_i)$. Cela définit une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ propre pour tous les $\hat{N}_i$. Soit $\lambda_i^{(j)}$ défini par:

$$\hat{N}_i w^{(j)} = \lambda_i^{(j)} w^{(j)};$$

comme $\hat{N}_i = \hat{N}_i^\dagger$:

$$\lambda_i^{(j)} = (\lambda_i^{(j)})^*.$$

De $N_{i,0}^k = \delta_{i,k}$, on déduit $P_i^j = P_0^j \lambda_i^{(j)}$ et donc comme P est inversible, $P_0^i \neq 0$ et de plus:

$$\lambda_i^{(j)} = \frac{S_i^j}{S_0^j}.$$

Ceci prouve que les S_0^i ont le même argument que S_0^0 . Par un changement de phase sur les vecteurs propres $w^{(j)}$, S_0^0 peut être pris réel strictement positif et donc on peut rendre les S_0^i réels strictement positifs. Dans ce cas, on note $P = S$ et on trouve la fameuse formule de Verlinde:

$$(4.59) \quad N_{i,j,k} = \sum_n \frac{S_i^n S_j^n S_k^n}{S_0^n}$$

□

4.A.2 Symétrie de S et propriétés modulaires.

Dans les théories invariantes conformes bidimensionnelles apparaît naturellement une algèbre de Verlinde dont les constantes de structure sont les règles de fusion de la théorie conforme. D'après Verlinde, la matrice S de transformation modulaire des caractères diagonalise les règles de fusion. En conséquence, S comme conséquence des relations du groupe modulaire vérifie $S^2 = C$. Ceci entraîne que $SC = CS = S^\dagger$ et donc comme $CS = S^*$, S est symétrique. Réciproquement, si S est symétrique, alors $SC = CS = S^* = S^\dagger$ et donc $S^2 = C$. Ceci montre que la symétrie de S est une condition nécessaire pour que S soit la matrice de transformation modulaire de caractères en genre 1. Les implications de cette restriction sont discutées dans le corps du chapitre 4.

4.A.3 Choix de la matrice S

Nous allons examiner les différents choix possibles de matrice S pour une algèbre de Verlinde donnée. Pour cela, nous allons nous limiter aux cas pertinents dans l'étude des théories conformes bidimensionnelles unitaires.

Définition 56 Soit A une algèbre de Verlinde et S une matrice unitaire diagonalisant les $\hat{N}_i$, S est une matrice S possible si et seulement si S est symétrique, vérifie $SC = CS = S^*$ et $S_0^i > S_0^0 > 0$ pour tout $i \neq 0$.

Nous supposons ici qu'il existe une matrice S possible pour A . Nous voulons trouver toutes les autres matrices S possibles.

Théorème 51 Soit S une matrice S possible d'une algèbre de Verlinde, alors toutes les autres matrices S possibles sont de la forme:

$$S_{,i}^j = S_i^{\sigma(j)}$$

où σ définit un automorphisme de l'algèbre de Verlinde et vérifie $S_{\sigma(i)}^j = S_i^{\sigma(j)}$.

La dernière condition assure la symétrie de S . Bien sûr, nous avons posé la définition suivante:

Définition 57 Une permutation des indices i est appelée un automorphisme de l'algèbre de Verlinde si et seulement si:

$$N_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)} = N_{i,j,k}, \quad \sigma(0) = 0, \quad \sigma(\hat{i}) = \widehat{\sigma(i)}.$$

Preuve : Une des implications est évidente: il suffit de partir de $S_i^j = S_i^{\sigma(j)}$ où σ est un automorphisme de A tel que S' soit symétrique, de remplacer S' par son expression dans la formule de Verlinde pour voir que S' ainsi définie est une matrice S possible.

Montrons la réciproque. Nous avons besoin du Lemme suivant:

Lemme 15 Soient $w^{(j)}$ et $w'^{(j)}$ deux bases propres pour les $\hat{N}_i$, alors, il existe une permutation σ et des nombres complexes non-nuls η_i tels que:

$$w'^{(j)} = \eta_j w^{(j)}.$$

Preuve : Il suffit de prouver que si α_i est une valeur propre de $\hat{N}_i$, et si $E_i^{\alpha_i}$ est l'espace propre correspondant, alors $\dim(\bigcap_i E_i^{\alpha_i}) < 2$.

Pour cela, notons:

$$E_{[\alpha]} = \bigcap_i E_i^{\alpha_i}, \quad [\alpha] = (\alpha_i)_i.$$

Si $[\alpha] \neq [\alpha']$, alors $E_{[\alpha]} \cap E_{[\alpha']} = \{0\}$. De plus, on a:

$$\mathbb{C}^N = \bigoplus_{[\alpha], E_{[\alpha]} \neq \{0\}} E_{[\alpha]}.$$

Les espaces non nuls $E_{[\alpha]}$ sont deux à deux orthogonaux. Supposons qu'un de ces espaces soit de dimension au moins 2; alors il existe $l \neq j$ tels que $(w^{(j)}, w^{(l)}) \in E_{[\alpha]}^2$. Ces deux vecteurs seraient donc associés aux mêmes valeurs propres des N_i et donc $\lambda_i^{(j)} = \lambda_i^{(l)}$ pour tout i . Ceci entraîne la proportionnalité des colonnes j et l de S ce qui contredit l'inversibilité de S . Cela prouve notre lemme: les espaces propres communs sont de dimension 1. $\square$

Nous pouvons alors prouver le théorème. Deux matrices S possibles S et S' définissent deux bases orthonormées propres pour les $\hat{N}_i$. On applique le lemme et comme S_0^i et $S'_0{}^i$ sont réels strictement positifs, $\eta_i = 1$ pour tout i et:

$$S'_{i,j} = S_i^{\sigma(j)}.$$

La symétrie de S' implique $S_{\sigma(i),j} = S_i^{\sigma(j)}$. Comme $CS = SC = S^*$ et $CS' = S'C = S'^*$, $\sigma(j) = \widehat{\sigma(j)}$. $w^{\sigma(0)}$ a des coordonnées réelles positives, et donc a un produit scalaire avec $w^{(0)}$ strictement positif. Par orthogonalité de $w^{(j)}$, $\sigma(0) = 0$. La formule de Verlinde donne enfin:

$$N_{\sigma(i),\sigma(j),\sigma(k)} = \sum_n \frac{S_{\sigma(i)}^n S_{\sigma(j)}^n S_{\sigma(k)}^n}{S_0^n} = \sum_n \frac{S_i^{\sigma(n)} S_j^{\sigma(n)} S_k^{\sigma(n)}}{S_0^{\sigma(n)}} = N_{i,j,k}.$$

Cela prouve le théorème. $\square$

Nous voyons donc le rôle des automorphismes de l'algèbre de Verlinde. Dans toutes les matrices S possibles, il importe de distinguer celles qui s'obtiennent par une simple réindexation des vecteurs de base:

$$S'_{i,j} = S_{\Sigma(i)}^{\Sigma(j)}.$$

Proposition 23 *Si S' et S sont deux matrices S possibles qui diffèrent par une réindexation Σ des vecteurs de base, alors Σ est un automorphisme de l'algèbre de Verlinde; et réciproquement.*

Preuve : Si Σ est un automorphisme de l'algèbre de Verlinde, alors $S'_{i,j} = S_{\Sigma(i)}^{\Sigma(j)}$ est bien une matrice S possible.

Pour montrer la réciproque, il suffit de remplacer dans la formule de Verlinde S' par son expression en fonction de S pour voir que $N_{i,j,k} = N_{\Sigma(i),\Sigma(j),\Sigma(k)}$. $CS' = S'C = S'^*$ montre que $\widehat{\Sigma(i)} = \Sigma(i)$. Enfin, $(S_{\Sigma(0)}^i)_i$ a des composantes réelles strictement positives et donc ce ne peut être que $(S_0^i)_i$ et donc $\Sigma(0) = 0$. Ceci prouve que Σ est un automorphisme de l'algèbre de Verlinde. $\square$

Nous pouvons faire le lien avec le théorème 51. En effet, définissons $w_{\Sigma}^{(j)} = (S_{\Sigma(i)}^j)_i$. D'après le Lemme 15, il existe une permutation $\tilde{\Sigma}$ telle que $w_{\Sigma}^{(j)} = w^{(\tilde{\Sigma}(j))}$. Les relations:

$$S_{\Sigma(i)}^j = S_i^{\tilde{\Sigma}(j)}, \quad S_{\tilde{\Sigma}(i)}^j = S_i^{\Sigma(j)}$$

définissent en fait $\tilde{\Sigma}$. Il est alors facile de voir que $\tilde{\Sigma}$ définit un automorphisme de l'algèbre de Verlinde. De plus, on a $\widetilde{\Sigma_1 \Sigma_2} = \tilde{\Sigma}_2 \tilde{\Sigma}_1$ and $\widetilde{\Sigma^{-1}} = \tilde{\Sigma}^{-1}$ et donc l'application $\Sigma \mapsto \tilde{\Sigma}$ est très similaire à la transposition des matrices. Nous verrons cette analogie plus nettement dans l'étude des théories associées à un groupe abélien. Notons que les points fixes de cette involution sont les automorphismes de l'algèbre de Verlinde qui définissent une matrice S possible.

Soit S une matrice S possible et σ_0 un automorphisme de A fixe par l'involution construite ci-dessus. $S'_{i,j} = S_i^{\sigma_0(j)}$ est une nouvelle matrice S possible et donc elle aussi définit une involution $\Sigma \mapsto \tilde{\Sigma}$. Ses points fixes sont caractérisés par $\sigma \sigma_0 = \sigma_0 \sigma$.

Remarquons enfin que l'ensemble des permutations définissant un automorphisme de A est un groupe ainsi que l'ensemble de celles qui définissent une matrice S possible. En général, ils sont distincts!

4.A.4 Calcul de dimensions.

Comme application intéressante de la diagonalisation simultanée des $\hat{N}_i$, nous allons calculer des invariants topologiques de graphes trivalents à pattes externes coloriées par les indices des vecteurs de base de A .

Soit $\mathcal{G}$ un tel graphe. On note $i_1, \dots, i_n$ les couleurs de ses pattes externes. Nous supposons que $\mathcal{G}$ est de genre g . On définit alors:

$$(4.60) \quad C_{\mathcal{G}}(i_1, \dots, i_n) = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{\text{vertex } v} C_{i_v, j_v, k_v}$$

où la somme porte sur tous les coloriages des lignes de $\mathcal{G}$ respectant le coloriage des pattes externes $i_1, \dots, i_n$. Dans 4.60, i_v, j_v, k_v sont les indices des lignes arrivant au vertex v dans le coloriage $\mathcal{C}$. Nous savons que l'algèbre A est associative, en conséquence, on a:

$$C_{i,j}^n C_{n,k,l} = C_{i,k}^n C_{n,j,l}$$

où $C_{i,j}^k = C_{i,j,\hat{k}}$. De plus $C_{i,j,k}$ est symétrique en i, j et k . Ceci garantit l'invariance topologique de $C_{\mathcal{G}}(i_1, \dots, i_n)$ qui ne dépend que de la topologie de $\mathcal{G}$. On peut donc utiliser un graphe $\mathcal{G}$ particulier pour faire le calcul! Considérons pour commencer quelques exemples. Le calcul se fait en passant dans la base $(w^{(j)})_j$. Si $\hat{V}$ désigne la forme trilinéaire sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\hat{V}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) = C_{i,j,k}$, alors:

$$\hat{V}(w^{(i)} \otimes w^{(j)} \otimes w^{(\hat{k})}) = \frac{\delta_i^j \delta_i^k}{S_0^j}.$$

On utilise cette formule pour obtenir les exemples suivants:

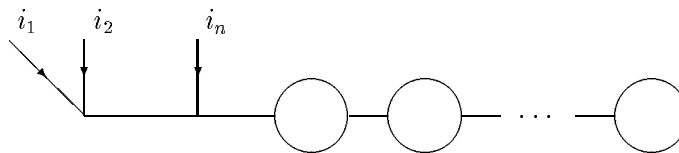
g=1,n=1 Nous avons:

$$C_{1,1}(i) = \sum_k \frac{S_i^k}{S_0^k}$$

g=1,n=2 Dans ce cas:

$$C_{1,2}(i, j) = \sum_k \frac{S_i^k S_j^k}{(S_0^k)^2}$$

Alors, cela suggère de partir du graphe:



Nous obtenons alors:

$$(4.61) \quad C_{g,n}(i_1, \dots, i_n) = \sum_k (S_0^k)^{2(1-g)-n} \prod_{l=1}^n S_k^{i_l}$$

Ces nombres apparaissent comme les fonctions de corrélation d'une théorie topologique à deux dimensions mais aussi dans le contexte des théories conformes rationnelles, comme les dimensions de l'espace des blocs conformes de genre g avec n pattes externes portant les représentations $i_1, \dots, i_n$ quand on remplace les $C_{i,j,k}$ par les règles de fusion.

4.B Quelques techniques arithmétiques utiles.

Dans cet Appendice, nous détaillons quelques techniques arithmétiques élémentaires mais qui sont utilisées extensivement dans le Chapitre 4. Nous commencerons par chercher les entiers modulo N qui sont des carrés, généralisant ainsi le symbole de Legendre. Puis, nous rappellerons brièvement comment résoudre les équations quadratiques dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Enfin, nous résumerons l'état de l'art en ce qui concerne les sommes de Gauss.

Nous ne prétendons nullement à l'originalité dans cet Appendice. Le lecteur désireux de revenir aux textes originaux est renvoyé à [81] qui contient notamment une discussion détaillée des équations quadratiques dans les corps finis et plus généralement dans les anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Le livre de Serre [167] est toutefois écrit dans un langage bien plus moderne.

Carrés dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Nous notons $U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Notre objectif est de déterminer le quotient:

$$\frac{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2}$$

groupe des éléments inversibles modulo les carrés.

Le "Lemme Chinois" [167] permet de simplifier grandement cette étude. Soit $N = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_j}$ la décomposition en facteurs premiers de N , alors il existe φ un morphisme d'anneaux:

$$\varphi : \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}} \longrightarrow \prod_{j=1}^k \frac{\mathbb{Z}}{p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z}}$$

qui associe à chaque entier modulo N ses réductions modulo $p_j^{\alpha_j}$. Il est évident que φ étant un morphisme d'anneaux, les réductions d'un entier modulo N sont des carrés modulo les $p_j^{\alpha_j}$ si et seulement si l'entier

est un carré modulo N . En conséquence:

$$(4.62) \quad \frac{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(2)}} \simeq \prod_{j=1}^k \frac{U(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/p_j^{\alpha_j}\mathbb{Z})^{(2)}}.$$

ce qui ramène le problème au cas où N est une puissance d'un nombre premier.

Comme toujours avec les équations quadratiques, le cas $p = 2$ est quelque peu différent. Toutefois notre stratégie restera toujours la même: nous commencerons par une analyse modulo p que nous "remonterons" modulo p^α . Nous voulons savoir pour quelles valeurs du paramètre a , l'équation $x^2 = a$ admet des solutions dans $U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

$N = p^\alpha$, $p \neq 2$: Le cas $\alpha = 1$ est résolu depuis fort longtemps. Dans le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, si nous définissons le symbole de Legendre [167, Chapitre 1]:

$$\left(\frac{m}{p}\right) = m^{(p-1)/2} \pmod{p},$$

alors, la suite exacte suivante:

$$1 \longrightarrow ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*)^{(2)} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \xrightarrow{(\frac{\cdot}{p})} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

montre que

$$\frac{\mathbb{F}_p}{\mathbb{F}_p^{(2)}} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$$

D'autre part, comme $(y + zp^\beta)^2 \equiv y^2 + 2zp^\beta \pmod{p^\beta}$ dès que $\beta \geq 2$, si y est une solution de $y^2 = a$ modulo p^β , il existe z tel que $(y + zp^\beta)^2 \equiv a$ modulo $p^{\beta+1}$. En conséquence une solution de $x^2 = a$ modulo p peut se remonter en une solution modulo p^α . Ceci montre que x est solution de $x^2 = a$ modulo p^α si et seulement si sa réduite modulo p est solution de $x^2 = a$ modulo p . Finalement, avec $\varphi(x) = x^{(p-1)/2} \pmod{p}$ qui est un morphisme dont l'image est $\{-1, 1\}$, nous avons:

$$1 \longrightarrow ((\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*)^{(2)} \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

ce qui donne:

$$(4.63) \quad \frac{U(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^{(2)}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}.$$

Le cas $p = 2$ est plus subtil vu que:

$$U(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = U(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(2)} = \{1\}.$$

De même, on vérifie facilement que

$$(4.64) \quad \frac{U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{(2)}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et enfin que

$$(4.65) \quad \frac{U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^{(2)}} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

L'identité

$$(x + 2^\beta z)^2 = x^2 + 2^{2\beta} z^2 + 2^{\beta+1} zx$$

montre que si $\beta \geq 3$, alors si $y^2 = a$ modulo 2^β , il existe z tel que $(y + z2^{\beta-1})^2 = a$ modulo $2^{\beta+1}$. Ceci montre que a est un carré dans $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$ si et seulement si il l'est dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ pour $\alpha \geq 3$. Donc:

$$(4.66) \quad \forall \alpha \geq 4, \alpha \in \mathbb{Z}; \quad \frac{U(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})}{U(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^{(2)}} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

On introduit également le symbole de Jacobi [115]:

Définition 58 Soit x et y deux entiers naturels non nuls, alors le symbole de Jacobi est défini par:

$$(4.67) \quad \left(\frac{x}{y}\right) = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|y}} \left(\frac{x}{p}\right)$$

Clairement x est un carré modulo p^α si et seulement si le symbole de Legendre

$$\left(\frac{x}{p}\right)$$

vaut 1. Il convient de remarquer que ce type de critère ne marche que modulo une puissance d'un nombre premier car, dans le cas où p^α est remplacé par un produit y de plusieurs nombres premiers, les symboles de Legendre relatifs à chacun des nombres premiers apparaissant dans le produit peuvent ne pas valoir 1 alors que le symbole de Jacobi (ni même le produit des symboles de Legendre) de x par rapport à y vaut 1. Mais dans ce cas, nous savons que x n'est *pas* un carré modulo y . De même, le cas des puissances de deux ne se mesure pas grâce au symbole de Legendre par rapport à deux.

Equations quadratiques modulo N .

Nous avons également besoin de pouvoir discuter le nombre de solutions d'une équation quadratique dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Comme dans la section précédente, nous pouvons nous ramener au cas où N est une puissance de p . Dans ce cas, la discussion est beaucoup plus simple mais nous devons distinguer les cas $p \neq 2$ et $p = 2$. Enfin nous n'aurons besoin que du cas $N = p^2$.

Cas $p = 2$. Nous commençons par réduire l'équation $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{4}$ modulo 2. L'équation devient alors $(a + b)x + c \equiv 0 \pmod{2}$. Différents cas de figure sont possibles qui sont résumés dans le tableau suivant:

$a + b$	c	solutions
0	1	$\emptyset$
1	0	$\{0\}$
1	1	$\{1\}$
0	0	$\{0, 1\}$

Reste ensuite à remonter ces solutions modulo 4. Comme

$$a(x + 2)^2 + b(x + 2) + c \equiv ax^2 + bx + c + 2b \pmod{4}$$

il n'est pas difficile de voir que si b est pair, chaque solution modulo 2 donne zéro ou deux solutions modulo 4 et si b est impair chaque solution modulo 2 donne exactement une solution modulo 4. C'est d'ailleurs ce dernier cas qui se produit dans le corps du chapitre 3.

Cas $p \neq 2$. La stratégie consiste à résoudre l'équation modulo p puis à remonter la ou les solutions modulo p^2 . Considérons l'équation du second degré générique (a non nul modulo p^2):

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p^2}$$

Deux cas importants peuvent se présenter:

- Supposons que la réduite modulo p soit une équation du second degré, nous devons distinguer deux cas:

- L'équation réduite admet deux solutions modulo p et nous notons $x_{\pm}$ des représentants dans $\mathbb{Z}$. Comme

$$a(x + mp)^2 + b(x + mp) + c \equiv ax^2 + bx + c + p(2ax + b)m \pmod{p^2}$$

ceci montre que l'on peut remonter nos deux solutions en deux solutions distinctes modulo p^2 dès que $2ax_{\pm} + b$ est non nul modulo p . Ceci est réalisé dans notre cas car si $2ax_{\pm} + b \equiv 0 \pmod{p}$, alors $b^2 - 4ac \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui force $x_+ = x_-$.

- Si l'équation réduite n'admet qu'une seule solution modulo p , alors, en notant x_0 un représentant dans $\mathbb{Z}$, $ax_0^2 + bx_0 + c$ est de la forme kp pour $k \in \mathbb{Z}$. Changer x_0 en $x_0 + mp$ ne change pas $ax_0^2 + bx_0 + c$ modulo p et donc, si $m = 0$, la solution x_0 se relève en une unique solution modulo p^2 . Dans le cas contraire ($m \neq 0$), ce n'est pas possible.
- Quand l'équation réduite est du premier degré modulo p , c'est à dire quand $b \not\equiv 0 \pmod{p}$, nous avons une seule solution modulo p dont nous prenons un représentant x_0 dans $\mathbb{Z}$. Il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = a'p$ et donc

$$a(x_0 + pm)^2 + b(x_0 + mp) + c \equiv bmp + ax_0^2 + bx_0 + c \pmod{p^2}$$

qui admet en $m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ une et une seule solution. Ceci montre que nous pouvons remonter x_0 en une unique solution modulo p^2 .

Comme pour p impair, les autres cas n'interviennent pas dans l'analyse du chapitre 4. Nous laissons là cette étude.

Sommes de Gauss.

La somme de Gauss $S_N(a)$ est définie par:

$$(4.68) \quad S_N(a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i \frac{ak^2}{N}\right).$$

où nous nous limitons ici au cas $N \wedge a = 1$.

La stratégie est toujours la même, on cherche à se ramener aux puissances de nombres premiers. Dans notre contexte, ceci est obtenu grâce à la proposition suivante:

Proposition 24 *Soient a, b, c trois entiers sans diviseur commun, alors:*

$$S_{ab}(c) = S_a(bc)S_b(ac).$$

Ce résultat est une conséquence triviale du Théorème de Bezout. Ensuite, pour évaluer $S_{p^\alpha}(a)$, il convient de se ramener au cas $a = 1$. L'évaluation de $S_N(1)$ est un problème difficile dont nous donnons seulement la réponse [81]:

Théorème 52 (K.F. Gauss)

$$S_N(1) = \frac{1+i}{2}(1+(-i)^N)$$

Maintenant, nous sommes prêts à calculer la somme de Gauss $S_{p^\alpha}(a)$. Nous devons distinguer entre $p = 2$ et $p \neq 2$.

$p \neq 2$: Comme nous l'avons montré en section 4.B, a est un carré modulo p^α si et seulement si le symbole de Legendre de a par rapport à p vaut 1. Dans ce cas, la somme $S_{p^\alpha}(a)$ est égale à $S_{p^\alpha}(1)$. Pour conclure dans l'autre cas, remarquons que si a n'est pas un carré modulo p^α , alors l'ensemble des an^2 quand n décrit les inversibles modulo p^α , est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ qui ne sont pas des carrés. Chaque élément est obtenu exactement deux fois car $(-1)^2 = 1$ et $-1 \neq 1$. Ceci permet de conclure trivialement dans le cas $\alpha = 1$: $S_p(a) + S_p(1)$ est le double de la somme des racines p -èmes de l'unité et donc:

$$S_p(a) = \left(\frac{a}{p}\right) S_p(1)$$

Toutefois, ce raisonnement simpliste ne fonctionne plus dans le cas $\alpha > 1$. En effet, dès que $\alpha > 1$, il existe des éléments de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ non nuls qui ne sont pas inversibles. Nous allons commencer par le cas $\alpha = 2$ avant de montrer que l'on peut se ramener aux cas $\alpha = 1, 2$ par récurrence.

Décomposons alors notre somme de Gauss en $S_{p^2}(a) = I_{p^2}(a) + N_{p^2}(a)$ avec

$$(4.69) \quad I_{p^2}(a) = \frac{1}{p} \sum_{n \in U(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})} \exp\left(2\pi i \frac{an^2}{p^2}\right)$$

$$(4.70) \quad N_{p^2}(a) = \frac{1}{p} \sum_{n \notin U(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})} \exp\left(2\pi i \frac{an^2}{p^2}\right)$$

Comme les éléments de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ qui ne sont pas inversibles sont tous des multiples de p , leur carré est nul modulo p^2 . En conséquence, pour tout a premier avec p ,

$$N_{p^2}(a) = 1$$

D'un autre côté, si a n'est pas un carré modulo p^2 et donc modulo p ,

$$I_{p^2}(a) + I_{p^2}(1) = \frac{2}{p} \sum_{n \in U(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})} \exp\left(2\pi i \frac{n}{p^2}\right)$$

Un inversible modulo p^2 se décompose sous la forme $x + py$ où $y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $x \in \langle 1, p-1 \rangle$. Cette décomposition montre que la somme $I_{p^2}(a) + I_{p^2}(1)$ vaut 0. Finalement $S_{p^2}(1) + S_{p^2}(a) = 2$ quand a n'est pas un carré modulo p^2 . Comme $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$ pour tout entier impair, $S_{p^2}(a) = 1$ pour tout a premier avec p . Donc, dans ce cas, indépendamment du fait que a soit un carré ou non

$$(4.71) \quad S_{p^2}(a) = S_{p^2}(1) = 1$$

Pour montrer que l'évaluation de la somme $S_{p^\alpha}(a)$ pour $\alpha > 2$ se ramène au cas précédent, il suffit de décomposer un entier modulo p^α sous la forme $x + yp^{\alpha-1}$ où $y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $x \in \langle 0, p^{\alpha-1} - 1 \rangle$. Par ce biais le lecteur arrivera facilement à l'identité suivante:

$$(4.72) \quad S_{p^\alpha}(a) = S_{p^{\alpha-2}}(a)$$

En conséquence:

$$\frac{S_{p^\alpha}(a)}{S_{p^\alpha}(1)} = \frac{S_{p^{\alpha-2}}(a)}{S_{p^{\alpha-2}}(1)}$$

ce qui montre la proposition suivante:

Proposition 25 *Si p est premier impair et a inversible modulo p , alors*

$$(4.73) \quad S_{p^\alpha}(a) = \left(\frac{a}{p}\right)^\alpha S_{p^\alpha}(1)$$

Remarque : Dans l'ouvrage de S. Lang [115] se trouvent un certain nombre de résultats concernant les sommes de Gauss. L'énoncé de la proposition 25 est malheureusement repris faux dans [34]. La morale de cette histoire devrait inviter le lecteur à reprendre les calculs et les raisonnements présentés dans cette thèse. $\square$

$p = 2$: Le même type de réflexion aboutit dans le cas $p = 2$ mais en tenant compte des subtilités inhérentes à la caractéristique 2. Nous laissons au lecteur le soin de prouver que:

Proposition 26 *Si a est un entier impair:*

$$(4.74) \quad S_{2^\alpha}(a) = \varepsilon(a) \left(\frac{-2^\alpha}{a}\right) S_{2^\alpha}(1)$$

où $\varepsilon(a) = 1$ quand $a \equiv 1 \pmod{4}$ (respectivement $\varepsilon(a) = i$ quand $a \equiv -1 \pmod{4}$).

Le raisonnement est du même type mais cette fois, comme nous l'avons vu dans la section 4.B, la descente se fait de 2^α à $2^{\alpha-4}$.

Ces résultats permettent d'évaluer toutes les sommes de Gauss possibles et imaginables:

Théorème 53 *Si $N = \prod_j p_j^{\alpha_j}$ est impair et si a est premier avec N ,*

$$(4.75) \quad S_N(a) = \left(\prod_{j=1}^n \left(\frac{a}{p_j}\right)^{\alpha_j}\right) \frac{1+i}{2} (1 + (-i)^N)$$

Nous aurons aussi besoin des sommes de Gauss suivantes:

$$(4.76) \quad F_N(a) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i a k^2 / 2N}$$

Dans le cas où N est impair et a est pair pris modulo N^2 , nous remarquons que l'on lit directement

$$(4.77) \quad F_N(a) = S_N\left(\frac{a}{2}\right)$$

Chapitre 5

Théories Topologiques tridimensionnelles et Equations de Moore et Seiberg.

Dans les chapitres précédents, nous avons décrit les théories invariantes conformes à deux dimensions et les théories topologiques bidimensionnelles. Le but de ce chapitre est d’approfondir le lien entre théories conformes à 2 dimensions et théories topologiques à 3 dimensions.

Plus précisément, nous montrerons, suivant [192], que l’espace des états de la théorie de Chern-Simons associé à une surface de genre g avec n points marqués n’est autre que l’espace des blocs conformes du modèle de Wess-Zumino-Witten sur cette surface et le niveau k du modèle est la constante de couplage de l’action de Chern-Simons. Cet espace des états est de dimension finie car le groupe $SU(N)$ est compact. On parle alors de théorie topologique rationnelle, par analogie avec la rationalité du modèle de WZW associé. Enfin, comme l’a montré Witten [191], les coefficients des matrices de “braiding” du modèle de WZW sont reliés à des fonctions de partition de tétraèdres plongés dans la sphère S_3 . La matrice de transformation modulaire S des caractères possède elle aussi une interprétation tridimensionnelle [192].

Cette relation est en fait très générale et nous allons suggérer qu’une large classe de théories topologiques rationnelles détermine des solutions des équations de Moore et Seiberg. De plus, toute fonction de partition de la théorie topologique est calculable à partir des données de Moore et Seiberg associées : la solution que l’on a obtenue caractérise entièrement la théorie topologique. Notre démarche sera aussi complète que possible moyennant quelques problèmes de projectivité sur lesquels nous reviendrons au chapitre 6. Le lecteur doit donc être conscient que le travail présenté ici n’est pas totalement achevé et qu’un certain nombre de questions ouvertes subsistent.

Les préliminaires géométriques seront rappelés dans la section 5.1. L’exemple de la théorie de Chern-Simons sera discuté dans la section 5.1.1 avant d’aborder le problème général dans la section 5.3. Puis, dans la section 5.4, nous verrons que les amplitudes de changement de topologie se calculent en fonction des données de Moore et Seiberg ainsi que l’action du groupe modulaire de la surface Σ sur H_Σ . Ceci montrera un premier aspect de la relation entre théories conformes 2D et théories topologiques 3D. Le problème inverse, c’est à dire la reconstruction d’une théorie topologique tridimensionnelle à partir de données de Moore et Seiberg fera l’objet du chapitre suivant.

5.1 Définition de la catégorie géométrique.

Dans cette section, nous allons préciser sur quelle catégorie géométrique $\mathbf{Ma}_{3,1}$ nous allons travailler dans la suite de cette thèse. Au travers de quelques exemples utiles par la suite nous illustrerons les notions de cobordismes paramétrés et de recollement que nous avons présentées dans le chapitre 1.

5.1.1 Les objets de $\mathbf{Ma}_{3,1}$.

Les objets de la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ sont des surfaces compactes orientées et décorées, c'est à dire munies de points marqués auxquels on associe une demi-droite dans l'espace tangent à la surface au point considéré. L'introduction de cette demi-droite sera expliquée plus loin. Nous noterons $\Sigma_{g,n}$ une telle surface de genre g avec n points marqués. La même surface munie de l'orientation opposée sera notée $\hat{\Sigma}_{g,n}$.

Par exemple, $\Sigma_{1,0}$ désigne le tore $S_1 \times S_1$. Si $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ désigne la coordonnée le long du premier cercle et $\psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la coordonnée le long du second cercle, $\omega = d\varphi \wedge d\psi$ définit une orientation sur $S_1 \times S_1$.

Ces surfaces sont de plus munies de décorations: nous supposons qu'il existe un ensemble I d'indices et que chaque point marqué est muni d'un élément de I . Un objet générique de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ est une union disjointe de telles surfaces décorées munies d'orientations.

5.1.2 Les morphismes de $\mathbf{Ma}_{3,1}$.

Soient N_1 et N_2 deux objets de $\mathbf{Ma}_{3,1}$, un morphisme qui interpole entre ces objets est la donnée d'une part:

- D'une variété tridimensionnelle M dont le bord est difféomorphe à $N_1 \cup N_2$. Nous distinguons dans ∂M deux composantes $\partial M_1 \simeq N_1$ et $\partial M_2 \simeq N_2$ que nous appellerons entrantes et sortantes.
- De deux difféomorphismes φ_1 (respectivement φ_2) de ∂M_1 (respectivement ∂M_2) vers N_1 (respectivement N_2).
- D'une orientation $\mathcal{O}_M$ sur M telle que si $\mathcal{O}_{N_{1,2}}$ désignent les orientations de $N_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ assure la compatibilité entre l'orientation induite par $\mathcal{O}_M$ au bord et $\mathcal{O}_{N_{1,2}}$:

$$(5.1) \quad \varphi_1 \in \text{Diff}_+([\partial M_1, \mathcal{O}_M], [N_1, \mathcal{O}_{N_1}])$$

$$(5.2) \quad \varphi_2 \in \text{Diff}_+([\partial M_2, \mathcal{O}_M], [N_2, \mathcal{O}_{N_2}])$$

- D'un graphe trivalent K plongé dans M et qui interpole entre les points marqués sur N_1 et ceux marqués sur N_2 .

qui constituent le versant purement géométrique du morphisme. D'autre part, comme pour les objets, ce substrat géométrique est décoré:

- Le graphe K doit être colorié en suivant des règles précises. Comme nous l'avons déjà rencontré dans le chapitre 1 lors de l'étude du modèle de Higgs bidimensionnel, les lignes du graphe doivent être coloriées et orientées. Les vertex du graphe sont également coloriés. Tout naturellement et comme l'a montré Witten dans son étude de la théorie de Chern-Simons [192], les lignes sont coloriées par

une représentation d'une algèbre de Kac-Moody et les vertex par les opérateurs d'entrelacement de Moore et Seiberg.

Dans notre version abstraite, on va disposer d'indices de lignes $i \in I$ et d'une involution ¹ $i \mapsto \hat{i}$ dont l'indice 0 est un point fixe². Pour chaque triplet $[i, j, k]$ d'indices de lignes, on dispose d'un ensemble $[i, j, k]$ de $N_{i,j,k}$ indices de vertex et on impose:

- La symétrie de $N_{i,j,k}$ en i, j et k et l'invariance par conjugaison simultanée des trois indices:
 $N_{i,j,k} = N_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}$.
- $N_{i,j,0} = \delta_{i,j}$.
- L'involution peut être étendue aux indices de vertex: $a \in [i, j, k] \mapsto \hat{a} \in [\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$.

Le définition générale du coloriage d'un graphe trivalent est donc:

Définition 59 *Soit $\mathcal{G}$ un graphe trivalent, colorier ce graphe consiste à orienter chaque ligne et à y apposer un indice de ligne (avec la convention que le changement d'orientation entraîne un changement de l'indice en son conjugué), et à colorier un vertex où arrivent trois lignes coloriées i, j, k par un indice de vertex $a \in [i, j, k]$.*

On appellera coloriage opposé d'un coloriage $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$, le coloriage obtenu en changeant tous les indices en leurs conjugués. Nous le noterons $\hat{\mathcal{C}}$.

Dans le cas qui nous intéresse, nous devons imposer la compatibilité entre le coloriage du graphe plongé dans M et les décorations de $N_{1,2}$. Comme le lecteur s'y attend:

- Le coloriage d'une ligne qui arrive en un point $P \in N_1$, muni de l'indice i de I se fait en orientant la ligne dans le sens "s'éloignant de P " et en la munissant de l'indice $\hat{i}$.
- Le coloriage d'une ligne qui arrive en un point $P \in N_2$, muni de l'indice i se fait en orientant la ligne dans le sens "s'approchant de P " et en la munissant de l'indice i .

Cette prescription assure que l'on peut recoller naturellement deux morphismes de la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ en recollant leur substrats géométriques par l'opération $\sharp$ sans rupture de continuité dans le coloriage.

- Le graphe doit être muni d'un framing au sens du chapitre 1. Nous allons rendre cette notion un peu plus opérationnelle.

Dans le chapitre 1, section 1.2.6, nous avons considéré que le plongement d'un graphe trivalent dans une variété tridimensionnelle M devait se faire en choisissant un plongement d'un tore plein dont le graphe serait un 1-squelette dans M . Pour fixer les idées, supposons que notre graphe comporte g boucles, c'est à dire que le tore plein T_g utilisé pour le plongement soit de genre g . La différence entre deux plongements est clairement un difféomorphisme de $\Sigma_g = \partial T_g$, qui se prolonge au tore plein et qui de plus laisse le 1-squelette invariant afin de préserver la position du coloriage dans M . Dans ce cas, le groupe F_K de la définition 11 du chapitre 1 est simplement engendré

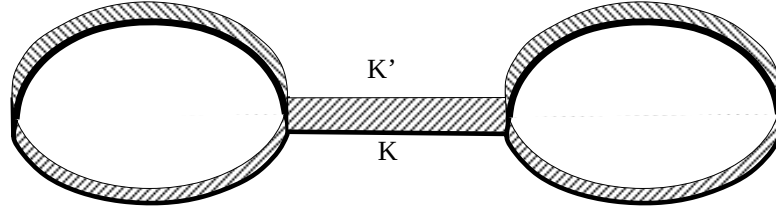
¹Correspondant à la conjugaison des représentations dans Chern-Simons.

²Qui jouera le rôle de la représentation triviale...

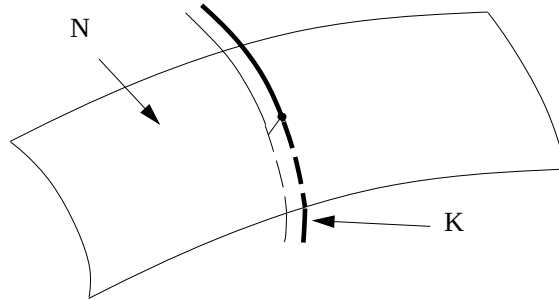
par les twists de Dehn³ autour des cycles tracés sur Σ_g qui engendrent le noyau de l'application naturelle de $\pi_1(\partial T_g)$ dans $\pi_1(T_g)$.

Pour spécifier la différence qui existe entre deux framings, la donnée d'un entier $n \in \mathbb{Z}$ associé à chaque ligne de K suffit.

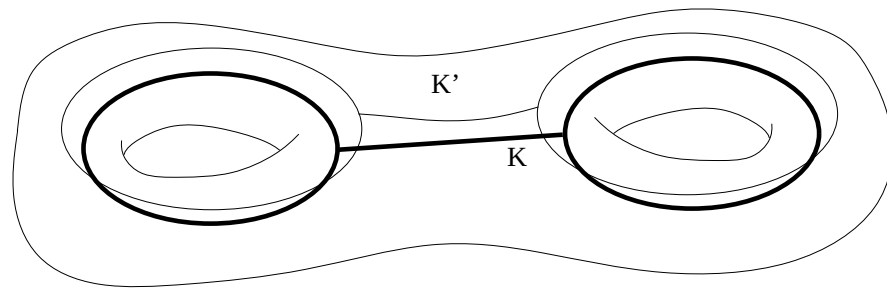
Ceci conduit tout naturellement à une représentation très visuelle et pratique du framing. En effet, il suffit de remplacer K et le plongement du tore plein T_g dans M par la donnée d'une structure dite "en ruban". Chaque ligne de K est remplacée par un petit ruban: l'un des bords représente K lui même et l'autre représente K' :



Un plongement d'un tel ruban dans M est équivalent à un plongement d'un tore plein T_g dans M . C'est la représentation que nous utiliserons du framing dans la suite de cette thèse. Cette idée est originellement due à Reshetikhin et Turaev [152]. Enfin, ceci justifie l'introduction d'une demi-droite dans l'espace tangent à la surface N : nous pouvons la définir par un vecteur tangent non-nul, qui "représente" l'intersection du ruban définissant le framing du graphe $K \subset M$ avec la surface comme indiqué sur le dessin suivant:



De la même manière que le framing d'un nœud est décrit simplement par une courbe parallèle au nœud (voir les travaux de Fenn et Rourke par exemple [61] ou ceux de Kirby [104]), le framing du graphe est défini grâce à un graphe parallèle à K que nous noterons K' . Ce graphe K' n'est autre que le lieu des extrémités du ruban considéré ci-dessus comme le suggère la figure suivante:



³Définis par exemple dans le livre de J. Birman [13, Page 165-166, figure 16].

Remarque : Pour être complet et aussi pour faire le lien avec d’autres travaux, nous considérons maintenant le cas du plongement d’un cercle dans S_3 , communément appelé un nœud. Conformément à la philosophie ci-dessus, le framing d’un nœud est défini par une courbe parallèle à celui-ci.

Parmi tous les framings possibles et imaginables d’un nœud donné, il en existe un privilégié. En effet, considérons les surfaces (de Seifert) qui s’appuient sur le nœud considéré C [103, Chapitre 5]. Une telle surface n’est pas unique car on peut lui rajouter une anse; mais en revanche, elle définit à une isotopie près une unique courbe parallèle à C . En conséquence elle fixe complètement le framing de C . Ce framing particulier est appelé le framing canonique ou encore framing zéro du nœud et les autres framings sont comptés relativement à celui-ci. Lorsque nous dirons qu’un nœud possède un framing $n \in \mathbb{Z}$, nous nous entendrons toujours que la courbe parallèle qui le définit s’enroule n fois de plus autour du nœud que celle définissant le framing zéro⁴.

Il existe une autre manière de compter le framing, qui, si elle n’est pas canonique, n’en est pas moins utile: choisissons un plan de projection pour notre nœud. Le framing *normal* relativement à ce plan de projection est obtenu en utilisant un ruban orthogonal au plan de projection. Cette notion dépend clairement du plan de projection. $\square$

Tout ceci définit entièrement la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$. Avant de rentrer dans l’étude de la théorie topologique, nous allons décrire explicitement quelques objets et morphismes de cette catégorie qui seront amplement utilisés dans ce chapitre et le suivant.

5.1.3 Quelques exemples.

Les objets de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ sont des surfaces orientables sans bord avec des points marqués, munies d’une orientation. Celle-ci est définie par la donnée d’une 2-forme différentielle ne s’annulant pas. Deux exemples triviaux s’imposent:

- La sphère S_2 est judicieusement paramétrée par des coordonnées sphériques (ϑ, φ) et dans cette carte, nous pouvons choisir l’orientation définie par $\omega = \sin(\vartheta)d\vartheta \wedge d\varphi$.
- Le tore $S_1 \times S_1$ est paramétré par deux coordonnées cycliques $(\psi, \varphi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ et une orientation naturelle est donnée par $\omega = d\psi \wedge d\varphi$.

Les morphismes doivent être définis comme des cobordismes paramétrés. Pour ne pas se perdre par la suite, il est urgent de disposer d’une représentation commode du paramétrage d’une surface Σ_g orientable compacte sans bord de genre g .

Fort heureusement, une telle représentation existe. Elle passe par la construction d’une surface “modèle” de genre g , munie d’une orientation: c’est ce que nous considérons comme objet $\Sigma_g \in \mathbf{Ob}(\mathbf{Ma}_{3,1})$. Pour ce faire, nous utilisons la base canonique $\mathcal{B}_g = ((a_j), (b_j))_{j \in \langle 1, g \rangle}$ de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ définie dans le chapitre 3.

Soit une surface Σ' de même topologie, et F un difféomorphisme de Σ_g sur Σ' . Ce difféomorphisme définit un ensemble de $2g$ courbes tracées sur Σ' qui constituent une base image de $\mathcal{B}_g$ pour $H_1(\Sigma', \mathbb{Z})$. Ces courbes peuvent être appelées $(a'_j) = F((a_j))$ et $(b'_j) = F((b_j))$. Alors, la forme d’intersection sur

⁴Avec les conventions d’orientation naturelles.

$H_1(\Sigma', \mathbb{Z})$ dans cette base a pour matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour que cette représentation soit intéressante,

Fixons un ensemble de $2g$ courbes $((a'_j), (b'_j))_j$ tracées sur Σ' qui forment une base de $H_1(\Sigma', \mathbb{Z})$ et qui ont la matrice d'intersection ci-dessus; alors il existe une unique classe modulaire de Σ_g dans Σ' qui envoie (a_j) sur (a'_j) et (b_j) sur (b'_j) pour tout $j \in \{1, \dots, g\}$. En effet, le groupe $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ agit naturellement sur $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$. Cela définit un morphisme de $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ dans $\text{Sp}(2g)$ qui est surjectif. L'unicité au niveau modulaire est assuré par le théorème de Baer [26]:

Théorème 54 (Baer) *Si un difféomorphisme agit comme l'identité sur $\pi_1(\Sigma_g)$, alors il est isotope à l'identité.*

En conséquence, si h_1 et h_2 envoient $\mathcal{B}_g$ sur $\mathcal{B}'_g$, alors le difféomorphisme $h_2^{-1} \circ h_1$ préserve, à homotopie près, chaque élément d'un système de générateurs de $\pi_1(\Sigma_g)$. Donc, il est isotope à 1 et finalement h_1 et h_2 sont dans la même classe modulaire. Ceci confirme l'intérêt de la représentation des classes modulaires par des ensembles de courbes.

Nous utiliserons abondamment cette image par la suite. Quelques exemples basés sur le tore illustrent la notion de cobordisme paramétré.

Une modélisation bien commode de S_3 par les complexes s'impose:

$$(5.3) \quad S_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

Une orientation naturelle est obtenue en prenant l'orientation induite de celle de $\mathbb{R}^4$ sur

$$B_4 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1\}$$

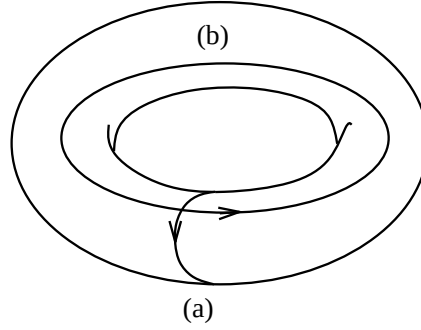
puis sur $S_3 = \partial B_4$. Dans S_3 , nous reconnaissons un tore plein $D_2 \times S_1$ en paramétrant les éléments de S_3 par:

$$z_1 = e^{i\varphi} \cos(\vartheta) \quad z_2 = e^{i\psi} \sin(\vartheta)$$

où $\vartheta \in [0, \pi/2]$ et $(\varphi, \psi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ puis en restreignant ϑ dans $[0, \pi/4]$. Le cobordisme T_1 est alors parfaitement défini par le paramétrage du bord:

$$\varphi_{T_1} : \begin{matrix} \partial T_1 \rightarrow \Sigma_1 \\ (e^{i\varphi}/\sqrt{2}, e^{i\psi}/\sqrt{2}) \mapsto (\psi, \varphi) \end{matrix}$$

en parfait accord avec la vision familière de T_1 :



Naturellement, l'orientation induite par T_1 sur ∂T_1 est l'opposée de celle transportée de Σ_1 par $\varphi_{T_1}^{-1}$: $\partial T_1 = \hat{\Sigma}_1$ en accord avec $T_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_1)$.

Nous pouvons construire d'autres cobordismes paramétrés:

- Considérons cette fois que $\vartheta \in [\pi/4, \pi/2]$ et choisissons toujours l'orientation induite par celle de S_3 . Nous définissons:

$$\varphi_{S_3 \setminus T_1} : \begin{array}{l} \partial(S_3 \setminus T_1) \rightarrow \Sigma_1 \\ (e^{i\varphi}/\sqrt{2}, e^{i\psi}/\sqrt{2}) \mapsto (\psi, \varphi) \end{array}$$

On dispose alors d'un morphisme interpolant entre Σ_1 et $\emptyset$ et clairement:

$$(5.4) \quad S_3 = T_1 \sharp (S_3 \setminus T_1)$$

- Le cobordisme $\hat{T}_1$ est paramétré judicieusement par:

$$z_1 = e^{i\varphi} \sin(\vartheta) \quad z_2 = e^{i\psi} \cos(\vartheta)$$

pour $\vartheta \in [\pi/4, \pi/2]$ et $(\varphi, \psi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$. La paramétrisation du bord est définie par:

$$\begin{array}{l} \varphi_{\hat{T}_1} : \partial \hat{T}_1 \rightarrow \Sigma_1 \\ (e^{i\varphi}/\sqrt{2}, e^{i\psi}/\sqrt{2}) \mapsto (\psi, \varphi) \end{array}$$

et l'orientation est alors définie par la 2-forme $\omega = \cos(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi \wedge d\psi$.

Pour nous familiariser un peu plus avec ces objets, nous pouvons montrer très facilement que certains d'entre eux sont isomorphes au sens de la définition 1. Considérons par exemple:

$$(5.5) \quad F : (e^{i\varphi} \cos(\vartheta), e^{i\psi} \sin(\vartheta)) \in (S_3 \setminus T_1) \mapsto (e^{-i\psi} \sin(\vartheta), e^{i\varphi} \cos(\vartheta)) \in \hat{T}_1$$

qui est un difféomorphisme de $S_3 \setminus T_1$ sur $\hat{T}_1$. Alors, la restriction aux bords de F vérifie:

$$(5.6) \quad \varphi_{\hat{T}_1} \circ F|_{\partial(S_3 \setminus T_1)} = s \circ \varphi_{S_3 \setminus T_1}$$

où s est la classe modulaire introduite dans le chapitre 3, page 220 et représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bien sûr, F envoie l'orientation de $S_3 \setminus T_1$ sur celle de $\hat{T}_1$. Finalement, une modification élémentaire du paramétrage du bord de $\hat{T}_1$ suffit à transformer notre difféomorphisme en isomorphisme. Avec une notation évidente:

$$(5.7) \quad (S_3 \setminus T_1)_{\varphi_{S_3 \setminus T_1}} \simeq (\hat{T}_1)_{s^{-1} \circ \varphi_{\hat{T}_1}}$$

et donc

$$S_3 = T_1 \# (S_3 \setminus T_1) = T_1 \#_s \hat{T}_1$$

dont nous ferons un usage intensif au chapitre suivant.

D'une manière générale, dans la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$, on attend que si $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, N)$ et $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(N, \emptyset)$, alors pour tout $f \in \text{Diff}_+(N)$,

$$(5.8) \quad \widehat{M_1 \#_f M_2} = \hat{M}_2 \#_{f^{-1}} \hat{M}_1$$

Ceci trouve son illustration ici car $T_1 \#_s \hat{T}_1$ est la sphère S_3 munie d'une certaine orientation et $T_1 \#_{s^{-1}} \hat{T}_1$ produit l'autre orientation sur S_3 .

5.2 La théorie de Chern-Simons.

Avant de montrer comment le formalisme des théories topologiques basées sur $\mathbf{Ma}_{3,1}$ permet de retrouver les équations de Moore et Seiberg, il importe de montrer un exemple important: la théorie de Chern-Simons. Historiquement, cet exemple a permis à E. Witten de conjecturer la relation entre les théories conformes rationnelles et les théories topologiques tridimensionnelles [192].

Notre approche ne sera pas extraordinairement rigoureuse ni originale, mais il nous a paru important de placer à ce niveau quelques rappels bien utiles pour comprendre la machinerie abstraite qui suivra. Cette section ne prétend donc ni à l'exhaustivité ni à l'originalité.

Comme dans le cas de la théorie de Higgs bidimensionnelle rencontrée au chapitre 1, nous allons commencer par analyser les symétries de ce modèle, puis trouver les états physiques et enfin les opérateurs pertinents. Pour mener cela à bien, de fréquents renvois à l'étude du modèle de Wess-Zumino-Witten présentée au chapitre 3 sont nécessaires.

5.2.1 Equations du mouvement, symétries.

L'action de la théorie de Chern-Simons est une fonctionnelle de la connexion A sur un fibré G -principal au dessus de la variété M faisant office d'espace-temps. Nous nous limiterons au cas le plus simple pour lequel le groupe G est connexe, compact et simplement connexe. Dans ce cas, il est bien connu que $\pi_2(G) = \{0\}$. Un autre cas intéressant est $G = U(1)$ pour lequel $\pi_2(G)$ est toujours trivial mais $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Dans ces deux cas, comme les obstructions à la trivialité d'un fibré principal de fibre G au dessus de M compacte orientable connexe sont gouvernées par $\pi_2(G)$, le fibré considéré est forcément trivial. Ceci élimine d'éventuels facteurs de phase topologique que tout esprit pervers aurait aimé étudier.

Si nous désignons par A notre connexion, l'action de Chern-Simons sur M munie d'une métrique g est donnée par:

$$(5.9) \quad S[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$$

La forme de l'action de Chern-Simons ne dépendant pas de la métrique g sur la variété M , ceci montre qu'au niveau classique, la théorie est topologique. La variation de l'action dans $A \mapsto A + \delta A$ est donnée par:

$$\delta S = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}(F_A \wedge \delta A) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(A \wedge \delta A).$$

Les équations du mouvement sont donc $F_A = 0$ ($\delta A = 0$ sur ∂M). Ces équations sont invariantes de jauge car dans une transformation de jauge, $F_A \mapsto g^{-1} F_A g$. Toutefois, l'action n'est pas invariante de jauge! Calculons⁵ $S[g^{-1}Ag + g^{-1}dg] - S[A]$:

$$\begin{aligned} (5.10) \quad S[g^{-1}Ag + g^{-1}dg] - S[A] &= -\frac{k}{12\pi} \int_M \text{Tr}((g^{-1}dg)^{\wedge 3}) \\ &+ \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr}((dg)g^{-1} \wedge dA - (dg)g^{-1} \wedge (dg)g^{-1} \wedge A) \\ (5.11) \quad &= -\frac{k}{12\pi} \int_M \text{Tr}((g^{-1}dg)^{\wedge 3}) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(A \wedge (dg)g^{-1}) \end{aligned}$$

Examinons les deux termes de cette variation: le second est un terme de bord, et nous verrons son influence plus tard; le premier est un invariant topologique pour la configuration de champ g . Par exemple, dans le cas $M = G = S_3$ de $g : S_3 \mapsto SU(2)$, ce nombre représente le “nombre d'enroulement” de la configuration de champ qui dans ce cas précis est une application de S_3 dans $SU(2) = S_3$. De manière générale, c'est un invariant topologique qui indexe les classes d'isotopies d'applications de M dans G (indexées par $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$). Comme il est à valeurs entières, le poids de Feynman de la théorie de Chern-Simons $W[A] = \exp(iS[A])$ est bien invariant de jauge par les transformations qui se réduisent à l'identité sur ∂M . Le groupe de symétrie est $\text{Map}(M, G)$. Le groupe des transformations de jauge à temps fixé est $\mathcal{G}_\Sigma = \text{Map}(\Sigma, G)$.

5.2.2 Analyse Hamiltonienne.

Soit $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, l'action sur ce cylindre vaut:

$$(5.12) \quad S[A] = \frac{k}{4\pi} \int \varepsilon_{i,j,k} \text{Tr}(A_i \partial_j A_k + \frac{2}{3} A_i A_j A_k)$$

$$(5.13) \quad = \frac{k}{2\pi} \int \text{Tr}(A_0(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + [A_1, A_2]) + \frac{1}{2}(A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2))$$

où l'indice 0 désigne la composante le long de la composante $\mathbb{R}$ du cylindre. Ainsi A_0 est un multiplicateur de Lagrange qui impose la contrainte $F_{12} = 0$. Les champs A_1 et A_2 sont des grandeurs conjuguées. Suivant [183], nous introduisons les coordonnées complexes sur Σ : $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. Les composantes $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont définies par:

$$A = \frac{A_1 - iA_2}{2} \quad \bar{A} = \frac{A_1 + iA_2}{2}$$

De même, nous rappelons que:

$$\partial_z = \frac{\partial_1 - i\partial_2}{2} \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{\partial_1 + i\partial_2}{2}$$

et la contrainte s'écrit:

$$\partial_z \bar{A} - \partial_{\bar{z}} A + [A, \bar{A}] = 0$$

⁵Le calcul se fait simplement en différentiant les produits extérieurs.

L'action résiduelle vaut:

$$S_r = \frac{k}{4\pi} \int \text{Tr}(4iA\partial_0\bar{A})$$

et cela montre que A et $ik\bar{A}/\pi$ sont conjugués. En quantification canonique, l'opérateur associé à la grandeur $\bar{A}(x)$ est représenté par un opérateur différentiel fonctionnel:

$$\bar{A}(x) \rightarrow -\frac{\pi}{k} \frac{\partial}{\partial A(x)}$$

et les états sont représentés par les fonctionnelles $\psi[A]$ vérifiant $F[A, \bar{A}]\psi = 0$. Ceci est l'exact analogue du traitement de l'oscillateur harmonique en utilisant des variables de Bargmann [99, Chapitre 9]: les variables $A(x)$ et $\bar{A}(x)$ doivent être considérées comme des variables z et $\bar{z}$ d'un oscillateur harmonique car elles obéissent au même type de relation de commutation et se déduisent l'une de l'autre par conjugaison complexe.

5.2.3 Résolution de la contrainte.

Avec la notation $\nabla_A = \partial_z + \text{Ad}(A(z, \bar{z}))$, la contrainte s'écrit

$$(5.14) \quad \nabla_A \left(\frac{\partial \psi[A]}{\partial A(z, \bar{z})} \right) = \frac{k}{\pi} (\partial_{\bar{z}} A)(z, \bar{z}) \psi[A]$$

Remarque : Notons que ce n'est pas du tout la même contrainte que dans le cas de Yang-Mills 2D (voir l'équation 1.70), cette équation est ici non pas une équation d'invariance de la fonction d'onde par une transformation de jauge à temps fixé mais une équation de covariance. $\square$

Pour la résoudre, nous allons déduire $\psi[{}^g A]$, où ${}^g A$ est le transformé de jauge de A par la transformation de paramètre g . Cela déterminera ψ sur chaque orbite de jauge à partir d'un représentant de cette orbite. Les orbites de jauge sont classées par les holonomies. Plus précisément si $((a_i), (b_i))_{i \in <1, g>}$ est la base usuelle de cycles d'homologie de Σ_g (de genre g),

$$\left(\exp \left(\int_{(a_i)} A \right), \exp \left(\int_{(b_i)} A \right) \right)_i \in G^{2g}$$

définit un élément de $\text{hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$. Notons qu'il s'agit d'exponentielles ordonnées. Dans une transformation de jauge constante, chacun des éléments est changé en un conjugué et en fait, on montre que [137]⁶:

$$\frac{\text{Map}(\Sigma_g, LG)}{\mathcal{G}_{\Sigma_g}} = \frac{\text{hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)}{G}$$

où l'action de G dans le membre de droite est la conjugaison globale⁷. Les configurations sont donc indexées par

$$\mathcal{V}_g = \frac{\text{hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)}{G}.$$

⁶Pour un résultat analogue dans le cas des solutions des équations de Yang-Mills sur une surface de Riemann compacte, voir le théorème 6.7 de [5].

⁷Comme dans notre exemple bidimensionnel traité dans l'Appendice 1.B du chapitre 1.

Mais il faut bien remarquer qu'ici, les configurations ne sont pas toutes indépendantes car les ψ ne sont pas constantes sur chaque orbite de jauge à la différence des théories vues au chapitre 1!!

Il est facile de relier l'ensemble H_{Σ_g} des solutions de la contrainte aux théories conformes et plus précisément au modèle de WZW. Pour ce faire, écrivons A sous la forme $u^{-1}du$ ce qui est possible dans le cas où le fibré principal associé à la connexion A est trivial: A est alors une pure jauge. Si $h : \Sigma_g \rightarrow G$ continue est une fonction paramétrant une transformation de jauge $A \mapsto h^{-1}Ah + h^{-1}dh$ alors $A_u = u^{-1}du$ devient:

$${}^hA_u = A_{hu}$$

Donc en notant $\psi[u] = \psi[A_u]$, nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial \psi[ue^\varepsilon]}{\partial \varepsilon(z)} \right)_{\varepsilon=0} = -\frac{k}{\pi} \partial_{\bar{z}}(u^{-1} \partial_z u)(z) \psi[u]$$

Si nous introduisons Γ définie par $\psi[u] = \exp(-\Gamma[u])$, l'équation précédente se réécrit

$$\delta \Gamma[u] = \frac{k}{\pi} \int_{\Sigma_g} \text{Tr}((\partial_{\bar{z}} \varepsilon)(z)(u^{-1} \partial_z u)(z)) d^2 z$$

avec $\delta u = u\varepsilon$. Cette équation est exactement celle qui apparaît dans le modèle de Wess-Zumino-Witten pour l'action effective. Ceci suggère une relation étroite entre ces deux théories de champs. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, l'équation de contrainte 5.14 est la transformée de Legendre du développement en produits d'opérateurs de l'algèbre des courants. Ceci s'obtient très simplement en écrivant la forme infinitésimale des équations 3.106 et 3.107. En conséquence, ceci montre que les blocs conformes fonctionnels tels qu'ils ont été introduits au chapitre 3 sont les fonctionnelles d'ondes physiques pour la théorie de Chern-Simons sur Σ .

5.2.4 Propriétés modulaires.

Ces fonctionnelles d'ondes physiques ont des propriétés modulaires non triviales. En effet, pour établir l'équation de contrainte, nous avons fait le choix d'une structure complexe sur Σ mais comme nous l'avons suggéré au chapitre 1, l'espace des états ne doit dépendre que de la topologie de Σ et pas d'une quelconque structure complexe sur Σ .

Deux structures complexes I et J sur la surface Σ nous donnent deux espaces des états $H_{\Sigma,I}$ et $H_{\Sigma,J}$ qui sont en fait isomorphes. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ces considérations qui visent essentiellement à montrer le résultat suivant:

Théorème 55 *L'espace des états H_Σ forme une représentation projective du groupe modulaire de la surface Σ .*

mais nous voulons simplement en expliciter le contenu dans quelques cas particuliers.

Le cas non trivial le plus simple est fourni par le tore. Dans ce cas, les états physiques sont les caractères de genre 1 du modèle de WZW. Ceci a été développé en long, large et travers par divers auteurs [82] et nous ne détaillerons pas ce point ici.

Le cas abélien que nous avons discuté précédemment est encore plus simple: les blocs conformes sont des fonctions thêta divisées par la fonction de Dedekind. Si nous cherchons à savoir comment préparer l'état correspondant au caractère $\chi_n(\tau)$, remarquons que si n est non nul, alors le long du cycle (a) sur le tore, l'holonomie du champ de jauge est non triviale. Ceci montre qu'un tel état ne peut être créé par

un tore plein $D_2 \times S_1$ sans structure supplémentaire, nous le notons $|\chi_0\rangle$. Ceci permet de voir $1/\eta(\tau)$ comme l'état crée par T_1 .

Le lecteur aura remarqué que dans une transformation modulaire $t : \tau \mapsto \tau + 1$, il apparaît une phase $\exp(-i\pi/12)$ pour $1/\eta$. Par ailleurs, la théorie topologique que nous allons construire au chapitre 6 est telle que le difféomorphisme t laisse fixe l'état $|\chi_0\rangle$. Ceci peut sembler hautement contradictoire mais on sait bien depuis la lecture du chapitre 1, définition 21, que dans les théories projectives, de telles ambiguïtés de phases sont fréquentes. La détermination de la phase que prend $1/\eta$ dans une transformation modulaire quelconque a été faite au siècle dernier par Dedekind [31] et Atiyah [2][4] en a donné une interprétation plus moderne. A mon avis, un certain travail reste à faire pour que cette phase perde son mystère. Je reviendrais sur ce problème dans la section 6.7.

5.3 Dédution tridimensionnelle des équations de Moore et Seiberg.

Nous partons d'une théorie topologique à trois dimensions définie algébriquement, c'est à dire par la donnée de ses fonctions de corrélation et de partition. Le but de cette section est de montrer qu'une théorie topologique définit bien une solution des équations de Moore et Seiberg, sous réserve d'hypothèses simplificatrices en apparence anodines mais essentielles.

Nous rappelons dans une première sous section comment la construction des états physiques du modèle est grandement simplifiée par l'introduction d'hypothèses supplémentaires que nous adopterons. Puis nous choisirons une base "bien normalisée" dans chaque espace des états. Enfin nous montrerons comment peuvent être définies astucieusement les matrices S , T , F et B dans ce formalisme tridimensionnel. Puis nous prouverons les équations de Moore et Seiberg en genre 0 et en genre 1.

Je tiens à signaler au lecteur que le rôle de la projectivité ne sera pas complètement élucidé dans ce chapitre. En effet, je ne dispose pas encore d'une compréhension assez profonde du cocycle qui apparaît dans ces TTPR. Le lecteur qui désirerait explorer ces problèmes est invité à reprendre les sections 6.5.5 des chapitres 6 et 7 où est d'une part explicitée la construction du cocycle à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg, et où j'ai indiqué quelques directions d'investigations futures.

5.3.1 Hypothèses de simplification.

Hypothèse de simplicité.

A partir de l'exemple de la théorie de Chern-Simons, nous avons été amenés à une méthode de construction des états physiques de la TTR considérée. Pour construire H_Σ , nous considérons un tore plein T_Σ cobordant la surface Σ , nous le décorons par un 1-squelette muni d'un "framing", puis en coloriant ce graphe de toutes les manières possibles et imaginables, nous obtenons une base de H_Σ .

Le changement de 1-squelette induit un changement de base. Ceci sera utilisé dans la prochaine sous-section pour définir la matrice F à partir de la théorie topologique.

En théorie des champs géométrique, il est commode de disposer d'une description simple d'une base des différents espaces des états. C'est pourquoi nous énonçons ici un postulat de simplicité:

Définition 60 Une TTPR à trois dimensions vérifie le "postulat de simplicité" si et seulement si, pour tout (g, n) et pour tout 1-squelette $\mathcal{G}$ de T_g avec n pattes externes et muni d'un framing, $(\phi[T_g, \mathcal{G}]_c)$ est une base de $H_{g,n}$.

Nous noterons $\phi[T_g, \mathcal{G}_C]$ sous la forme $|T_g, \mathcal{G}_C\rangle$ ou encore $|T_g, \mathcal{G}, \mathcal{C}\rangle$.

Hypothèse 3 *Nous ne considérerons dans ce chapitre que des TTPR qui vérifient le postulat de simplicité.*

Si $[E]$ désigne l'ensemble des couleurs des lignes externes du graphe $\mathcal{G}$, l'espace $H_{g,n}^{[E]}$ est engendré par les vecteurs $|T_g, \mathcal{G}_C\rangle$ où le coloriage $\mathcal{C}$ spécifie que les lignes externes doivent être coloriées selon $[E]$. Clairement

$$H_{g,n} = \bigoplus_{[E]} H_{g,n}^{[E]}$$

Remarque : Il n'est pas clair du tout que cette hypothèse soit réalisée pour toutes les théories des champs topologiques même à trois dimensions. Ainsi, dans le cas $D = 2$, la théorie présentée au 1 ne semble pas rentrer dans ce cadre. Si on prend une ligne de Wilson sur un disque, les états obtenus en faisant varier le coloriage de la ligne n'engendrent pas tout H_{S_1} . J'ai vérifié cela en remplaçant le disque par un tore. Il faudrait donc introduire des observables associées à un point ce qui pose tout de suite de très intéressants problèmes comme celui du couplage entre ces points et les lignes de Wilson dont nous avons parlé au chapitre 1... Mais ceci est une autre histoire.

La théorie de Higgs à $D = 3$ dont l'action est:

$$S[A, \phi] = \int_{M_3} \text{Tr}((D_A \phi) \wedge F_A) = \int_{\partial M_3} \text{Tr}(\phi F_A)$$

où D_A est la différentiation covariante, est une théorie topologique mais dont les équations du mouvement sont triviales. C'est donc une théorie à la Donaldson qui n'est pas résolue à l'heure actuelle. Je doute qu'elle vérifie l'hypothèse de simplicité énoncée plus haut...

Enfin, un travail récent de Rozansky et Saleur [158] semble montrer que le polynôme d'Alexander n'est pas obtenu à partir d'une TICR unitaire, mais à partir d'un modèle super-conforme de niveau k basé sur $gl(1, 1)$.

Les champs primaires s'obtiennent raisonnablement à partir des représentations de dimension finie de la superalgèbre de Lie $gl(1, 1)$. Dans le cas du modèle de WZW sur le supergroupe $SU(1|1)$ au niveau $k \equiv 1 \pmod{2}$, un sous ensemble d'entre elles indexent les champs primaires⁸. Ces représentations s'organisent comme suit:

- Des représentations de dimension un et deux qui sont irréductibles.
- Des représentations de dimension quatre qui sont indécomposables. Une limite convenable de représentations de dimension deux, qui fournit une représentation indécomposable de dimension deux.

Comme l'expliquent Rozanski et Saleur, il est impossible d'associer aux représentations de dimension quatre un champ primaire du modèle de WZW basé sur le supergroupe/indexsupergroupe $SU(1|1)$! La charge centrale de ce modèle est d'ailleurs $c = 0$ ce qui montre déjà que l'on sort du cadre unitaire considéré dans cette thèse. Nous renvoyons le lecteur à [158] afin qu'il se rende compte que les matrices S et T de ce modèle présentent quelques caractéristiques pour le moins inhabituelles.

⁸Cette troncation se produit dans les modèles de WZW usuels.

Enfin ces auteurs ont calculé la fonction de partition

$$\mathcal{Z}[\Sigma_g \times S_1] = \frac{(2g-1)!}{((g-1)!)^2} (1 + (-1)^{g-1})(4k)^g$$

qui s'annule pour les valeurs paires du genre. Dans le cas d'une théorie rationnelle unitaire locale à la frontière, l'espace $H_{g,0}$ a pour dimension

$$\dim(H_{g,0}) = \sum_k (S_0^k)^{2(1-g)}$$

qui doit être strictement positif! Dans le même style, l'espace des états associé à la sphère avec deux points marqués coloriés par une représentation de dimension un de $gl(1,1)$ et sa conjuguée est réduit à $\{0\}$. Sous nos hypothèses, c'est une droite. Ceci se reflète encore par les propriétés de factorisation “anormales” du polynôme d'Alexander le polynôme d'Alexander d'une union non entrelacée de deux nœuds est nul.

$$(5.15) \quad \mathcal{Z}[S_3, (L_1, L_2)] = 0$$

Nous montrerons dans la section 6.B.2 de l'Appendice 6.B du chapitre 6 qu'il n'en est rien pour les invariants déduits des TTPR unitaires considérées dans ce chapitre.

□

L'hypothèse 3 permet de suggérer que la localité à la frontière est satisfaite dans ces modèles. Choisissons $\mathcal{G}_1$ un 1-squelette de T_1 , tore plein à g_1 trous avec $n_1 + 1$ points marqués. De même, $\mathcal{G}_2$ désigne un 1-squelette analogue pour le genre g_2 avec $n_2 + 1$ points marqués. Les coloriages de $\mathcal{G}_1$ (respectivement $\mathcal{G}_2$) seront notés $\mathcal{C}_1^{(p)}$ (respectivement $\mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}$) où p désigne l'indice de la $n_1 + 1$ (respectivement $n_2 + 1$) -ème ligne de $\mathcal{G}_{1,2}$. Nous pouvons recoller ces deux tores pleins par un disque qui est un voisinage des points marqués p . Le recollement est fait sans torsion du framing de cette ligne. La variété obtenue est un tore plein de genre $g_1 + g_2$ avec $n_1 + n_2$ points marqués. Nous la notons T_{12} et elle est décorée par le graphe $\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2$. Les coloriages sont évidemment compatibles. Alors, posons

$$(5.16) \quad \psi_{\Sigma_{g_1, n_1}, \Sigma_{g_2, n_2}}(|T_{12}, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_1^{(p)} \# \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}\rangle) = \lambda(\mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}) |T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^{(p)}\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}\rangle$$

Nous aimerions disposer d'une isométrie, et donc le facteur $\lambda(\mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})})$ est fixé par

$$(5.17) \quad \lambda(\mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}) = \frac{\| |T_{12}, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_1^{(p)} \# \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}\rangle \|}{\| |T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^{(p)}\rangle \| \times \| |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2^{(\tilde{p})}\rangle \|}$$

Nous montrerons une fois les facteurs de normalisation choisis que ce choix vérifie les conditions de compatibilité 1.12.

Dans le chapitre 7, nous indiquerons comment pour les théories projectives déduites des équations de Moore et Seiberg, on peut construire explicitement les applications de localité à la frontière $\psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}$. Puis nous montrerons que ces applications vérifient la condition 1.10. Enfin, nous utiliserons la localité à la frontière pour obtenir certaines propriétés intéressantes du cocycle introduit dans la section 1.5 du chapitre 1. Le lecteur familier avec les théories topologiques est renvoyé au chapitre 7.

Trivialité de l'indice 0.

Dans les théories de type Chern-Simons, nous avons vu que la représentation triviale du groupe de Lie sous jacent fournit un indice de ligne 0 et que toute ligne de Wilson portant cet indice est associée à l'opérateur identité agissant sur $H_{1,0}$. En conséquence, toute ligne portant l'indice 0 peut être oubliée dans le calcul de l'opérateur associé à une variété décorée. Par souci de simplification, nous ferons donc l'hypothèse suivante:

Hypothèse 4 *Toute ligne portant l'indice 0 peut être éliminée.*

Cet énoncé particulièrement simple doit être précisé. Plutôt que d'exprimer cette réalité toute simple par succession de propositions barbares, nous préférons discuter quelques exemples:

- Considérons M une variété avec ou sans bord, décorée par $\mathcal{G}$ muni d'un framing et colorié par $\mathcal{C}$, et supposons qu'une ligne de $\mathcal{G}$ qui n'intersecte pas ∂M porte l'indice 0. En effaçant cette ligne, nous produisons un graphe $\mathcal{G}'$ muni d'un framing et d'un coloriage $\mathcal{C}'$. En effet, les vertex reliant la ligne considérée au reste du graphe sont nécessairement du type $[i, \hat{i}, 0]$ ce qui assure que la couleur de la ligne de part et d'autre du vertex est la même et donc que l'opération de gommage a un sens. Alors, la trivialité de l'indice zéro se traduit par:

$$(5.18) \quad \phi[M, \mathcal{G}'_{\mathcal{C}'}] = \phi[M, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$$

- Une complication supplémentaire apparaît quand la ligne que l'on veut supprimer intersecte le bord de M car les opérateurs $\phi[M, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ et $\phi[M, \mathcal{G}'_{\mathcal{C}'}]$ n'agissent pas dans le même espace: nous avons supprimé un des points marqués sur ∂M . Pour incorporer cette subtilité, nous procédons heuristiquement comme suit:

- Admettons que l'hypothèse de simplicité 3 soit réalisée. Dans ce cas, une base de $H_{g,n+1}$ est obtenue en fixant un 1-squelette $\mathcal{G}$, muni d'un framing, d'un tore plein T et en le coloriant de toutes les manières possibles. Les coloriages $\mathcal{C}$ tels que la $n+1$ -ième ligne porte l'indice de ligne zéro fournissent des exemples de la situation ci-dessus. Par la TQC, nous leur associons des vecteurs de $H_{g,n+1}$ que nous aimerions mettre en correspondance avec des vecteurs de $H_{g,n}$. La correspondance la plus naturelle est donnée par:

$$(5.19) \quad \mathcal{I}_{g,n}(\phi[T_g, \mathcal{G}'_{\mathcal{C}'}]) = \phi[T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$$

qui est injective. Cette injection semble dépendre de la base choisie (via le paramétrage du bord $\Sigma_{g,n+1}$ ou encore via $\mathcal{G}$) mais nous laissons le lecteur se rendre compte qu'il n'en est rien.

- Il existe donc une injection $\mathcal{I}_{g,n+1}$ de $H_{g,n}$ dans $H_{g,n+1}$, linéaire telle que

$$(5.20) \quad \mathcal{I}_{g,n}(\phi[M, \mathcal{G}'_{\mathcal{C}'}]) = \phi[M, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$$

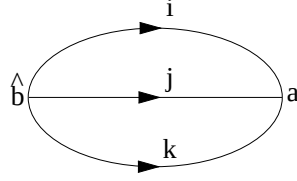
C'est en ce sens que nous dirons qu'une ligne portant l'indice zéro peut être oubliée.

Dans le cas des théories construites à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg, nous montrerons que cette hypothèse est vérifiée dans la section 6.5.5 du chapitre 6.

5.3.2 Choix des facteurs de normalisation.

Pour choisir les normalisations de manière intelligente, il convient de remarquer que la norme des états sur $H_{0,3}$ détermine *entièrement* la norme de n'importe quel état de $H_{g,n}$ [191].

Tout d'abord remarquons que l'hypothèse 4 fixe la norme des états de $H_{0,2}$. En effet, une base de $H_{0,3}$ est fournie par des états associés à la boule B_3 décorée par un unique vertex trivalent situé au centre d'où partent trois lignes radiales⁹. Le produit de deux états, l'un associé au vertex a , l'autre associé au vertex b est la fonction de partition dans S_3 du graphe suivant:

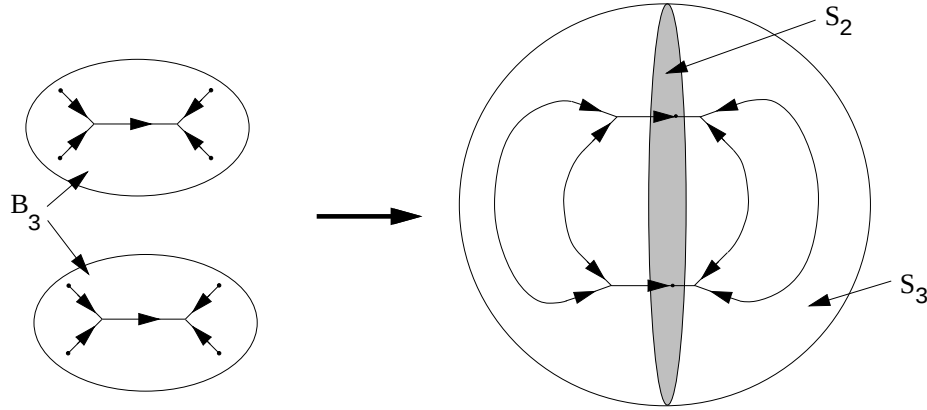


En prenant par exemple $k = 0$, nous obtenons la fonction de partition dans S_3 d'un cercle non noué portant l'indice i et qui s'identifie avec la norme au carré de l'état associé à une boule B_3 traversée de part en part par une ligne portant l'indice i . De tels états forment une base de $H_{0,2}$ et sont clairement orthogonaux deux à deux.

Ces considérations s'étendent en genre g avec n points marqués en écrivant le produit scalaire $\langle \mathcal{G}_{C'} | \mathcal{G}_C \rangle$ sous la forme

$$Z[T_g \# \hat{T}_g, \mathcal{G} \# \mathcal{G}, \mathcal{C} \# \hat{\mathcal{C}}']$$

La variété $T_g \# \hat{T}_g$ est obtenue en épaississant le graphe $\mathcal{G}$ par des sphères S_2 . En la coupant le long de ces sphères, nous obtenons des boules B_3 qui clairement contiennent des graphes du type de ceux définissant une norme au carré dans $H_{0,3}$:



Ce schéma illustre notre propos pour $H_{0,4}$. La fonctorialité permet alors d'exprimer $\langle \mathcal{G}_{C'} | \mathcal{G}_C \rangle$ à partir de normes dans $H_{0,3}$ et $H_{0,2}$. Nous allons donc donner une formule simple pour les normes dans $H_{0,3}$ ce qui nous permettra d'écrire directement l'expression des normes dans $H_{0,n}$.

Comme dans tout espace de Hilbert, nous pouvons choisir une base orthogonale. L'espace $H_{0,3}$ est somme directe de sous espaces orthogonaux

$$H_{0,3} = \bigoplus_{i,j,k} H_{0,3}^{[i,j,k]}$$

⁹Le framing n'est pas fondamental ici.

Au sein de chacun de ces espaces, nous appliquons le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Finalement dans cette base formée de vecteurs que nous noterons $|\phi_{i,j,k}^{(a)}\rangle$, nous avons

$$(5.21) \quad \langle \phi_{i,j,k}^{(b)} | \phi_{i,j,k}^{(a)} \rangle = \alpha_{i,j,k}^{(a)} \delta_{a,b}$$

où $\alpha_{i,j,k}$ est un réel strictement positif (la norme de $|\phi_{i,j,k}^{(a)}\rangle$) qui, par invariance topologique est trivialement invariant par permutation des indices i, j, k . L'invariance topologique entraîne également que

$$(5.22) \quad \alpha_{i,j,k}^{(a)} = \alpha_{i,j,\hat{k}}^{(\hat{a})}$$

Si nous notons $|\phi_i\rangle$ l'état de $H_{0,2}$ associé à la boule B_3 traversée par une ligne portant l'indice i , et si nous notons S_0^i sa norme au carré, alors grâce à l'hypothèse de trivialité de l'indice zéro:

$$(5.23) \quad \alpha_{i,j,0}^{(t_i)} = \delta_{i,j} S_0^i$$

où t_i est l'unique indice de vertex de $[i, \hat{i}, 0]$. Par une "transformation de jauge"

$$|\phi_{i,j,k}^{(a)}\rangle \mapsto \lambda_a |\phi_{i,j,k}^{(a)}\rangle$$

où $\lambda_a = \lambda_a^*$ est un nombre complexe non nul, nous pouvons choisir notre base de telle sorte que:

$$\alpha_{i,j,k}^{(a)} = \sqrt{\frac{S_0^i S_0^j S_0^k}{S_0^0}}$$

qui vérifie bien la condition 5.23, ainsi que la symétrie par rapport à i, j, k . Cette normalisation, due à E. Witten [191] présente de nombreux avantages. Tout d'abord, nous laissons au lecteur le plaisir de calculer explicitement le produit scalaire de deux états de la base de $H_{g,n}$ obtenue à partir du graphe $\mathcal{G}$:

$$(5.24) \quad \langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}'} | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle = \frac{\sqrt{\prod_j S_0^{i_j}}}{(S_0^0)^{g-1+n/2}} \delta_{[\mathcal{C}], [\mathcal{C}']}$$

où $\delta_{[\mathcal{C}], [\mathcal{C}']}$ est le symbole de Kronecker sur l'ensemble des coloriages de $\mathcal{G}$ et où les $(i_j)_j$ sont les couleurs des lignes externes de $\mathcal{G}$ spécifiées par $\mathcal{C}$. Cette formule présente les avantages suivants:

- La norme au carré d'un vecteur de $|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\rangle$ ne dépend que de l'ensemble des couleurs des pattes externes du graphe $\mathcal{G}$ et pas des indices de lignes internes ni de vertex. Elle ne dépend que de g et de n . Ceci suggère que les applications de changement de base qui relie les $(|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}\rangle)_{\mathcal{C}}$ aux $(|T_g, \mathcal{G}'_{\mathcal{C}'}\rangle)_{\mathcal{C}'}$ sont unitaires! Nous verrons que cela joue un rôle important par la suite.
- Si nous définissons $\psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}$ par la formule 5.16, alors en reportant 5.24 dans 5.17,

$$(5.25) \quad \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}(|T_{12}, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(\hat{p})}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{S_0^p}} (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^{(p)}\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2^{(\hat{p})}\rangle)$$

formule merveilleusement simple dont il sera fait usage au chapitre 7. Il est évident sur cette formule que les conditions 1.9 et 1.12 sont vérifiées. Le fait que le facteur $\lambda(\mathcal{C}_1^{(p)}, \mathcal{C}_2^{(\hat{p})})$ ne dépend que de p mais pas de $\mathcal{C}_{1,2}$ produit le miracle attendu.

Finalement nous utiliserons la normalisation 5.24 dans toute la suite de cette thèse. Il devient alors possible de définir les données de Moore et Seiberg à partir de la théorie topologique considérée.

Remarque : Remarquons qu'une fois la normalisation choisie, la liberté de choix des bases de $H_{0,n}$ est bien restreinte. En particulier, pour les transformations de jauge qui changent la définition de l'état de $H_{0,3}$ associé à un vertex a en le multipliant par $\lambda_a \in \mathbb{C}^*$, nous devons choisir les coefficients λ_a de module 1 et tels que $\lambda_{\hat{a}} = \lambda_a^*$. Ces conditions préservent les propriétés de $a \mapsto \hat{a}$. $\square$

5.3.3 Définition tridimensionnelle des données de Moore et Seiberg.

Comme nous l'avons vu sur l'exemple de la théorie de Chern-Simons, il est naturel de considérer les états de la TT comme les blocs conformes d'une TICR.

La définition des données de Moore et Seiberg de genre 0 est alors très simple. On se souvient que F et B sont des matrices de changement de base dans $H_{0,4}$. La présentation abstraite donnée au chapitre 3 suggère qu'en fait F et B sont définis par les relations suivantes dans $H_{0,4}$:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \xrightarrow{\quad} a \xrightarrow{p} b \xleftarrow{\quad} l \end{array} &= \sum_{q,c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \xrightarrow{\quad} d \xleftarrow{\quad} k \\ \downarrow q \\ i \xrightarrow{\quad} c \xleftarrow{\quad} l \end{array} \\
 \begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \xrightarrow{\quad} a \xrightarrow{p} b \xleftarrow{\quad} l \end{array} &= \sum_{q,c,d} B_{p,q}(+) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \quad k \\ \searrow \quad \swarrow \\ i \xrightarrow{\quad} c \xrightarrow{q} d \xleftarrow{\quad} l \end{array} \\
 \begin{array}{c} j \quad k \\ \downarrow \quad \downarrow \\ i \xrightarrow{\quad} a \xrightarrow{p} b \xleftarrow{\quad} l \end{array} &= \sum_{q,c,d} B_{p,q}(-) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \quad k \\ \swarrow \quad \searrow \\ i \xrightarrow{\quad} c \xrightarrow{q} d \xleftarrow{\quad} l \end{array}
 \end{aligned}$$

et, en utilisant la normalisation 5.24 des états dans $H_{0,4}$, nous écrivons:

$$(5.26) \quad F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \hat{c} \\ \downarrow q \\ a \xrightarrow{p} b \\ \hat{d} \end{array}]$$

$$(5.27) \quad B_{p,q}(+) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \hat{c} \quad \hat{d} \\ \downarrow q \quad \downarrow \\ a \xrightarrow{p} b \end{array}]$$

$$(5.28) \quad B_{p,q}(-) \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{\sqrt{\prod_{k=1,\dots,4} S_0^{i_k}}} Z[S_3, \begin{array}{c} \hat{c} \quad \hat{d} \\ \downarrow q \quad \downarrow \\ a \xrightarrow{p} b \end{array}]$$

qui définissent F et B .

Les données de genre 1 sont définies par référence aux difféomorphismes du tore. Nous considérons la variété $M(s)$ définie au Chapitre 1 et associée au difféomorphisme s du tore. On s'attend à ce que les

éléments de matrice des opérateurs représentant ce difféomorphisme soient obtenus comme des fonctions de partition dans S_3 . En particulier:

$$(5.29) \quad S_i^j = Z \left[S_3, \text{diagram} \right]$$

De même, $T' = T \exp(2\pi ic/24)$ est construite à partir de $M(t)$. Il est alors clair que:

$$(5.30) \quad T'_i{}^j = Z[S_2 \times S_1; C'_i, C_j]$$

et C'_i a un framing tordu d'une unité. Enfin, C'_i et C_j ne sont ni noués, ni entrelacés et suivent la direction donnée par S_1 dans $S_2 \times S_1$. En coupant $S_2 \times S_1$ le long d'une sphère S_2 , nous montrons que T_i^j est proportionnel à $\delta_{i,j}$. Le facteur de proportionalité ne dépend que de i et se trouve être un nombre complexe de module 1. Deux étapes sont nécessaires pour arriver à cette conclusion:

- Si x_i est le facteur considéré, considérons $\tilde{M}_i$ le morphisme de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ obtenu à partir du morphisme M en tordant le framing d'une ligne portant l'indice i d'une unité. Il est bien clair que

$$(5.31) \quad \phi[\tilde{M}_i] = x_i \phi[M]$$

car la modification du framing peut être extraite de $\tilde{M}_i$ en coupant le long d'une sphère avec deux points marqués.

- La torsion du framing d'une unité est une opération unitaire: si $(|T_g, \mathcal{G}, \mathcal{C})\rangle_c$ est une base de $H_{0,n}$ et que nous tordons le framing d'une des lignes de $\mathcal{G}$, nous obtenons une nouvelle base de $H_{0,n}$ mais les produits scalaires ne changent pas vu que, par invariance topologique, on peut toujours se ramener au cas où sur une même ligne se trouvent une torsion de 1 unité et une torsion de -1 unité.

En conséquence x_1 est de la forme $\exp(2\pi i h_1)$. Finalement

$$(5.32) \quad T'_i{}^j = e^{2\pi i h_i} \delta_i^j$$

Nous pouvons aussi définir $S(j)$ agissant sur l'espace $H_{1,1}$. Il faut tenir compte des facteurs de normalisation:

$$(5.33) \quad S(j)_{(i,a)}^{(i',a')} = \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^j}} Z \left[S_3, \text{diagram} \right]$$

Les framings sont normaux. Quand $j = 0$, conformément à notre prescription, la ligne 0 peut être omise et $S(j)$ se réduit alors à S . La matrice $S(j)$ représente le difféomorphisme s sur le tore avec un point marqué. De même, nous en déduisons que $h_0 \equiv 0 \pmod{1}$.

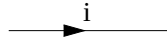
5.3.4 Preuve des équations en genre 0.

Equations à deux points.

Il s'agit ici de préciser quelques points concernant les phases dues au framing. Nous remarquons tout d'abord que la ligne



où le framing est normal, est isotope à la ligne “droite”



munie d'un framing tordu d'une unité. De même,



munie du framing normal équivaut à un changement de -1 unité par rapport à la ligne “droite”. Nous avons vu que dans le premier cas, il apparaissait une phase $\exp(2\pi i h_i)$, en conséquence, il apparaît dans le second cas une phase $\exp(-2\pi i h_i)$. Le fait que ces phases soient conjuguées l'une de l'autre est parfaitement compatible avec la relation $Z[\hat{M}] = Z[M]^*$ pour des variétés sans bord. Ces remarques fixent la phase associée au changement de framing d'une ligne quelconque. Elles peuvent être vues comme des relations entre vecteurs de $H_{0,2}$.

Equations à trois et quatre points.

Comme on a imposé qu'une ligne portant un indice zéro pouvait être effacée, il est facile de calculer certains coefficients F . Ainsi, nous obtenons trivialement:

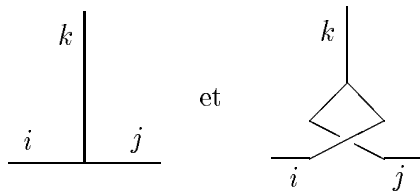
$$F_{i,\hat{k}} \begin{bmatrix} t_k & b \\ t_i & a \end{bmatrix} = \delta_{a,\sigma_{123}(b)}$$

et de même

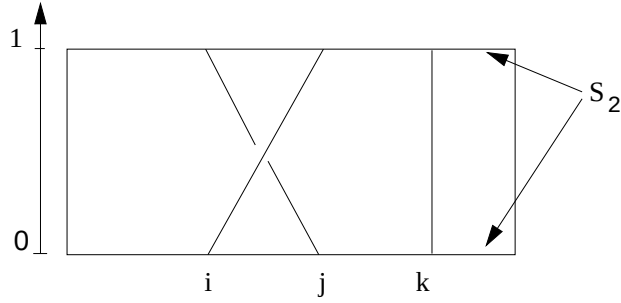
$$F_{p,0} \begin{bmatrix} t_i & t_j \\ a & b \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{S_0^0 S_0^p}{S_0^i S_0^j}} \delta_{a,\hat{b}} \quad \text{et} \quad F_{0,0} \begin{bmatrix} t_i & t_i \\ t_i & t_i \end{bmatrix} = \frac{S_0^0}{S_0^i}$$

ce qui montre que les hypothèses supplémentaires 3.188 et 3.189 sont vérifiées par la matrice F définie tridimensionnellement. D'une manière générale, les éléments de matrice de F où au moins une ligne porte l'indice zéro se calculent trivialement.

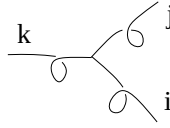
Nous pouvons alors étudier comment relier les vecteurs de $H_{0,3}$ qui sont créés par différents graphes à un seul vertex. Pour obtenir la relation entre F et $B(\pm)$, nous aurons besoin de la relation entre:



étant entendu que ces graphes sont munis du framing normal et plongés dans B_3 . Clairement, le graphe de droite nous fournit via le foncteur modulaire, une nouvelle base de $H_{0,3}$ dont le lecteur vérifiera sans peine qu'elle se déduit de la précédente par un opérateur qui provient géométriquement de la variété $S_2 \times [0, 1]$ convenablement décorée:



avec un framing normal. Il envoie donc $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ sur $H_{0,3}^{[j,i,k]}$ et sa restriction à $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ est notée $\hat{\eta}_{i,j,k}$. Ainsi, nous avons simplement tressé les lignes portant les indices i et j . Si nous recommençons cette opération, nous obtenons $\hat{\eta}_{j,i,k} \circ \hat{\eta}_{i,j,k}$. Le graphe trivalent obtenu est alors isotope¹⁰ à:



Chacune des boucles est équivalente à une torsion du framing. Ceci revient à l'action sur l'espace $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ d'une homothétie de rapport $\exp(2\pi i(h_k - h_i - h_j))$. Ainsi:

$$\hat{\eta}_{j,i,k} \circ \hat{\eta}_{i,j,k} = e^{2\pi i(h_k - h_i - h_j)} \mathbf{1}_{H_{0,3}^{[i,j,k]}}$$

Nous pouvons alors choisir les bases de $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ et $H_{0,3}^{[j,i,k]}$ de telle manière que pour chaque vertex $a \in [i, j, k]$, il existe $\sigma(a) \in [j, i, k]$ tel que

$$\hat{\eta}_{i,j,k}|a\rangle = \eta_{i,j,k}^{(a)}|\sigma(a)\rangle$$

Nous pouvons alors changer de jauge, c'est à dire transformer les vecteurs de base de $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ et de $H_{0,3}^{[j,i,k]}$ selon

$$|a\rangle \mapsto \lambda_a \times |a\rangle$$

où $|\lambda_a| = 1$ afin de préserver la norme de $|a\rangle$. La compatibilité avec l'involution $a \mapsto \hat{a}$ impose $\lambda_{\hat{a}} = \lambda_a^*$. Les coefficients $\eta_{i,j,k}^{(a)}$ et $\eta_{j,i,k}^{(\sigma(a))}$ se transforment selon:

$$(5.34) \quad \eta_{i,j,k}^{(a)} \mapsto \lambda_{\sigma(a)}^* \lambda_a \eta_{i,j,k}^{(a)}$$

$$(5.35) \quad \eta_{j,i,k}^{(\sigma(a))} \mapsto \lambda_a^* \lambda_{\sigma(a)} \eta_{j,i,k}^{(\sigma(a))}$$

Si $i \neq j$, les vertex a et $\sigma(a)$ sont nécessairement distincts, et donc nous pouvons choisir $\lambda_{\sigma(a)} = \lambda_a^*$. La seule obstruction à $\eta_{i,j,k}^{(a)} = \eta_{j,i,k}^{(\sigma(a))}$ est donnée par

$$\lambda_a^4 = \frac{\eta_{i,j,k}^{(a)}}{\eta_{j,i,k}^{(\sigma(a))}}$$

¹⁰Le lecteur est invité à quelques travaux expérimentaux qui ne nécessitent qu'un peu de papier, de colle et une paire de ciseaux.

qui admet des solutions. Le carré de $\eta_{i,j,k}^{(a)}$ est alors fixé

$$(\eta_{i,j,k}^{(a)})^2 = e^{2\pi i(h_k - h_i - h_j)}$$

En faisant si besoin est¹¹ un changement de jauge de paramètre $\lambda_a = \lambda_{\sigma(a)} = i$, nous arrivons à :

$$(5.36) \quad \eta_{i,j,k}^{(a)} = e^{i\pi(h_k - h_i - h_j)}$$

Cela revient en fait à fixer $h_{i,j,k}$ modulo 2!

Dans le cas où $i = j$, σ est une involution sur l'ensemble des vertex $[i, j, k]$. Deux cas se présentent :

- Si $\sigma(a) \neq a$, alors le raisonnement que nous venons d'achever montre que l'on peut se ramener à

$$\eta_{i,j,k}^{(a)} = e^{i\pi(h_k - h_i - h_j)}.$$

- Si $\sigma(a) = a$, nous n'avons plus aucune liberté de jauge et finalement

$$\eta_{i,j,k}^{(a)} = \varepsilon_a e^{i\pi(h_k - h_i - h_j)}$$

où $\varepsilon_a = \pm 1$. Cette ambiguïté de signe apparaissait déjà au chapitre 3. Les vertex correspondent en effet à des opérateurs de vertex chiraux, lesquels peuvent être symétriques ou antisymétriques lorsqu'ils entrelacent deux copies d'une même représentation i de l'algèbre chirale avec une représentation k .

Comme nous l'avons dit au chapitre 3, nous *ignorerons* ces signes dans la suite de cette thèse. Il va de soi que l'on peut en garder trace et il est crucial de le faire dans des exemples explicites, mais pour épargner le lecteur et l'auteur, et parce que cela ne gêne en rien notre démarche, nous les oublierons sans regrets. Ainsi :

$$(5.37) \quad \begin{array}{c} k \\ | \\ \diagup \quad \diagdown \\ i \quad j \end{array} = e^{i\pi(h_k - h_i - h_j)} \begin{array}{c} k \\ | \\ i \quad j \end{array}$$

Cette formule permet de montrer la relation entre F et $B(\pm)$. Elle permet aussi de montrer la symétrie tétraédrale complète des coefficients F .

Remarque : Une formule analogue existe pour le croisement “miroir” et contient la phase opposée. $\square$

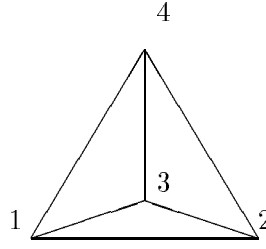
Symétrie tétraédrale.

Introduisons la notation :

$$W_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{S_0^i S_0^j S_0^k S_0^l}}{S_0^0} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

¹¹L'équation a deux solutions qui diffèrent par un signe.

pour la fonction de partition du tétraèdre dans S_3 . Clairement, $W_{p,q}$ est invariante sous l'action du groupe des rotations du tétraèdre



Mais il est moins clair que nous ayons invariance par rapport au groupe des isométries¹². Pour le voir, considérons $W_{\uparrow}$ et $W_{\downarrow}$ évalués avec des framings pointant respectivement vers le lecteur et en sens inverse¹³. Alors:

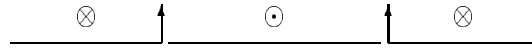
Lemme 16 *Nous avons:*

$$W_{\uparrow,p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = W_{\downarrow,p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous allons partir de $W_{\downarrow}$ et renverser le framing peu à peu. Introduisons une notation adaptée à ces manipulations:



décrit un basculement de framing qui pointe vers le lecteur dans la partie gauche, puis bascule en suivant le sens de la petite flèche perpendiculaire pour finir en s'éloignant du lecteur. Bien sûr:



équivalent à une ligne sans basculement de framing. Enfin, nous traitons les vertex grâce à:

$$(5.38) \quad \begin{array}{c} k \\ \text{⊗} \\ | \\ i \leftarrow \text{⊙} \rightarrow j \\ \text{---} \end{array} = e^{i\pi(h_k - h_i - h_j)} \begin{array}{c} k \\ \text{⊗} \\ | \\ \text{---} \begin{array}{c} \uparrow i \quad \downarrow j \end{array} \end{array}$$

Avec cette formule et la remarque précédente, il est facile de propager le basculement du framing à travers les vertex et de montrer que $W_{\uparrow} = W_{\downarrow}$. Ceci prouve le Lemme. $\square$

Du coup, l'invariance par n'importe quelle isométrie de $W_{p,q}$ s'en déduit: la composée de la symétrie plane qui échange les sommets 1 et 2 du tétraèdre et de la rotation associée à la permutation (12)(34) induit le basculement du framing. De plus le groupe des isométries du tétraèdre est engendré par les rotations et cette application. En conséquence:

Proposition 27 *Les coefficients $W_{p,q}$ possèdent la symétrie complète du tétraèdre.*

¹²Et pas seulement des rotations!

¹³Le tétraèdre est aplati dans le plan de la feuille!

au chapitre 3.

Relation entre F et B .

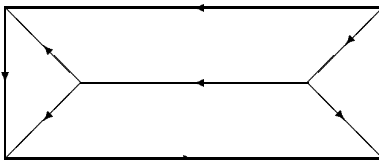
La relation entre F et B se démontre en déformant le tétraèdre associé à F en un tétraèdre associé à B . Plus précisément :

$$\begin{aligned}
Z[S_3, \text{triangle}(a, b, \hat{c})] &= Z[S_3, \text{triangle}(a, b, \hat{c})] \\
&= Z[S_3, \text{square}(a, \sigma_{12}(b), \hat{d}, \sigma_{12}(c))] \times \exp(\pi i(h_{i_1} - h_{i_3} - h_p - h_q))
\end{aligned}$$

en utilisant les propriétés d'entrelacement dans $H_{0,3}$.

Le Pentagone

La preuve de l'équation pentagonale la plus directe s'obtient à partir du graphe suivant:



Plus précisément, nous allons calculer la fonction de partition de ce graphe convenablement colorié de deux manières différentes. La comparaison des deux membres nous donnera alors l'identité pentagonale de Moore et Seiberg. Considérons

$$(5.39) \quad \mathcal{Z}_P = Z \left[\begin{array}{c} a \\ \downarrow i_2 \\ \hat{d} \\ \uparrow i_3 \\ b \end{array} \right] \begin{array}{c} i_1 \\ \leftarrow \hat{e} \\ q_1 \\ \rightarrow p_2 \end{array} \left[\begin{array}{c} \hat{f} \\ \downarrow i_5 \\ c \end{array} \right]$$

Au moins deux chemins mènent à Rome:

- Nous pouvons couper le graphe verticalement par le milieu ce qui le sépare en deux tétraèdres. Alors

$$(5.40) \quad \mathcal{Z}_P = \sum_x \left(\frac{\prod_{l=1}^{l=5} S_0^{i_l}}{(S_0^0)^3} \right)^{1/2} F_{p_1, q_1} \begin{bmatrix} x & d \\ a & b \end{bmatrix} F_{p_2, q_2} \begin{bmatrix} f & e \\ x & c \end{bmatrix}$$

- On procède en trois étapes. Une première coupure horizontale sépare les deux vertex du bas du reste du graphe. Cela fait apparaître un tétraèdre et une pyramide tronquée de base triangulaire! La pyramide tronquée est séparée en deux tétraèdres en coupant entre les deux triangles de base. Finalement, on obtient¹⁴:

$$(5.41) \quad \mathcal{Z}_P = \sum_{q; x, y, z} \left(\frac{\prod_{l=1}^{l=5} S_0^{i_l}}{(S_0^0)^3} \right)^{1/2} F_{p_2, q} \begin{bmatrix} b & c \\ x & y \end{bmatrix} F_{p_1, q_2} \begin{bmatrix} a & x \\ f & z \end{bmatrix} F_{q, q_1} \begin{bmatrix} z & y \\ d & e \end{bmatrix}$$

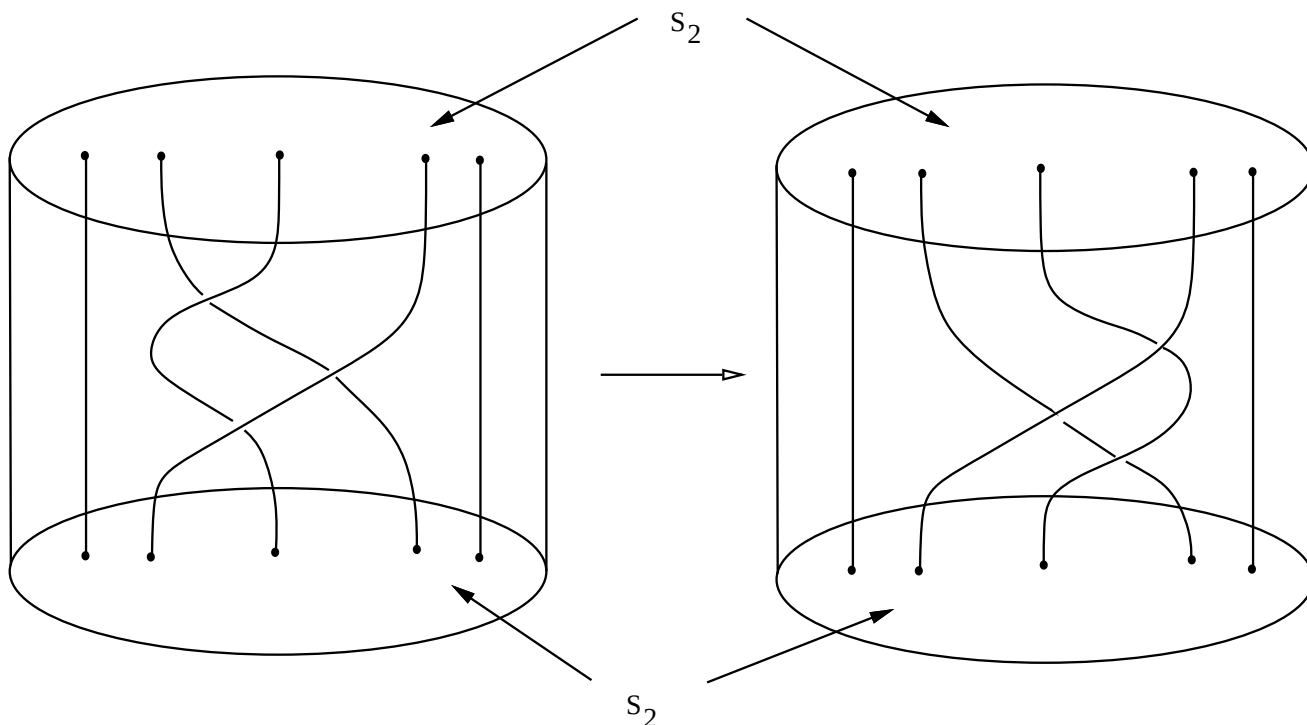
La comparaison des équations 5.40 et 5.41 prouve l'équation pentagonale 3.179:

$$(F_{23}F_{12}F_{23})_{(p_1, p_2), (q_1, q_2)} \left\{ \begin{matrix} i_2 & i_3 & i_4 \\ i_1 & & i_5 \end{matrix} \right\} = (P_{23}F_{13}F_{12})_{(p_1, p_2), (q_1, q_2)} \left\{ \begin{matrix} i_2 & i_3 & i_4 \\ i_1 & & i_5 \end{matrix} \right\}$$

L'Equation de Yang-Baxter.

On sait d'après la proposition 12 (section 3.11) que l'équation de Yang-Baxter avec la relation entre F et $B(\pm)$ entraîne les deux hexagones 3.180. L'équation de Yang-Baxter 3.195 est très simple à prouver dans ce contexte tridimensionnel: considérons dans $H_{0,5}$ les opérateurs associés à $S_2 \times [0, 1]$ muni des graphes:

¹⁴Le lecteur attentif aura remarqué que l'on utilise la symétrie tétraédrale des $F...$



Le troisième mouvement de Reidemeister montre l'identité:

$$(B_{12}(+)B_{23}(+)B_{12}(+))|_{H_{0,5}} = (B_{23}(+)B_{12}(+)B_{23}(+))|_{H_{0,5}}$$

qui n'est autre que l'équation de Yang-Baxter¹⁵. Ceci achève la preuve des identités en genre 0.

5.3.5 Preuve des équations en genre 1.

Nous allons montrer que les équations de Moore et Seiberg 3.183 et 3.184 sont vérifiées. L'équation 3.182 nous pose encore quelques problèmes dus à la phase $\exp(2\pi ic/24)$ qui apparaît dans la définition de T vue au chapitre 3 (équation 3.168) mais que nous ne retrouvons pas dans T' . Afin de clarifier quelque peu ce problème, nous commençons par expliquer au lecteur pourquoi ce phénomène n'est selon nous qu'un artefact. Puis nous passerons à la preuve des équations.

Problèmes de cocycles.

Comme nous verrons au chapitre suivant, les théories topologiques déduites des équations de Moore et Seiberg sont en fait *projectives*. Nous avons jusqu'à présent ignoré ce point important par souci de simplicité et aussi parce que nous nous sommes contentés de couper des variétés de dimension trois le long de sphères S_2 avec quelques points marqués. Or, dans le chapitre 6, nous montrerons que le cocycle $\mu(M_1, M_2)$ introduit en section 1.5 est trivial dans le cas où l'on recolle les deux variétés le long de sphères S_2 .

¹⁵La dérivation pour $B(-)$ est identique!

Rappelons, dans l'esprit du chapitre 1, qu'une théorie des champs projective construite sur la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ nous permet d'obtenir un ensemble de représentations projectives des groupes modulaires $\mathcal{M}^*(g, n)$. Rappelons que $\mathcal{M}^*(g, n)$ est le groupe modulaire des surfaces de genre g , avec n cercles frontière. Ainsi, nous disposons d'un cocycle $\mu_{g,n}$ induit par μ , à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, pour chaque couple (g, n) . L'introduction des cercles frontière provient de la structure supplémentaire portée par les décorations des morphismes de $\mathbf{Ma}_{3,1}$: le framing. En changeant de théorie projective par une TNLU, nous changeons $\mu_{g,n}$ au sein d'une même classe de cohomologie de $H_2(\mathcal{M}^*(g, n), \mathbb{C}^*)$.

Les deux sous-sections suivantes vont montrer que si le cocycle induit sur $SL_2(\mathbb{Z})$ par μ vaut exactement 1, alors nous obtenons une spécialisation de l'équation 3.182 pour $c \equiv 0 \pmod{8}$.

D'autre part, nous verrons au chapitre 6, section 6.5.2 que les théories construites à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg vérifiant $c \equiv 0 \pmod{8}$ sont des théories *non projectives*. Nous verrons aussi que le difféomorphisme¹⁶ t du tore est représenté par $T' = T \exp(2\pi ic/24)$ pour toute valeur de la charge centrale.

Pour compléter notre approche, il faudrait donc disposer des “outils” suivants:

- Une caractérisation des classes de cocycles $\mu_{g,n}$ sur les groupes modulaires $\mathcal{M}^*(g, n)$ qui proviennent d'une théorie projective. Nous suggérerons dans la suite de cette thèse que la localité à la frontière permet d'imposer des contraintes assez fortes sur les cocycles $\mu_{g,n}$.
- Une caractérisation des représentants d'une classe de cohomologie de $H_2(\mathcal{M}^*(g, n), \mathbb{C}^*)$, qui proviennent d'une théorie projective qui soit par exemple, locale à la frontière. Le lecteur aura en effet remarqué qu'en effectuant une TNLU quelconque sur une théorie locale à la frontière, on pouvait tomber sur une théorie non-locale à la frontière.

A partir de là, nous pourrions:

- Montrer que la fonctorialité non projective est vérifiée le long de surfaces de genre zéro.
- Trouver le cocycle pour $SL_2(\mathbb{Z})$ et donc justifier précisément que l'on obtient bien les équations de Moore et Seiberg à partir d'une théorie topologique locale à la frontière.

A l'heure actuelle, je ne dispose pas des outils en question sous une forme exploitable. J'indiquerai au chapitre 7 quelques réflexions qui devraient permettre de résoudre ce problème. Pour l'heure, je me contenterais d'indiquer comment les choses se passent, moyennant les limitations que je viens de mentionner.

Propriétés de S et T' .

Nous pouvons montrer quelques propriétés intéressantes des matrices S et T' . Plus précisément, en introduisant $C_{ij} = \delta_{i,j}$:

Proposition 28 *La matrice S est symétrique, unitaire. Elle vérifie $SC = S^*$ et pour tout i , S_0^i est un réel strictement positif.*

Preuve : La symétrie de S est évidente dans son interprétation tridimensionnelle et

$$Z[S_3, L_{i,j}]^* = Z[S_3, L_{i,j}]$$

En conséquence, $(S_i^j)^* = S_i^j = S_i^{\hat{j}} = (SC)_i^j$. Enfin, $S_0^i = Z[S_3, C_i]$ qui n'est autre que le carré de la norme de l'état de base de $H_{0,2}^{[i,\hat{i}]}$. Dans une théorie unitaire, c'est un réel strictement positif. $\square$

¹⁶Défini au chapitre 3, page 220.

Les relations $(st)^3 = s^2 = c$.

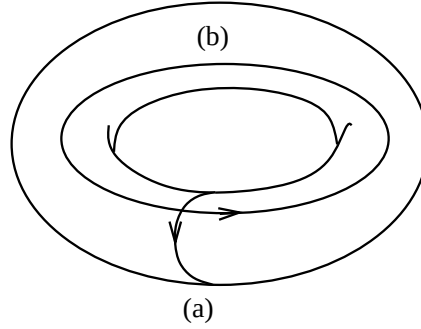
En admettant qu'il y ait fonctorialité *non* projective, les matrices S et T' définies en 5.3.3 vérifient les relations suivantes:

$$(5.42) \quad S^2 = (ST')^3 = \rho_{1,0}(c)$$

$\rho_{1,0}$ est le morphisme de $M_1 \simeq SL_2(\mathbb{Z})$ dans $GL(H_{1,0})$ fournit par la théorie topologique. Les matrices T' et S représentent les transformations modulaires t et¹⁷ s . Or, comme nous l'avons vu, $s^2 = (st)^3 = c$ ($c = s^2$ renverse le sens des deux cycles d'homologie du tore). On en déduit 5.42. Reste à calculer la matrice représentant $c = s^2$. Dans le cas où l'on a un point marqué sur le tore, on obtient une équation analogue. Si $S(j)$ représente s dans $H_{1,1}$, nous avons clairement:

$$(S(j)T')^3 = (S(j))^2 = \rho_{1,1}(c)$$

Nous devons donc évaluer $\rho_{1,1}(c)$. Bien entendu, les framings doivent être traités avec soin. Le renversement des cycles induit par c est responsable, d'une part d'un basculement de π du framing de la ligne portant l'indice j par rapport au cas d'un simple produit scalaire dans $H_{1,1}$ et d'autre part d'un changement de sens de la ligne circulant dans un des tores:



Ceci introduit la condition $i' = \hat{i}$ (par opposition avec $i' = i$ pour un produit scalaire) et d'autre part, la phase $\exp(-i\pi h_j)$. En conséquence, ceci démontre que:

$$(5.43) \quad (S(j)T')^3 = (S(j))^2 = \oplus_i (\Theta_{ji}^i \circ P_{[j,i]})$$

où comme au chapitre 3, $P_{[j,i]}$ désigne le projecteur sur l'espace des vertex avec lignes entrantes i, j et sortante i .

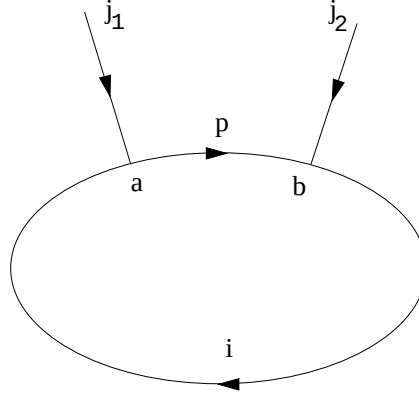
Ceci prouve les relations du groupe modulaire en genre 1 avec 0 et 1 point marqué. Toutefois, l'équation 5.43 pour $(ST')^3$ ne coïncide pas avec l'équation de Moore et Seiberg 3.182. Ceci provient comme nous l'avons dit du caractère projectif des théories topologiques déduites des équations de Moore et Seiberg.

La dernière identité.

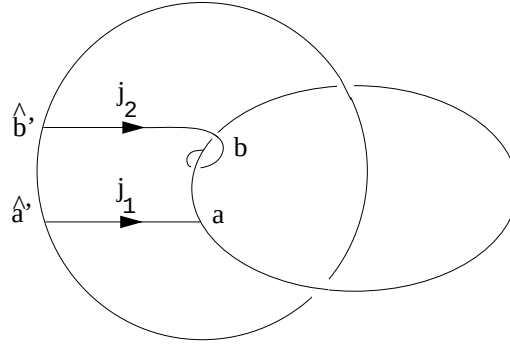
La dernière équation 3.184 de Moore et Seiberg traduit une relation sur les éléments de $\mathcal{M}^*(1, 2)$ groupe modulaire du tore avec deux points marqués. Nous renvoyons le lecteur à la section 3.6.3 du

¹⁷Voir page 220 et suivantes.

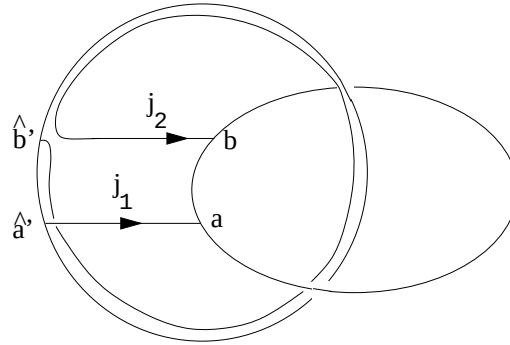
chapitre 3 pour les détails. Pour la démontrer tridimensionnellement, nous exprimons les éléments de matrices de $S(a)$ et $(b)S$ comme des fonctions de partition dans S_3 décorée par des graphes trivalents coloriés et munis de framings qui sont isotopes. La base de $H_{1,2}$ utilisée est indexée par (j_1, j_2) pour les pattes externes et (i, p, a, b) pour les lignes internes et les vertex. L'état $|\chi_{i,p,a,b}^{j_1,j_2}\rangle$ est associé au graphe ci-dessous plongé dans un tore plein $D_2 \times S_1$ de sorte que la ligne portant l'indice i circule le long du cycle (b) :



et l'élément de matrice $\langle \chi_{i',p',a',b'}^{j_1,j_2} | S(a) | \chi_{i,p,a,b}^{j_1,j_2} \rangle$ n'est autre que la fonction de partition dans S_3 du graphe:



Ces graphes sont plongés dans S_3 vu que nous recollons ici deux tores pleins selon s . De même, l'élément de matrice de $(b)S$ entre les mêmes états correspond au graphe:



Ces deux diagrammes sont clairement isotopes et donc $S(a) = (b)S$. Le lecteur vérifiera par un calcul tridimensionnel que l'évaluation explicite des deux éléments de matrice considérés donne la dernière identité de Moore et Seiberg.

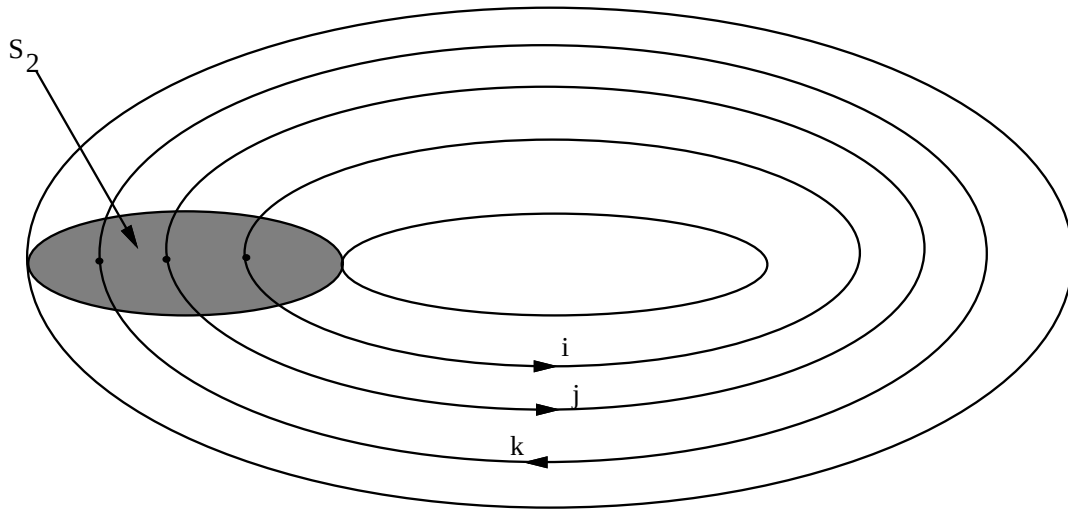
Opérateurs de Verlinde.

C'est encore dans le contexte tridimensionnel que l'on peut prouver le théorème de Verlinde 28 de la manière la plus directe. En effet, nous disposons d'une réalisation explicite des opérateurs que Verlinde lui-même avait introduit pour justifier son résultat (en particulier la formule 3.223). Soit C la couronne $1/2 < |z| < 1$, $((a), (b))$ la base usuelle d'homologie du tore, nous définissons $\phi_i[a]$ et $\phi_i[b]$ comme suit: $\phi_i[a]$ (respectivement $\phi_i[b]$) sont les opérateurs associés à $C \times S_1$ décorée par une ligne de Wilson de couleur i circulant selon (a) (respectivement (b)). Les courbes parallèles définissant les framings sont $\{P\} \times S_1$ en ce qui concerne (b) et un cercle $|z| = \text{cte}$ en ce qui concerne (a) . Les bords sont paramétrés naturellement. La transformation modulaire s envoie¹⁸ (a) sur (b) . La variété obtenue à partir de $C \times S_1$ en paramétrant les bords par s et contenant une ligne de Wilson selon (a) est isomorphe à la variété $C \times S_1$ dont les bords sont naturellement paramétrés mais où la ligne de Wilson est selon (b) ! En conséquence:

$$(5.44) \quad \phi_i[b] = S \circ \phi_i[a] \circ S^{-1}$$

Il reste à calculer les éléments de matrice de $\phi_i[a, b]$.

- L'élément de matrice $\langle \chi_k | \phi_i[b] | \chi_j \rangle$ est la fonction de partition dans $S_2 \times S_1$ du lien dessiné sur la figure ci dessous:



Nous reconnaissons $\text{Tr}_{H_{0,3}^{[i,j,k]}}(\mathbf{1})$ et donc

$$(5.45) \quad \phi_i[b] | \chi_j \rangle = \sum_k N_{i,j}^k | \chi_k \rangle$$

- De la même façon, nous calculons $\langle \chi_k | \phi_i[a] | \chi_j \rangle$. Le calcul est laissé au lecteur et:

$$(5.46) \quad \phi_i[a] | \chi_j \rangle = \frac{S_i^j}{S_0^j} | \chi_j \rangle$$

¹⁸Se référer page 220 et suivantes.

Ainsi $\phi_i[a]$ et $\phi_i[b]$ sont les opérateurs de Verlinde et la relation 5.44 n'est autre que la formule de Verlinde! Elle se réécrit sous la forme

$$\frac{S_i^n S_j^n}{S_0^n S_0^n} = \sum_k N_{i,j}^k \frac{S_k^n}{S_0^n}$$

qui exprime que

$$\begin{aligned}\phi_i[a]\phi_i[a] &= \sum_k N_{i,j}^k \phi_k[a] \\ \phi_i[b]\phi_i[b] &= \sum_k N_{i,j}^k \phi_k[b]\end{aligned}$$

comme l'avait indiqué Verlinde. Ceci démontre le théorème 28 et nous donne une réalisation explicite des opérateurs $\phi_i[a, b]$ introduits dans [181].

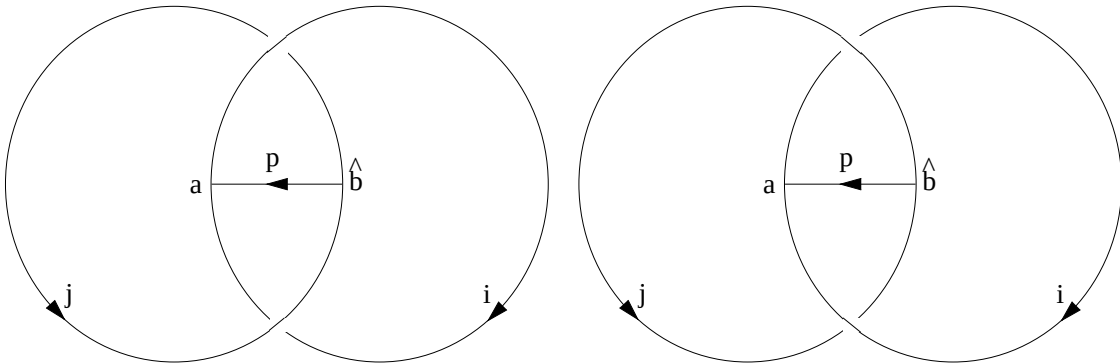
5.3.6 Explorations calculatoires tridimensionnelles.

Grâce au formalisme tridimensionnel, nous pouvons retrouver un certain nombre de relations entre les données de Moore et Seiberg. Quand, dans le chapitre suivant, nous aurons prouvé que toute solution des équations de Moore et Seiberg définit une TTR, alors le maniement des graphes trivalents dans S_3 nous fournira un moyen de calcul extrêmement puissant sur les données de Moore et Seiberg. Nous allons présenter ici quelques illustrations de cette idée.

Calcul tridimensionnels autour de $S(j)$.

Nous allons redériver la formule 3.222 qui exprime $S(j)$ en fonction des dimensions h_i , de S et de F par un calcul de fonction de partition à trois dimensions. D'autres applications de ces techniques consistent à retrouver de manière élémentaire les relations entre les différentes matrices $S(j)$. Nous avons vu au chapitre 3 comment démontrer les équations 3.242, 3.245 et 3.246. Nous nous proposons de les prouver ici par des arguments purement tridimensionnels.

Pour cela, nous introduisons Z_+ et Z_- les fonctions de partitions des deux graphes suivants plongés dans S_3 avec des framings normaux:



La fonction de partition Z_+ est reliée à $S(p)$ par

$$Z_+ = \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^p}} S(p)_{(i,a)}^{(j,b)}$$

Lemme 17 Les fonctions de partitions Z_+ et Z_- sont reliées par

$$(5.47) \quad Z_+ = e^{-i\pi h_p} Z_-$$

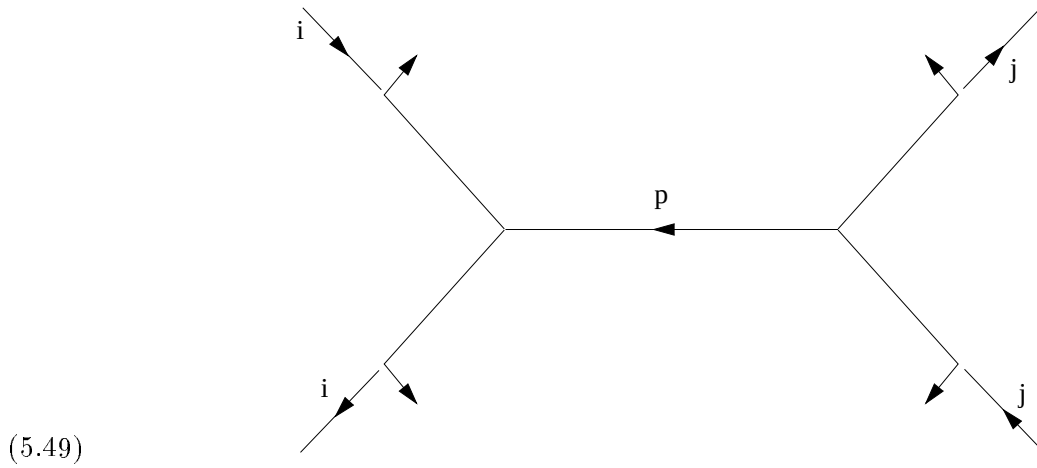
De même, $Z_{\pm}$ est invariante par renversement du framing:

$$(5.48) \quad Z_{\pm}(\otimes) = Z_{\pm}(\odot)$$

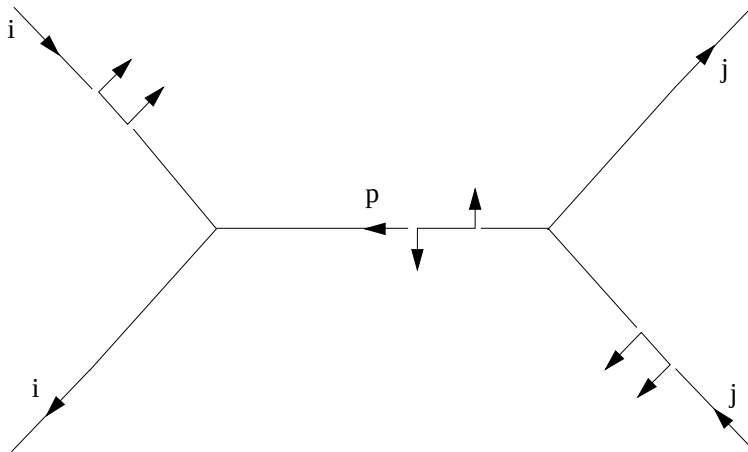
où l'on a utilisé les notations de la section 5.3.4.

Preuve : La première relation s'obtient en faisant faire un demi tour à la boucle portant l'indice de ligne i . Ceci introduit un “demi-twist” de la ligne portant l'indice de ligne p . Celui-ci peut être éliminé par l'utilisation de la formule 5.37 ce qui introduit la phase $\exp(2h_i - h_p)$ qui se ramène à $\exp(-i\pi h_p)$ car dans l'utilisation de 5.37 nous avons changé le framing de la ligne portant l'indice i de -1 unité par rapport au framing normal. En conséquence ceci démontre la formule 5.47.

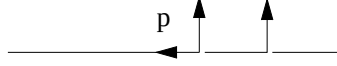
Le renversement du framing relatif à $Z_{\pm}$ se fait en deux étapes: tout d'abord, nous renversons le framing dans chacune des boucles de ce graphe; puis nous faisons passer le renversement du framing à travers les deux vertex auxquels sont connectés nos boucles. Toujours en utilisant les notations de la section 5.3.4, après la première étape, nous arrivons au schéma suivant



où nous n'avons représenté que le voisinage des deux vertex ainsi que la ligne reliant ceux-ci. En faisant passer les basculements de π du framing au travers des deux vertex conformément à la formule 5.49, nous transformons la situation:



Le décroisement du premier vertex introduit la phase $\exp(-i\pi h_p)$ et celui du second vertex $\exp(-i\pi h_p)$. Les lignes portant les indices i et j ne subissent pas de modification de leur framing autre que le renversement, mais la ligne portant l'indice p devient:



et cette torsion du framing absorbe le facteur de phase $\exp(-2\pi i h_p)$. Le lecteur vérifiera que:

$$(5.50) \quad \text{---} \otimes \uparrow \odot \uparrow \otimes \text{---} = e^{2\pi i h_i} \text{---} \rightarrow \text{---}$$

□

Remarque : Le lecteur attentif aura sûrement remarqué que la formule 5.50 ne doit pas être confondue avec l'équation

$$(5.51) \quad \text{---} \odot \uparrow \otimes \uparrow \odot \text{---} = e^{-2\pi i h_i} \text{---} \odot \rightarrow \text{---}$$

Toute personne mal latéralisée comprendra les difficultés de l'auteur de ces lignes. □

Nous sommes prêts à explorer les propriétés de symétrie de $S(p)$. Nous remarquons tout d'abord que les graphes apparaissant dans $Z_{\pm}$ ont une symétrie $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ évidente correspondant aux rotations d'angle π autour de l'axe reliant les vertex a et b et autour d'un axe normal au plan du schéma 5.49. La fonction de partition Z_+ étant reliée à $S(p)$ nous en déduisons les symétries suivantes de $S(p)$:

$$(5.52) \quad S(p)_{(i,a)}^{(j,b)} = S(p)_{(i,\sigma_{13}(a))}^{(j,\sigma_{13}(b))}$$

$$(5.53) \quad = S(\hat{p})_{(j,b)}^{(i,a)}$$

$$(5.54) \quad = S(\hat{p})_{(j,\sigma_{13}(b))}^{(i,\sigma_{13}(a))}$$

que nous avons douloureusement obtenues à partir des équations de Moore et Seiberg au chapitre 3.

La fonction de partition Z_- possède elle aussi une interprétation en termes de matrice S . Les graphes associés à $Z_{\pm}$ se déduisent les uns des autres par une symétrie plane par rapport au plan de la feuille¹⁹. En conséquence, le complexe conjugué de Z_+ coïncide avec la fonction de partition Z_- évaluée avec le coloriage opposé. En vertu de la relation entre Z_+ et Z_- , nous obtenons une relation entre Z_- et $S(p)$ mais aussi une relation entre $(S(p)_{(i,a)}^{(j,b)})^*$ et $S(\hat{p})_{(i,a)}^{(j,\hat{b})}$:

$$(5.55) \quad (S(p)_{(i,a)}^{(j,b)})^* = e^{i\pi h_p} S(\hat{p})_{(i,\hat{a})}^{(j,\hat{b})}$$

C'est la quatrième propriété de symétrie de $S(p)$ trouvée au chapitre 3. Comme nous venons d'épuiser les isométries laissant invariant le graphe non colorié apparaissant dans Z_+ , nous ne pouvons attendre d'autres miracles pour S .

Remarquons enfin que la relation entre Z_+ et $S(p)_{(i,a)}^{(j,b)}$ d'une part et Z_+ et Z_- d'autre part fournit sans aucun effort la formule alternative 3.233 du chapitre 3 pour $S(p)_{(i,a)}^{(j,b)}$.

¹⁹Théoriquement le framing est affecté par cette symétrie mais nous avons vu que $Z_{\pm}$ ne changeait pas lorsque le framing subit une symétrie plane.

5.4 Amplitudes de changement de topologie.

Dans cette section, nous montrons que la totalité des amplitudes d'une TTR rationnelle peut se calculer à partir des données de Moore et Seiberg que nous avons définies dans les sections précédentes. Pour cela, nous devons donner un algorithme de calcul des amplitudes. Nous utiliserons ici les décompositions de Morse [127] des variétés de dimension trois afin de bien illustrer les techniques mises en jeu. Nous montrerons comment calculer toutes les amplitudes avec changement de topologie et nous discuterons les représentations des groupes modulaires qui apparaissent ici.

5.4.1 Préambule géométrique.

Soit M interpolant entre N_1 et N_2 . Elle est décorée par un graphe trivalent coloré K . Nous choisissons une fonction de Morse f pour M telle que N_1 et N_2 soient des courbes de niveau et qui soit aussi une fonction de Morse pour K . Cela permet de séparer $[M, K]$ en tranches entre lesquelles il ne se passe rien: la topologie de $f^{-1}(t)$ ne change pas entre deux valeurs critiques t_k et t_{k+1} [127].

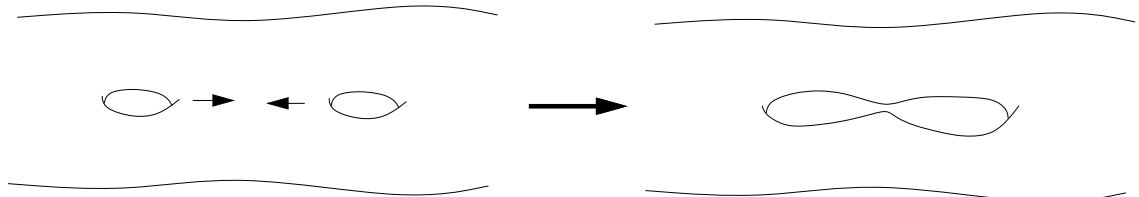
Pour pouvoir faire des calculs d'invariants, nous devons disposer d'un jeu de variétés qui modélisent tous les changements de topologie possibles à deux dimensions. Fort heureusement, à trois dimensions, leur classification exhaustive n'est pas trop complexe [127]. La figure 5.1 résume les différentes possibilités locales. Sur cette figure, nous avons indiqué la signature de la Hessienne de la fonction de Morse au point critique.

Globalement, on peut changer le nombre de composantes connexes ou au contraire altérer la topologie d'une unique composante connexe. La localité de la TQC permet de ne s'intéresser qu'aux composantes dont la topologie va changer. Ainsi, la liste des possibilités est la suivante:

Avec changement du nombre de composantes connexes Nous pouvons faire fusionner deux surfaces de genre g_1 et g_2 avec n_1 et n_2 points marqués pour obtenir une surface de genre $g_1 + g_2$ avec $n_1 + n_2$ points marqués. L'opération inverse consiste à scinder une surface en deux.

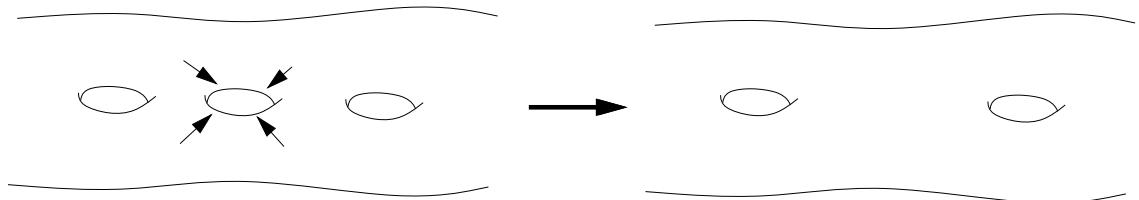
Sans changement du nombre de composantes connexes Le nombre de points marqués ne change pas mais le genre change d'une unité. Divers scénarios sont possibles:

- Pincement d'une anse:



Cela diminue le genre. Le mouvement inverse fait augmenter le genre d'une unité.

- Nous pouvons aussi faire disparaître une anse en écrasant un des trous



Ce mouvement diminue le genre et le mouvement inverse l'augmente.

Ces deux situations correspondent à des points critiques d'indices différents. C'est pourquoi nous les avons distinguées.

Remarque : Nous ne parlerons ici que des changements de topologie affectant la variété seule. Ceux qui concernent le graphe K sont considérablement plus simples à traiter puisque la localité permet de se ramener dans S_3 . Les expressions de ces amplitudes seront d'ailleurs données dans le prochain chapitre. $\square$

Fort heureusement, il existe des modèles relativement simples²⁰ pour chacune de ces situations. Dans un tore plein à g trous, on choisit un 1-squelette du tore plein en question, en enlevant une ligne à ce 1-squelette, on change sa topologie. En retirant du tore plein un voisinage tubulaire de ce nouveau 1-squelette et en choisissant un paramétrage du bord ainsi créé, nous fabriquons des modèles pour les situations que nous venons de décrire. Seul l'écrasement d'un trou ne rentre pas dans ce cadre mais il se traite sans difficultés. Décider quelles composantes connexes du bord sont entrantes et sortantes est une question de convention et cela nous permet d'accéder à un changement de topologie comme à son inverse.

5.4.2 Amplitudes avec changement de topologie.

Grâce à la localité, il est très facile de calculer les amplitudes correspondant aux modèles que nous avons trouvé. Nous allons illustrer cela sur quelques exemples qui montreront que *toutes* les amplitudes avec changement de topologie se calculent à partir des données de Moore et Seiberg. Nous avons choisi un exemple dans chacune des catégories mentionnées ci-dessus.

Fusion de deux surfaces.

Pour simplifier, nous ne considérerons que le cas sans points marqués. Le lecteur qui reprendra les mêmes calculs en toute généralité verra clairement que nos conclusions ne sont pas modifiées. A partir de deux surfaces de genres respectifs g_1 et g_2 , nous obtenons une surface de genre $g_1 + g_2$ via un cobordisme paramétré $\mathbb{F}(g_1, g_2)$. Nous utilisons la base “en échelle” définie par les vecteurs

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a surface with } g \text{ holes, represented as a horizontal tube with } g \text{ vertical segments. The top boundary is labeled } b_1, j_1, b_2, \dots, b_{g-1}. \text{ The bottom boundary is labeled } a_1, i_1, a_2, \dots, a_{g-1}. \text{ The vertical segments are labeled } k_1, k_2, k_3, \dots, k_g. \text{ The right boundary is labeled } k_{g+1}. \end{array} \right\rangle = |\phi_g\rangle$$

Pour calculer $\phi[\mathbb{F}(g_1, g_2)](|\phi_{g_1}\rangle \otimes |\phi_{g_2}\rangle)$, nous coupons selon une sphère S_2 avec quatre points marqués, ce qui nous donne après insertion d'une base de $H_{0,4}$:

(5.56)

$$\phi[\mathbb{F}(g_1, g_2)](|\phi_{g_1}\rangle \otimes |\phi_{g_2}\rangle) = \sum_{p, a, b} F_{0,p} \left[\begin{array}{cc} a & b \\ \sigma_{123}(t_{k_{g_1+1}}) & t_{k'_{g_1}} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a surface with } g_1 + g_2 \text{ holes, represented as a horizontal tube with } g_1 + g_2 \text{ vertical segments. The top boundary is labeled } b_1, b_{g_1-1}, b, b'_1, b'_{g_2-1}. \text{ The bottom boundary is labeled } a_1, a_{g_1-1}, a, a'_1, a'_{g_2-1}. \text{ The vertical segment } b \text{ is labeled } p. \end{array} \right\rangle$$

²⁰Réalisables par tout bon pâtissier.

De la même façon, on calcule l'amplitude pour la scission d'une surface. L'opérateur associé se comporte comme une projection: toutes les lignes qui passent à l'endroit de la scission doivent être mises à zéro si l'on veut obtenir un résultat non nul.

Pincement d'une anse.

Regardons quel est l'effet dans la base en échelle introduite ci-dessus de la disparition de la p -ième anse. On note $\mathbf{A}_p$ la variété considérée. Elle interpole entre une surface de genre $g + 1$ et une surface de genre g . Pour calculer $\phi[\mathbf{A}_p]|\phi_{g+1}\rangle$, on coupe suivant un sphère avec quatre points marqués pour enlever la p -ème anse du graphe en échelle de $|\phi_{g+1}\rangle$. Cela nous donne, après un calcul immédiat:

$$(5.57) \quad \phi[\mathbf{A}_p]|\phi_{g+1}\rangle = \sum_{m,z} \sqrt{\frac{S_0^{k_p} S_0^{k_{p+1}}}{S_0^0 S_0^m}} F_{i_{p-1},m} \begin{bmatrix} \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \alpha & z \end{bmatrix} F_{j_{p-1},\hat{m}} \begin{bmatrix} \beta_{p-1} & \beta_p \\ \beta & \hat{z} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right\rangle$$

The diagram is a horizontal oval with a right-pointing arrow. It is divided into five vertical sections by four vertical lines. The top labels from left to right are b_1 , b_{p-2} , b , b_{p+1} , and b_g . The bottom labels from left to right are a_1 , a_{p-2} , a , a_{p+1} , and a_g . In the second section, there is a downward arrow labeled k_{p-1} . In the fourth section, there is a downward arrow labeled k_{p+1} . The third section contains the label m .

Les autres amplitudes s'évaluent par le même genre d'arguments. La modification de topologie est en fait locale et on peut toujours par des découpages se ramener à des calculs dans une sphère S_3 . Du coup toute fonction de partition dans S_3 se calcule à partir des données de Moore et Seiberg par une méthode de matrice de transfert que nous reprendrons dans le prochain chapitre.

5.4.3 Calculabilité.

Tout ceci suggère le résultat suivant, dont strictement parlant nous ne disposons d'une preuve que dans le cas non projectif.

Conjecture 1 *Il est possible d'associer naturellement à chaque TTR unitaire vérifiant les postulats de simplicité 3 et de trivialité de la ligne zéro 4, une solution des équations de Moore et Seiberg. De plus, les données de Moore et Seiberg associées à une TTR unitaire en dimension trois déterminent entièrement celle-ci.*

En effet, nous venons de montrer comment toutes les amplitudes avec changement de topologie peuvent être calculées assez simplement à partir des données de Moore et Seiberg. Il ne reste qu'à calculer l'action des difféomorphismes, ce que nous savons faire modulo les problèmes liés à la projectivité.

Comme nous l'avons déjà dit dans ce chapitre, ce problème n'est pas complètement résolu mais nous montrerons précisément dans le prochain chapitre qu'il est possible de reconstruire une théorie topologique projective rationnelle à partir de toute solution des équations de Moore et Seiberg.

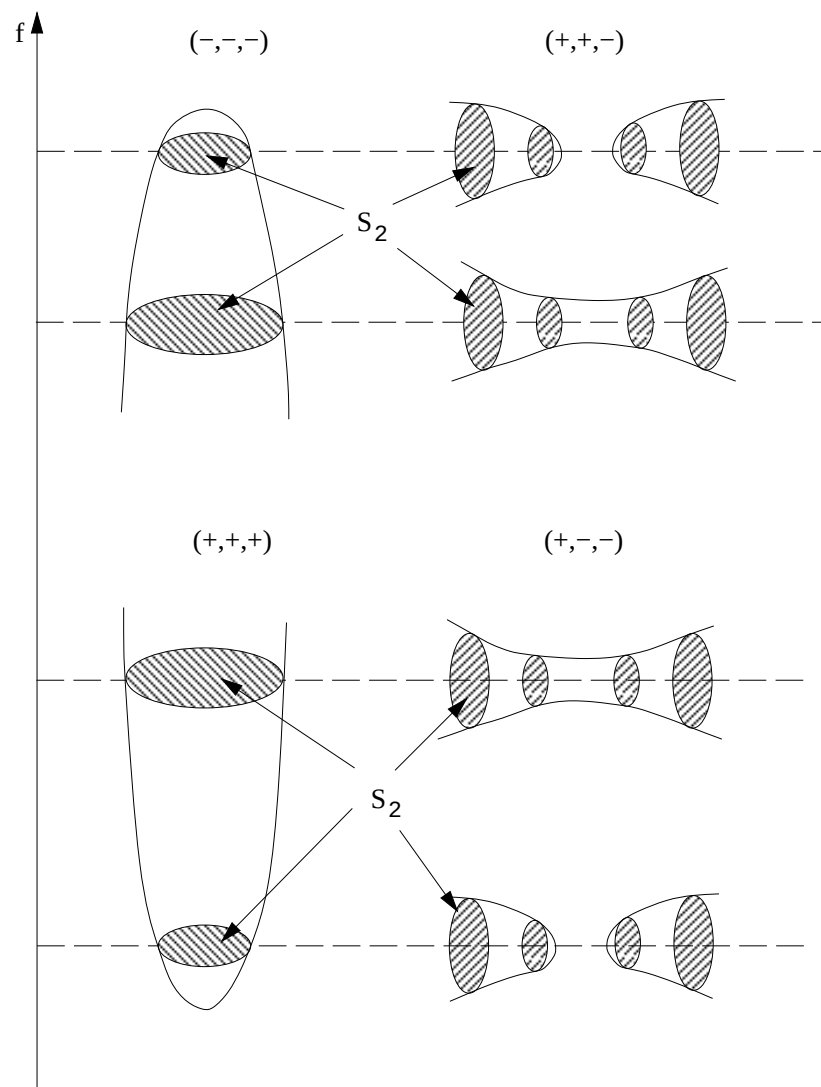


FIG. 5.1 - : Allure d'une variété tridimensionnelle au voisinage d'un point critique.

Chapitre 6

Construction d'une Théorie Topologique 3D à partir d'une solution des Equations de Moore et Seiberg.

Dans ce chapitre, nous reconstruisons une théorie topologique projective basée sur $\mathbf{Ma}_{3,1}$ à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg [37]. C'est la réciproque des considérations du Chapitre 5!

Pour commencer, nous donnerons le plan de cette construction dans la section 6.1. Dans la section 6.2, nous définirons les espaces de Hilbert H_Σ de la théorie 3D et certains invariants de graphes trivalents colorés dans S_3 . Nous utiliserons ces invariants dans la section 6.3 pour définir des invariants topologiques de variétés tridimensionnelles sans bord décorées par un graphe du type précédent. Notre outil essentiel sera le calcul de Kirby [104] qui relie entre elles différentes présentations par chirurgie d'une même variété. Les propriétés de covariance par changement de base dans H_Σ seront vérifiées dans la section 6.4 ce qui permettra de définir la correspondance entre les cobordismes paramétrés tridimensionnels qui relient Σ_1 à Σ_2 et les opérateurs linéaires sur H_{Σ_1} à valeurs dans H_{Σ_2} . La fonctorialité projective et les autres propriétés de la théorie topologique seront prouvées dans la section 6.5. Ceci achèvera la construction de la théorie topologique projective tridimensionnelle à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous indiquerons dans la section 6.6 comment calculer des fonctions de partition en utilisant les décompositions de Heegaard des variétés à trois dimensions.

6.1 Plan de construction d'une TTR à 3 dimensions.

Dans cette section, nous décrivons le cheminement de la preuve sans en donner les détails. Ceux-ci seront présentés dans les sections suivantes.

Nous partons d'une solution des équations de Moore et Seiberg au sens de la section 3.7.1. Nous supposons de plus qu'un bon choix de jauge au sens de la proposition 11 a été effectué.

Nous allons définir la TTP associée à ces données en donnant une prescription de calcul de tous les éléments de matrice associés à tous les morphismes de $\mathbf{Ma}_{3,1}$. Puis, nous vérifierons que cette prescription définit bien des invariants topologiques au sens de la définition 18, et que les axiomes d'une théorie des champs géométrique sont bien satisfaits (définitions 5 et 6). La fonctorialité projective est un des points cruciaux de notre preuve. Les éléments de matrice seront identifiés avec des fonctions de partition de

variétés sans bord.

Bien sûr, nous devons disposer d'une procédure pour calculer la fonction de partition d'une variété sans bord. Les techniques de chirurgie et le calcul de Kirby permettent de se ramener au cas de la sphère S_3 avec un graphe trivalent décoré. Ce cas est traité par une méthode de matrice de transfert. Comme nous allons le voir un peu plus loin, la procédure de calcul par chirurgie des invariants est *non-locale*: elle ne s'effectue pas en utilisant une décomposition de Morse. Du coup la fonctorialité n'est plus du tout évidente! Bien sûr, une fois cette propriété justifiée, il est possible de calculer les invariants en utilisant des décompositions de Morse.

6.1.1 Espace des états associé à une surface.

L'espace des états $H_{g,n}$ sera défini par une base. Les vecteurs de cette base seront associés aux tores pleins T_g décorés par un 1-squelette avec n pattes externes. Les vecteurs de la base sont obtenus en faisant varier le coloriage du graphe. Nous imposons la propriété

$$H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}$$

pour définir H_Σ dans le cas où Σ n'est pas connexe. Nous posons $H_\emptyset = \mathbb{C}$. Cette construction assure que H_N ne dépend que de la topologie de N et $H_{\hat{N}} \simeq (H_N)^*$.

Il existe toutefois plusieurs choix de 1-squelette à topologie fixée. Le choix d'un autre graphe définit un changement de base. A topologie donnée, le passage d'un graphe à un autre peut être décomposé en un nombre fini de mouvements élémentaires: les mouvements F et B . Nous leur associons les matrices F et $B(\pm)$. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont reliés par une succession de tels mouvements élémentaires, la matrice de passage $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ associée sera le produit des matrices élémentaires correspondantes. Moore et Seiberg ont prouvé que le résultat ne dépend pas de la séquence choisie pour passer de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}'$. $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ est donc bien définie. Enfin l'associativité de l'algèbre de Verlinde montre que $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ est une matrice carrée.

Nous définirons le produit scalaire sur H_N suivant les conventions de Witten [191]. Il faudra vérifier que ce produit scalaire est bien compatible avec l'interprétation en terme de recollement trivial:

$$\langle M_1 | M_2 \rangle = Z[M_2 \sharp \hat{M}_1]$$

avec $|M_1\rangle = \phi[M_1]$, 1 pour des variétés de bord Σ recollées selon cette frontière. De même, nous devons vérifier que l'introduction des matrices F et $B(\pm)$ pour représenter les mouvements correspondants est bien cohérente avec l'interprétation tridimensionnelle de F et $B(\pm)$. Cette cohérence du formalisme utilisé sera prouvée en section 6.4.1.

6.1.2 Fonction de partition des variétés sans bord.

La cas de la sphère S_3 est de loin le plus simple. En effet, nous disposons d'une fonction de Morse dont les sections à temps donné sont des sphères sauf pour deux valeurs critiques où elles se réduisent à un point. En conséquence, une méthode de matrice de transfert est aisément applicable par opposition au cas des variétés plus complexes pour lesquelles il est nécessaire de connaître les amplitudes de changement de topologie. La définition de $Z[S_3, K]$ où K est un graphe trivalent décoré par une méthode de matrice de transfert est donnée dans la section 6.2.2. Nous prouvons que $Z[S_3, K]$ ainsi calculé est un invariant topologique de graphes décorés dans S_3 en suivant une méthode utilisée par Reshetikhin et Turaev dans

le contexte des groupes quantiques [152]. Le cas des variétés sans bord¹ se ramène à celui de la sphère grâce au résultat suivant [120]:

Théorème 56 (W.B.R. Lickorish et A.H. Wallace) *Toute variété M de dimension trois compacte connexe orientable sans bord s'obtient par chirurgie à partir de S_3 .*

Cela s'étend au cas des variétés décorées par un graphe trivalent comme nous le montrons dans l'Appendice 6.A. La chirurgie est effectuée le long de tores: on se donne un entrelac de S_3 , chaque composante étant munie d'un framing. Ce framing définit un difféomorphisme du tore. Pour effectuer la chirurgie, on prend des voisinages tubulaires de chaque composante de l'entrelac. Ce sont des tores pleins que l'on retire et que l'on recolte ensuite via les difféomorphismes déduits des framings². Le détail de cette opération sera explicité dans la section 6.3.1.

Il existe différentes présentations par chirurgie d'une même variété. En l'absence de décoration, un critère d'équivalence entre deux présentations par chirurgie est dû à Kirby [104] ainsi qu'à Fenn et Rourke [61]. Il n'est pas difficile d'adapter ces travaux au cas d'une variété décorée. Ceci permet de prouver l'invariance topologique du nombre que nous avons associé à une variété sans bord décorée et constituera notre définition de la fonction de partition d'une variété à partir d'une présentation par chirurgie.

6.1.3 Variétés à bords.

A chaque variété M à bord, nous associons un opérateur que nous définissons via ses éléments de matrice. Nous choisissons une base de chaque espace $H_{g,n}$ intervenant dans le problème et un vecteur de chaque base; puis nous considérons la fonction de partition obtenue en saturant chaque composante connexe du bord de M avec le tore plein associé au vecteur précédemment choisi. C'est un nombre. Pour l'interpréter comme un élément de matrice d'un opérateur, nous devons vérifier que ce procédé est bien covariant: si nous changeons une base par un mouvement élémentaire F ou B , les éléments de matrice ainsi définis sont linéairement reliés via la bonne matrice³ $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$. Seule la fonctorialité dans S_3 le long de S_2 est utilisée pour obtenir ce résultat; mais c'est une conséquence directe du formalisme de matrice de transfert utilisé dans S_3 . Intuitivement, les mouvements élémentaires sont locaux et ne vont donc pas interférer avec nos chirurgies. Nous pouvons donc associer un opérateur à chaque cobordisme paramétré et il ne dépend que de la classe d'isomorphisme de ce dernier.

6.1.4 Fonctorialité et unitarité.

Le produit scalaire sur chaque espace $H_{g,n}$ est trivialement défini positif et $\phi[\hat{M}] = \phi[M]^\dagger$ est une conséquence triviale de nos définitions. Seule la fonctorialité projective pose problème.

Travailler sur des éléments de matrice permet de se limiter au cas des variétés sans bord. Dans les sections 6.5.3 et 6.5.4, on déduit la fonctorialité projective pour M sans bord quelconque à partir de la fonctorialité pour des scindements particuliers de S_3 . Ce Lemme relativement technique repose uniquement sur des calculs faits dans S_3 en coupant selon des sphères.

Une fois ce résultat obtenu, les calculs par la théorie de Morse deviennent possibles. Nous suggérons comment les représentations projectives des groupes modulaires définies par la théorie topologique s'identifient modulo un cobord avec celles apparaissant dans les travaux de Moore et Seiberg. Nous ferons

¹Nous sous-entendrons connexes, compacts et orientables dans la suite.

²Nous renvoyons le lecteur page 48 du chapitre 1 pour la définition générale du framing.

³Si on agit sur les espaces sortant, on doit prendre la conjuguée hermitique.

alors part de quelques conjectures intéressantes concernant les phases qui apparaissent dans les théories topologiques et les différents cocycles que l'on peut construire sur les groupes modulaires.

La propriété $\phi[M_Y] = \text{Tr}_{H_Y}(\phi[M])$ se déduit de l'invariance topologique et de la fonctorialité projective (cf chapitre 1). Ceci permet la reconstruction d'une théorie des champs topologique à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous pouvons maintenant rentrer dans les détails de la preuve. Rendez vous en section 6.7 pour le lecteur pressé.

6.2 Espaces des états et fonctions de partition dans S_3 .

Nous devons tout d'abord décrire l'espace des états associé à une surface. Puis nous définirons des invariants topologiques de graphes trivalents décorés dans S_3 .

6.2.1 Espaces des états.

Définition.

Fixons deux entiers g et n . Soit $\mathcal{G}$ un graphe trivalent de genre g avec n points externes, nous le plongeons comme 1-squelette d'un tore plein de genre g . Nous fixons aussi un framing de ce 1-squelette. Alors:

Définition 61 Une base de $H_{g,n}$ est indexée par les coloriage possibles de $\mathcal{G}$. Nous posons $H_\emptyset = \mathbb{C}$ et $H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}$.

Cela définit les espaces H_N même pour N non connexe. Nous noterons $|T_g, \mathcal{G}_C\rangle$ le vecteur associé au coloriage $\mathcal{C}$ du graphe $\mathcal{G}$. Comme nous avons un arbitraire sur $\mathcal{G}$, nous avons défini plusieurs bases de $H_{g,n}$ qu'il importe de relier.

Nous utilisons le fait que deux de tels graphes sont reliés par une suite finie de transformations de dualité. En reprenant les notations de la section 3.6.3, $P(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ désigne la matrice de dualité associée aux graphes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$. Bien sûr, dans $H_{0,4}$, si $\mathcal{G}' = F\mathcal{G}$, alors $P(\mathcal{G}, F\mathcal{G}) = F$. Dans toutes les transformations, les points marqués sur la surface doivent être laissés fixes. Ceci est important pour définir $B(\pm)\mathcal{G}$ et on a $P(\mathcal{G}, B(\pm)\mathcal{G}) = B(\pm)$ dans $H_{0,4}$. Toutes les matrices de dualité s'expriment comme compositions de produits tensoriels de ces matrices et de leurs inverses. L'unitarité de F et $B(\pm)$, prouvée dans le chapitre 3 montre qu'il est possible de normaliser le produit scalaire sur $H_{g,n}$ indépendamment du graphe $\mathcal{G}$ utilisé. Comme dans [191], nous posons:

$$(6.1) \quad \langle T_g, \mathcal{G}_{C'} | T_g, \mathcal{G}_C \rangle = \delta_{[C],[C']} \frac{\sqrt{S_0^{I_1} \dots S_0^{I_n}}}{(S_0^0)^{g-1+\frac{n}{2}}}$$

où $\delta_{[C],[C']}$ est le symbole de Kronecker sur l'ensemble des coloriages de $\mathcal{G}$. Ce produit scalaire est bien défini positif!

Propriétés.

La construction de ces espaces assure

$$(6.2) \quad H_{N \cup N'} = H_N \otimes H_{N'}.$$

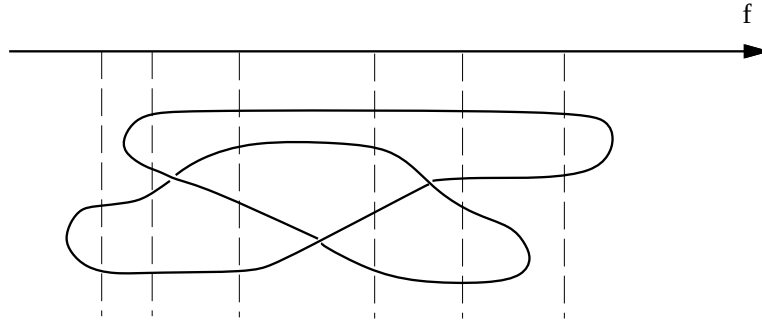
La localité à la frontière sera discutée plus tard, clairement $H_{\hat{N}} = (H_N)^*$.

Enfin, en écho aux remarques faites page 47, nous remarquons que les états de la base sont associés à des graphes qui ont un coloriage bien défini, c'est à dire que chaque ligne porte un indice de ligne et chaque vertex un indice de vertex.

6.2.2 Invariants de graphes ϕ^3 décorés dans S_3 .

Définition, matrices de transfert.

Considérons un graphe K trivalent colorié immergé dans la sphère S_3 . On choisit alors un plan de projection régulier⁴. Nous choisissons une fonction de Morse qui sépare les croisements, points de création et points d'annihilation du graphe K ainsi que les vertex comme sur le schéma suivant:



Cela définit une décomposition du graphe en cylindres $S_2 \times [0, 1]$ dont chacun contient un et un seul des événements suivants: Pour chacun de ces événements, nous construisons une tranche de topologie $S_2 \times S_1$,

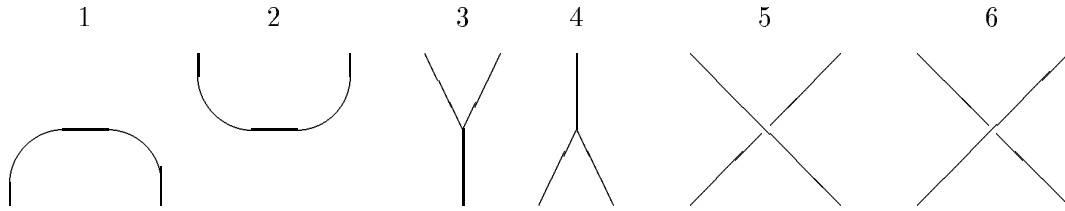


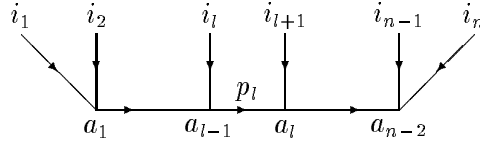
FIG. 6.1 - : Les différents événements élémentaires dans S_3 .

qui possède n points marqués du côté entrant $S_2 \times \{0\}$ et telle que la k -ème et la $k + 1$ -ème ligne soit reliée à l'événement considéré. Cette tranche sera notée $C_p(k, k + 1)$ où $p \in \{1, 6\}$ désigne l'événement considéré. A chacune de ces tranches, nous associons une matrice définie par les prescriptions suivantes:

Les matrices considérées sont rectangulaires. Si C est un cylindre et que K intercepte sa frontière en n points entrants et m sortants, alors $\phi[C_p(k, k + 1)] \in \mathcal{L}(H_{0,n}, H_{0,m})$. Nous choisissons la base de $H_{0,n}$

⁴Aucun croisement triple n'apparaît dans la projection.

correspondant au graphe multipériphérique:



Les matrices correspondant aux événements élémentaires sont alors:

Création de paires: $C_1(k, k+1)$ Nous créons une paire portant les indices k et $\hat{k}$. L'amplitude est donnée par:

$$\phi[C_1(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{l-1} \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_l \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sum_{p,a} \sqrt{\frac{S_0^0 S_0^p}{S_0^{p_l} S_0^k}} \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad \hat{k} \quad k \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{l-1} \quad \xrightarrow{p_l} \quad a \quad \xrightarrow{p} \quad \hat{a} \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_l \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

Destruction de paires $C_2(k, k+1)$ De la même manière, nous supprimons une paire de lignes et:

$$\phi[C_2(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad \hat{k} \quad k \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{l-1} \quad \xrightarrow{p_l} \quad a \quad \xrightarrow{p} \quad b \quad \xrightarrow{p'_l} \quad a_l \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{S_0^p S_0^k}{S_0^0 S_0^{p_l}}} \delta_{a,\hat{b}} \delta_{p_l,p'_l} \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{l-1} \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_l \quad \xrightarrow{p_l} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

Vertex $C_3(k, k+1)$ et $C_4(k)$ Deux cas doivent être distingués: la fusion de lignes et l'ouverture d'une

ligne en deux. Dans le premier cas l'amplitude vaut:

$$\phi[C_3(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad j \quad k \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a} \quad b \quad \xrightarrow{a_{n-2}} \end{array} \right\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{S_0^j S_0^k}{S_0^0 S_0^{i_l}}} F_{p, i_l} \left[\begin{array}{cc} a_l & \hat{\alpha} \\ a & b \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a_{l-1}} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

et dans le cas de la scission d'une ligne i_l en deux indexées j et k :

$$\phi[C_4(k)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a_{l-1}} \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle = \sum_{p, a, b}$$

$$F_{p, i_l} \left[\begin{array}{cc} \hat{a}_{l-1} & \hat{\alpha} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad j \quad k \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a} \quad b \quad \xrightarrow{a_{n-2}} \end{array} \right\rangle$$

où α est l'indice du vertex.

Croisements $C_{5,6}(k, k+1)$ Deux types de croisements sont possibles $C_+(k, k+1) = C_5(k, k+1)$ et $C_-(k, k+1) = C_6(k, k+1)$. Ils sont reliés aux deux matrices $B(-)$ et $B(+)$:

$$\phi[C_{\pm}(k, k+1)] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_l \quad i_{l+1} \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a_{l-1}} \quad a_l \quad \xrightarrow{a_{n-2}} \end{array} \right\rangle = \sum_{p, a, b}$$

$$B_{p_{l-1}, p}(\pm) \left[\begin{array}{cc} a_{l-1} & a_l \\ a & b \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_{l+1} \quad i_l \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \nearrow \\ a_1 \quad \xrightarrow{a} \quad b \quad \xrightarrow{a_{n-2}} \end{array} \right\rangle$$

Il est légitime de définir la notion suivante:

Définition 62 *D'une manière générale, on appelle décomposition de Morse d'un graphe plongé dans S_3 le choix d'une décomposition de S_3 de la forme*

$$(6.3) \quad S_3 = B_3 \cup (\cup_{k=1}^n C_k) \cup B_3$$

où les cobordismes C_k sont de la forme $(C_p(k, k+1))_{p,k}$.

Le choix d'une décomposition de Morse est équivalent au choix d'un plan de projection pour le graphe. Alors nous définissons la fonction de partition d'un plongement du graphe K avec un framing normal au plan de projection par:

Définition 63 *Soit K plongé dans S_3 , et*

$$[S_3, K] = B_3 \cup (\cup_{k=1}^n C_k) \cup B_3$$

la décomposition de Morse d'une projection régulière de K . La fonction de partition de S_3 décorée par K muni du framing normal par rapport au plan de projection est donnée par:

$$(6.4) \quad Z[S_3, K] = S_0^0 \prod_{k=1}^n \phi[C_k]$$

et elle ne dépend pas de la décomposition de Morse choisie.

Pour justifier cette définition, nous devons prouver l'invariance topologique des nombres ainsi définis. C'est l'objet de la section suivante mais avant cela, nous devons définir $Z[S_3, K]$ dans le cas où K n'a pas un framing normal.

Dans ce cas, on fixe un plan de projection et on note n_j l'écart entre le framing de la ligne j et le framing par rapport à ce plan. Soit $K_\perp$ le graphe K muni du framing normal, i_j la couleur de la ligne j , on pose:

$$(6.5) \quad Z[S_3, K] = Z[S_3, K_\perp] \prod_{l \text{ ligne}} \exp(2\pi i n_l h_{i_l})$$

Comme nous allons le montrer, cette prescription est bien invariante topologique. Cette méthode de calcul porte le nom de méthode de la matrice de transfert par analogie avec la mécanique statistique. Les matrices $\phi[C_p(k, k+1)]$ jouent le rôle de matrices de transfert .

Invariance topologique.

La preuve est une adaptation du travail de Reshetikhin et Turaev [152] qui traitait du cas des groupes quantiques. Pour cette raison, nous ne donnerons pas tous les détails. Le lecteur zélé complétera de lui-même à la lumière de [152].

L'idée consiste à identifier les graphes coloriés dans $S_2 \times [0, 1]$ avec les morphismes d'une catégorie engendrée par peu d'éléments. Les relations entre les générateurs sont les conditions d'invariance topologique. Elles relient deux décompositions de Morse d'un même graphe et donc, il suffit de vérifier que la fonction de partition est invariante dans ces changements de décomposition.

La catégorie utilisée par Reshetikhin et Turaev est formée d'objets qui sont des ensembles finis de points de S_2 avec des indices de ligne et des signes: $[(P_k, i_k, \varepsilon_k)_k]$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$. L'ensemble vide est aussi un objet. Les morphismes sont les graphes trivalents coloriés et orientés dans $S_2 \times [0, 1]$ qui interpolent entre de tels objets. C'est à dire que chaque point des objets est relié au graphe, le coloriage de la ligne aboutissant au point P_k est i_k et l'orientation de la ligne est descendante ou montante suivant que $\varepsilon_k = 1$ ou -1 . On définit alors un foncteur $\mathbb{F}$ de cette catégorie dans une catégorie algébrique comme suit:

Action sur les objets A l'objet $[(P_k, j_k, \varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}]$, $\mathbb{F}$ associe $H_{0,n}^{[(l_k)_k]}$ avec $l_k = j_k$ (respectivement $l_k = \hat{j}_k$) pour $\varepsilon_k = 1$ (respectivement $\varepsilon_k = -1$).

Action sur les morphismes Soit $\mathcal{G}$ un tel morphisme décrit par un graphe colorié et orienté. Comme dans la section précédente, on décompose le graphe en cylindres ne contenant qu'un événement et on associe à chaque cylindre un opérateur $\hat{A}_k$. Alors on pose:

$$(6.6) \quad \mathbb{F}[\mathcal{G}] = \prod_{k=0}^m \hat{A}_{m-k}, \quad [S_2 \times [0, 1], \mathcal{G}] = \sharp_{k \in <0, m>} A_k.$$

La catégorie géométrique dont les morphismes sont des graphes est engendrée par un ensemble relativement simple de graphes. C'est le sens de la décomposition de Morse des diagrammes. Toutefois, il existe des relations entre ces générateurs. Le résultat obtenu par Reshetikhin et Turaev est rappelé sur la figure 2.1 qui apparaît en page 103 du chapitre 2. Aucun vertex ni aucun problème relatif au framing n'apparaît dans les cinq premières relations. En fait, elles illustrent l'invariance sous les mouvements de Reidemeister de la théorie des nœuds [103, Page 9]. Toutes les relations doivent être vérifiées en utilisant les matrices de transfert. Pour illustrer les difficultés rencontrées, nous ne donnerons que deux exemples⁵: les relations 6,7 d'une part et 12,13 d'autre part.

Relations 6 et 7 On fait glisser une ligne sur un vertex. Un calcul direct montre que ces relations découlent de l'équation

$$F_{13}B_{12}(\pm) = B_{13}(\pm)B_{12}(\pm)F_{23}$$

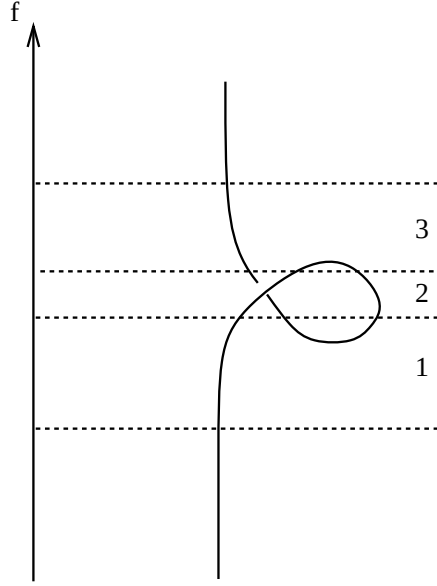
qui est une conséquence des équations de Moore et Seiberg, comme nous l'avons vu au chapitre 3.

Relations 12 et 13 En fait, ces relations n'apparaissent pas directement dans le travail de Reshetikhin et Turaev mais clairement, nos relations sont équivalentes à celles qui apparaissent dans [152]. Les relations 12 et 13 montrent la compatibilité entre les matrices de croisement $B(\pm)$ des données de Moore et Seiberg et la prescription donnée pour le changement de framing d'une ligne. En effet, une boucle simple induit, quand on la redresse, un changement de framing de ± 1 unité: si on la munit d'un framing normal⁶, la courbe parallèle définie par ce framing intersecte une fois une surface de Seifert s'appuyant sur la boucle.

⁵Les numéros sont indiqués sur la figure.

⁶Ce qui est possible localement.

Calculons le membre de gauche de la relation 12 en utilisant la décomposition de Morse suivante:



Nous obtenons alors⁷:

$$(6.7) \quad \sum_{p,m,\alpha,a'_1} B_{p_1,m}(+) \begin{bmatrix} a'_1 & \beta \\ a_1 & \alpha \end{bmatrix} \frac{S_0^p}{S_0^{p_1}} \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,p_1} \left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_{n-1} \quad i_n \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a'_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n-2} \end{array} \right\rangle$$

Pour transformer ceci, on remarque que

$$F_{0,p} \begin{bmatrix} \alpha & \hat{\alpha} \\ t_{p_1} & t_{i_2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{S_0^p S_0^0}{S_0^{i_2} S_0^{p_1}}}$$

et donc,

$$(6.8) \quad B_{0,p}(+) \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ t_{p_1} & t_{i_2} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{S_0^0 S_0^p}{S_0^{i_2} S_0^{p_1}}} \exp(\pi i(h_{i_2} + h_{p_1} - h_p)) \delta_{\alpha,\hat{\beta}}$$

Ceci suggère que

$$B_{p_1,m}(+) \begin{bmatrix} \gamma & \beta \\ a_1 & \alpha \end{bmatrix} B_{0,p}(+) \begin{bmatrix} \alpha & \hat{\alpha} \\ t_{p_1} & t_{i_2} \end{bmatrix}$$

apparaît et donc que l'on travaille initialement sur le bloc

$$\left| \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \hat{p}_1 \quad i_2 \quad i_2 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ a_1 \quad t_{p_1} \quad 0 \quad t_{i_2} \end{array} \right\rangle$$

⁷La matrice $B(+)$ provient de la tranche numéro 2. Le facteur $S_0^p/S_0^{p_1}$ provient des tranches 1 et 3. Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé les définitions des matrices de transfert présentées dans les pages précédentes.

La spécialisation de

$$(B_{23}(+)B_{12}(+)B_{23}(+))_{(p_1,0),(m,q)} \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ a_1 & t_{p_1} & t_{i_2} \end{bmatrix}$$

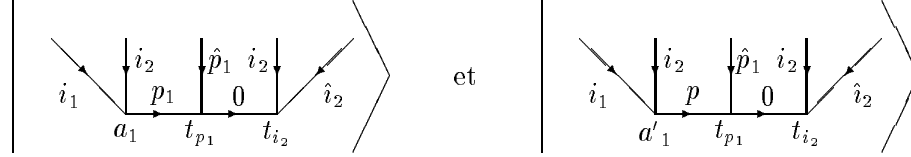
au secteur $q = 0$ force $m = p_1$, $a'_2 = t_{p_1}$ et $a'_3 = t_{i_2}$. L'élément de matrice vaut alors

$$\sum_{p,\alpha} B_{p,0}(+) \begin{bmatrix} t_{p_1} & t_{i_2} \\ \alpha & \hat{\alpha} \end{bmatrix} B_{p_1,p_1}(+) \begin{bmatrix} a'_1 & \alpha \\ a_1 & \alpha \end{bmatrix} B_{0,p}(+) \begin{bmatrix} \alpha & \hat{\alpha} \\ t_{p_1} & t_{i_2} \end{bmatrix}$$

qui en remplaçant $B_{p,0}(+)$ et $B_{0,p}(+)$ par leur valeur vaut

$$(6.9) \quad \sum_{p,\alpha} \frac{S_0^0 S_0^p}{S_0^{p_1} S_0^{i_2}} e^{2\pi i(h_{p_1} + h_{i_2} - h_p)} B_{p_1,p_1}(+) \begin{bmatrix} a'_1 & \alpha \\ a_1 & \alpha \end{bmatrix}$$

D'après l'équation de Yang-Baxter, c'est aussi l'élément de matrice de $(B_{12}B_{23}B_{12})_{(p_1,0)(p_1,0)}(+)$ entre les états



qui est

$$\sum_x B_{p_1,i_2}(+) \begin{bmatrix} x & t_{i_2} \\ a_1 & t_{p_1} \end{bmatrix} B_{0,0}(+) \begin{bmatrix} t_{i_2} & t_{i_2} \\ t_{i_2} & t_{i_2} \end{bmatrix} B_{i_2,p_1}(+) \begin{bmatrix} a'_1 & t_{p_1} \\ x & t_{i_2} \end{bmatrix}$$

Comme toutes les matrices B qui apparaissent ici ont une ligne au moins portant l'indice 0, le calcul est vite achevé et nous trouvons:

$$\frac{S_0^0}{S_0^i} \exp(2\pi i(h_{i_1} - h_{p_1}))$$

Dans la formule 6.9, nous remplaçons $B_{p_1,p_1}(+)$ par $B_{p_1,p_1}(-)$ multiplié par la phase

$$\exp(2\pi i(h_{i_1} + h_p - 2h_{p_1}))$$

ce qui nous donne:

$$(6.10) \quad \sum_{\alpha,p,a'_1} \frac{S_0^p}{S_0^{p_1}} B_{p_1,p_1}(-) \begin{bmatrix} a'_1 & \alpha \\ a_1 & \alpha \end{bmatrix} = \delta_{a'_1,a_1} \exp(-2i\pi h_{i_2})$$

Finalement, cela prouve la relation 13. En prenant le complexe conjugué, nous obtenons la relation 12.

Les autres relations se prouvent par le même genre de considération. La symétrie tétraédrale des matrices F est nécessaire mais nous avons choisi une jauge où elle est réalisée.

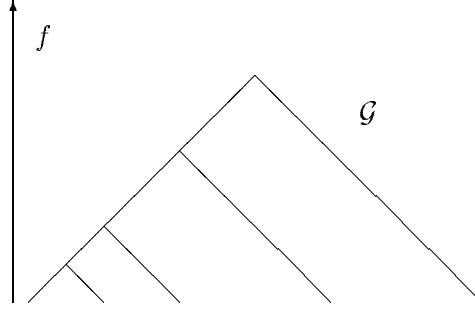
6.2.3 Propriétés diverses de ces invariants.

Dans la démonstration de la fonctorialité pour une variété quelconque, nous aurons besoin de la fonctorialité dans S_3 le long de la sphère S_2 . Nous allons traiter ce problème ici, puis nous montrerons que la procédure de calcul des invariants peut se faire en utilisant une base autre que la base multipériphérique de $H_{0,n}$.

Fonctorialité le long de S_2 .

Soit K un graphe trivalent décoré dans S_3 et $\Sigma_{0,n}$ une sphère plongée dans S_3 intersectant ce graphe en n points⁸. Le graphe K est scindé en $K_{\pm}$ par $\Sigma_{0,n}$. La sphère S_3 est scindée en deux boules B_3 contenant chacune un des graphes $K_{\pm}$.

Nous choisissons une décomposition de Morse de $[S_3, K]$ telle que $\Sigma_{0,n}$ soit une ligne de niveau. Si $\mathcal{G}$ est le graphe multipériphérique, alors la fonction de Morse suivante permet de calculer $Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_+]$ et $Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]$ facilement:



et nous obtenons:

$$(6.11) \quad Z[S_3, K] = \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_+] Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}_{\mathcal{C}}]}{\langle B_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} | B_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle}$$

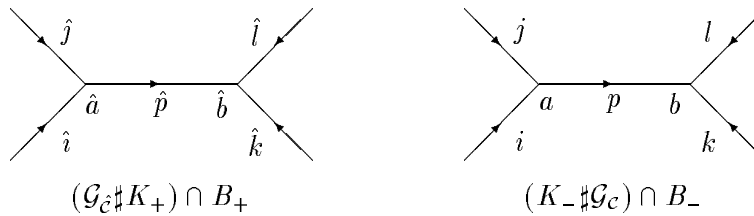
qui est la fonctorialité le long de S_2 .

Covariance dans $H_{0,n}$.

Ce résultat nous permet de voir que la procédure de calcul des invariants dans S_3 est bien covariante. Tous nos calculs sont faits avec la base multipériphérique de $H_{0,n}$ et il peut être utile de choisir une autre base, par exemple en changeant le graphe $\mathcal{G}$ par un autre graphe en arbre avec n pattes externes. Nous allons montrer la formule 6.11 avec pour $\mathcal{G}$ n'importe quel graphe en arbre ayant n points externes. Deux de tels graphes sont reliés par un nombre fini de mouvements élémentaires F et B .

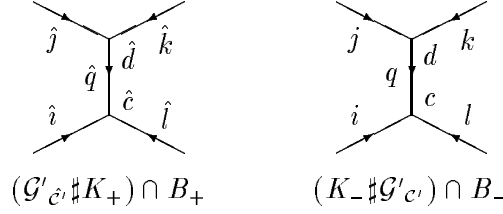
Si l'équation 6.11 est invariante dans un quelconque de ces mouvements élémentaires, alors elle reste vraie pour $\mathcal{G}$ quelconque.

Pour fixer les idées, supposons que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ diffèrent d'un mouvement F . Il existe alors deux boules $B_{\pm} \simeq B_3$ telles que les intersections $(\mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_+) \cap B_+$ et $(K_- \# \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \cap B_-$ soient décrites par le schéma



et le passage de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}'$ se fait en remplaçant la contenu de $B_{\pm}$ par

⁸Aucun de ces points n'est un vertex.



Un calcul direct par les matrices de transfert avec une décomposition de Morse passant par $\partial B_{\pm}$ donne:

$$\begin{aligned}
 Z[S_3, \mathcal{G}_{\hat{c}} \# K_+] &= \sum_{q, c, d} F_{p, q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}^* Z[S_3, \mathcal{G}'_{c'} \# K_+] \\
 Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}_c] &= \sum_{q, c, d} F_{p, q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}'_{c'}]
 \end{aligned}$$

où (p, a, b) sont des indices de $\mathcal{C}$ et (q, c, d) de $\mathcal{C}'$. Comme F est unitaire:

$$\begin{aligned}
 Z[S_3, K] &= \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[S_3, \mathcal{G}_{\hat{c}} \# K_+] Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}_c]}{\langle B_3, \mathcal{G}_c | B_3, \mathcal{G}_c \rangle} \\
 &= \sum_{\mathcal{C}'} \frac{Z[S_3, \mathcal{G}'_{c'} \# K_+] Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}'_{c'}]}{\langle B_3, \mathcal{G}'_{c'} | B_3, \mathcal{G}'_{c'} \rangle}
 \end{aligned}$$

et nous avons prouvé que la fonctorialité dans S_3 le long de S_2 est réalisée de manière covariante, c'est à dire indépendamment de la base de $H_{0,n}$ choisie:

Lemme 18 *Si $\mathcal{G}$ est un graphe en arbre quelconque avec n pattes externes, alors*

$$Z[S_3, K] = \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[S_3, \mathcal{G}_{\hat{c}} \# K_+] Z[S_3, K_- \# \mathcal{G}_c]}{\langle B_3, \mathcal{G}_c | B_3, \mathcal{G}_c \rangle}$$

6.3 Fonctions de partition des variétés sans bord décorées.

Dans cette section, nous allons définir la fonction de partition d'une présentation par chirurgie d'une variété sans bord décorée par un graphe K . Nous verrons alors que deux présentations par chirurgie d'une même variété décorée ont des fonctions de partition identiques. Cela nous permet de définir la fonction de partition d'une variété sans bord décorée. Cette définition fait intervenir des "phases correctrices" que nous discuterons et qui sont reliées à la notion de framing de la variété.

6.3.1 Fonctions de partition et présentations par chirurgie.

Avant de définir la fonction de partition d'une présentation par chirurgie, nous rappelons ce qu'est la chirurgie le long d'un entrelac muni d'un framing. Puis nous indiquerons comment intuitiver la définition de la fonction de partition. Cette définition sera ensuite présentée plus formellement.

Chirurgie.

Dans N variété de dimension 3 sans bord, considérons un nœud C muni d'un framing. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, il définit un plongement du tore plein $D_2 \times S_1$ dans N . Sur $D_2 \times S_1$ on dispose d'une notion naturelle de cycles (a_0) et (b_0) : (a_0) est la courbe simple tracée sur $S_1 \times S_1 = \partial(D_2 \times S_1)$ qui est homotopiquement triviale dans $D_2 \times S_1$ et (b_0) est parallèle à C mais tracée sur $\partial(D_2 \times S_1)$. Dans l'identification donnée par le framing de C , (b_0) est envoyé sur une courbe parallèle à C notée C' et (a_0) est envoyé sur une courbe que nous noterons (a) . Alors, on définit la chirurgie le long de C par [104]:

Définition 64 *Soit C un nœud muni d'un framing dans N , W un voisinage tubulaire de C difféomorphe à $D_2 \times S_1$, on le retire de N et on le recolte en recollant (a) sur C' courbe parallèle à C et (b) sur $-(a)$. La variété obtenue est appelée la chirurgisée de N selon C , notée N_C .*

La chirurgie selon un entrelac est une chirurgie selon chaque composante de l'entrelac effectuée avec des voisinages tubulaires ne s'intersectant pas. Bien sûr, la définition s'étend trivialement au cas où N est décorée par un graphe trivalent. Il suffit que les voisinages tubulaires que l'on utilise n'intersectent pas le graphe. Notre définition du framing par le plongement d'un ruban est parfaitement compatible avec la chirurgie: la chirurgisée d'une variété décorée par un graphe avec son framing est encore une variété décorée par un graphe muni d'un framing.

Dans le cas de S_3 , on dispose le long de C d'un framing privilégié donné par une surface de Seifert (voir [103] pour la définition) s'appuyant sur C . Le framing de C peut alors se définir par le nombre $n \in \mathbb{Z}$ de fois qu'une courbe parallèle à C coupe une telle surface de Seifert. Nous définissons (a) et (b) sur la frontière d'un voisinage tubulaire V de C relativement au framing trivial ($n = 0$) de C . Alors, avant chirurgie, (a) et (b) sont recollés sur (a') et (b') tracés sur $S_3 \setminus V$ et après chirurgie, l'identification est donnée par:

$$(6.12) \quad \begin{aligned} (a) &\rightarrow n(a') + (b') \\ (b) &\rightarrow -(a') \end{aligned}$$

Dans la suite, nous ferons des chirurgies à partir de S_3 et il sera utile de garder cette image présente à l'esprit.

Remarque : Bien entendu, on peut aussi définir des chirurgies par rapport à un graphe trivalent quelconque mais elles ne nous seront pas utiles ici. Comme suggéré au Chapitre 1, cela peut servir pour calculer pratiquement certains invariants. $\square$

Quelques exemples permettent de mieux comprendre la nature de ces transformations:

- Soit L un cercle non-noué, de framing n plongé dans S_3 . Regardons quelle est la variété obtenue par chirurgie le long de L . Ici, T_1 désignera un voisinage tubulaire de L qui soit un tore plein $D_2 \times S_1$.

$n = 0$ Dans ce cas, la variété chirurgisée est le recollement d'un tore plein et de la variété complémentaire $S_3 \setminus T_1$ via S . Nous avons vu que $S_3 \setminus T_1$ était *isomorphe* à $\hat{T}_1$ paramétré via S . En conséquence, la chirurgisée n'est autre que l'union de deux tores pleins T_1 et $\hat{T}_1$ recollés via $s^2 = c$ et c'est donc $S_2 \times S_1$.

$n = 1$ On peut se faire une idée du résultat en remarquant que la chirurgisée est simplement connexe. Un minimum de foi en la conjecture de Poincaré suggère que c'est S_3 . Pour voir la simple connexité, remarquons que tout lacet trivial dans T_1 l'est dans notre nouvelle variété.

En effet, (b) générateur de $\pi_1(T_1)$, est envoyé sur $-(a')$ dans $S_3 \setminus T_1$, qui est homotope à $-(a') - (b')$. En ramenant ce dernier dans T_1 , on tombe sur $-(a)$ qui est trivial dans T_1 .

Pour vraiment se convaincre, notons que $T_1 \#_{ST} (S_3 \setminus T_1) \simeq T_1 \#_{STS} \hat{T}_1$ et $STS = CT^{-1}S^{-1}T^{-1}$. Les deux difféomorphismes T^{-1} sont prolongeables aux tores pleins, donc

$$T_1 \#_{CT^{-1}S^{-1}T^{-1}} \hat{T}_1 \simeq T_1 \#_{T^{-1}ST^{-1}} \hat{T}_1 T_1 \#_S \hat{T}_1 \simeq S_3$$

$n \geq 2$ Une présentation commode de S_3 est donnée par:

$$S_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

sur lequel le groupe cyclique à n éléments agit librement et proprement par

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (\exp(2\pi i/n)z_1, \exp(2\pi i/n)z_2).$$

Le résultat de la chirurgie avec framing n sur S_3 est précisément le quotient de la sphère par l'action de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est un des espaces lenticulaires [86].

- Considérons dans S_3 , g cercles munis de framings triviaux, non noués ni entrelacés. Le résultat de la chirurgie par rapports à ces cercles n'est autre que la variété obtenue en recollant deux tores pleins à g trous trivialement: $T_g \# \hat{T}_g$.
- Considérons 8 cercles non noués mais entrelacés avec une matrice de nombres d'entrelacement identique à la matrice d'adjacence du graphe E_8 . Munissons les du framing $n = 2$, alors l'espace obtenu par chirurgie à partir de cet entrelac est appelé l'espace dodécaèdral.

Calcul de Kirby.

Nous ne ferons que rappeler les principaux résultats en renvoyant le lecteur à l'Appendice 6.A pour plus de détails. L'importance des présentations par chirurgie telles que nous les avons définies provient de la généralisation triviale suivante du théorème de Lickorish et Wallace [121]:

Théorème 57 *Soit $[M, K]$ une variété munie d'un graphe trivalent décoré K , il existe un entrelac L de S_3 muni d'un framing et un graphe trivalent décoré $\bar{K} \subset (S_3 \setminus L)$ tels que par chirurgie le long de L , $[S_3, L]$ devienne $[M, K]$.*

Naturellement, il existe plusieurs présentations par chirurgie d'une même variété. Nous définissons alors deux relations d'équivalence sur l'ensemble des présentations par chirurgie:

Définition 65 (R. Kirby) *Deux entrelacs munis de framings L et L' dans S_3 sont dits faiblement équivalents si et seulement si M_L et $M_{L'}$ sont difféomorphes.*

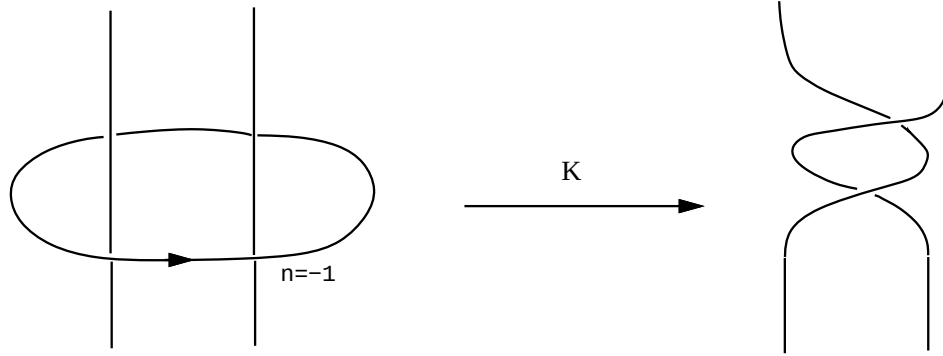
Mais en fait, nous aurons besoin d'une notion un peu plus forte:

Définition 66 *Deux présentations par chirurgie $[L, \bar{K}]$ et $[L', \bar{K}']$ sont dites équivalentes si et seulement si $[M_L, K]$ et $[M_{L'}, K']$ sont difféomorphes, c'est à dire qu'il existe $F \in \text{Diff}_+(M_L, M_{L'})$ qui envoie K sur K' en respectant les framings et coloriages modulo une isotopie.*

Le travail de Kirby fournit un critère d'équivalence faible entre deux entrelacs. Si $l(C, C')$ désigne le nombre d'entrelacement de C et C' , nous définissons alors les mouvements de type K :

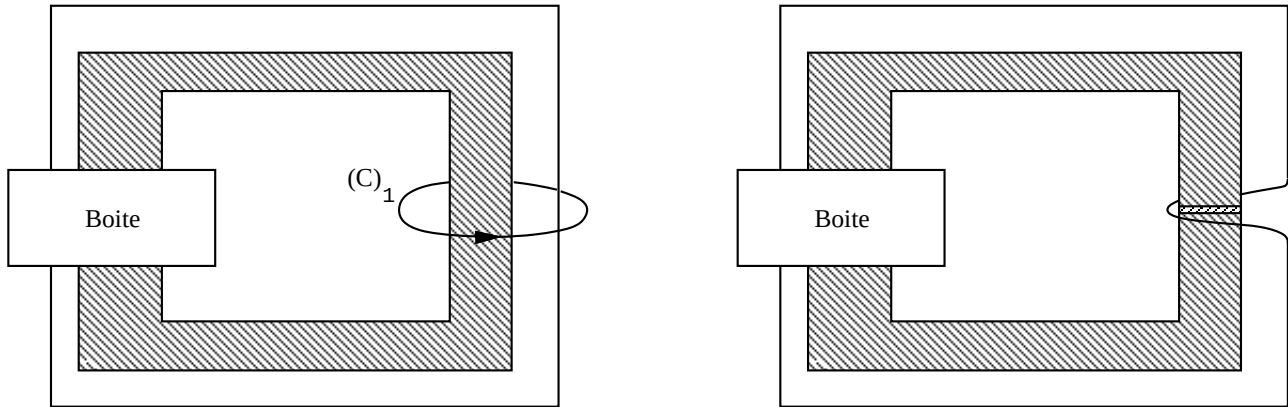
Définition 67 (R. Kirby, R. Fenn et C. Rourke) Soit C une composante de L non nouée, de framing $\varepsilon = \pm 1$. Un mouvement de type K sur L consiste à retirer C puis à tourner toutes les autres lignes de L qui percent un disque bordant C de $2\pi\varepsilon$. L'angle est compté conformément à l'orientation de C . Enfin, le framing de la composante j de L passe de n_j à $n_j + \varepsilon l(C, C_j)^2$.

La figure suivante illustre un tel mouvement:



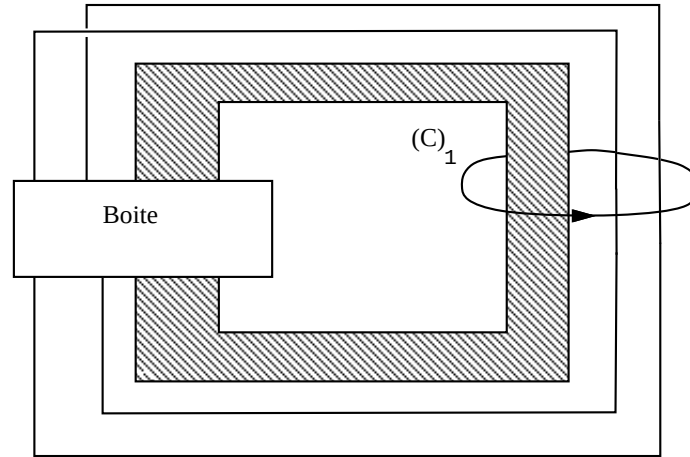
Pour simplifier, nous avons supposé que deux lignes seulement traversaient un disque bordé par C_{-1} . Le changement de framing peut être visualisé très simplement. En effet, le framing de C_j est défini par la donnée d'une courbe parallèle C'_j . Supposons que C_j perce un disque D qui s'appuie sur C , dans le mouvement de Kirby, on fait tourner C_j de $2\pi\varepsilon$. La prescription du changement de framing correspond à faire tourner C'_j de la même manière et à considérer la courbe ainsi obtenue comme une courbe parallèle à la composante après rotation.

Comprendre le changement de framing n'est pas très difficile: nous procédons par récurrence sur $l(C_j, C)$. Le cas $l(C_j, C) = 0, 1$ ne présente pas de difficultés. Nous cherchons maintenant à passer de $l(C_j, C) = n - 1$ à n . La géométrie du problème est explicitée par les schémas suivants:

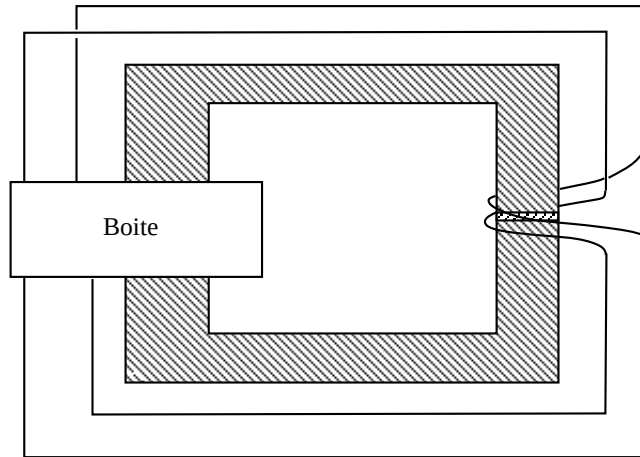


qui représentent la situation dans le cas où $n - 1$ lignes percent un disque D s'appuyant sur C_1 . La boîte contient tout ce qui dans la ligne C_j est situé en dehors de la région qui doit tourner dans le mouvement de Kirby. La partie hachurée représente $n - 2$ lignes qui passent à travers D . Nous avons représenté la

situation avant et après le mouvement de type K en indiquant par des hachures différentes la zone de rotation des $n - 2$ lignes. De même, la figure suivante illustre le cas à n lignes avant mouvement:



et de même, après le mouvement de Kirby:



La différence de framing s'obtient en imaginant une courbe parallèle à C_j et en comptant son nombre d'entrelacement avec C_j après rotation. Comme cette transformation a pour seul objectif de nous permettre de calculer une auto-intersection, nous pouvons dans le processus ignorer les autres lignes de L' . Finalement les points suivants apparaissent très nettement:

- Il apparaît une torsion d'une unité pour la n -ème ligne perçant D .
- Une boucle apparaît qui est traversée par $n - 1$ lignes de la zone hachurée.
- Cette boucle traverse elle même $n - 1$ boucles formées par les $n - 2$ lignes de la zone hachurée ainsi que la $(n - 1)$ -ème ligne.

En conséquence, $n'_j = n_j + (n - 1)^2 + 1 + 2(n - 1) = n_j + n^2$. La récurrence est donc effectuée.

Définissons alors la notion de mouvement de type K dans le cas où il apparaît un graphe trivalent:

Définition 68 Soit $[L, \bar{K}]$ une présentation par chirurgie et C une composante non nouée de L ayant un framing $\varepsilon = \pm 1$, choisissons un disque D bordant C ; un mouvement de type K sur $[L, \bar{K}]$ est défini par:

- L’effet sur toute composante de L est le même que dans la définition 67.
- On tourne toutes les lignes de $\bar{K}$ qui percent D ainsi que les courbes parallèles à ces lignes de $-2\pi\varepsilon$.

Remarque : Comme $\bar{K}$ contient des vertex, déplacer $\bar{K}$ par rapport à D change un peu $\bar{K}'$. En fait il est facile de voir qu’une isotopie de $\bar{K}$ et de son framing se traduit par une isotopie de $\bar{K}'$ et de son framing! $\square$

Alors, le théorème géométrique crucial dont nous aurons besoin se formule ainsi:

Théorème 58 Soient $[L, \bar{K}]$ et $[L', \bar{K}']$ deux présentations par chirurgie. Elles sont équivalentes si et seulement si on peut passer de l’une à l’autre par une suite de mouvements suivants:

- Isotopies dans S_3 .
- Mouvements de type K sur $[L, \bar{K}]$ et leurs inverses.

Le lecteur intéressé trouvera la preuve de ce résultat dans l’Appendice 6.A. Citons la partie dure du théorème 58:

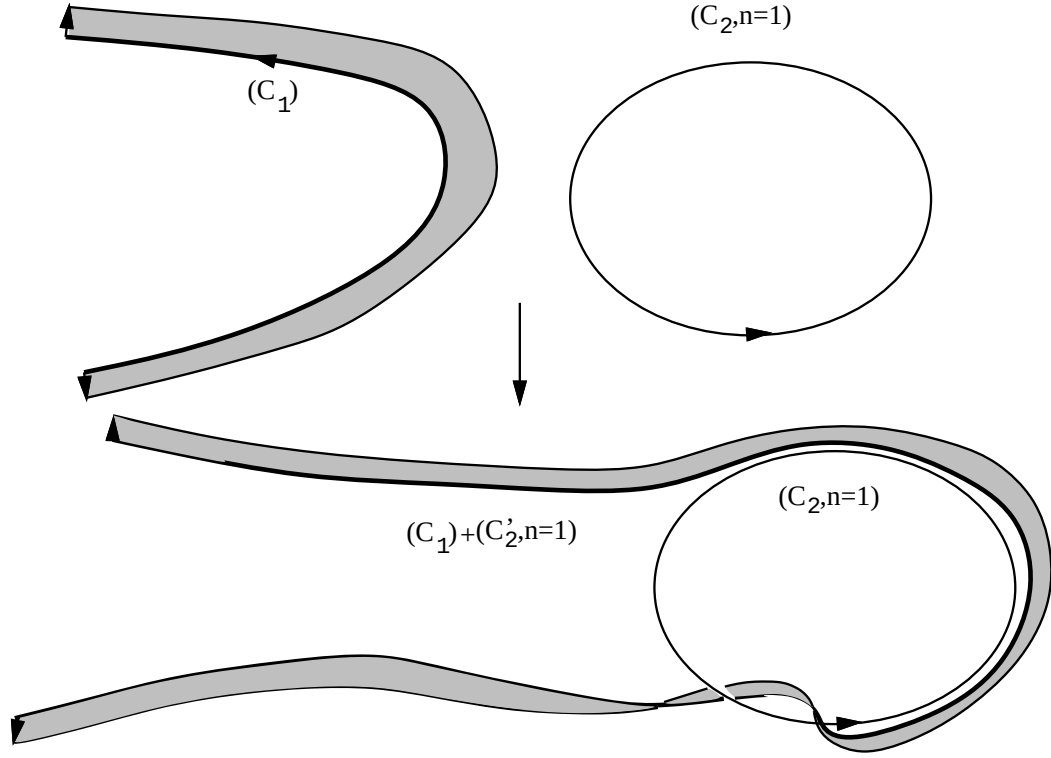
Théorème 59 (R. Kirby, R. Fenn et C. Rourke) Deux entrelacs sont faiblement équivalents si et seulement si on peut passer de l’un à l’autre par une suite finie d’isotopies et de mouvements de type K et de leurs inverses.

Enfin, mentionons pour le lecteur que dans son article [104], Kirby introduit une terminologie particulière:

Mouvements de type $\mathcal{O}_1$ Les mouvements de type $\mathcal{O}_1$ sont des mouvements de type K effectués sur une composante de l’entrelac de chirurgie L qui n’est entrelacée avec aucune des autres composantes de L . Fenn et Rourke les appellent des mouvements de type K spéciaux.

Mouvements de type $\mathcal{O}_2$ Un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ consiste à amener une composante C_1 de l’entrelac de chirurgie par isotopie au voisinage d’une autre composante C_2 . Puis on adjoint à C_1 par

somme connexe une courbe C'_2 parallèle à C_2 :



Nous définirons dans l'appendice 6.A les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ généralisés (voir Lemme 30).

Parfois, dans la suite de cette thèse, nous utiliserons la notion de mouvement de type $\mathcal{O}_2$.

Approche intuitive de la fonction de partition d'une présentation par chirurgie.

Nous pouvons deviner une définition de la fonction de partition d'une présentation par chirurgie $[L, \bar{K}]$ où L est un entrelac muni d'un framing et $\bar{K}$ un graphe trivalent décoré dans S_3 . Nous notons n_j le framing de la composante j de L .

Le plus simple est encore de partir de là où nous voulons aboutir, *id est* une théorie topologique. Dans ce contexte, soit $[S_3, \bar{K}]$ qui donne par chirurgie le long de L la variété $[M, K]$, nous isolons $V(L) = \cup_j T_j$ un ensemble de voisinages tubulaires des composantes C_j de l'entrelac L . Alors, par fonctorialité on s'attend à:

$$(6.13) \quad Z[M, K] = \phi[S_3 \setminus V(L), \bar{K}] \circ \left(\bigotimes_{j=1}^n ((e^{2\pi i c/24} T)^{n_j} S) \phi[D_2 \times S_1] \right)$$

car

$$[M, K] = [S_3 \setminus V(L), \bar{K}] \#_{((T^{n_j} S)_j)} \left(\bigcup_{j=1}^n [D_2 \times S_1] \right)$$

D'autre part, on s'attend à $\phi[D_2 \times S_1] = |\chi_0\rangle$ qui est associé à un tore plein sans ligne de Wilson et qui dans le langage des théories conformes est le caractère de genre 1 de l'algèbre chirale. Le lecteur

attentif aura remarqué que nous avons multiplié la matrice T par la phase $\exp(2\pi ic/24)$. A ce niveau, cela semble simplement être une simplification technique mais nous verrons plus tard que l'action du difféomorphisme T dans la théorie topologique est donnée par $\exp(2\pi ic/24)T$ et non par T . Finalement, l'équation 6.13 se réécrit:

$$(6.14) \quad Z[M, K] = \sum_{(j_1, \dots, j_n)} \phi[S_3 \setminus V(L), \bar{K}] \left(\bigotimes_{l=1}^n |\chi_{j_l}\rangle \right) \prod_{k=1}^n ((e^{2\pi ic/24} T)^{n_k} S)_{j_k}^0$$

où $|\chi_{j_l}\rangle$ est l'état associé au tore plein T_1 décoré par une ligne homotope au cycle (b) , de framing défini par une courbe parallèle au cycle (b) et colorié par j_l . En conséquence:

$$\phi[S_3 \setminus V(L), \bar{K}] \left(\bigotimes_{l=1}^n |\chi_{j_l}\rangle \right) = Z[S_3, \bar{K}, C_{j_1}, \dots, C_{j_n}]$$

car nous avons simplement “rebouché” les trous laissés par le retrait de $V(L)$ dans S_3 . La variété $[S_3, \bar{K}, C_{j_1}, \dots, C_{j_n}]$ n'est autre que la sphère S_3 décorée par $\bar{K}$ et L . La composante C_k de L porte la couleur j_k . Du point de vue du framing, chaque composante de L est prise avec le framing *zéro*! En effet, pour la composante C_k de L , les cycles (a) et (b) sont définis sur $\partial(S_3 \setminus V(L))$ relativement au framing zéro de C_j . On recolle alors (a_0) et (b_0) canoniquement tracés sur $[D_2 \times S_1, C_{j_k}]$ selon:

$$\begin{aligned} (a_0) &\rightarrow (a) \\ (b_0) &\rightarrow (b) \end{aligned}$$

Comme (b_0) est une courbe parallèle à $C_k \subset [D_2 \times S_1, C_{j_k}]$, cela montre que le framing de C_k dans $[S_3, \bar{K}, C_{j_1}, \dots, C_{j_n}]$ est pris nul.

Nous intuitions donc la “définition” suivante de la fonction de partition d'une présentation par chirurgie:

Intuition 1 Soit $[\bar{K}, L]$ une présentation par chirurgie d'une variété $[M, K]$, nous posons:

$$(6.15) \quad \mathcal{Z}[L, \bar{K}] = \sum_{\mathcal{C}} \left[\prod_{k=1}^n ((e^{2\pi ic/24} T)^{n_k} S)_{\mathcal{C}_k}^0 \right] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}].$$

où la somme porte sur tous les coloriages de L et $L_{\mathcal{C}}$ est pris avec framing zéro.

Par convention, nous posons $\mathcal{Z}[\emptyset, \bar{K}] = Z[S_3, \bar{K}]$.

Cette pseudo-définition présente un inconvénient majeur: elle n'est *pas* invariante quand on change de présentation par chirurgie au sein d'une classe d'équivalence selon les mouvements de Kirby généralisés! Pour illustrer ce point fondamental, considérons la sphère S_3 qui peut s'obtenir par chirurgie le long de l'entrelac vide ou bien le long d'un cercle C_1 non noué de framing 1. Dans ce cas:

– Clairement $\mathcal{Z}[\emptyset, \emptyset] = S_0^0$.

– Et d'autre part:

$$\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = e^{2\pi ic/24} \sum_k (TS)_k^0 Z[S_3, C_k^{(0)}]$$

Mais $Z[S_3, C_k^{(0)}] = S_0^k$ et donc $\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = (STS)_0^0 \exp(2\pi ic/24)$. En utilisant la relation $(ST)^3 = C$,

$$\mathcal{Z}[C_1, \emptyset] = e^{2\pi ic/8} \mathcal{Z}[\emptyset, \emptyset].$$

Les deux expressions obtenues diffèrent par un facteur $\exp(2i\pi c/8)$. Cette phase représente un problème très sérieux et est à l'origine de la projectivité de la TQC que nous allons construire. Elles nous forcent aussi à modifier légèrement notre définition d'une fonction de partition d'une présentation par chirurgie de manière à assurer l'invariance par les mouvements de Kirby.

Pour bien comprendre l'origine de cette pathologie, regardons un peu plus en détail l'exemple ci-dessus. Comme d'habitude T_1 désigne le cobordisme paramétré interpolant entre $\emptyset$ et $T_1 \times T_1$, de variété sous jacente $D_2 \times S_1$ paramétré canoniquement. Nous nous donnons donc des cycles (a_0) et (b_0) tracés sur ∂T_1 . Alors

$$S_3 = T_1 \#_S \hat{T}_1$$

et donc on s'attend à $Z[S_3] = \langle \chi_0 | S | \chi_0 \rangle$. Mais d'un autre côté, nous pouvons aussi écrire

$$S_3 = T_1 \#_{T^{-1}ST^{-1}} \hat{T}_1.$$

car il existe $F : T_1 \rightarrow T_1$ dont la restriction à ∂T_1 n'est autre que le difféomorphisme t dans la paramétrisation canonique que nous avons choisie. Ceci nous fournit un difféomorphisme de S_3 qui relie les deux présentations par chirurgie utilisées. Ainsi, les fonctions de partition de deux variétés difféomorphes ne sont pas égales avec la définition 6.15 Ceci suggère que la phase qui apparaît dans l'évaluation de $\mathcal{Z}[L, \bar{K}]$ est due à un degré de liberté géométrique vivant sur la variété et qui est "tordu" par les difféomorphismes.

Il serait bon de persévérer dans cette voie mais nous allons plutôt modifier notre définition de la fonction de partition d'une présentation par chirurgie. Pour cela, nous devons disposer d'un moyen simple de distinguer entre deux présentations par chirurgie d'une même variété à trois dimensions. Le critère de Kirby généralisé permet en effet de relier entre elles ces différentes présentations mais pas de les caractériser.

En fait, comme nous le rappelons dans l'Appendice 6.A, il existe un objet naturel associé à une présentation par chirurgie d'une variété tridimensionnelle M sans bord. Pour simplifier, oublions les décorations et travaillons simplement avec des variétés non décorées. L'objet pertinent est un cobordisme quadridimensionnel $Y_4(L)$ entre $\emptyset$ et M qui est construit à partir de L selon la procédure expliquée dans l'Appendice 6.A. Dans notre exemple, il est facile d'obtenir $Y_4(L)$ dans les différents cas intéressants:

L	$Y_4(L)$	$\mathcal{Z}[L, \emptyset]$
C_{-1}	$\overline{P_2(\mathbb{C})}$	$S_0^0 \exp(-2\pi i c/8)$
$\emptyset$	B_4	S_0^0
C_1	$P_2(\mathbb{C})$	$S_0^0 \exp(2\pi i c/8)$

Depuis les travaux de Thom⁹, nous savons que si $Y_4(L)$ et $Y_4(L')$ bordent la même variété tridimensionnelle, alors ces cobordismes diffèrent par l'ajout ou le retrait d'un certain nombre de cônes $P_2(\mathbb{C})$ et $\overline{P_2(\mathbb{C})}$. Dans l'Appendice 6.A, nous expliquons comment retrouver ce résultat directement en utilisant le critère d'équivalence faible de Kirby. Ainsi, une bonne mesure de la phase semble être le nombre de composantes $P_2(\mathbb{C})$ et $\overline{P_2(\mathbb{C})}$ ajoutées ou enlevées à $Y_4(L)$. Plus précisément, nous allons modifier $\mathcal{Z}[L, \bar{K}]$ en

$$Z_s[L, \bar{K}] = \mathcal{Z}[L, \bar{K}] \exp(-2\pi i \sigma(L, \bar{K})c/8)$$

de manière à absorber la phase qui apparaît quand on se déplace au sein d'une classe d'équivalence pour les mouvements de Kirby.

⁹ J'ai malheureusement égaré l'excellente référence où le théorème était énoncé précisément!

L'effet sur $Y_4(L)$ des différents mouvements de Kirby est résumé par le théorème suivant:

Théorème 60 *Soient L et L' deux entrelacs faiblement équivalents, alors le comportement de $Y_4(L)$ canoniquement associé à L est donné par:*

$$\frac{\begin{array}{cc} L' = L \setminus C_\varepsilon & Y_4(L') \\ \hline \varepsilon = 1 & Y_4(L) + \overline{P_2(\mathbb{C})} \\ \varepsilon = -1 & Y_4(L) + \overline{P_2(\mathbb{C})} \\ \hline \text{Mouvement } \mathcal{O}_2 \text{ sur } L & Y_4(L) \end{array}}{}$$

Enfin, il existe un nombre qui caractérise ces changements de géométrie de $Y_4(L)$. En effet, comme nous le rappelons dans l'Appendice 6.A, de la même manière que les surfaces orientables sans bord sont classées par les propriétés de la forme d'intersection sur leur premier groupe d'homologie, les variétés topologiques connexes, simplement connexes, sans bord, compactes de dimension 4 sont classées par la forme d'intersection sur leur second groupe d'homologie à valeurs dans $\mathbb{Z}$: $H_2(M, \mathbb{Z})$. Ce résultat suggère de considérer la forme d'intersection sur le groupe d'homologie relative $H_2(Y_4(L), \mathbb{Z})$. Clairement, faire la somme connexe de $Y_4(L)$ avec un cône $P_2(\mathbb{C})$ (respectivement $\overline{P_2(\mathbb{C})}$) change la signature de cette forme d'intersection. Nous savons en effet qu'un tel cône possède une homologie non triviale due à la présence d'une sphère S_2 à l'infini d'auto-intersection ± 1 . De ce fait la signature $\text{Sign}(Y_4(L))$ de la forme d'intersection sur $H_2(Y_4(L), \mathbb{Z})$ change de ± 1 suivant que l'on ajoute un $P_2(\mathbb{C})$ ou un $\overline{P_2(\mathbb{C})}$ à $Y_4(L)$.

Pour définir notre facteur de phase, l'idée consiste à prendre $\sigma(L, \bar{K})$ qui présente la même variation que $\text{Sign}(Y_4(L))$. Toutefois, cela ne fixe pas du tout $\sigma(L, \bar{K})$. En toute généralité:

$$\sigma(L, \bar{K}) = \text{Sign}(Y_4(L)) + \alpha(M)$$

où $\alpha(M)$ est un entier ne dépendant que de M , est un choix tout à fait raisonnable.

Dans notre définition de $Z_s[L, \bar{K}]$, nous prendrons $\alpha(M) = 0$:

Définition 69 *On définit dans la suite de cette thèse $\sigma(L, \bar{K})$ comme la signature de la forme d'intersection sur $H_2(Y_4(L), \mathbb{Z})$: $\text{Sign}(Y_4(L))$.*

Ce choix sera expliqué par la suite. Pour anticiper quelque peu et satisfaire le lecteur impatient, signalons que cette ambiguïté est reliée à la possibilité de changer le cocycle qui apparaît dans une théorie des champs projective comme indiqué dans la formule 1.51. Finalement, le résultat important exprime la variation de la signature dans les différents mouvements de Kirby:

Théorème 61 *Avec le choix de la définition 69, dans un mouvement de type K portant sur un cercle non noué de framing $\varepsilon = \pm 1$, la variation de $\sigma(L, \bar{K})$ est donnée par:*

$$(6.16) \quad \sigma(L', \bar{K}') = \sigma(L, \bar{K}) - \varepsilon$$

et dans un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ qui porte donc sur une ligne de L ,

$$(6.17) \quad \sigma(L', \bar{K}) = \sigma(L, \bar{K})$$

Pratiquement, il existe un moyen simple de calculer la signature de la forme d'intersection et par là même la phase correctrice. A partir de l'entrelac de chirurgie, il est facile de construire une base de $H_2(Y_4(L), \mathbb{Z})$ dans laquelle la matrice de la forme d'intersection n'est autre que la matrice d'entrelacement

de l'entrelac L dans sa partie non diagonale, les éléments diagonaux étant les framings des différentes composantes de L . Cela est laissé au lecteur!

Il nous faut maintenant prouver que cette prescription rend effectivement Z_s invariante dans les mouvements de Kirby. Ceci justifiera la définition suivante:

Définition 70 *La fonction de partition de la présentation par chirurgie $[L, \bar{K}]$ est:*

$$(6.18) \quad Z_s[L, \bar{K}] = e^{-2\pi i c \sigma(L, \bar{K})/8} \sum_{\mathcal{C}} \left[\prod_{k=1}^n ((e^{2\pi i c/24} T)^{n_k} S)_{c_k} \right] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}].$$

où la somme porte sur tous les coloriage de L et $L_{\mathcal{C}}$ est pris avec framing zéro.

Par convention, nous posons $Z_s[\emptyset, \bar{K}] = Z[S_3, \bar{K}]$. Plusieurs remarques s'imposent:

Remarque: On aurait pu prendre $L_{\mathcal{C}}$ de même framing que L mais comme nous voulons contrôler précisément les phases qui apparaissent, nous avons choisi de les mettre en exergue dans $(e^{2\pi i c/24} T)^{n_j} S$ et donc de prendre $L_{\mathcal{C}}$ de framing trivial.

La stratégie qui consiste à fixer arbitrairement la phase est celle suivie par Reshetikhin et Turaev [151]. $\square$

6.3.2 Invariance topologique par le calcul de Kirby.

Nous allons maintenant prouver que $Z_s[L, \bar{K}]$ ne dépend que de la variété tridimensionnelle $[M_L, K]$.

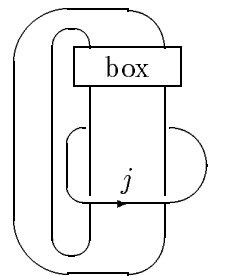
Comportement de $Z_s[L, \bar{K}]$ sous les mouvements de type K .

L'invariance par isotopie de $[L, \bar{K}]$ dans S_3 est évidente. Nous allons montrer le Lemme suivant:

Lemme 19 *Si $[L', \bar{K}']$ est obtenu à partir de $[L, \bar{K}]$ par un mouvement de type K , alors:*

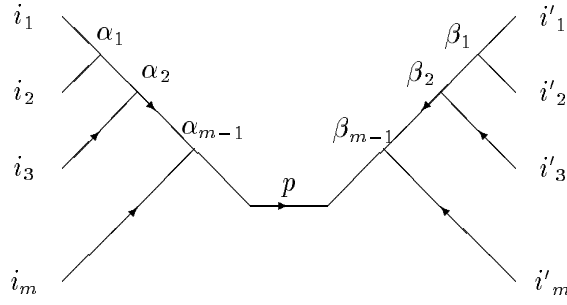
$$(6.19) \quad Z_s[L, \bar{K}] = e^{2i\pi(\varepsilon + \sigma(L', \bar{K}') - \sigma(L, \bar{K}))c/8} Z_s[L', \bar{K}']$$

Preuve: Appelons C_{ε} la composante de L de framing $\varepsilon = \pm 1$ que nous voulons effacer. Une quantité importante à calculer est

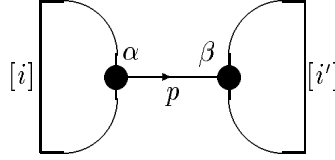
$$A_j[\mathcal{G}] = Z[S_3, C_j, \mathcal{G}] = Z[S_3,$$


La ligne C_j a bien sûr un framing normal. Avec notre choix de projection, c'est aussi le framing zéro. $\mathcal{G}$ représente toutes les lignes de $\bar{K} \cup (L \setminus C_{\varepsilon})$. Nous supposons que m lignes passent à travers le disque

délimité par C . La base suivante de $H_{0,2m}$



que par soucis de légèreté nous noterons



permet d'obtenir¹⁰

$$A_j[\mathcal{G}] = \sum_{p, \alpha, \beta} \frac{1}{\|\phi_{p, \alpha, \beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}] Z[S_3, \text{diagram}]$$

mais par fonctorialité le long de S_2 ,

$$Z[S_3, \text{diagram}] = Z[S_3, \text{diagram}] S_p^j / S_0^p.$$

Si on repart du calcul de la fonction de partition $Z_s[L, \bar{K}]$, en séparant C_ε du reste de L , nous avons:

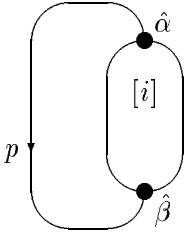
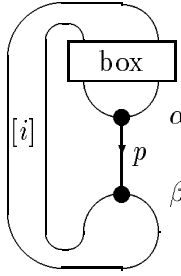
$$Z_s[L, \bar{K}] = e^{-2\pi i c \sigma(L, \bar{K})/8} \sum_{c_r} \sum_j \left(\prod_{c_l \neq C_\varepsilon} ((e^{2\pi i c/24} T)^{n_l} S)_{c_r, l}^0 \right) S_0^j e^{2\pi i \varepsilon h_j} A_j[(L \setminus C_\varepsilon)_{c_r} \cup \bar{K}]$$

¹⁰Nous avons rappelé où circulent les indices $(i_1, \dots, i_n)$ en portant le symbole $[i]$ sur nos schémas.

et la somme

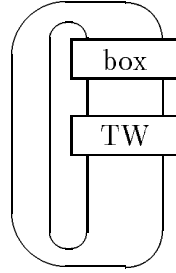
$$\sum_j S_0^j e^{2\pi i \varepsilon h_j} A_j [(L \setminus C_\varepsilon)_{c_r} \cup \bar{K}]$$

s'obtient très facilement grâce aux décompositions ci-dessus. En utilisant les relations 3.182 et 3.183 vérifiées par les matrices de Moore et Seiberg $S = S(0)$ et T , nous arrivons à l'expression suivante:

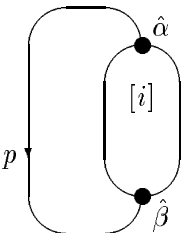
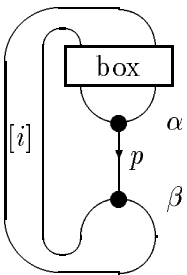
$$(6.20) \quad \sum_{p, \alpha, \beta} \frac{1}{\|\phi_{p, \alpha, \beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}]] Z[S_3, \text{diagram}] e^{2\pi i \varepsilon (\frac{c}{8} - h_p)}$$



qui nous donne une expression pour $Z_s[L, \bar{K}]$.

Dans le cas de $[L', \bar{K}']$ déduit de $[L, \bar{K}]$ par élimination de C_ε et rotation de certaines lignes, le graphe $\mathcal{G}$ change et nous obtenons $\mathcal{G}'$ dessiné ci-dessous:



La boîte TW contient les parties des lignes qui ont tourné. Nous calculons alors une nouvelle fonction de partition où les lignes qui passent dans la boîte ont un framing qui pointe vers le lecteur. Nous allons défaire la torsion des lignes. Pour ce faire, on introduit la base précédemment utilisée de $H_{0, 2m}$ pour isoler la boîte TW du reste. Il est facile de détordre les $2m$ lignes qui passent à travers D : l'intervention de deux lignes arrivant à un vertex fait apparaître des facteurs de phases et finalement, l'expression associée au graphe ci-dessus est remplacée par:

$$\frac{1}{\|\phi_{p, \alpha, \beta}\|^2} Z[S_3, \text{diagram}]] Z[S_3, \text{diagram}] \exp(2\varepsilon i \pi (\sum_{l=1}^q h_{i_l} - h_p))$$



En rétablissant les bons framings, la partie dépendante des i_l disparaît et nous retrouvons $Z_s[L, \bar{K}]$ à une phase près. Cette phase contient un $\exp(-2\pi i c \varepsilon / 8)$ ainsi que $\exp(2\pi i c (\sigma(L, \bar{K}) - \sigma(L', \bar{K}')) / 8)$. En conséquence, le Lemme 19 est prouvé. $\square$

Comportement sous les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de $\bar{K}$.

Le critère d'équivalence généralisé de Kirby fait apparaître les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ sur les lignes de $\bar{K}$. Dans ce cas, les fonctions de partition $Z_s[L, \bar{K}]$ et $Z_s[L, \bar{K}']$ sont égales.

Lemme 20 *Si $[L, \bar{K}]$ et $[L, \bar{K}']$ sont reliées par un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de $\bar{K}$, alors $Z_s[L, \bar{K}] = Z_s[L, \bar{K}']$.*

Preuve : Pour le voir, nous montrons que les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de $\bar{K}$ s'obtiennent en composant des mouvements de type K .

La preuve est rigoureusement identique à celle donnée dans [61] et nous y renvoyons le lecteur: il suffit de considérer que l'on effectue les opérations sur une ligne de $\bar{K}$ et non pas sur une ligne de L . Un examen rapide de la preuve de Fenn et Rourke montre que le facteur de phase qui apparaît entre $Z_s[L, \bar{K}]$ et $Z_s[L, \bar{K}']$ est

$$\exp(2\pi i(\sigma(L, \bar{K}') - \sigma(L, \bar{K}))/8)$$

car les facteurs $\varepsilon = \pm 1$ se compensent. Mais dans le cas d'un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de $\bar{K}$, $Y_4(L)$ ne change pas et donc $\sigma(L, \bar{K}') = \sigma(L, \bar{K})$. Ceci prouve notre lemme. $\square$

6.3.3 Fin de la preuve.

Nous connaissons la variation de $\sigma(L, \bar{K})$ dans les mouvements de type K spéciaux et de type $\mathcal{O}_2$ sur L et $\bar{K}$. Examinons donc la compensation des facteurs de phase dans chacun des deux cas restants:

- Nous remarquons tout d'abord que $Z_s[L, \bar{K}]$ est invariant dans les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de L par les mêmes arguments que dans la section précédente.
- Il ne reste plus que le cas des mouvements de type K spéciaux. Comme $\sigma(L', \bar{K}') = \sigma(L, \bar{K}) - \varepsilon$, le facteur de phase est trivial.

Finalement comme les mouvements de type K spéciaux, les mouvements de type $\mathcal{O}_2$ sur les lignes de L et $\bar{K}$ engendrent les mouvements de Kirby généralisés:

Théorème 62 *La fonction de partition d'une présentation par chirurgie $Z_s[L, \bar{K}]$ est constante au sein d'une classe d'équivalence par les mouvements de Kirby généralisés.*

Cette fonction de partition ne dépend donc que de la variété décorée sous jacente: $[M, K]$. Nous définissons donc la fonction de partition d'une variété sans bord décorée par un graphe trivalent colorié muni d'un framing:

Définition 71 *Soit $[M, L]$ une variété tridimensionnelle sans bord décorée par un graphe trivalent colorié muni d'un framing, $Z[M, K]$ est la fonction de partition d'une des présentations par chirurgie de $[M, L]$.*

6.4 Covariance du formalisme et définition des opérateurs.

Nous venons juste de définir les fonctions de partition des variétés sans bord. Dans cette section, nous étendons cette démarche aux variétés avec bords en leur associant un opérateur.

6.4.1 Covariance.

Considérons M variété sans bord décorée par un graphe trivalent noté K . Soit K' un autre graphe dans M qui ne diffère de K que par un des mouvements élémentaires F ou $B(\pm)$. Alors, nous aimerions comparer $Z[M, K_{\mathcal{C}}]$ et $Z[M, K'_{\mathcal{C}'}]$. La réponse est donnée par le Lemme suivant:

Lemme 21 *Soit γ un produit de mouvements F et $B(\pm)$, alors:*

$$(6.21) \quad Z[M, K_{\mathcal{C}}] = \sum_{\mathcal{C}'} P(\gamma)_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} Z[M, K'_{\mathcal{C}'}]$$

où la somme porte sur les coloriages de K' et $P(\gamma)$ est la matrice représentant la transformation de dualité γ .

Preuve : Analysons le cas d'un mouvement élémentaire F . Les autres mouvements ne posent pas plus de problèmes et l'argument usuel de Moore et Seiberg permet de conclure pour tout mouvement de dualité.

Dans le cas de F , il existe une boule B_3 dans M telle que $B \cap K$ ait l'allure suivante:



Il est clair que si $[L, \bar{K}]$ est une présentation par chirurgie de $[M, K]$, alors en changeant localement $\bar{K}$ comme indiqué sur la figure ci-dessus, nous obtenons une présentation par chirurgie de $[M, K']$ qui est $[L, \bar{K}']$ où $\bar{K}'$ diffère de $\bar{K}$ par un mouvement de type F . La factorisation le long du bord de la boule considérée nous montre que

$$Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}_{p,a,b}] = \sum_{q,c,d} \frac{S_0^0}{\sqrt{S_0^i S_0^j S_0^k S_0^l}} Z[S_3, \text{diagram}] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}'_{q,c,d}].$$

En évaluant le tétraèdre directement, nous obtenons

$$Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}_{p,a,b}] = \sum_{q,c,d} F_{p,q} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \bar{K}'_{q,c,d}]$$

qui reporté dans la formule de chirurgie 6.18 donne l'équation 6.21. $\square$

Les éléments de matrice seront définis en saturant les bords de la variété par des tores pleins décorés. Si M interpole entre T_i et T_f , $\mathcal{G}_{i,f}$ et $\mathcal{G}'_{i,f} = \gamma(\mathcal{G}_{i,f})$ des 1-squelettes de ces tores pleins, alors:

$$(6.22) \quad Z[(T_i, \mathcal{G}_{i,c_i}) \# M \# (T_f, \mathcal{G}'_{f,c'_f})] = \sum_{\mathcal{C}_f} P(\mathcal{G}'_f, \mathcal{G}_f)_{\mathcal{C}'_f, \mathcal{C}_f} Z[(T_i, \mathcal{G}_{i,c_i}) \# M \# (T_f, \mathcal{G}_{f,c_f})]$$

$$(6.23) \quad Z[(T_i, \mathcal{G}'_{i,c'_i}) \# M \# (T_f, \mathcal{G}_{f,c_f})] = \sum_{\mathcal{C}_i} P(\mathcal{G}'_i, \mathcal{G}_i)_{\mathcal{C}'_i, \mathcal{C}_i} Z[(T_i, \mathcal{G}_{i,c_i}) \# M \# (T_f, \mathcal{G}_{f,c_f})]$$

6.4.2 Définition des opérateurs.

Les équations 6.22 et 6.23 nous permettent de définir les opérateurs par:

Définition 72 Soit M interpolant entre Σ_i et Σ_f ; $(|T_i, \mathcal{G}_{i, \mathcal{C}_i}\rangle)_{\mathcal{C}_i}$ une base de $H_{\partial T_i}$ et $(|T_f, \mathcal{G}_{f, \mathcal{C}_f}\rangle)_{\mathcal{C}_f}$ une base $H_{\partial T_f}$, l'élément de matrice de $\phi[M]$ entre $|T_i, \mathcal{G}_{i, \mathcal{C}_i}\rangle$ et $|T_f, \mathcal{G}_{f, \mathcal{C}_f}\rangle$ est défini par

$$(6.24) \quad \langle T_f, \mathcal{G}_{f, \mathcal{C}_f} | (\phi[M] | T_i, \mathcal{G}_{i, \mathcal{C}_i} \rangle) = Z[(T_i, \mathcal{G}_{i, \mathcal{C}_i}) \# M \# (T_f, \mathcal{G}_{f, \mathcal{C}_f})]$$

Nous avons donc défini une correspondance entre cobordismes paramétrés et opérateurs. Cette correspondance est en fait topologique:

Théorème 63 L'opérateur $\phi[M]$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de M au sens de la définition 1 du chapitre 1.

Preuve : Les éléments de matrice sont les fonctions de partition de variétés sans bord. Quand on passe d'une variété à une variété isomorphe, les variétés sans bord associées à un élément de matrice restent les mêmes (à un difféomorphisme près) et donc la fonction de partition ne change pas. $\square$

Pour se rassurer définitivement sur cette construction, vérifions que le produit scalaire introduit arbitrairement par la formule 6.1 correspond au recollement des variétés.

Fixons $\mathcal{G}$ un 1-squelette de T_g et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux coloriages de ce graphe, la fonction de partition

$$Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \# (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}'})]$$

ne dépend pas du graphe $\mathcal{G}$ choisi en vertu de l'unitarité de F et de la covariance du formalisme. Nous choisissons donc le graphe $\mathcal{G}$ utilisé dans l'étude de la fonctorialité dans S_3 . Par factorisation le long de sphères avec deux points marqués, nous revenons au cas $g = 1$, $n = 0, 1$. Mais même dans ce cas, le calcul sera effectué dans la section 6.5.2 et finalement, comme le lecteur le vérifiera,

$$(6.25) \quad Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \# (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}'})] = \frac{\sqrt{\prod_{l=1}^n S_0^{i_l}}}{(S_0^0)^{g-1+n/2}} \delta_{[\mathcal{C}, \mathcal{C}']}$$

qui assure que notre construction se comporte bien comme prévu. Le point crucial dans cette affaire est l'absence de cocycle pour des scindements particuliers de S_3 par des surfaces de genre g !

Finalement, nous avons juste à prouver les axiomes de fonctorialité et d'unitarité.

6.5 Fonctorialité, unitarité.

Nous commencerons par prouver la fonctorialité projective dans le cas de S_3 et dans le cas de “bons” scindements de S_2 le long de surfaces de genre g , histoire de voir quels sont les problèmes qui apparaissent. Puis, par un choix astucieux de présentations par chirurgie, nous verrons que la fonctorialité projective dans S_3 le long de surfaces bien plongées suffit pour avoir la fonctorialité dans toute variété de dimension 3.

6.5.1 Position du problème.

Considérons M_1 décorée qui interpole entre N_1 et $\Sigma_{g,n}$ de genre g avec n points marqués, et M_2 qui va de $\Sigma_{g,n}$ à N_2 . Nous aimerions montrer l'existence d'un cocycle $\mu(M_1, M_2)$ tel que

$$\phi[M_1 \sharp M_2] = \mu(M_1, M_2) \phi[M_2] \circ \phi[M_1]$$

qui équivaut à la relation suivante sur les éléments de matrice:

$$(6.26) \quad Z[M_1 \sharp M_2] = \mu(M_1, M_2) \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \sharp M_2] Z[M_1 \sharp (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{C}}})]}{\| |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle \|^2}.$$

où la somme porte sur tous les coloriage du graphe $\mathcal{G}$ définissant une base de $H_{g,n}$. Le coloriage des pattes externes est compatible avec la décoration de $M_{1,2}$. Enfin, nous montrerons plus loin que l'équation 6.26 exprime bien la fonctorialité projective.

La stratégie de démonstration de 6.26 est relativement simple. Nous partons de présentations par chirurgie de $M_1 \sharp [\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{C}}}]$ et $[T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}] \sharp M_2$ qui nous permettent de retrouver facilement une présentation par chirurgie de $M_1 \sharp M_2$. Ces présentations s'obtiennent en remarquant que toute variété qui interpole entre $\emptyset$ et $\Sigma_{g,n}$ dérive par chirurgie de T_g ou de $(\widehat{S_3} \setminus T_g)$ en tant que cobordismes paramétrés. Les fonctions de partition $Z[M_1 \sharp (T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}})]$ et $Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \sharp M_2]$ se calculent donc comme combinaisons linéaires de fonctions de partition dans S_3 avec les facteurs de phases convenables. Puis, nous effectuerons partiellement une des sommations sur les coloriages dans une des combinaisons linéaires ce qui nous permettra d'appliquer la fonctorialité partielle dans S_3 . Ceci prouvera le résultat.

Pour se convaincre que le cocycle est effectivement là, nous commencerons par reprendre l'étude de la fonctorialité là où nous l'avions abandonnée: dans S_3 . En rediscutant le calcul d'une fonction de partition par chirurgie sur un exemple, nous montrerons que le cocycle est effectivement là. Puis, pour des surfaces qui sont plongées dans S_3 de manière à scinder celle-ci en deux tores pleins recollés trivialement, nous allons montrer la fonctorialité *non projective* par un calcul ne faisant appel qu'à la fonctorialité dans S_3 le long de S_2 .

Puis nous attaquerons le cas général. Nous discuterons d'abord les aspects géométriques puis nous donnerons les présentations par chirurgie astucieuses pour notre démonstration. Nous obtiendrons alors le résultat tant désiré.

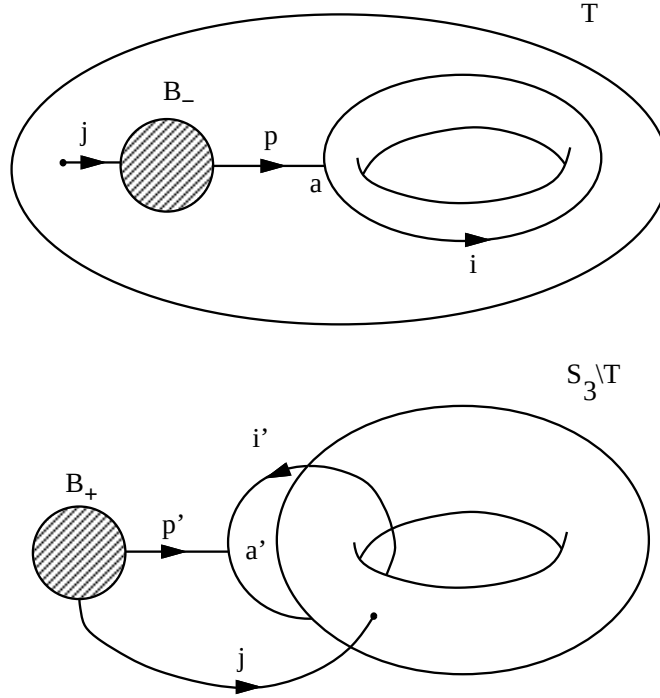
6.5.2 Etude préliminaire dans S_3 .

Le but de cette sous section est de montrer que la fonctorialité a lieu dans le cas de plongements très particuliers de Σ_g dans S_3 . La stratégie de démonstration de l'équation 6.26 procède en deux étapes: nous montrons d'abord le résultat dans le cas $g = n = 1$ puis, en utilisant ce travail, nous étendrons la démonstration au cas g et n supérieurs. Enfin nous expliquerons pourquoi le cocycle doit être présent en général sur un exemple bien choisi.

Cas du tore avec un point marqué.

Cette fois, S_3 est scindée par un tore $\Sigma_{1,1}$ qui intersecte K en un point régulier. Ce tore sépare S_3 en un tore T_1 qui contient $K_- \subset K$ et $S_3 \setminus T_1$ qui contient $K_+ \subset K$. La base usuelle de $H_{1,1}$ sera notée $(|\chi_{k,a}^j\rangle)_{(j,k,a)}$. La ligne externe est indexée j , le vertex a et la boucle k . Parmi toutes les lignes de K , sont importantes celles qui courent le long des cycles non triviaux de T_1 et $S_3 \setminus T_1$. Pour simplifier l'étude,

nous supposons tout d'abord qu'une seule ligne de K_+ circule dans la boucle non-triviale de $S_3 \setminus T_1$ et une seule de K_- dans la boucle de T_1 :



où les boules $B_{\pm}$ symbolisent les parties homotopiquement triviales de $K_{\pm}$.

Calculons $Z[M_+ \# (T_1, \chi_{k,b}^j)]$ et $Z[(T_1, \chi_{k,b}^j) \# M_-]$.

- Nous avons, en coupant le long d'une sphère avec deux points marqués pour isoler la partie $B_+ \subset K_+$ qui ne circule pas dans la boucle de $S_3 \setminus T_1$:

$$(6.27) \quad Z[M_+ \# (T_1, \chi_{k,b}^j)] = \delta_{j, \hat{p}'} \frac{1}{S_0^j} Z[S_3, \text{diagram}] Z[S_3, \mathcal{L}_+]$$

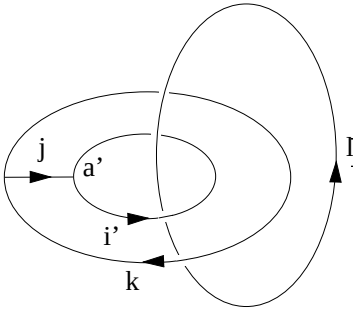
Ce calcul est permis par la fonctorialité le long de S_2 dans S_3 . Le graphe $\mathcal{L}_+$ est obtenu en isolant B_+ et en recollant les deux pattes qui en sortent.

- Le recollement des deux tores pleins produit la variété $S_2 \times S_1$ qui est obtenue par chirurgie à partir de S_3 . Comme nous allons le voir, la fonction de partition d'une telle variété se calcule grâce à la prescription suivante:

$$Z[(T_1, \chi_{k,b}^j) \# M_-] = \sum_l S_0^l Z[S_3, \mathcal{G}_l].$$

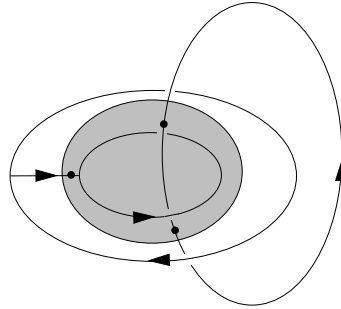
Remarquons ici qu'il n'apparaît pas de phase. En effet, la variété de dimension quatre bordant $S_2 \times S_1$ déduite de la présentation par chirurgie à partir d'un cercle non noué de framing zéro est $S_2 \times D_2$ et la signature est nulle!

Le graphe $\mathcal{G}_i$ est l'antécédent de $\chi_{\hat{k},\hat{b}}^j \# K_-$ par la chirurgie auquel on a rajouté le cercle de chirurgie de framing zéro. En coupant le long d'une sphère avec deux points marqués pour isoler ce qui constituait la partie homotopiquement non triviale dans $S_2 \times S_1$, on se ramène à l'évaluation de:

$$(6.28) \quad \sum_l S_0^l Z[S_3, \hat{b}]$$


Une petite jonglerie technique à la Moore et Seiberg est nécessaire pour continuer.

La fonction de partition dans S_3 se factorise trivialement en coupant le long d'une sphère avec trois points marqués:



Chacune des deux fonctions de partition ainsi obtenues s'exprime en terme des matrices $S(j)$ de Moore et Seiberg. Pour le voir, il suffit d'appliquer la méthode de matrice de transfert¹¹ et d'utiliser la relation 3.222 du chapitre 3 qui exprime $S(j)$ en terme de matrices B . Un facteur de phase pervers vient toutefois se glisser dans le calcul car pour se ramener aux graphes correspondant à l'élément de matrice de $S(j)$, il faut tordre d'un demi tour la ligne j . Finalement, notre expression 6.28 devient

$$\sum_{l,\alpha} \frac{S_0^j}{S_0^\alpha} S(j)_{(i,a)}^{(l,\alpha)} S(j)_{(i,\alpha)}^{(k,b)} e^{i\pi h_j}$$

Mais d'après Moore et Seiberg

$$S(j)_{(i,a)}^{2(k,b)} = \delta_{a,\sigma_{13}(b)} e^{-i\pi h_j}$$

et donc finalement l'expression 6.28 devient

$$\delta_{b,a} \sqrt{\frac{S_0^j}{S_0^0}}$$

qui n'est autre que $\langle \chi_{i,a}^j | \chi_{\hat{k},\hat{b}}^j \rangle$. En revenant à nos moutons:

$$(6.29) \quad Z[(T_1, \chi_{\hat{k},\hat{b}}^j) \# M_-] = \frac{\delta_{j,p}}{S_0^j} Z[S_3, \mathcal{L}_-] \langle \chi_{i,a}^j | \chi_{\hat{k},\hat{b}}^j \rangle$$

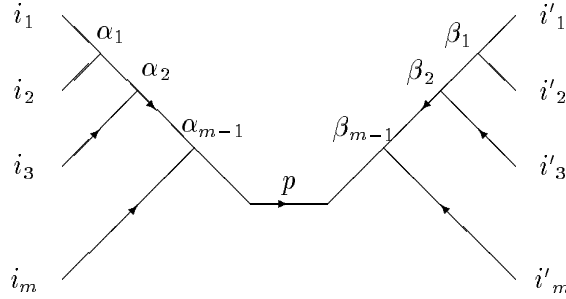
avec $\mathcal{L}_-$ déduit de L_- comme $\mathcal{L}_+$ de L_+ .

¹¹Voir page 314.

Utilisons alors ces deux formules 6.27 et 6.29 en n'oubliant pas que les facteurs peuvent se réabsorber dans des recollages via des sphères avec deux points marqués:

$$\sum_{a,k} Z[M_+ \# (T_1, \chi_{k,b}^j)] Z[(T_1, \chi_{\hat{k},\hat{b}}^j) \# M_-] \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^j}} = Z[S_3, K_+ \# K_-].$$

Le cas où m lignes de K_- (respectivement m' pour K_+) passent dans le long du cycle non-trivial de T_1 (respectivement $S_3 \setminus T_1$) se ramène au cas précédent par l'introduction de la base suivante de $H_{0,2m}$ (et l'analogue pour $H_{0,2m'}$):



Nous travaillons alors sur des combinaisons linéaires de fonctions de partition avec une seule ligne circulant dans les boucles non triviales de T_1 et $S_3 \setminus T_1$. Le résultat annoncé reste donc vrai quel que soit le nombre de lignes circulant le long des cycles de T_1 et $S_3 \setminus T_1$.

Lemme : Si un tore $S_1 \times S_1$ sépare S_3 en $M_- = [T_1, K_-]$ et $M_+ = [S_3 \setminus T_1, K_+]$, et si K intersecte $S_1 \times S_1$ en un point situé sur une ligne portant l'indice j , alors

$$Z[S_3, K] = \sum_{i,a} \sqrt{\frac{S_0^0}{S_0^j}} Z[M_+ \# (T_1, \chi_{k,b}^j)] Z[(T_1, \chi_{\hat{k},\hat{b}}^j) \# M_-]$$

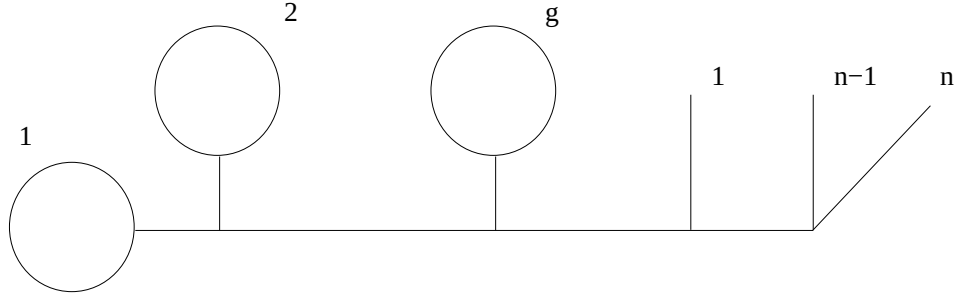
Remarque : Dans ce cas très particulier n'apparaît aucune phase. Ceci n'est pas en fait indispensable pour prouver la fonctorialité projective dans une variété quelconque mais est un soulagement colossal quand il s'agit de faire des calculs pratiques! $\square$

Généralisation $g \geq 1$ ou $n \geq 2$.

Le résultat général découle des deux Lemmes précédents. La surface $\Sigma_{g,n}$ de genre g sépare S_3 en T_g et $S_3 \setminus T_g$.

Remarque : Il convient de remarquer que nous faisons là une *hypothèse* sur $\Sigma_{g,n}$! En effet, il existe des plongements d'une surface de genre $g \geq 2$ dans S_3 qui séparent la sphère en deux variétés à bords qui ne sont pas difféomorphes à un tore plein. Un exemple se trouve dans la thèse de Motto [133, Chapitre 6]. Ce cas n'est pas utile ici mais on doit se souvenir de son existence! $\square$

Nous n'allons pas donner les détails mais seulement la méthode, l'essentiel des difficultés étant résolu. Il est astucieux de considérer la base de $H_{g,n}$ associée au graphe $\mathcal{G}_{g,n}$ suivant:



La fonction de partition $Z[M_+ \# (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\hat{C}})]$ est une fonction dans $T_g \# \hat{T}_g$ et $Z[(T_g, \mathcal{G}_{\hat{C}}) \# M_-]$ est une fonction de partition dans S_3 . On se ramène au cas de sphères et unions de tores pleins de genre 1 en coupant par des sphères S_2 bien choisies. C'est un exercice amusant que nous laissons au lecteur. Notons que la fonctorialité le long de S_2 dans une variété tridimensionnelle quelconque n'introduit aucune phase. Ensuite, l'application des deux lemmes précédents donne le résultat. Comme dans l'analyse en genre 1, il est préférable de commencer en supposant que dans chaque boucle non triviale de T_g et $S_3 \setminus T_g$ ne passe qu'une seule ligne de K_- (respectivement K_+).

Quand plusieurs lignes circulent, la même méthode que celle utilisée en genre 1 donne le résultat. Enfin, pour prouver le résultat pour tout graphe $\mathcal{G}$ définissant une base de $H_{g,n}$, on se souvient que deux de tels graphes sont reliés par une succession de transformations F et $B(\pm)$. Finalement, l'argument utilisé dans la sous-section précédente fonctionne parfaitement et nous avons:

Lemme 22 *Si $\Sigma_{g,n}$ plongée dans S_3 sépare celle-ci en $[T_g, K_-]$ et $[S_3 \setminus T_g, K_+]$ et coupe K en n points réguliers, soit $\mathcal{G}$ un 1-squelette d'un tore plein à g trous, alors:*

$$(6.30) \quad \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_+] Z[T_g \# \hat{T}_g, \# K_- \mathcal{G}_{\hat{C}}]}{\langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} | T_g, \mathcal{G}_{\hat{C}} \rangle} = Z[S_3, K]$$

Remarque: Nous aurions pu remarquer dès le départ que la formule 6.30 ne contient aucune trace de projectivité. En effet, la variété quadridimensionnelle bordant $T_g \# \hat{T}_g$ déduite de la présentation par chirurgie à partir de g cercles non noués ni entrelacés et de framing zéro est la somme connexe de g copies de $S_2 \times D_2$. La signature de la forme d'intersection sur le H_2 relatif est donc nulle. Un autre argument consiste à exprimer cette signature en terme de classe de Pontryagin relative: $\text{Sign}(W_4) = 3p_1(W_4, \alpha)$ où α est une trivialisation appropriée du double du fibré tangent de $T_g \# \hat{T}_g$. Comme la classe de Pontryagin est l'intégrale d'une forme différentielle, elle est additive dans une somme connexe¹² et donc $\text{Sign}(W_1 + W_2) = \text{Sign}(W_1) + \text{Sign}(W_2)$.

Il n'apparaît donc *aucune* phase dans la définition de $Z[T_g \# \hat{T}_g]$ par présentation par chirurgie le long de l'entrelac trivial de framing zéro! $\square$

¹²Notre argumentation est rapide mais le lecteur comblera lui même les détails relatifs à la définition de α sur W_1 et W_2 à partir de la donnée de α sur $W_1 + W_2$...

Où le cocycle apparaît au grand jour...

Le lemme 22 semble donc nier le caractère projectif de nos affaires. Avant de passer à un argument général qui montre qu'il n'en est rien, nous aimerions persuader le lecteur sur des exemples simples.

Revenons pour cela à la définition de la fonction de partition d'une variété sans bord par chirurgie. Comme nous l'avons vu, une telle variété est obtenue en recollant deux cobordismes paramétrés. Prenons l'exemple d'une chirurgie le long d'un cercle non noué de framing $n \in \mathbb{Z}$ pour fixer les idées, alors nous avons:

- D'une part $S_3 \setminus T_1$ déjà rencontrée précédemment.
- D'autre part $D_2 \times S_1$ muni d'un paramétrage différent de celui utilisé pour T_1 . Si φ_{T_1} désigne le paramétrage de T_1 , nous utilisons ici $\varphi_n = (t^n s) \circ \varphi_{T_1}$.

La variété tridimensionnelle obtenue en recollant ces deux morphismes est un espace lenticulaire $L_{n,1}$.

Avec la définition précédente des opérateurs associés à une variété tridimensionnelle, nous obtenons dans la base de $H_{1,0}$ des $(|\chi_i\rangle)_i$:

$$(6.31) \quad \phi[S_3 \setminus T_1]|\chi_i\rangle = S_0^i$$

$$(6.32) \quad \langle \chi_i | \phi[(D_2 \times S_1)_{\varphi_n}] = S_0^j e^{2\pi i n h_j}$$

La fonction de partition de la variété recollée est

$$Z[(D_2 \times S_1)_{\varphi_n} \# S_3 \setminus T_1] = e^{-2\pi i n c/8} \sum_l S_0^l e^{2\pi i n h_l} S_0^l$$

où il apparaît une phase due à l'homologie H_2 de la variété bordant $L_{n,1}$ déduite de la présentation par chirurgie par un cercle de framing n . Finalement:

$$(6.33) \quad Z[L_{n,1}] = e^{-2\pi i n c/8} \phi[S_3 \setminus T_1] \circ \phi[(D_2 \times S_1)_{\varphi_n}]$$

La projectivité trouve son origine dans le facteur introduit pour assurer l'invariance de la fonction de partition dans les mouvements de Kirby!

Remarque: Cette phase disparaît dans le cas des théories orbifold étudiées par Coste et Altschüler [30]. Dans la section 6.5.6 nous donnons les expressions explicites des fonctions de partition des espaces lenticulaires dans les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ considérées au chapitre 4. $\square$

6.5.3 Aspects géométriques.

Notons $K_{1,2}$ la décoration de $M_{1,2}$. $K = K_1 \cup K_2$ est la décoration de M . Pour commencer, utilisons le Lemme suivant qui se place au niveau des variétés et non pas des cobordismes paramétrés:

Lemme 23 *Toute variété M de bord $\partial M = \Sigma_g$ s'obtient par chirurgie à partir de $S_3 \setminus T_g$.*

Par souci de légèreté, nous ne prouverons pas ce résultat ici. La preuve utilise la théorie des scindements de Heegaard pour les variétés à bords. Elle est détaillée dans la thèse de Motto. Pour avoir une idée de la méthode suivie, nous renvoyons le lecteur à ses travaux [133][134] et à la section 6.6.4

Remarque : Remarquons tout de même qu’une démonstration naïve ne marche pas. En effet, si on prend M dont le bord est une surface de genre g . On peut imaginer saturer ce bord avec un tore plein décoré par un 1-squelette, puis prendre un antécédent par une présentation par chirurgie de la variété sans bord ainsi obtenue. Ensuite, on retire un voisinage tubulaire de ce graphe trivalent. Mais on n’obtient pas nécessairement une variété homéomorphe à un tore plein¹³. Ceci provient de l’existence de plongements non-triviaux d’une surface de genre g dans S_3 . $\square$

Nous noterons $\bar{K}_{1,2}$ les graphes dans $S_3 \setminus T_g$ qui donnent $K_{1,2}$ dans $M_{1,2}$ par chirurgie le long de $L_{1,2} \subset S_3 \setminus T_g$.

Dans le cas de la TQC, il nous faut distinguer entre les frontières entrantes et sortantes et donc considérer des cobordismes paramétrés. Ainsi, le résultat précédent se reformule comme suit:

- Si $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, \Sigma_g)$, alors il s’obtient par chirurgie à partir de $\widehat{S_3 \setminus T_g}$.
- Si $M \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\Sigma_g, \emptyset)$, alors il s’obtient par chirurgie à partir de $S_3 \setminus T_g$.

Pour retrouver une présentation par chirurgie de $M_1 \sharp M_2$, nous devons changer $\hat{T}_g$ en $S_3 \setminus T_g$. Alors, nous aurons montré la proposition suivante:

Proposition 29 *Soit $[M_1, K_1] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\emptyset, \Sigma_{g,n})$, alors il existe un entrelac L_1 dans T_g muni d’un framing et $\bar{K}_1$ un graphe trivalent colorié muni d’un framing tel que par chirurgie le long de L_1 , $[T_g, \bar{K}_1]$ redonne $[M_1, K_1]$. Si $[M_2, K_2] \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(\Sigma_{g,n}, \emptyset)$, alors il existe un entrelac L_2 dans $S_3 \setminus T_g$ muni d’un framing et $\bar{K}_2$ un graphe trivalent colorié muni d’un framing tel que par chirurgie le long de L_2 , $[T_g, \bar{K}_2]$ redonne $[M_2, K_2]$.*

Ce but est atteint grâce au résultat suivant:

Lemme 24 *$S_3 \setminus T_g$ est obtenu par chirurgie à partir de $\hat{T}_g$ le long de $(b_j)_{j \in \langle 1, g \rangle}$ avec framing 0. De même, T_g est obtenu à partir de $\widehat{S_3 \setminus T_g}$ le long de $(a_j)_{j \in \langle 1, g \rangle}$ avec framing 0.*

Nous avons déjà cité un exemple qui illustre cela. Nous allons prouver ce résultat.

Remarque : Avant toute chose, soulignons que les variétés que nous considérons sont des cobordismes *paramétrés*. Ici cela signifie que l’on a tracé des cycles a_j et b_j sur la surface qui constitue le bord. Les isomorphismes sont donc des difféomorphismes qui *respectent* ces cycles. Il est clair qu’il existe un difféomorphisme envoyant $S_3 \setminus T_1$ sur T_1 en tant que variété mais ce difféomorphisme n’est *pas* un isomorphisme! $\square$

Toutes précautions oratoires prises, nous allons prouver la seconde partie du Lemme en laissant au lecteur le soin d’en prouver la première partie.

Preuve : Nous allons prouver le Lemme en genre 1 puis par récurrence passer au genre supérieur. On va travailler dans S_3 en choisissant un point à l’infini, ce qui permet de se ramener à $\mathbb{R}^3$. Σ_g est une surface de genre g trivialement plongée dans $\mathbb{R}^3$. Elle sépare $\mathbb{R}^3$ en une partie compacte et une partie non-compacte. La partie compacte constitue T_g .

Cas $g = 1$ Le plus simple est de reprendre la description usuelle de S_3 et du tore plein:

$$S_3 = \{(e^{i\varphi} \cos(\theta), e^{i\psi} \sin(\theta)); \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], (\varphi, \psi) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^2\}$$

¹³Donc a fortiori pas *isomorphe* à $S_3 \setminus T_g$.

et

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 &= \{(e^{i\varphi} \sin(\theta), e^{i\psi} \cos(\theta)); \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], (\varphi, \psi) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^2\} \\ S_3 \setminus T_1 &= \{(e^{i\varphi} \cos(\theta), e^{i\psi} \sin(\theta)); \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], (\varphi, \psi) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^2\}\end{aligned}$$

Effectuons une chirurgie par rapport à C définie par $\theta = \pi/2$. Soit $\varepsilon \in]\pi/4, \pi/2[$ et

$$W = \{(e^{i\varphi} \sin(\theta), e^{i\psi} \cos(\theta)); \theta \in [0, \varepsilon], (\varphi, \psi) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\right)^2\}$$

un voisinage tubulaire de C . Dans la variété chirurgisée T_s , un point

$$(\sin(\varepsilon) \exp(i\varphi), \cos(\varepsilon) \exp(i\psi))$$

de la frontière de W est identifié avec

$$(\sin(\varepsilon) \exp(i\psi), \cos(\varepsilon) \exp(-i\varphi)).$$

Nous définissons alors $\Psi : T_s \rightarrow S_3 \setminus T_1$ dont la restriction à ∂T_1 est l'identité:

$$\forall \theta \in [\pi/4, \varepsilon], \quad \tilde{\Psi}(\sin(\theta) \exp(i\varphi), \cos(\theta) \exp(i\psi)) = (\cos(\theta) \exp(i\psi), \sin(\theta) \exp(-i\varphi))$$

et

$$\forall \theta \in [\varepsilon, \pi/2], \quad \Psi(\sin(\theta) \exp(i\varphi), \cos(\theta) \exp(i\psi)) = (\cos(\theta) \exp(i\psi), \sin(\theta) \exp(-i\varphi)).$$

Nous avons noté $\bar{\Psi}$ car il ne faut pas oublier que W est recollé via S dans T_s ! Clairement Ψ est un isomorphisme entre T_s et $S_3 \setminus T_1$. Ceci prouve le Lemme en genre 1.

$g \mapsto g + 1$ Donnons simplement l'idée en laissant au lecteur le soin de compléter les détails à titre d'amusement. Un tore plein à $g + 1$ trous est obtenu en collant un tore plein à g trous et un tore plein à 1 trou via un disque. De même avec les complémentaires. L'hypothèse de récurrence nous donne un isomorphisme entre $\hat{T}_g$ et $S_3 \setminus T_g$ et en composant par un difféomorphisme connexe à l'identité, on peut supposer qu'il laisse fixe le bord de nos tores pleins (via les paramétrisations des bords). Maintenant, on peut recoller un tore à un trou et prolonger par l'isomorphisme associé au tore pour passer au genre $g + 1$.

Ceci prouve le Lemme. $\square$

Finalement, nous pouvons mettre en place les différents acteurs de la preuve:

- Nous partons de $[T_g, \bar{K}_1]$ qui par chirurgie le long de L_1 donne $[M_1, K_1]$ et $[M_2, K_2]$ qui par chirurgie le long de $[S_3 \setminus T_g, \bar{K}_2]$ le long de L_2 donne $[M_2, K_2]$.
- Nous pouvons alors utiliser le Lemme 24 pour trouver une présentation par chirurgie intelligente de $[M_1, K_1]$. En effet, nous pouvons trouver L'_1 et $\bar{K}'_1$ dans $\widehat{S_3 \setminus T_g}$ tels que par chirurgie le long de $C \subset \widehat{S_3 \setminus T_g}$, on obtienne $[T_g, L_1, \bar{K}_1]$. Ainsi $[M_1, K_1]$ est obtenu par chirurgie à partir de $[\widehat{S_3 \setminus T_g}, \bar{K}'_1]$ le long de (L'_1, C) . Ceci nous fournit une présentation par chirurgie de $[M_1, K_1] \# [\hat{T}_g, \mathcal{G}_C]$ à partir de $[S_3, \mathcal{G}_C \# K_1]$ par chirurgie le long de (L'_1, C) .

La figure 6.2 résume les différentes opérations de chirurgie que nous avons effectuées.

6.5.4 Aspects algébriques.

Nous allons maintenant discuter comment on peut calculer explicitement les différentes fonctions de partition en utilisant les présentations par chirurgie précédentes.

Point de départ.

Avec les notations précédentes, chacune des fonctions de partition s'exprime comme

$$(6.34) \quad Z[M_1 \# \hat{T}_g, K_1 \# \mathcal{G}_{\hat{C}}] = e^{-2\pi i c \sigma_1 / 8} \sum_{\mathcal{C}_1, \mathcal{K}} Z[S_3, \bar{K}_1' \# \mathcal{G}_{\mathcal{C}}, L'_{1, \mathcal{C}_1}, C_{\mathcal{K}}] \left(\prod_{l=1}^g S_{\mathcal{K}_l} \right)^0 \left(\prod_{j=1}^m (T^{m_j} S)_{\mathcal{C}_{1,j}} \right)^0$$

$$(6.35) \quad Z[T_g \# M_2, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# K_2] = e^{-2\pi i c \sigma_2 / 8} \sum_{\mathcal{C}_2} Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# \bar{K}_2, L_{2, \mathcal{C}_2}] \prod_{j=1}^n (T^{n_j} S)_{\mathcal{C}_{2,j}}^0$$

Bien entendu, σ_1 and σ_2 sont les phases qui apparaissent dans notre définition 70 des fonctions de partition. Notons qu'elles ne dépendent en fait que de la topologie de $M_1 \# \hat{T}_g$ (respectivement de $T_g \# M_2$) et non pas des graphes qui y sont plongés ni de leurs coloriage. Nous allons commencer par ramener l'expression 6.34 à une combinaison linéaire de fonctions de partition dans $T_g \# \hat{T}_g$. Ceci ramène notre problème à l'étude du cas où $M_1 = \hat{T}_g$ et $M_2 = T_g$.

Comment se ramener à S_3 .

Pour le voir explicitement, nous effectuons une sommation partielle dans l'équation 6.34 sur les coloriage de C . Cela nous donne:

$$(6.36) \quad Z[T_g \# \hat{T}_g, \bar{K}_1 \# \mathcal{G}_{\hat{C}}, L_{1, \mathcal{C}_1}] = \sum_{\mathcal{K}} Z[S_3, \bar{K}_1' \# \mathcal{G}_{\mathcal{C}}, L'_{1, \mathcal{C}_1}, C_{\mathcal{K}}] \prod_{l=1}^g S_{\mathcal{K}_l}^0$$

Nous utilisons alors la fonctorialité partielle dans S_3 obtenue plus haut et cela nous donne

$$Z[S_3, \bar{K}_1 \# \bar{K}_2, L_1, L_2] = \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[T_g \# \hat{T}_g, \bar{K}_1 \# \mathcal{G}_{\hat{C}}, L_{1, \mathcal{C}_1}] Z[S_3, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \# \bar{K}_2, L_{2, \mathcal{C}_2}]}{\| |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle \|^2}$$

qui, reporté dans

$$\sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \# M_2] Z[M_1 \# (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\hat{C}})]}{\| |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle \|^2}$$

transforme cette expression en

$$(6.37) \quad e^{-2\pi i c (\sigma_1 + \sigma_2) / 8} \sum_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} Z[S_3, \bar{K}_1 \# \bar{K}_2, L_1, L_2] \left(\prod_{k=1}^n (T^{n_k} S)_{\mathcal{C}_{2,k}} \right)^0 \left(\prod_{j=1}^m (T^{m_j} S)_{\mathcal{C}_{1,j}} \right)^0$$

Mais, $[M_1 \# M_2, K_1, \# K_2]$ s'obtient par chirurgie à partir de S_3 décorée par $\bar{K}_1 \# \bar{K}_2$ le long de l'entrelac (L_1, L_2) . Finalement, nous obtenons:

$$(6.38) \quad Z[M_1 \# M_2, K_1 \# K_2] = e^{2\pi i c (\sigma_{1,2} - \sigma_1 - \sigma_2) / 8} \sum_{\mathcal{C}} \frac{Z[(T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}}) \# M_2] Z[M_1 \# (\hat{T}_g, \mathcal{G}_{\hat{C}})]}{\| |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \rangle \|^2}.$$

Fin de la preuve de la fonctorialité.

Cette formule peut maintenant s'interpréter comme une formule sur les opérateurs associés à des cobordismes paramétrés. Considérons $M_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_1, N_2)$ et $M_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}}(N_2, N_3)$ deux cobordismes paramétrés généraux.

Dans un premier temps, nous supposons que $N_2 = \Sigma_{g,n}$. Soient T (respectivement T') deux unions de tores pleins décorés que l'on recolle à N_1 (respectivement N_3) pour saturer le bord de $M_1 \sharp M_2$. Alors,

$$(6.39) \quad Z[T \sharp M_1 \sharp M_2 \sharp \hat{T}'] = \mu(T \sharp M_1, M_2 \sharp \hat{T}') \sum_{\mathcal{I}} \frac{Z[T \sharp M_1 \sharp \hat{T}_{i,\mathcal{I}}] Z[T_{i,\mathcal{I}} \sharp M_2 \sharp \hat{T}']}{||T_{i,\mathcal{I}}||^2}$$

où

$$(6.40) \quad \mu(T \sharp M_1, M_2 \sharp \hat{T}') = e^{2\pi i c(\sigma(T \sharp M_1) + \sigma(M_2 \sharp \hat{T}') - \sigma(T \sharp M_1 \sharp M_2 \sharp \hat{T}'))/8}$$

Ce nombre ne dépend pas des décorations de T , $\hat{T}'$, M_1 ni M_2 ! En effet, pour l'évaluer, nous n'avons utilisé que les signatures des variétés qui bordent $T \sharp M_1 \sharp \hat{T}_g$ et $T_g \sharp M_2 \sharp \hat{T}'$.

Revenons alors aux opérateurs associés aux cobordismes M_1 et M_2 . Les fonctions de partition $Z[T \sharp M_1 \sharp \hat{T}_{i,\mathcal{I}}]$ et $Z[T_{i,\mathcal{I}} \sharp M_2 \sharp \hat{T}']$ ne sont autre que les éléments de matrice des opérateurs associés aux cobordismes $M_{1,2}$ dans les bases associées aux tores pleins décorés T , T_i et T' . Comme dans l'équation 6.38, le facteur de phase ne dépend pas des décorations nous pouvons remonter la relation au niveau des opérateurs:

$$(6.41) \quad \phi[M_1 \sharp M_2] = \mu(M_1, M_2) \phi[M_2] \circ \phi[M_1]$$

dans le cas où l'on coupe le long d'une surface $\Sigma_{g,n}$.

Tout ceci peut se généraliser au cas d'un nombre plus grand de composantes connexes.

6.5.5 Unitarité et propriétés diverses.

Nous savons que le produit scalaire sur les différents espaces des états est défini positif, montrons le

Lemme 25 $\phi[\hat{M}] = (\phi[M])^\dagger$.

Preuve : L'élément de matrice $\langle \phi_i | \phi[\hat{M}] | \phi_f \rangle$ est donné par la fonction de partition

$$Z[T_f \sharp \hat{M} \sharp \hat{T}_i] = Z[T_i \sharp \widehat{M} \sharp \hat{T}_f]$$

Finalement, nous avons ramené le problème aux variétés sans bord. Si $[L, \bar{K}]$ est une présentation par chirurgie de $[M, K]$, alors $[\hat{L}, \hat{\bar{K}}]$ est une présentation par chirurgie de $[\hat{M}, \hat{L}]$: on change le coloriage de $\bar{K}$ en son opposé et le framing de L en son opposé. Donc

$$Z_s[\hat{L}, \hat{\bar{K}}] = \sum_{\mathcal{C}} \left[\prod_{k=1}^n ((e^{2\pi i c/24} T)^{-n_k} S)_{\mathcal{C}_k}^0 \right] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \hat{\bar{K}}]$$

Mais la définition de nos invariants dans S_3 implique $Z[S_3, \hat{K}] = Z[S_3, K]^*$ et donc,

$$Z_s[L, \bar{K}] = \left(\sum_{\mathcal{C}} \left[\prod_{k=1}^n ((e^{2\pi i c/24} T)^{-n_k} S)_{\mathcal{C}_k}^0 \right] Z[S_3, L_{\mathcal{C}}, \hat{\bar{K}}] \right)^*$$

qui signifie que $Z[\hat{X}] = Z[X]^*$ pour toute variété sans bord X . Cela prouve le Lemme via la définition des éléments de matrice. $\square$

Elimination des coloriage triviaux.

Comme on s'y attend dans une théorie topologique, toute ligne portant l'indice 0 peut être oubliée:

Proposition 30 *Les lignes portant un indice 0 peuvent être oubliées.*

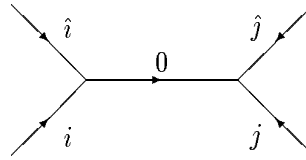
Cela permet de simplifier les calculs d'invariants.

Preuve : Il suffit bien évidemment de prouver ce résultat dans S_3 pour l'obtenir dans toute variété de dimension trois.

Comme le nombre de lignes portant un indice 0 dans un graphe $K \subset S_3$ est fini, il nous suffit de définir un algorithme faisant décroître strictement leur nombre pour montrer que toute ligne portant un indice 0 peut être omise.

Ces lignes sont de deux types:

- C est une composante connexe de K . Il suffit alors de considérer un voisinage tubulaire de C dans $S_3 \setminus K$ et d'appliquer le Lemme 19 au bord de ce tore plein pour avoir le résultat.
- Dans ce cas, C est reliée au reste de K par deux vertex:



Un calcul simple nous montre que:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with lines } i, \hat{i}, j, \hat{j} \text{ and a central line } 0 \end{array} \right] = \phi[B_3, \begin{array}{c} \text{Diagram with lines } i, \hat{i}, j, \hat{j} \end{array}]$$

et donc, en utilisant la fonctorialité le long de S_2 et l'identité ci-dessus appliquée à un voisinage de la ligne considérée, nous pouvons oublier la ligne portant l'indice 0.

- La ligne C n'est reliée que par un seul vertex au reste de K . Comme $N_{0,o,i} = \delta_{i,0}$, la ligne connectant C au reste de K doit porter l'indice 0. Nous l'éliminons (cf ci-dessus) ce qui ramène C au premier cas.

Notre algorithme de traitement diminue donc le nombre de lignes portant l'indice zéro à chaque pas et nous avons donc prouvé la proposition 30 $\square$

6.5.6 Exemples de fonctions de partition.

Avant de passer à une autre méthode de calcul de ces invariants, nous allons discuter, pour certaines solutions des équations de Moore et Seiberg quelques calculs de fonctions de partition.

- Il existe un entrelac $\mathcal{L}_{[3]}$ formé de trois cercles qui se délie si on enlève une quelconque de ses composantes:

La fonction de partition de la sphère S_3 munie de ce nœud colorié par i, j, k et de framing zéro est:

$$(6.42) \quad Z[S_3, \mathcal{L}_{[3],i,j,k}] = \frac{S_0^i S_0^j S_0^k}{(S_0^0)^2}$$

qui, dans la spécialisation $k = 0$ se réduit à $S_0^i S_0^j / S_0^0$, fonction de partition de l'entrelac trivial à deux composantes. Je ne sais pas s'il existe d'autres entrelacs vérifiant cette propriété.

- Les espaces lenticulaires $L_{n,1}$ sont obtenus par chirurgie le long d'un cercle non noué de framing n dans S_3 . Altshüler et Coste ont évalué [30] les fonctions de partition de ces espaces en partant des théories orbifold de Verlinde, Verlinde, Vafa et Dijkgraaf [45]. Ici nous ferons ce calcul pour les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ considérées au chapitre 4.

Espaces lenticulaires.

Comme nous l'avons vu en 6.5.2, la fonction de partition de l'espace lenticulaire $L_{n,1}$ vaut:

$$(6.43) \quad Z[L_{n,1}] = e^{-2\pi ic/8} \sum_j (S_0^j)^2 e^{2\pi i n h_j}$$

Considérons une théorie $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ de paramètre a premier avec N , nous avons vu au chapitre 4 comment calculer les matrices S et T correspondantes. A partir de là, nous pouvons calculer explicitement la fonction de partition:

N impair: Le paramètre a est pris modulo $2N$ et est pair. Alors en utilisant les équations 4.16 et 4.15 du chapitre 4, nous arrivons à:

$$(6.44) \quad Z_{N,a}[L_{n,1}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(S_N\left(\frac{a}{2}\right) \right)^* S_N\left(\frac{a}{2}n\right)$$

où l'on utilise la notation du chapitre 4 pour les sommes de Gauss. Pour se ramener à un argument premier avec N dans S_N , nous utilisons l'identité suivante, vraie pour $\alpha \wedge N = 1$:

$$(6.45) \quad S_N(\alpha n) = \sqrt{N \wedge n} S_{N \wedge n}\left(\frac{\alpha n}{N \wedge n}\right)$$

Finalement

$$(6.46) \quad Z_{N,a}[L_{n,1}] = \sqrt{\frac{N \wedge n}{N}} \left(S_N\left(\frac{a}{2}\right) \right)^* S_{N \wedge n}\left(\frac{n}{N \wedge n} \cdot \frac{a}{2}\right)$$

N pair: Comme nous l'avons vu, a doit être impair et pris modulo N mais pour chaque valeur de a , nous avons alors deux cas possibles. Il est en fait plus simple de prendre a modulo $2N$. Les formules pour les dimensions et $\exp(2\pi ic/8)$ se déduisent les unes des autres dans le décalage $a \mapsto a \pm N$.

Comme dans le cas N impair, nous ramenons tout à l'évaluation d'une somme de Gauss:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \exp\left(2\pi i \frac{ank^2}{2N}\right)$$

qui vaut trivialement

$$\frac{1}{\sqrt{2}} S_{2N}(an)$$

Finalement, nous obtenons:

$$(6.47) \quad Z_{N,a}[L_{n,1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{(2N) \wedge n}{n}} (S_{2N}(a))^* S_{n \wedge (2N)} \left(\frac{an}{n \wedge (2N)} \right)$$

Nous disposons donc des fonctions de partition des espaces lenticulaires dans les théories $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

6.6 Décompositions de Heegaard et Théorie des Champs.

Nous avons choisi d'utiliser les techniques de chirurgie pour définir nos fonctions de partition à partir des données de Moore et Seiberg. Néanmoins, d'autres approches existent. Dans cette section, nous utilisons la théorie des scindements de Heegaard pour calculer nos invariants topologiques. Dans le cas des variétés sans bord, les résultats utiles datent des années 30. Le cas des variétés avec bords a été traité par Motto dans sa thèse [133] et Crane [28] a essayé de prouver que l'on pouvait définir des fonctions de partition invariantes topologiques par ce biais. Les travaux de Motto étant trop récents pour que j'y aie eu accès assez tôt, je me contenterais ici de montrer que dans le cas des variétés sans bord, la théorie des scindements de Heegaard conduit effectivement à des invariants topologiques. Cette idée a été reprise indépendamment par Kohno dans le cas des théories de Chern-Simons $SU(2)$ [110].

Nous rappellerons tout d'abord les résultats géométriques de Heegaard et Singer [173], puis nous définirons la fonction de partition associée à un tel scindement. Nous montrerons que c'est un invariant topologique et nous expliciterons la connexion avec les invariants calculés par chirurgie.

6.6.1 Scindements de Heegaard.

Nous allons donner les définitions et propriétés géométriques des scindements de Heegaard. Ces scindements permettent de décrire une variété de dimension trois par un difféomorphisme. Toutefois, ce difféomorphisme n'est pas unique et nous décrirons explicitement tous les difféomorphismes associés à une même variété tridimensionnelle.

Définitions.

Les scindements de Heegaard sont définis par:

Définition 73 *Une décomposition de Heegaard de la variété M est une décomposition de la forme $M = H_1 \#_f H_2$ où $H_{1,2}$ sont deux tores pleins et f un difféomorphisme.*

Bien sûr, les tores pleins ont leur bord paramétré de la manière usuelle. Le genre du scindement est le genre de la frontière des tores pleins. Comme nous voulons définir des invariants topologiques, nous avons besoin d'une relation d'équivalence entre scindements de Heegaard:

Définition 74 *Deux scindements de Heegaard sont dits équivalents si et seulement si ils proviennent de la même variété de dimension 3.*

Notre motivation réside dans le théorème suivant [173]:

Théorème 64 (J. Singer) *Toute variété de dimension trois connexe compacte sans bord admet un scindement de Heegaard.*

Il est clair qu'une telle variété admet plusieurs scindements. Citons deux exemples:

- La sphère S_3 est l'union de deux boules B_3 . C'est une décomposition de genre 0. Mais $S_3 = T_1 \#_s \hat{T}_1$ nous donne une décomposition de genre 1.
- Soit h un difféomorphisme de Σ_g qui se prolonge en difféomorphisme d'un tore plein, alors si $M = T_g \#_f \hat{T}_g$, clairement $M = T_g \#_{h \circ f} \hat{T}_g$.

Le difféomorphisme peut être reconstruit à partir d'un diagramme dessiné sur la surface frontière des tores pleins. Plus précisément:

Définition 75 *Soit Σ_g , de genre g , bordant un tore plein H , un ensemble de g courbes tracées sur Σ_g est dit canonique si et seulement si on obtient une boule B_3 en coupant le tore plein H suivant ces courbes.*

Dans le cas d'un scindement de Heegaard de M , si Σ_g désigne la surface commune aux deux tores pleins, le diagramme qui code la manière dont on recolle les deux tores pleins est défini par:

Définition 76 *Le diagramme de Heegaard d'un scindement de Heegaard est formé de deux ensembles de courbes tracées sur Σ_g qui sont canoniques relativement aux deux tores pleins du scindement.*

Etant donné un scindement de Heegaard, il existe plusieurs diagrammes associés car il existe plusieurs choix d'ensembles de courbes canoniques sur une surface. Il suffit de regarder le cas du genre 2 pour s'en convaincre. Réciproquement, on peut chercher à reconstruire à partir d'un couple de g -uplets de courbes simples ne s'intersectant pas sur Σ_g , les scindements de Heegaard dont ils peuvent provenir. Nous allons aborder ce problème puis dans une section suivante donner un critère d'équivalence entre scindements de Heegaard. Nous passons par cet intermédiaire diagrammatique car c'est en ces termes que Singer a exprimé en 1933 son critère d'équivalence.

Diagrammes de Heegaard et difféomorphismes.

Nous reconstruisons un difféomorphisme par la procédure suivante: soit $(e_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ et $(f_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ les deux ensembles de courbes canoniques du diagramme de Heegaard, on cherche φ , difféomorphisme de Σ_g qui envoie e_i sur f_i pour tout i . L'existence et l'unicité sont résolues par les Lemmes suivants:

Lemme 26 *Il existe un difféomorphisme de Σ_g qui envoie un jeu de courbes sur l'autre.*

Preuve: Soient $N[e]$ et $N[f]$ les deux tores pleins construits à partir des ensembles de courbes canoniques, coupons les selon les courbes (e_i) et (f_i) . Cela donne deux ensembles de $2g$ cercles tracés sur des sphères S_2 . Notons $\epsilon_{1,i}$ et $\epsilon_{2,i}$ les cercles déduits de $N[e]$ et $\epsilon'_{1,2,j}$ ceux déduits de $N[f]$. Chacun de ces cercles $\epsilon_{1,2,i}$ borde un disque $D_{1,2,i} \subset S_2$ et nous venons de définir un difféomorphisme de $S_2 \setminus (\cup_i (\bar{D}_{1,i} \cup \bar{D}_{2,i}))$ sur $\Sigma_g \setminus \{(e_i)\}$. Ce difféomorphisme se prolonge par continuité de manière non injective mais surjective à la frontière des disques $D_{1,2,i}$: $\partial D_{1,i}$ et $\partial D_{2,i}$ sont envoyés sur e_i . Nous appelons Φ cette application continue. La même construction peut être effectuée à partir de $[S_2, \epsilon']$ et $[\Sigma_g, (f)]$;

elle donne naissance à Φ' . Mais il existe un difféomorphisme H de $[S_3, \epsilon]$ sur $[S_3, \epsilon']$ qui envoie $\epsilon_{1,j}$ sur $\epsilon'_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ sur $\epsilon'_{2,j}$ pour tout j . On peut de plus le choisir tel que pour tous $P \in \epsilon_{1,i}$ et $P' \in \epsilon_{2,i}$ tels que $\Phi(P) = \Phi(P')$, on ait $\Phi'(H(P)) = \Phi'(H(P'))$. En conséquence, nous en déduisons un homéomorphisme de Σ_g qui envoie (e_i) sur (f_i) pour tout i . $\square$

Lemme 27 *Les difféomorphismes qui laissent invariant un ensemble de courbes canoniques sur Σ_g peuvent être prolongés au tore plein sous-jacent.*

Preuve : Comme dans la démonstration précédente, un tel difféomorphisme de Σ_g permet de construire un difféomorphisme H de S_2 qui laisse fixe les cercles $\epsilon_{1,2,i}$ et même en fait les disques bordés par ces cercles point par point. La trivialité du groupe modulaire de la sphère [13] entraîne l'existence d'un chemin γ dans $\text{Diff}_+(S_2)$ qui relie h (atteint à $t = 1$) à 1_{S_2} (atteint à $t = 0$). En prenant $\gamma(t)$ sur la boule de rayon $(t + 1)/2$ et 1_{S_2} sur les sphères de rayon $0 < r < 1$, on définit un homéomorphisme de B_3 dont la restriction au bord est H . Comme H laisse fixe point par point les disques bordés par les cercles $\epsilon_{1,2,j}$, nous disposons bien d'un difféomorphisme du tore plein T_g dont la restriction au bord est le difféomorphisme dont nous sommes partis: il suffit de recoller les disques bordés par $\epsilon_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ pour tout $j \in \langle 1, g \rangle$. $\square$

En conséquence, on fabrique à partir d'un diagramme de Heegaard une classe de difféomorphismes. Si (e) et (f) désignent les deux jeux de courbes du diagramme, on note $K[(e), (f)]$ l'ensemble des difféomorphismes de Σ_g qui envoient (e) sur un jeu de courbes homotopes à (f) . Il suffit clairement de travailler dans les groupes modulaires.

Un scindement de Heegaard fournit plusieurs diagrammes. Toutefois,

Lemme 28 *Deux ensembles $K[(e), (f)]$ et $K[(e'), (f')]$ provenant de deux diagrammes de Heegaard issus d'un même scindement sont équivalents sous l'action à droite (respectivement à gauche) des difféomorphismes qui se prolongent à $N[e]$ (respectivement $N[f]$).*

Preuve : Considérons deux jeux de courbes canoniques (e) et (e') pour un même tore plein: T_g . Alors, nous savons qu'il existe un difféomorphisme h de Σ_g qui envoie e_j sur e'_j pour tout j . On lui associe un difféomorphisme de $[S_2, \epsilon]$ sur $[S_2, \epsilon']$ qui envoie deux points en correspondance sur les disques délimités par $\epsilon_{1,j}$ et $\epsilon_{2,j}$ sur deux points en correspondance sur $\epsilon'_{1,j}$ et $\epsilon'_{2,j}$. Nous prolongeons ce difféomorphisme à la boule B_3 en utilisant une fois de plus la trivialité du groupe modulaire de la sphère. Ceci permet de définir un difféomorphisme $\tilde{h}$ de $N[e] = T_g$ sur $N[e'] = T_g$ qui prolonge h .

Dans ce cas, si g est un difféomorphisme de Σ_g ,

$$g \in K[(e), (f)] \iff g \circ h^{-1} \in K[(e'), (f)]$$

où h^{-1} est prolongeable à $N[e]$. Le raisonnement est symétrique pour le changement de (f) en (f') . Ceci prouve le Lemme. $\square$

Ainsi, à partir d'un difféomorphisme, nous fabriquons un ensemble de diagrammes de Heegaard et nous venons de montrer comment déduire d'un diagramme de Heegaard une classe d'éléments du groupe modulaire de Σ_g . Il reste à déterminer dans quelle mesure deux difféomorphismes de Σ_g sont équivalents, au sens où ils définissent des scindements de Heegaard d'une même variété. Ce problème a été résolu par J. Singer en 1933.

Théorème de Singer.

Le résultat principal de Singer est un critère d'équivalence entre les scindements via les diagrammes associés [173]:

Théorème 65 (J. Singer) *Deux scindements de Heegaard sont équivalents si et seulement si on peut transformer les diagrammes de Heegaard de l'un en ceux de l'autre grâce à un nombre fini de transformations du type suivant et de leurs inverses:*

- *Mouvements à genre fixé: on passe de $[(e_i), (f_i)]$ à $(e'_i), (f'_i)]$ où (e_i) et (e'_i) sont deux ensembles de courbes canoniques pour le premier tore plein et (f_i) et (f'_i) sont deux ensembles de courbes canoniques pour le second tore plein.*
- *$g \mapsto g + 1$: on redessine le diagramme de départ sur les g premières anses de Σ_{g+1} et on pose $e_{g+1} = a_{g+1}$ et $f_{g+1} = b_{g+1}$.*

Pour aller plus loin, nous devons traduire cela en termes de difféomorphismes. Le lemme 28 montre que, dans le groupe modulaire, nous devons considérer une classe pour l'action à droite du groupe des difféomorphismes qui se prolongent au premier tore plein et à gauche de ceux qui se prolongent au second tore plein.

Dans les autres mouvements, le genre augmente. Nous gardons le même difféomorphisme sur les g premières anses et sur la dernière et nous prenons s qui envoie le cycle (a_{g+1}) sur le cycle (b_{g+1}) . Le recollement de ces deux difféomorphismes ne pose pas de problème car on peut, en composant par un difféomorphisme connexe à l'identité, fixer un disque sur la surface de genre g et sur le tore. Cela permet alors en recollant via le bord de ce disque de définir¹⁴ $\varphi \# s$ où $\varphi \in \text{Diff}_+(\Sigma_g)$.

Introduisons alors la notion de groupe de Suzuki [175] au genre g . Soit $T_g \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\emptyset, \Sigma_g)$ usuel, dont le bord est paramétré par $\varphi_g : \partial T_g \rightarrow \Sigma_g$, alors nous définissons le morphisme de restriction I_g par:

$$\begin{aligned} I_g : \text{Diff}_+(T_g) &\longrightarrow \text{Diff}_+(\Sigma_g) \\ f &\mapsto \varphi_g \circ f|_{\partial T_g} \circ (\varphi_g)^{-1} \end{aligned}$$

Le groupe de Suzuki du tore plein T_g est alors $\text{Suz}(T_g) = \text{Im}(I_g)$. Nous formulons alors la proposition suivante:

Proposition 31 *Deux difféomorphismes φ_1 et φ_2 de Σ_{g_1} et Σ_{g_2} respectivement définissent des scindements de Heegaard équivalents si et seulement si ils sont reliés par un nombre fini de transformations suivantes et de leurs inverses:*

$g_1 = g_2$ Il existe $(h, h') \in \mathcal{S}_{g_1}^2$ tels que

$$\varphi_2 = h \circ \varphi_1 \circ h'.$$

$g_2 = g_1 + 1$ On prolonge φ_1 par S :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \# s.$$

¹⁴On choisit un représentant de la classe modulaire de s qui laisse fixe un petit disque sur $S_1 \times S_1$ qui sert à faire le recollement avec Σ_g .

C'est sous cette forme que le théorème de Singer est utilisable pour définir des invariants topologiques à trois dimensions.

Remarque : Le contenu de la proposition 31 est d'ailleurs relativement intuitif: les mouvements à genre fixé peuvent être clairement réabsorbés dans chacun des tores pleins et le mouvement $g \mapsto g + 1$ pour $g = 0$ donne l'équivalence entre les scindements $S_3 = B_3 \sharp \hat{B}_3$ et $T_1 \sharp_s \hat{T}_1$ que nous avons déjà citée en exemple. $\square$

6.6.2 Fonction de partition associée à un scindement de Heegaard.

A chaque variété de dimension 3 sans bord, on associe un ensemble de difféomorphismes en genres variés. Mais d'un autre côté, toute solution des équations de Moore et Seiberg nous fournit une représentation projective des groupes modulaires en tout genre. Cela nous permet donc de définir la fonction de partition d'un difféomorphisme, ou plutôt d'un scindement de Heegaard. Il est alors facile de vérifier qu'elle est multipliée par une phase dans un des mouvements de Singer.

Fonction de partition d'un scindement de Heegaard.

Nous notons ρ_g la représentation projective de $\mathcal{M}(g, 0)$ dans $H_{g,0}$ obtenue à partir des données de Moore et Seiberg dont nous disposons. Dans ce cas, nous fixons $\mathcal{G}$ un 1-squelette de T_g qui définit une base de $H_{g,0}$ comme dans la section 6.2.1. On pose, si $\mathcal{C}_0$ est le coloriage trivial de $\mathcal{G}$:

Définition 77 Soit $M = T_g \sharp_h \hat{T}_g$ un scindement de Heegaard de M de genre g ,
la fonction de partition de ce scindement est

$$Z_H[h] = \langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} | (\rho_g(h) | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}) \rangle$$

Bien sûr:

Proposition 32 Soit $h \in \mathcal{M}(g, 0)$, $\langle T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0} | (\rho_g(h) | T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}) \rangle$ ne dépend pas du squelette $\mathcal{G}$ choisi.

Preuve : L'indépendance vis à vis de $\mathcal{G}$ est triviale. En effet, une autre base se déduit de celle-ci par une succession de produits tensoriels d'applications F et B . Mais celles-ci laissent l'état $|T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}\rangle$ invariant et donc cet état est un point fixe de toutes les transformations de dualité ce qui prouve notre assertion. $\square$

Invariance sous les mouvements de Singer.

Nous allons montrer que $Z_H[h]$ change d'une puissance de $\exp(2i\pi c/24)$ dans un mouvement de Singer. On notera $|\phi_g\rangle = |T_g, \mathcal{G}_{\mathcal{C}_0}\rangle$ pour alléger.

Mouvements $g \mapsto g + 1$ Comparons

$$\langle \phi_g | \rho_g(h) | \phi_g \rangle \text{ et } \langle \phi_{g+1} | \rho_{g+1}(h \sharp_s) | \phi_g \rangle.$$

Il existe une isométrie de $H_{g+1,0}$ dans $H_{g,1} \otimes H_{1,1}$ et bien sûr, si ϕ désigne cette injection¹⁵:

$$(\phi \circ \rho_{g+1})(h \sharp_s) = (\rho_{g,1}(h) \otimes \rho_{1,1}(S)) \circ \phi$$

¹⁵Reliée à la localité à la frontière.

où h agit sur les g premières anses. Finalement:

$$\langle \phi_{g+1} | \rho_{g+1}(h \sharp s) | \phi_g \rangle = \frac{\langle \phi_1 | (S | \phi_1) \rangle}{S_0^0} \langle \phi_g | \rho_g(h) | \phi_g \rangle.$$

Comme $\langle \phi_1 | S | \phi_1 \rangle = S_0^0$, $Z_H[h]$ est invariant par ce mouvement de Singer.

Mouvements à genre fixé Nous avons besoin de l'action du groupe $\mathcal{S}_g$ sur l'état $|\phi_g\rangle$. Elle est donnée par le résultat suivant:

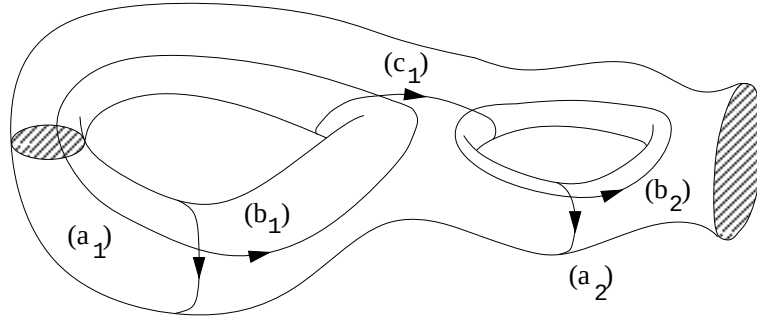
Lemme 29 *Nous avons:*

$$(6.48) \quad \forall f \in \frac{\text{Diff}_+(T_g)}{\text{Diff}_{+,0}(T_g)}, \quad \rho_g(i_g(f))|\phi_g\rangle = \exp\left(2\pi i \frac{n(f)c}{24}\right)|\phi_g\rangle$$

où $n(f) \in \mathbb{Z}$.

Preuve: La description d'un ensemble fini de générateurs du groupe de Suzuki $\text{Suz}(T_g)$ en termes de twists de Dehn¹⁶ due à Suzuki [175] permet par un calcul explicite de prouver le Lemme. Nous avons décrit au chapitre 3 comment étaient représentés les twists de Dehn. Nous ne donnerons pas ici la preuve complète du Lemme mais nous avons choisi un exemple qui illustre bien les raisonnements que l'on peut faire. Tous les détails se trouvent dans l'article de Suzuki [175] et les calculs sont excessivement simples. Nous utilisons également ses notations!

Parmi les générateurs de $\mathcal{S}_g$, $\Theta_{1,2}$ est un des plus complexes: on déplace la première anse le long du cycle (b_2) :



La décomposition en twists de Dehn est $T(b_2)T(\gamma)$ où $\gamma = (T(a'_2)T(b_2))(c_1)$ où $T(\gamma)$ désigne le twist de Dehn le long de la courbe γ orientée. Mais alors, $T(\gamma) = T(a'_2)^{-1}T(b_2)^{-1}T(c_1)T(b_2)T(a'_2)$. En termes de représentations, la projectivité de ρ_g introduit des puissances de $\exp(2i\pi c/24)$ que nous ne comptons pas en détail, mais chacun des twists $T(b_2)$, $T(a'_2)$ et $T(c_1)$ est facilement calculable. Dans chaque twist de Dehn, aucune ligne portant un indice non nul ne va apparaître et cela justifie la notation suivante (un peu abusive):

$$\begin{aligned} \rho_g(T(\gamma))|\phi_g\rangle &= T(T^{-1}S^{-1}T^{-1})T(TST)T^{-1}|\phi_g\rangle \\ \rho_g(T(b_2))\rho_g(T(\gamma))|\phi_g\rangle &= TSTS^{-1}TS|\phi_g\rangle \end{aligned}$$

et comme $TST = C(STS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}S$, $|\phi_g\rangle$ est invariant sous l'action de $\Theta_{1,2}$.

Les autres générateurs sont plus simples à étudier et sont laissés au lecteur. $\square$

¹⁶Définis dans le traité de Birman [13].

En conséquence,

Théorème 66 *A des puissances de $\exp(2i\pi c/24)$ près, $Z_H[h]$ est constant sur l'ensemble des scindements de Heegaard d'une variété à trois dimensions donnée.*

Cela montre que l'utilisation des scindements de Heegaard permet de définir des invariants topologiques pour des variétés sans bord ni décoration. On parle d'invariants de Heegaard associés à une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous allons maintenant faire le lien avec l'approche par chirurgie, tant au niveau géométrique qu'au niveau des invariants que ces deux méthodes permettent de calculer.

6.6.3 Lien avec la méthode chirurgicale.

Nous commencerons par montrer la relation entre, d'une part l'existence des scindements de Heegaard et le critère de Singer, et d'autre part le calcul de Kirby. Puis nous verrons que les invariants calculés par les techniques chirurgicales sont en fait identiques à ceux calculés grâce aux scindements de Heegaard à des puissances de $\exp(2\pi ic/24)$ près.

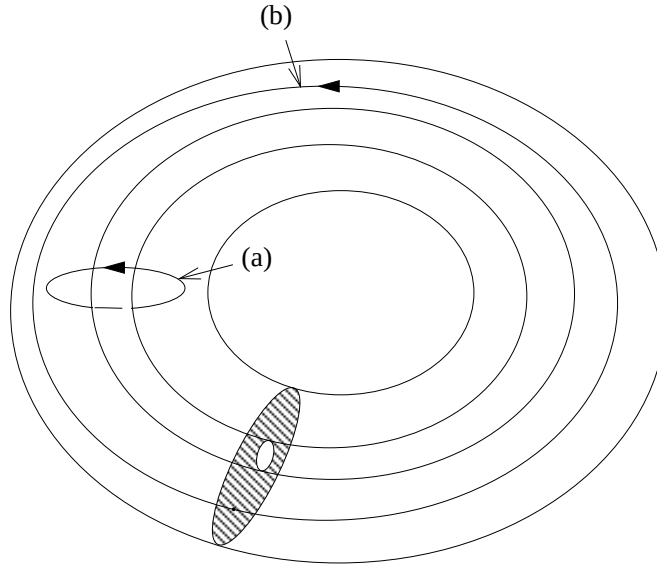
Relation géométrique entre scindements de Heegaard et chirurgie.

A partir de l'existence des scindements de Heegaard pour toute variété tridimensionnelle sans bord, on peut montrer que cette même variété admet une présentation par chirurgie. C'est d'ailleurs la méthode utilisée par Lickorish et Wallace pour prouver l'existence de telles présentations [121].

Pour arriver à ce résultat, remarquons que le groupe modulaire en genre g est engendré par les twists de Dehn le long des courbes (a_j) , (b_j) et (c_k) avec les conventions usuelles. Si nous savons trouver une présentation par chirurgie des cobordismes paramétrés $M(f)$ associés à chacun de ces difféomorphismes à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$, alors c'est gagné. En effet, pour tout $f \in M(g)$, $M(f)$ admet une présentation par chirurgie à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$ et comme $\hat{T}_g$ se déduit par chirurgie de $S_3 \setminus T_g$, alors $M = T_g \#_f \hat{T}_g$ admet une présentation par chirurgie à partir de S_3 .

Pour commencer, plaçons nous en genre 1. On note $M(a)$ et $M(b)$ les variétés associées aux twists de Dehn selon (a) et (b) . Alors introduisons dans $\Sigma_1 \times [0, 1]$ les cycles (a) et (b) tracés dans ce cylindre

et parallèles aux cycles correspondants sur le tore Σ_1 :



Nous pouvons énoncer:

Théorème 67 *La variété $M(a)$ est obtenue par chirurgie à partir de $\Sigma_1 \times [0, 1]$ le long du cycle $-(a)$ muni du framing -1 . De même, $M(b)$ est obtenue par chirurgie le long de $-(b)$ avec le framing -1 .*

Preuve: Nous donnons l'idée de la preuve en laissant au lecteur le soin de compléter les détails. En effet, les techniques mises en œuvre sont abondamment utilisées dans l'Appendice 6.A.

Remarquons tout d'abord que les variétés obtenues sont bien des cylindres. En effet, de la même manière que nous avons obtenu la généralisation des mouvements de type K de Kirby dans le cas où des graphes trivalents étaient présents, nous pouvons ici étudier l'influence du retrait dans $\Sigma_1 \times [0, 1]$ de $-(a)$ (respectivement $-(b)$) munis du framing -1 . Le lecteur vérifiera que l'on obtient bien un cylindre à un changement de paramétrisation d'un des bords près. Il s'agit du bord interne pour $-(a)$ et externe pour $-(b)$. Cela signifie que les chirurgisées sont de la forme $M(f)$ pour un difféomorphisme f du tore. Trouver ce difféomorphisme n'est pas bien difficile. Regardons ce qui se passe pour (b) avec le framing 1.

Traçons un cycle (b) sur le tore intérieur, il est déplaçable sur le tore extérieur sans rencontrer le tore de chirurgie. Cela signifie que f le laisse invariant. Reprenons l'expérience avec un cycle (a) . Nous l'amenons sur le tore extérieur à une petite boucle près qui s'enroule autour du tore de chirurgie. Cette boucle *au sein* du tore de chirurgie, c'est à dire *compte tenu du recollage via TS* , est homotope à $-(b_c)$. Mais dans $D_2 \times S_1$, (b_c) est homotope à $(b_c) - (a_c)$. Cette dernière courbe, ramenée dans la chirurgisée est homotope à (b) . Nous pouvons alors amener cette boucle sur le tore externe ce qui montre que l'on a $(a) + (b)$. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice représentant l'action du twist de Dehn selon (b) . Ceci montre que les cycles (a) et (b) tracés sur le tore extérieur sont décalés de $T(b)^{-1}$ par rapport aux mêmes cycles tracés sur le tore intérieur mais translatés le long du cylindre. En conséquence, la chirurgie le long de (b) avec framing 1 produit $M(T(b)^{-1})$ ce qui prouve notre assertion (Ouf!).

Le lecteur reprendra le même raisonnement pour $M(a)$. $\square$

La situation en genre g n'est guère plus complexe. En effet, les twists de Dehn selon les cycles (a_j) (respectivement (b_j)) sont trivialement obtenus par chirurgie le long de $-(a_j)$ munie du framing -1 (respectivement $-(b_j)$ avec le même framing) dans $\Sigma_g \times [0, 1]$. Restent les twists de Dehn le long des cycles (c_k) . Le lecteur vérifiera que la chirurgie le long de $-(c_k)$ avec framing -1 dans Σ_g permet de retrouver $M(T(c_k))$.

Théorème 68 *Pour chacun des cycles (a_j) , (b_j) , et (c_k) , la variété $M(\gamma)$ est obtenue à partir de $\Sigma_g \times [0, 1]$ par chirurgie le long de $-(\gamma)$ avec framing -1 .*

Comme nous l'avons expliqué plus haut, cela prouve l'existence de présentations par chirurgie à partir de l'existence des scindements de Heegaard. Il est possible de prendre deux présentations par chirurgie de M fabriquées à partir de deux scindements de Heegaard de M qui diffèrent par un mouvement de Singer de type $g \mapsto g + 1$. En utilisant les mouvements de Kirby de type K , on relie très facilement ces présentations par chirurgie comme on pouvait s'y attendre.

Remarque : Il serait bien agréable de retrouver l'existence des présentations par scindement de Heegaard à partir de la chirurgie. Malheureusement ce problème est un peu plus difficile à résoudre. En effet, pour reconstruire un scindement de Heegaard, nous devons *bien choisir* la présentation par chirurgie utilisée. Prenons S_3 munie d'un entrelac L et de deux surfaces de genre g plongées, ne s'intersectant pas et n'intersectant pas L . Elles ne définissent pas par chirurgie un scindement de Heegaard de M_L , c'est à dire un découpage de M_L en $T_g \# M(f) \# T_g$! Si c'était le cas, il n'y aurait pas de plongement non trivial¹⁷ de Σ_g dans la sphère S_3 . Pour cette raison la reconstruction d'un scindement de Heegaard à partir des présentations par chirurgie d'une variété sans bord est au delà de ma compréhension actuelle.

J'ai appris récemment que ce problème était analysé par D. Bennequin et C. Mercat à Strasbourg. Un théorème sera donc peut-être disponible. $\square$

Equivalence des invariants de Heegaard et des invariants chirurgicaux.

Plaçons nous maintenant au niveau algébrique. Soit $M = T_g \#_f \hat{T}_g$ un scindement de Heegaard de M . A partir de ce scindement de Heegaard, nous savons définir une présentation par chirurgie de M et donc calculer $Z[M]$, fonction de partition de M dans la TTR définie précédemment. D'autre part, nous savons calculer $Z_H[M]$ à partir des représentations projectives des groupes modulaires en tout genre définies par la solution des équations de Moore et Seiberg dont nous sommes partis. Nous allons montrer que:

Théorème 69 *A une puissance de $\exp(2i\pi c/24)$ près, $Z_H[M]$ est égal à $Z[M]$.*

Preuve : Calculons par la présentation par chirurgie les opérateurs $\phi[M(a_j)]$, $\phi[M(b_j)]$ et $\phi[M(c_k)]$. Le cas du genre un est extrêmement instructif et suffit à donner l'essentiel de la preuve.

En genre 1, nous devons évaluer:

$$\langle \chi_j | (\phi[M(a)]^{-1} | \chi_i \rangle \text{ et } \langle \chi_j | (\phi[M(b)]^{-1} | \chi_i \rangle$$

Dans le premier cas, nous remarquons que:

$$[(T_1, C_i)] \#_{T^{-1}} [\widehat{(T_1, C_j)}] \simeq [(S_2 \times S_1, C_i, C'_j)]$$

¹⁷Ne définissant pas un tore plein et son complémentaire

où la ligne C'_j est parallèle à C_1 et donc à S_1 mais avec un framing modifié. Finalement, nous trouvons facilement:

$$(6.49) \quad \phi[M(a)]|\chi_i\rangle = e^{-2\pi ic/24} T^{-1} |\chi_i\rangle$$

ce qui montre que dans la théorie topologique construite précédemment, au difféomorphisme T est associé la matrice $\exp(2\pi ic/24)T$. De même, nous vérifions facilement que:

$$(6.50) \quad \phi[M(b)]|\chi_i\rangle = e^{-2\pi ic/12} (TST)^{-1} |\chi_i\rangle$$

A des phases près, nous retrouvons les matrices obtenues à partir de la représentation de Moore et Seiberg de M_1 . Le lecteur vérifiera sans difficultés que ces considérations s'étendent au genre g , toujours à des phases près. Cela n'est pas surprenant vu la projectivité des représentations considérées. La fonctorialité projective montre que $\phi[M(g)]$ calculé par chirurgie s'identifie avec ce que l'on obtient en suivant les prescriptions de Moore et Seiberg, à ces fameuses phases près.

En conséquence, comme $Z_H[M] = \langle T_g, \mathcal{G}_{c_0} | (\rho_g(f) | T_g, \mathcal{G}_{c_0}) \rangle$, cela nous montre que $Z_H[M]$ et $Z[M]$ sont égales à une puissance de $\exp(2\pi ic/24)$ près. $\square$

Remarque: L'origine de ces phases est relativement claire. Il faudrait pour les décrire parfaitement traiter convenablement le framing des variétés considérées. En particulier, le framing des différents tores pleins doit être précisé dans un scindement de Heegaard de même que la variété tridimensionnelle associée à un difféomorphisme. Comme je l'ai déjà mentionné, les problèmes techniques que cela pose ne sont pas tous résolus, du moins en ce qui me concerne. $\square$

6.6.4 Quelques extensions possibles...

L'extension la plus naturelle consiste à englober les variétés à bord. Nous souhaiterions définir les opérateurs invariants topologiques associés aux variétés à bord à partir des scindements de Heegaard sans faire référence à la chirurgie. C'est la voie suivie par Crane [28]. Nous ne donnerons ici qu'un aperçu des méthodes utilisées sans prétendre traiter ce problème. Le lecteur pardonnera le caractère moins pédagogique de cette section, contrepartie de sa concision.

Nous commencerons par donner les principaux éléments de la théorie des scindements de Heegaard des variétés à bords, puis nous discuterons le critère de Singer généralisé. Enfin, nous verrons comment ces concepts s'inscrivent dans la perspective de la théorie des champs.

Scindements de Heegaard de variétés avec bords.

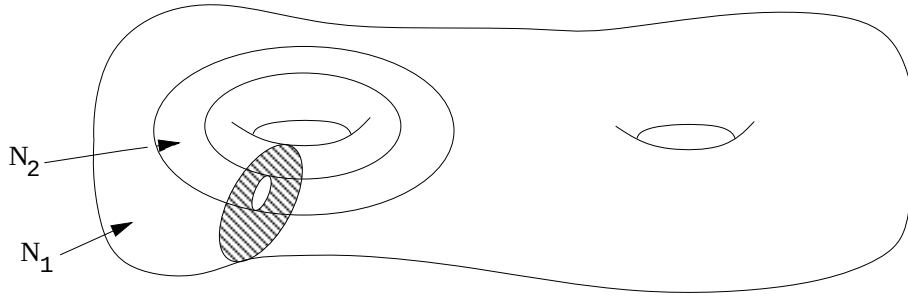
Nous souhaitons généraliser la notion de scindement de Heegaard pour un cobordisme interpolant entre N_1 et N_2 . Pour cela, nous devons d'abord étendre la notion de tore plein utilisée dans le cas des variétés sans bord. La notion correspondante est celle de corps de compression [133, Chapitre 3].

Un tore plein à g trous est obtenu en partant de Σ_g de genre g et en la plongeant trivialement dans $\mathbb{R}^3$. Cette surface scinde $\mathbb{R}^3$ en une partie compacte et une partie non compacte. Le tore plein correspond à la partie compacte. Grossièrement, nous pouvons dire qu'il est obtenu "en remplissant l'intérieur" d'une surface de genre g . Pour obtenir un objet plus général, il suffit de faire ce remplissage partiellement. Ainsi, on part d'un tore plein et on évide un voisinage tubulaire d'un sous-graphe du 1-squelette de ce tore plein. La définition précise d'un corps de compression est donc la suivante:

Définition 78 *Un corps de compression est un cobordisme M entre N_- et N_+ appelés respectivement frontière interne et externe tel que N_- n'ait aucune composante connexe difféomorphe à une sphère et qui est obtenu en rajoutant à $N_- \times [0, 1]$ des 0 et des 1-poignées.*

Le lecteur vérifiera que cela correspond à l'image intuitive décrite précédemment et qu'un tore plein ordinaire est un corps de compression dont la frontière interne est vide et dont la frontière externe est une surface de genre g .

Mais nous devons considérer des cobordismes paramétrés en vue de l'application à la TQC. Nous devons traiter avec soin les positions et paramétrages des bords internes et externes des corps de compression. Dans ce cas, le corps de compression devient un cobordisme paramétré. Parmi tous les paramétrages choisis, certains peuvent être qualifiés de standards. Ils correspondent au cas où l'on part d'un tore T_g et on enlève des voisinages tubulaires de cycles (b_j) , éventuellement non disjoints. Les cycles (a) et (b) de la frontière interne¹⁸ sont alors obtenus trivialement à partir des cycles correspondants sur la frontière externe. Pour chaque topologie de surface interne N_1 et de surface externe N_2 et pour leurs positions relatives, nous définissons un corps de compression standard $W[N_1, N_2]$. Le schéma suivant aidera le lecteur à imaginer ce que peut être un corps de compression:



La notion de scindement de Heegaard est alors relativement triviale:

Définition 79 *Un scindement de Heegaard d'une variété M interpolant entre N_1 et N_2 est une décomposition de M en recollement de deux corps de compression W_1 et W_2 via leur bords externes:*

$$M = W_1 \# W_2$$

Et bien sûr, le lecteur trouvera dans la thèse de Motto [133, Chapitre 3, théorème 3.3] le résultat suivant:

Théorème 70 (M. Motto) *Toute variété de dimension 3 interpolant entre N_1 et N_2 et dont aucune composante connexe du bord n'est difféomorphe à S_3 admet un scindement de Heegaard.*

Il nous reste à traduire cela dans un langage adapté à la TQC. En utilisant des corps de compression standards, nous pouvons montrer que tout cobordisme paramétré connexe s'obtient en recollant deux corps de compression standards via un difféomorphisme:

$$M \simeq W[N_1, N_{int}] \#_f W[\widehat{N_2}, N_{int}]$$

Bien sûr, f n'est pas unique. On se rappelle que dans le cas sans bord, f était défini à droite comme à gauche à un élément du groupe du Suzuki près. Le même problème se rencontre ici et une des difficultés de cette approche est la définition précise de l'analogue du groupe de Suzuki dans le cas avec bords. Nous allons décrire maintenant les scindements de Heegaard d'une même variété.

¹⁸Qui en définissent le paramétrage.

Théorème de Singer généralisé.

Dans le cas sans bord, l'opération qui consistait à rajouter une anse à la surface et à prolonger le difféomorphisme par S jouait un rôle important. Nous parlerons ici de stabilisation pour la désigner: on rajoute simplement une anse au bord externe et on prolonge le difféomorphisme par S . Au niveau des corps de compression, on en prend la somme connexe avec un tore plein T_1 pour chaque corps. Cela définit aussi un scindement de Heegaard de la variété de départ.

Nous généralisons comme suit la notion de groupe de Suzuki:

Définition 80 *Soit $W[N_1, N_2]$ un corps de compression paramétré standard, le groupe de Suzuki associé à ce corps de compression est l'ensemble des difféomorphismes de N_2 qui se prolongent en un isomorphisme de $W[N_1, N_2]$. On le note $\text{Suz}(W[N_1, N_2])$.*

Dans ce cas, le théorème de Singer 65 se généralise comme suit [133, Chapitre 4, théorème 4.1]:

Théorème 71 *Deux scindements de Heegaard de M interpolant entre N_1 et N_2 sont nécessairement reliés par une suite finie de transformations du type suivant et de leurs inverses:*

- *Les deux scindements diffèrent par stabilisation.*
- *Les corps de compression $W[N_1, N]$ et $W[N_2, N]$ ne changent pas mais il existe $h \in \text{Suz}(W[N_1, N])$ et $h' \in \text{Suz}(W[N_2, N])$ tels que, si f est le difféomorphisme utilisé pour le recollement: $f' = h' \circ h \circ h$.*

C'est la généralisation immédiate du théorème de Singer originel.

Et la Théorie des champs dans tout ça?

Tout ceci devrait nous permettre de définir une TTR à partir des scindements de Heegaard de variétés à bords. En effet, nous devons procéder par étapes:

- Nous devons définir les opérateurs associés aux corps de compression standards, de manière cohérente et sans aucune ambiguïté de phase.
- Cela permet de définir les opérateurs associés à une variété avec bords mais sans décoration grâce aux représentations projectives des groupes modulaires fournies par toute solution des équations de Moore et Seiberg. Bien sûr, l'opérateur associé ne doit pas dépendre du scindement de Heegaard choisi!

Remarquons que l'invariance par stabilisation est relativement triviale à vérifier mais que l'invariance sous l'action à droite et à gauche des groupes de Suzuki est plus difficile à appréhender. Comme nous ne disposons pas d'un ensemble de générateurs explicite pour ces groupes de Suzuki généralisés, il reste un peu de travail à faire. Le résultat naturel nécessaire est une généralisation triviale du théorème de Suzuki mais encore faut-il le prouver!

- Tout ceci doit être étendu aux variétés décorées. Ou bien, il faut revenir à la définition des valeurs moyennes d'opérateurs à partir de variétés sans bord. Je n'ai pas réfléchi de manière approfondie à ce problème et le lecteur comprendra que je ne puisse en dire plus.

Ceci permet de définir une correspondance entre cobordismes paramétrés et opérateurs. Comme pour l’approche chirurgicale, nous devons vérifier qu’elle satisfait les axiomes d’une théorie topologique projective.

L’unitarité est relativement claire car les représentations des groupes modulaires fournies par Moore et Seiberg sont unitaires et si $M = W[N_1, N] \#_f \widehat{W[N_2, N]}$ est un scindement de Heegaard de M , $\hat{M} = W[N_2, N] \#_{f^{-1}} \widehat{W[N_1, N]}$ en est un pour $\hat{M}$.

Pour la fonctorialité, la situation est plus glauque. Soient M_1 et M_2 interpolant entre N_1 et N (respectivement N et N_2) et dont nous connaissons des scindements de Heegaard, il n’est pas évident de construire un scindement de Heegaard de $M_1 \# M_2$. En effet, on pourrait être tenté de recoller les corps de compression comme suit :

$$\begin{aligned} M_1 &= W[N_1, \Sigma] \#_{f_1} \widehat{W[N, \Sigma]} \\ M_2 &= W[N, \Sigma] \#_{f_2} \widehat{W[N_2, \Sigma]} \\ M_1 \# M_2 &= W[N_1, \Sigma] \#_{f_1} (\widehat{W[N, \Sigma] \#_{f_2} W[N, \Sigma]}) \#_{f_2} \widehat{W[N_2, \Sigma]} \end{aligned}$$

Mais $\widehat{W[N, \Sigma] \#_{f_2} W[N, \Sigma]}$ n’est pas forcément isomorphe à un cylindre $N \times [0, 1]$ paramétré à un bout par un difféomorphisme. En effet, cette variété peut ne pas être difféomorphe au cylindre comme quand par exemple N possède deux composantes connexes de genre 1 et Σ est de genre 2. Je n’ai pas la solution à ce problème. Peut être faut-il faire un choix judicieux du scindement de Heegaard.

Enfin, autant la fixation de phase dans la procédure par chirurgie était facile, autant elle me semble peu évidente dans ce contexte.

J’espère que ces quelques remarques illustrent les difficultés rencontrées dans cette approche. Je ne peux pas dire si elles sont plus difficilement surmontables que celles rencontrées dans l’approche chirurgicale.

6.7 Histoire de résumer...

Nous venons de construire à partir d’une solution des équations de Moore et Seiberg une TTPR sur la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$. Il s’agit de la réciproque du résultat présenté au chapitre 5.

Il reste maintenant à présenter ces résultats dans le langage fonctoriel introduit au chapitre 1 et à signaler dans quelles directions cette analyse pourrait être poussée. Les conjectures que l’on peut émettre seront présentées dans le chapitre 7. Toutefois, nous aimerions introduire un peu plus précisément certains problèmes et en particulier suggérer la relation entre les représentations des groupes modulaires qui apparaissent dans notre TTPR et celles qui surgissent des équations de Moore et Seiberg.

6.7.1 Représentations de la “Tour de Teichmüller”.

Il s’agit ici d’inviter le lecteur à une exploration de la “Tour de Teichmüller”, c’est à dire l’ensemble de tous les groupes modulaires $\mathcal{M}^*(g, n)$ dont les théories que nous venons de construire fournissent automatiquement une représentation. Ces termes seront définis un peu plus précisément au chapitre 7. Notre ambition ici est d’entrouvrir la porte de ce monde fascinant.

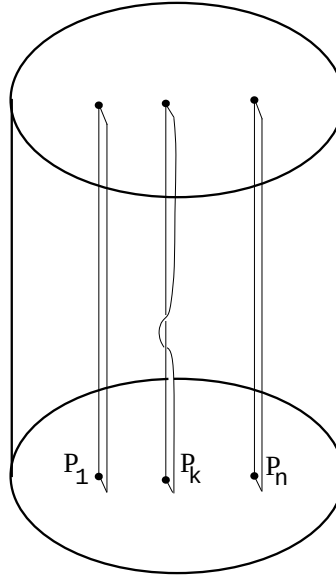
Cas du genre zéro.

La structure des groupes modulaires en genre zéro est encore relativement simple. Considérons le cas de la sphère avec $n \geq 3$ points marqués. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, une présentation par générateurs et relations est donnée par les demis twists de Dehn¹⁹ $(\omega_i)_{i \in \langle 1, n-1 \rangle}$ et les twists de Dehn $(R_i)_{i \in \langle 1, n \rangle}$ autour de chacun des points marqués.

Pour faire le lien avec notre théorie topologique, nous devons associer à chaque élément du groupe $\mathcal{M}(0, n)$ un morphisme de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ interpolant entre $\Sigma_{0,n}$ et $\Sigma_{0,n}$. Il suffit pour cela de se souvenir de l'interprétation sur les blocs conformes des générateurs de $\mathcal{M}^*(0, n)$ donnée par Moore et Seiberg pour définir $M(f)$ pour $f \in \mathcal{M}^*(0, n)$. A chaque élément $f \in \mathcal{M}^*(0, n)$ on associe un cylindre $S_2 \times [0, 1]$ paramétré de la même manière aux deux extrémités et décoré par une tresse déduite de f selon la procédure de J. Birman [13]. Le framing de cette tresse est déduit pour chaque ligne du nombre de twists de Dehn que l'on effectue autour de chacun des points marqués sur la sphère. Tout à fait dans l'esprit de J. Birman, cette procédure définit une représentation fidèle de $\mathcal{M}^*(0, n)$ dans $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_{0,n}, \Sigma_{0,n})$.

En utilisant la théorie des champs projective, on obtient une action linéaire de $\mathcal{M}^*(0, n)$ sur $H_{0,n}$. En ce qui concerne les générateurs, elle est donnée par:

- Le cobordisme associé à R_k est un cylindre paramétré de la même manière au deux extrémités, décoré par n lignes reliant les points entre eux trivialement:



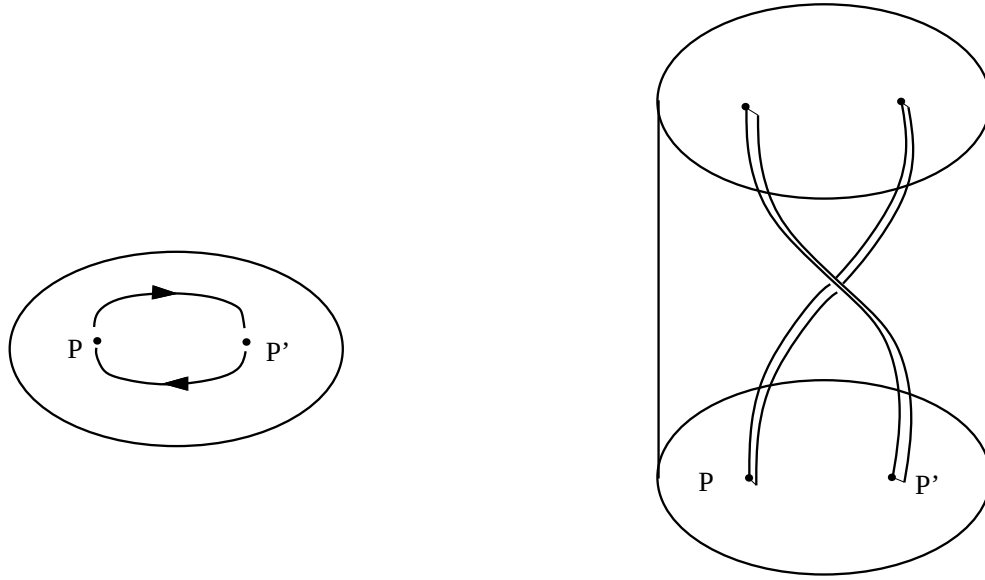
Seul le framing de la ligne k est tordu de 2π . Clairement:

$$(6.51) \quad \phi[M(R_k)]|S_2, \mathcal{G}_c\rangle = e^{2\pi i h_{i_k}} |S_2, \mathcal{G}_c\rangle$$

où i_k est la couleur de la k -ème ligne externe de $\mathcal{G}$.

¹⁹Précisément, le “demi twist de Dehn” portant sur les points P et P' est défini en passant à une carte (U, φ) , qui envoie U sur le disque unité et telle que $(P, P') \in U^2$ soient envoyés sur deux points de coordonnées polaires $(1/2, \vartheta)$ et $(1/2, -\vartheta)$ dans le disque. Alors, le “demi twist de Dehn” envoie le point courant de coordonnées (ρ, φ) sur le point de coordonnées $(\rho, \varphi + 2\pi\rho)$ si $\rho \leq 1/2$ et $(\rho\varphi + 2\pi(1 - \rho))$ si $\rho \geq 1/2$. Cet homéomorphisme se réduit à l'identité sur le bord de U et peut donc être prolongé à $\Sigma \setminus U$ sans difficultés.

- En ce qui concerne ω_j , on utilise également un cylindre mais cette fois on y plonge la tresse associée au difféomorphisme ω_j . Le framing des lignes ne tourne pas; il est normal sur la figure suivante:



où nous avons représenté la tresse associée à un “demi twist de Dehn” portant sur les points P et P' . Un calcul simple montre alors que dans la base multipériphérique de $H_{0,n}$, le difféomorphisme est représenté par:

$$(6.52) \quad \rho_{0,n}(\omega_j) = \mathbf{1} \otimes B_{i,i+1}(+) \otimes \mathbf{1}$$

qui coïncide avec la forme 3.157 donnée au chapitre 3 pour l'action de ω_{23} sur $H_{0,4}$ dans le cas $n = 4$. En comparant avec [130], le lecteur verra que cette expression est identique avec celle qui apparaît dans l'Appendice B de cet article.

Ceci montre que pour des générateurs de $\mathcal{M}^*(0, n)$, les représentations définies par Moore et Seiberg et les nôtres coïncident. Par fonctorialité le long de S_2 dans S_3 , et comme Moore et Seiberg ont défini des représentations *non* projectives de $\mathcal{M}^*(0, n)$, nous en déduisons que, en genre zéro, la théorie topologique définit la même action de $\mathcal{M}^*(0, n)$ sur $H_{0,n}$ que Moore et Seiberg.

Cas du genre 1.

Dans ce cas, la situation est quelque peu plus complexe. L'étude faite pour les scindements de Heegaard dans la section 6.6.2 a montré que t et s étaient représentés sur $H_{1,0}$ par $T \exp 2\pi ic/24$ et S respectivement. D'un autre côté, dans l'approche de Moore et Seiberg, ils sont représentés par S et T . De plus dans la théorie topologique c est représenté par C . En conséquence nous ne disposons que d'une représentation projective de $\mathcal{M}(1, 0) = SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\rho_{1,0}((st)^3) = C \quad (\rho_{1,0}(s)\rho_{1,0}(t))^3 = e^{2\pi ic/8}C$$

Comme il a été montré que $H_2(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ est trivial, la représentation de Moore et Seiberg définie par:

$$(6.53) \quad \bar{\rho}_{1,0}(s) = S \quad \bar{\rho}_{1,0}(t) = T$$

et celle définie par la TTPR diffèrent donc par un cobord.

Problème général.

Nous n'avons pas pu pousser nos investigations tellement plus loin mais il nous paraît utile de présenter la vision partielle obtenue à ce jour.

Comme précédemment, nous devons tout d'abord faire agir fidèlement $\mathcal{M}^*(0, n)$ sur l'ensemble $\text{hom}_{\mathbf{Ma}_{3,1}}(\Sigma_{g,n}, \Sigma_{g,n})$. Ensuite, via la théorie projective des champs construite dans ce chapitre, cela nous donne une représentation projective de $\mathcal{M}^*(g, n)$ dans $H_{g,n}$. Comme on pouvait s'y attendre, elle ne diffère de celle définie par Moore et Seiberg que par des puissances de $\exp(2\pi ic/24)$. Ceci résulte essentiellement des points suivants:

- En genre $g = 1$ avec un ou deux points marqués, il est relativement facile de calculer des expressions pour l'action des générateurs des groupes modulaires dans le contexte de la théorie topologique d'une part et à la Moore et Seiberg d'autre part. Les résultats coïncident à des puissances de $\exp(2\pi ic/24)$ près. Ceci s'étend au cas du genre g vu que l'on en connaît des générateurs: les twists de Dehn le long de cycles homotopiquement non triviaux. Ainsi le résultat est vrai pour le groupe modulaire “pur” $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}^*(g, 0)$.
- Le cas des twists de Dehn autour de chacun des points marqués ne pose aucun problème. Cela nous ramène au groupe modulaire en genre g avec n points marqués mais sans coordonnée au niveau des points marqués: $\mathcal{M}(g, n)$.
- Enfin, il est possible de résoudre le problème pour $\mathcal{M}(g, n)$ en partant seulement de considérations en genre zéro, et de l'analyse dans le cas de $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}(g, 0)$. Nous nous basons sur les suites exactes présentées au chapitre 3 que nous rappelons ici par commodité:

- Dès que $n > 0$,

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathcal{M}^*(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow 1$$

- En genre $g \geq 2$:

$$1 \longrightarrow B_n(g) \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow 1.$$

- Pour $g = 1$ avec $n > 1$ ou alors pour $g = 0$ avec $n > 2$:

$$1 \longrightarrow \frac{B_n(g)}{\text{center}} \longrightarrow \mathcal{M}(g, n) \longrightarrow \mathcal{M}_g \longrightarrow 1$$

où $B_n(g)$ désigne le groupe des tresses colorées à n brins en genre g : $B_n(g) = \pi_1(\mathcal{B}_n(\Sigma_g))$.

D'après les travaux de Harer [93], la partie sans torsion de $H_2(\mathcal{M}^*(g, n), \mathbb{Z})$ se réduit à $\mathbb{Z}$ dès que $g \geq 5$. Harer introduit dans son travail un cocycle universel Δ_H à partir de signatures de cobordismes quadridimensionnels associés aux suspensions des éléments du groupe modulaire²⁰ $\mathcal{M}(0, g)$ qui engendre $H_2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$. Il est naturel de se demander dans quelle mesure ce cocycle universel est relié au cocycle obtenu par la théorie des champs que nous avons construite. La conjecture naturelle que nous émettons est la suivante:

Conjecture 2 *Pour $g \geq 5$ et $n = 0$, le cocycle μ qui apparaît dans la théorie projective que nous avons construite est équivalent modulo un cobord à:*

$$\mu_H(f, g) = e^{2\pi i \Delta_H(f, g)/8}$$

²⁰La suspension de $f \in \text{Diff}_+(\Sigma)$ n'est autre que la variété obtenue en recollant les deux extrémités de $\Sigma \times [0, 1]$ via f . Elle ne dépend clairement que de la classe modulaire de f .

et il est également équivalent au cocycle qui apparaît dans les représentations projectives construites par Moore et Seiberg.

Il ne devrait pas être très dur de démontrer la première partie de cette conjecture vu que nos invariants font précisément intervenir dans leur définition les signatures de cobordismes de dimension quatre. Je dispose à l’heure actuelle de quelques propriétés remarquables du cocycle qui sont déduites de la localité à la frontière. Je pense qu’elles permettent de caractériser de manière unique le cocycle et donc de prouver la première partie de la conjecture. J’y reviendrais dans le chapitre 7. En ce qui concerne la seconde partie, cela semble moins facile. Encore une fois apparaît la nécessité de définir proprement la “tour modulaire”.

Il me faut aussi mentionner les problèmes suivants auxquels je n’ai pas de réponse, sans doute parce que je n’ai pas accès aux bonnes informations:

- Que peut-on dire en genre $g \in \langle 2, 4 \rangle$? A priori le cocycle universel défini par Harer existe encore mais engendre-t-il $H_2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$?
- Existe-t-il une manière simple de caractériser le cobord qui mesure la différence entre μ_H et μ ?
- L’identité dite “de la Lanterne Chinoise” qui exprime une des relations du groupe modulaire $\mathcal{M}^*(0, 4)$ joue un rôle particulièrement important dans le travail d’Harer ainsi que dans celui de Moore et Seiberg. Elle donne en effet de nombreuses relations du groupe modulaire simplement en plongeant une sphère avec quatre disques retirés dans $\Sigma_{g,n}$. On peut se demander quelle va être son importance dans le contexte des théories topologiques.

Il me semble déraisonnable de prétendre à plus sur ces questions. L’exploration des groupes modulaires par les théories topologiques reste un problème ouvert. Je donnerai dans le chapitre 7 d’autres perspectives qui se dessinent au travers de l’étude des groupes modulaires.

6.A Calcul de Kirby.

Cet Appendice expose l’essentiel du calcul de Kirby [104] d’un point de vue géométrique ainsi que la généralisation dont nous avons besoin dans la reconstruction d’une TTR à partir d’une solution des équations de Moore et Seiberg. Nous commencerons par prouver que toute variété sans bord à trois dimensions décorée par un graphe trivalent colorié et muni d’un framing admet une présentation par chirurgie à partir de la sphère S_3 munie d’un tel graphe. Puis nous examinerons la généralisation des mouvements de type K dans ce cadre. Enfin, nous généraliserons le critère de Kirby en suivant l’inspiration de Fenn et Rourke [61]: deux présentations par chirurgie donnent la même variété si et seulement si elles se déduisent l’une de l’autre par une suite finie de mouvements de type K généralisés et de leurs inverses. Nous discuterons enfin l’aspect quadridimensionnel du calcul de Kirby en rappelant que les différentes présentations par chirurgie d’une variété sans bord sont en correspondance avec les variétés à quatre dimensions qui la bordent.

6.A.1 Présentations par chirurgie d’une variété décorée.

Soit $K \subset M$ un graphe trivalent décoré plongé dans la variété M sans bord. La variété M non décorée est obtenue par chirurgie le long de l’entrelac L de S_3 . Bien sûr, S_3 est obtenue à partir de M par l’opération de chirurgie inverse. Par isotopie, on se ramène au cas où K n’intersecte aucun des tores

de chirurgie qui servent à repasser de M à S_3 . Remarquons que si $(T_j)_{j \in \langle 1, n \rangle}$ sont les tores de chirurgie dans S_3 et $(W_j)_{j \in \langle 1, n \rangle}$ ceux dans M_L ,

$$S_3 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n T_j \right) \text{ et } M \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n W_j \right)$$

sont difféomorphes²¹. Du coup, si on considère $K \subset (M \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_j))$ comme inclus dans $S_3 \setminus (\bigcup_{j=1}^n T_j)$, on obtient $\bar{K}$, qui est un antécédent de K par la chirurgie le long de L .

Remarque : On a traité le graphe K en ignorant sa structure²² mais il est clair que l'on peut en tenir compte. Seul le framing peut sembler un peu moins évident à traîner dans les opérations de chirurgie mais il suffit de se rappeler qu'il est défini par la donnée de courbes parallèles, ou bien que l'on considère en fait des rubans (cf chapitre 5) pour que ces angoisses disparaissent. $\square$

Ceci prouve l'existence de présentations par chirurgie pour toute variété sans bord décorée.

Remarque : Remarquons dès maintenant que le choix de $\bar{K}$ n'est pas unique même avec L fixé. En effet, on peut déplacer K par rapport aux tores de chirurgie W_j ! Cette possibilité devra être prise en compte pour donner la généralisation du critère de Kirby. $\square$

6.A.2 Calcul de Kirby “amélioré”...

Soient $[L, \bar{K}]$ et $[L', \bar{K}']$ deux présentations par chirurgie que nous supposons équivalentes. Elles représentent donc la même variété décorée $[M, K]$. Dans ce cas, nous savons que L et L' sont reliés par une suite finie de mouvements de Kirby ou leurs inverses. Nous allons donc reprendre la définition de ces mouvements pour donner leur effet sur $\bar{K}$.

Mouvements de Kirby généralisés.

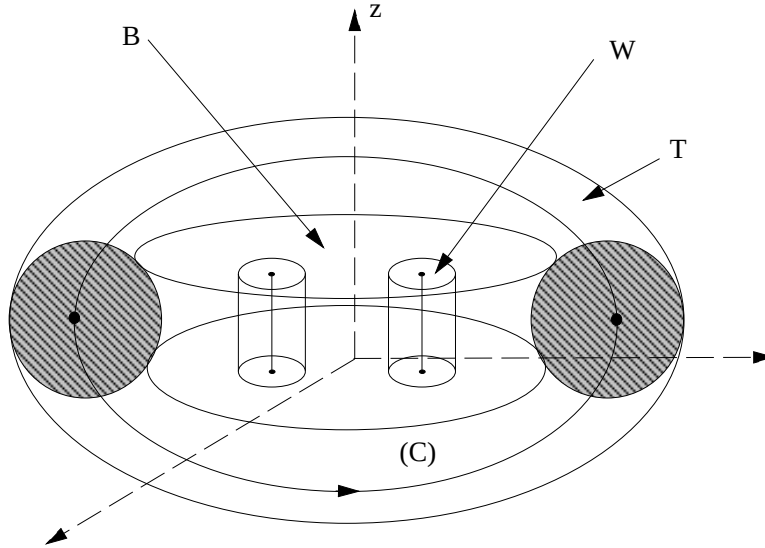
Soit C une composante de L de framing $\varepsilon = \pm 1$, non nouée. Pour comprendre l'effet d'un mouvement de type K , supposons dans un premier temps que $L \setminus C$ et $\bar{K}$ ne sont pas entrelacés. En conséquence, C peut être séparée du reste de $[S_3, L \setminus C, \bar{K}]$ par une sphère plongée dans S_3 . Notons M_C la chirurgisée par rapport à C . Nous allons construire un difféomorphisme de M_L munie de ses décorations sur $[S_3, L \setminus C, \bar{K}]$.

Nous voyons C comme un cercle plongé dans S_3 et $T = D_2 \times S_1$ est un voisinage tubulaire de ce cercle. Traçons sur le tore ∂T deux courbes simples parallèles et homotopes à (b) . Elles bordent deux

²¹Mais ne sont pas isomorphes si on munit les tores retirés du paramétrage standard et que l'on considère que le recollement est fait via $1_{S_1 \times S_1} \dots$. Cette subtilité est essentielle.

²²Son coloriage et son framing

disques qui, avec la partie de ∂T comprise entre les deux courbes, délimitent une boule B :



Il est commode de voir cette boule comme un cylindre $D_2 \times [0, 1]$. C'est d'ailleurs ce qui est suggéré sur notre dessin où nous avons introduit des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Nous allons définir le difféomorphisme entre M_C et S_3 sur $S_3 \setminus (B \cup T)$, B et T . En toute rigueur, nous allons fabriquer un homéomorphisme non différentiable en certains points mais ces problèmes de régularité n'ont aucune importance ici.

Définition de F sur $S_3 \setminus (B \cup T) = M_C \setminus (B' \cup W)$ Tout d'abord, nous identifions $M_C \setminus (W \cup B')$ avec $S_3 \setminus (B \cup T)$ où W est le tore de chirurgie T après recollage et B' est la trace dans M_C de B . Dans ce cas, nous posons:

$$(6.54) \quad \forall P \in (S_3 \setminus (B \cup T)), \quad F(P) = P$$

Définition de F sur B Nous identifions $S_3 \setminus T$ avec $M_C \setminus W$ et cela permet d'identifier B et B' et donc d'utiliser les mêmes coordonnées cylindriques sur ces deux cylindres. En conséquence, nous posons:

$$(6.55) \quad \forall (r, \theta, z) \in B, \quad f(r, \theta, z) = (r, \theta + 2\pi z\varepsilon, z)$$

Cette prescription peut sembler à première vue artificielle mais, si nous avons identifié naïvement les points entre B et B' , nous n'aurions pas pu prolonger F sur T . En effet, dans ce cas la restriction de F à ∂T , qui dans M_C est recollé via $T^\varepsilon S$, aurait été précisément ce difféomorphisme. Mais comme il n'envoie pas le cycle (a) sur (a) ou $-(a)$, il ne peut être prolongé à T ! La torsion de B que nous avons introduite permet d'éliminer ce problème.

Définition de F sur T . On ne le rappellera jamais assez, T est recollée "trivialement" dans S_3 et via $T^\varepsilon S$ dans M_C . Comme nous venons de le suggérer, on connaît la restriction de F au bord de T . Notons (a) et (b) les cycles usuels sur T et (a') , (b') ceux tracés sur $S_3 \setminus T$ qui est identifiée avec $M_C \setminus W$. L'effet de F sur les cycles (a') et (b') est clair:

$$\begin{aligned} (a') &\mapsto (a') - \varepsilon(b') \\ (b') &\mapsto (b') \end{aligned}$$

et si on prend en compte la manière dont (a) et (b) sont reliés à (a') et (b') dans M_C et S_3 , nous trouvons:

$$\begin{array}{ccc} (a') \mapsto \varepsilon(a') + (b') & \xrightarrow{F|_{\partial T}} & \varepsilon(a') \mapsto \varepsilon(a) \\ (b') \mapsto -(a') & \xrightarrow{F|_{\partial T}} & \varepsilon(b') - (a') \mapsto \varepsilon(b) - (a) \end{array}$$

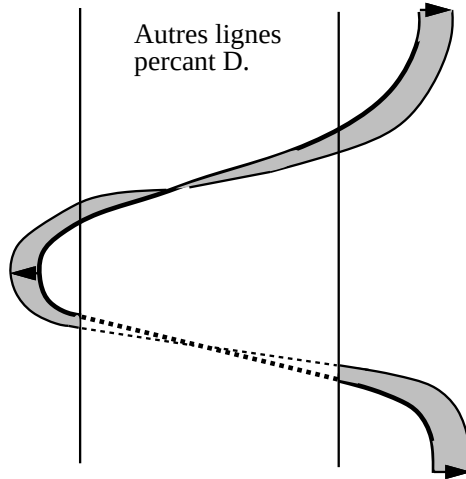
qui peut se prolonger à T sans problèmes. Cela définit F sur T .

Finalement, nous avons défini un homéomorphisme de M_C sur S_3 .

Remarque : Clairement, les chirurgies par rapport aux autres composantes de L ne vont pas modifier notre construction: il suffit de considérer qu'on les effectue dans un second temps. Le graphe $\bar{K}$ pose encore moins de problème. $\square$

Ce type de mouvement est dit *spécial* par Fenn et Rourke. Nous avons simplement montré que deux présentations par chirurgie reliées par un mouvement de type K spécial sont équivalentes. Mais cette digression nous donne la méthode à suivre pour définir le mouvement de type K dans le cas où L et $\bar{K}$ sont entrelacés avec C .

Les chirurgies le long des autres composantes de L peuvent être faites après celle sur C et donc nous ferons dans un premier temps comme si $\bar{K}$ était seul présent. Le framing de chaque ligne de $\bar{K}$ est défini par une courbe parallèle. On reprend la définition donnée précédemment de F homéomorphisme de M_C sur S_3 . Le graphe $\bar{K}' = F(\bar{K})$ ressemble à $\bar{K}$ sauf que les lignes qui percent un disque s'appuyant sur C sont tournées de $-2\pi\varepsilon$ ainsi que leurs courbes parallèles. Ceci définit aussi bien le graphe $\bar{K}'$ que son framing puisque l'on sait ce que deviennent les courbes parallèles à chacune des lignes:



Nous pouvons sans difficulté étendre ces considérations au cas où $(L \setminus C) \neq \emptyset$. Cela définit les mouvements de type K sur une présentation par chirurgie $[L, \bar{K}]$. Le lecteur aura sûrement remarqué que, dans le cas avec vertex, on peut faire passer un vertex proche du disque D bordant C utilisé pour tordre les lignes de $L \setminus C$ et $\bar{K}$ de part et d'autre de D sans problèmes. En effet les deux graphes obtenus par les deux mouvements de type K sont isotopes en tant que graphes trivalents décorés. Notre définition des mouvements de type K n'est donc pas ambiguë.

Remarque : Dans le cas d'une ligne sans vertex de $\bar{K}$, appelée γ , on peut chercher de combien change le framing défini comme le nombre d'intersection de la courbe parallèle γ_1 définissant le framing, avec γ . Nous retrouvons la prescription de Fenn et Rourke comme expliqué dans la section 6.3. $\square$

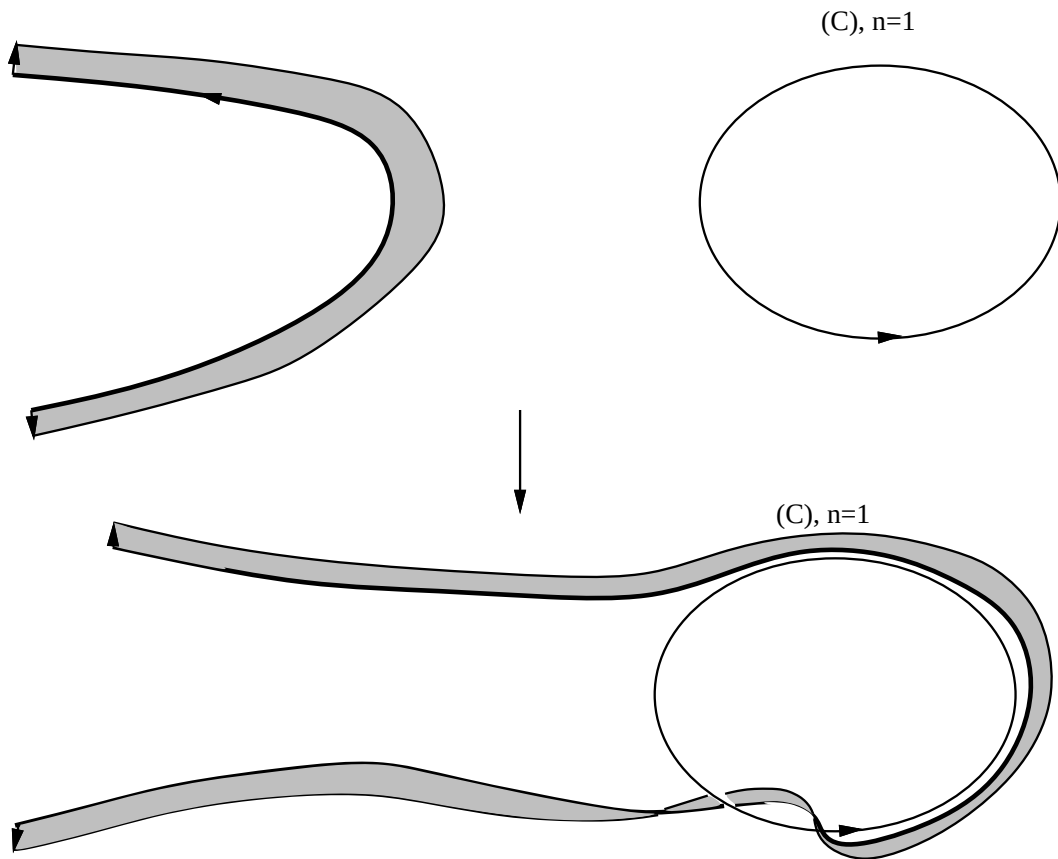
Calcul de Kirby.

Comme nous l'avons vu, deux présentations par chirurgie $[L, \bar{K}]$ et $[L', \bar{K}']$ équivalentes sont faiblement équivalentes et on peut passer de L à L' par une succession de mouvements de type K . En incorporant $\bar{K}$, on produit par ces mouvements un graphe $\bar{K}''$ et donc $[L', \bar{K}']$ et $[L', \bar{K}'']$ sont deux présentations équivalentes.

Ainsi, nous avons ramené le problème à la détermination de tous les graphes trivalents $\bar{K}$ qui donnent des graphes isotopes après chirurgie le long d'un entrelac *fixe*:

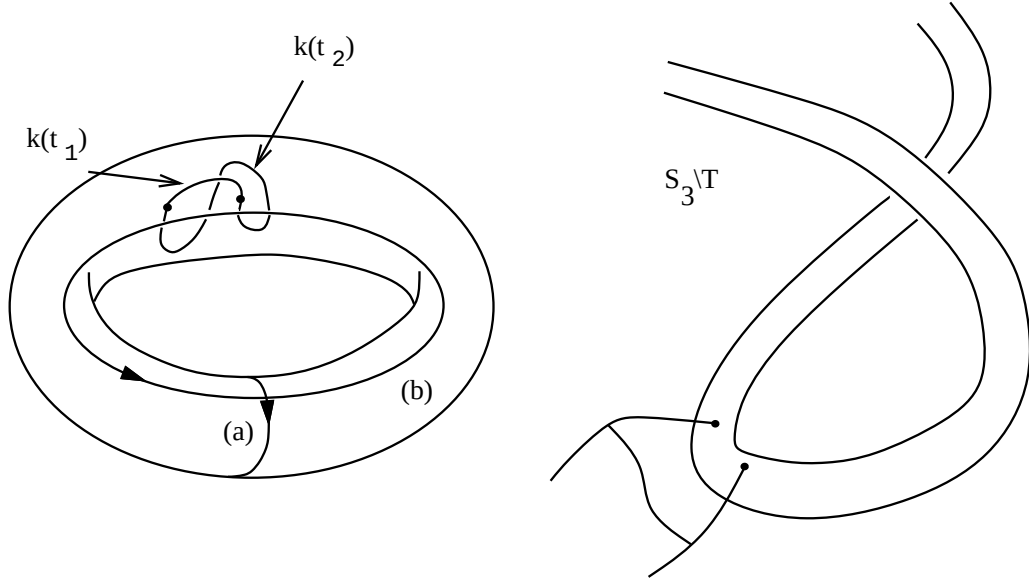
Lemme 30 Soit L un entrelac de chirurgie donné dans S_3 , $\bar{K}$ et $\bar{K}'$ donnent par chirurgie le long de L deux graphes décorés homotopes si et seulement si ils se déduisent l'un de l'autre par une suite finie d'opérations suivantes:

- Homotopies dans $S_3 \setminus L$.
- Mouvements de type $\mathcal{O}_2$ (généralisés): on amène une ligne de $\bar{K}$ près d'une composante C_j de L et par somme connexe on lui adjoint une courbe parallèle à C_j :



Preuve : Dans la variété chirurgisée M_L on peut enlever les tores $(W_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ qui sont précisément ceux que l'on a recollés modulo $T^{n_j}S$ à S_3 pour obtenir M_L . Toute isotopie entre deux graphes dans M_L se décompose en isotopies dans $M_L \setminus (\cup_j W_j)$ et en isotopies qui passent dans les tores W_j . La traduction de ces mouvements par chirurgie inverse dans S_3 répond à notre problème.

- Une isotopie dans $M_L \setminus (\cup_j W_j)$ se traduit par une isotopie dans $S_3 \setminus (\cup_j C_j)$ au niveau des antécédents²³.
- Regardons ce qui se passe quand une ligne de K passe au travers d'un des tores W_j :



En toute généralité, on peut supposer que pendant toute cette partie du mouvement la partie externe au tore W_j considéré ne bouge pas. Les deux courbes $k(t_1)$ et $k(t_2)$ de la figure ci-dessus sont donc homotopes dans le tore W_j . Elles ont deux points fixes identiques sur ∂W_j : A et B . Le lacet $k(t_1) - k(t_2)$ est donc trivial dans le tore plein W_j : c'est un multiple du cycle (a) de W_j . Mais le tore de chirurgie est collé via $T^{n_j}S$ et dans $M_L \setminus (\cup_j W_j)$ qui est aussi $S_3 \setminus (\cup_j T_j)$. Ainsi $k(t_1)$ diffère de $k(t_2)$ par un multiple de $n_j(a) + (b)$ où cette fois (a) et (b) sont relatifs aux tores T_j dans S_3 . La courbe parallèle à la ligne considérée suit exactement le même mouvement. Le lecteur remarquera alors que cela revient à faire un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ sur cette ligne selon la terminologie de Kirby.

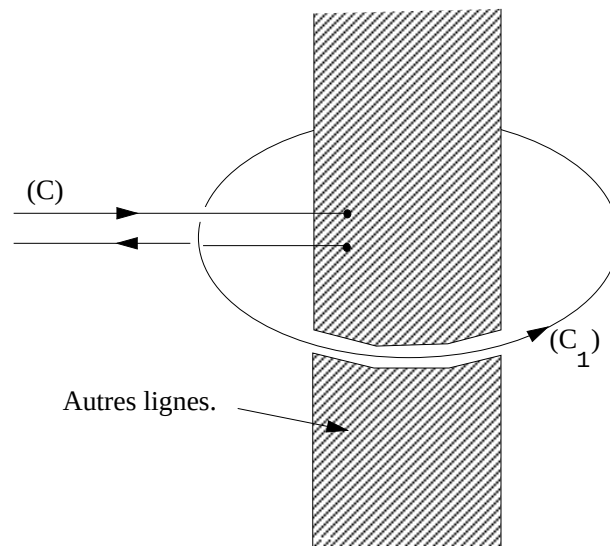
□

Enfin, un mouvement $\mathcal{O}_2$ sur une ligne de $\bar{K}$ peut s'obtenir par une succession de mouvements de type K . Une adaptation triviale du raisonnement de Fenn et Rourke sur les entrelacs donne ce résultat. Rappelons brièvement l'argument qui procède par étapes:

- Notons C_j la composante de L utilisée pour réaliser un mouvement $\mathcal{O}_2$ sur une ligne C de $\bar{K}$. Alors, l'introduction de cercles non noués et entrelacés seulement avec C_j permet de dénouer cette ligne

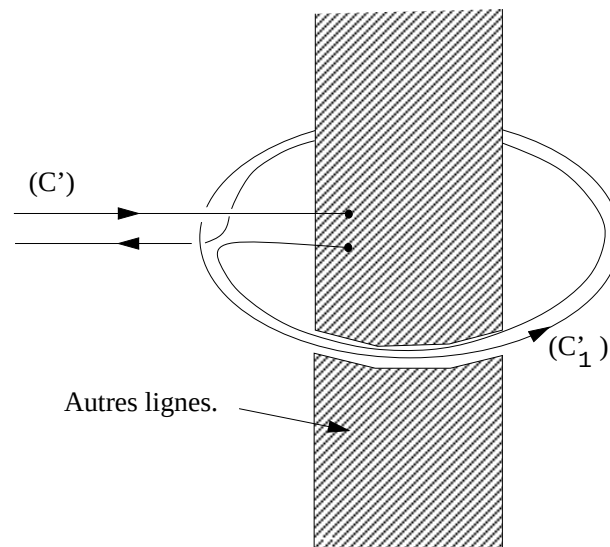
²³ Avec la notation évidente $L = (C_1, \dots, C_n)$.

et de mettre son framing à 1. On aboutit à la situation suivante:



C_j est remplacée par C_1 .

- Nous introduisons un cercle C'_1 de framing 1 et nous enlevons C_1 . Alors C est remplacée par C' :



Ce ne sont que des mouvements de type K . Notons que les lignes autres que C ne sont pas affectées et que C' fait un tour en suivant C'_1 .

- Nous retirons par des mouvements de type K tous les cercles ajoutés à la première étape ce qui transforme C'_1 en C_j . Finalement, C a subi un mouvement $\mathcal{O}_2$ le long de C_j .

Ceci prouve le théorème de Kirby "étendu".

6.A.3 Cobordismes à quatre dimensions et calcul de Kirby.

Il existe une relation extrêmement intéressante entre le théorème de Kirby et la topologie quadridimensionnelle que nous rappelons ici. Plus précisément, une présentation par chirurgie de M sans bord ni décoration est naturellement associée à une variété à quatre dimensions $Y_4(L)$ bordant M : $\partial Y_4(L) = M$. L'idée est relativement simple: à l'entrelac trivial, nous associons la boule B_4 dont le bord est S_3 . Pour un entrelac L quelconque, nous modifions L en rajoutant des 'pièces élémentaires' de dimension quatre (des 2-anses $D_2 \times D_2$) de manière à ce que l'effet sur le bord corresponde à la chirurgie. Les travaux de Thom nous ont appris comment décrire toutes les variétés topologiques compactes, connexes et orientables qui bordent une variété tridimensionnelle compacte orientable et connexe. C'est d'ailleurs en suivant cette voie que Kirby a pu montrer son critère d'équivalence entre les différentes présentations par chirurgie d'une variété tridimensionnelle donnée. Ici, nous cherchons simplement à caractériser géométriquement l'écart, en nombre de mouvements de type K , entre deux présentations par chirurgie. Dans cette optique, nous avons simplement besoin d'interpréter dans le contexte quadridimensionnel l'action des mouvements de Kirby. Ceci n'est faisable que si on dispose d'une classification topologique des variétés (simplement connexes) en dimension 4.

Il est bien connu que les variétés topologiques orientables, connexes, compactes, sans bord et de dimension deux sont classées par leur forme d'intersection sur le premier groupe d'homologie à valeur dans $\mathbb{Z}$. A quatre dimensions, on dispose d'un résultat quelque peu analogue mais qui utilise l'espace H_2 [67].

Anisi, les types d'homotopie des variétés topologiques quadridimensionnelles compactes, orientables, connexes et *simplement connexes* sans bord sont classées par leur forme d'intersection sur H_2 cette fois. Cette forme est symétrique, non dégénérée et unimodulaire par dualité de Poincaré. Cette forme définie sur $H_2(M_4, \mathbb{Z})$ est soit paire (où encore de type 1) soit elle est dite de type 2. La classification des variétés topologiques sans bord simplement connexes remonte à 1982:

Théorème 72 (M. Freedman) *Pour chaque classe d'équivalence de formes unimodulaires paires en dimension finie, il existe une et une seule classe de variétés topologiques admettant un de ses représentants comme forme d'intersection sur le H_2 à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas des formes de type 2, il existe exactement deux classes d'homéomorphismes correspondant à une telle classe d'équivalence de formes bilinéaires.*

Ce résultat suggère de partir de la boule B_4 qui borde la sphère S_3 et de changer son homologie de degré deux en rajoutant des anses $D_2 \times D_2$. Stricto sensu, B_4 possède un bord et on sort assez nettement du cadre du résultat précédant mais le point important n'en demeure pas moins qu'il faut agir sur l'homologie de degré deux.

Pour cela, on part d'un entrelac dans S_3 auquel on rajoute précisément les 2-anses $D_2 \times D_2$. Pour ce faire, on remarque que le framing d'une composante C_j de L définit un fibré en disques au dessus de C_j ce qui permet de recoller une partie du bord de $D_2 \times D_2$ à $[S_3, L]$: $\partial(D_2 \times D_2) = (D_2 \times S_1) \cup (S_1 \times D_2)$. Nous obtenons ainsi une variété quadridimensionnelle $Y_4(L)$ de bord la chirurgisée M_L . Pour fixer les idées, supposons que l'on recolle $S_1 \times D_2$ à $[S_3, L]$. Le bord de $Y_4(L)$ est alors obtenu en enlevant un tore plein $D_2 \times S_1$ autour de C_j et en recollant $D_2 \times S_1$ sur la frontière $S_1 \times S_1$ ainsi créée en suivant une courbe parallèle à C_j . Le passage de $D_2 \times S_1$ à $S_1 \times D_2$ implique que l'on effectue le recollement via S . Les effets du framing sont pris en compte et nous retrouvons exactement la prescription de chirurgie le long de C_j .

L'effet des mouvements de Kirby s'interprète très bien avec cette image. Le mieux est encore de

reprendre la description originelle de Kirby qui n'utilisait que les mouvements de type K spéciaux²⁴ et les mouvements $\mathcal{O}_2$. Le résultat de base est le suivant [104]:

Proposition 33 *Changer la présentation par chirurgie par un mouvement de type $\mathcal{O}_2$ ne change pas $Y_4(L)$. Par contre, ajouter à L une composante non nouée ni entrelacée de framing $\varepsilon = \pm 1$ change $Y_4(L)$ de la manière suivante:*

$$(6.56) \quad \varepsilon = 1 : Y_4(L) \mapsto Y_4(L) + P_2(\mathbb{C})$$

$$(6.57) \quad \varepsilon = -1 : Y_4(L) \mapsto Y_4(L) + \overline{P_2(\mathbb{C})}$$

Tout d'abord rappelons que $P_2(\mathbb{C})$ et $\overline{P_2(\mathbb{C})}$ sont homéomorphes au quotient de $\mathbb{C}^3$ sous l'action de $\mathbb{C}^*$:

$$\lambda \cdot (z_1, z_2, z_3) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$$

L'espace ordinaire $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ se plonge dans le projectif par:

$$(z_1, z_2) \mapsto \text{Cl}(z_1, z_2, 1)$$

et il reste une partie obtenue en prenant $z_3 = 0$ qui est topologiquement un espace projectif $P_1(\mathbb{C})$, c'est à dire une sphère S_2 . Pour des raisons évidentes, on parle de sphère à l'infini.

Pour faire une somme connexe avec un plan projectif complexe, nous enlevons à $P_2(\mathbb{C})$ une boule B_4 n'intersectant pas la sphère à l'infini ce qui fait apparaître une frontière S_3 et nous recollons $P_2(\mathbb{C}) \setminus B_4$ à $Y_4(L)$ à laquelle on a préalablement enlevé une boule B_4 .

Enfin, il convient de rappeler que la sphère à l'infini est un générateur de $H_2(P_2(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ d'auto-intersection 1. Dans le cas de $\overline{P_2(\mathbb{C})}$, l'auto-intersection change de signe.

6.B Propriétés du polynôme de Jones.

Il serait bien dommage de terminer sans avoir vu l'exemple le plus connu d'invariant de nœud: le polynôme de Jones [100]. Nous allons rappeler brièvement comment le calculer, et surtout donner ses propriétés de factorisation par union disjointe d'entrelacs non entrelacés dans S_3 et par somme connexe. Cet Appendice s'inspire des considérations de Witten [192].

6.B.1 Définition

Le cas le plus simple²⁵ de TTR est celui où il existe une couleur ϕ telle que:

$$\dim(H_{0,4}^{[\phi,\phi,\phi,\phi]}) = 2$$

car sinon la matrice B restreinte aux blocs n'ayant que ϕ sur leurs quatre pattes externes est un nombre et l'équation de Yang-Baxter ne contient plus aucune information. Bien entendu, on a pris $\hat{\phi} = \phi$. Rappelons que:

$$\dim(H_{0,4}^{[\phi,\phi,\phi,\phi]}) = \sum_x N_{\phi,\phi}^x N_{x,\phi}^\phi$$

²⁴Appelés mouvements $\mathcal{O}_1$!

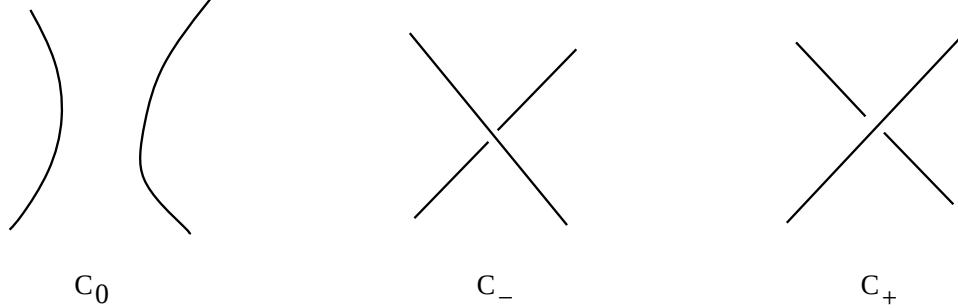
²⁵Mais non-trivial...

et dans le modèle de WZW associé au groupe $SU(2)$, la dimension est bien 2 pour ϕ associé à la représentation de spin 1/2 de $SU(2)$:

$$N_{1/2,1/2}^x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $k \geq 2$.

Si on considère une projection plane de l'entrelac L , il apparaît trois types d'évènements qui sont les suivants:



En découpant une sphère S_2 pour isoler chacun de ces évènements, on se retrouve avec trois boules B_3 dont la frontière est une sphère avec 4 points marqués et auxquelles on associe trois états de $H_{0,4}$. L'invariant topologique cherché est la fonction de partition de $[S_3, L_\phi]$ où toutes les lignes portent la couleur ϕ . Mais, les trois états associés aux évènements forment une famille liée. Nous les noterons $|C_0\rangle$, $|C_+\rangle$ et $|C_-\rangle$. Nous attendons donc l'existence de (α, β, γ) non tous nuls tel que:

$$\alpha|C_+\rangle + \beta|C_-\rangle + \gamma|C_0\rangle = 0$$

Alors, si dans L on remplace un croisement C_+ par C_- (ce qui donne L_-) et par C_0 (ce qui nous donne L_0), les fonctions de partition de ces entrelacs sont reliées par:

$$\alpha Z[S_3, L] + \beta Z[S_3, L_-] + \gamma Z[S_3, L_0] = 0$$

Cette formule exprime la fonction de partition de L en fonction de celles d'entrelacs plus simples... Par étapes, on se ramène à la fonction de partition de l'entrelac trivial qui, dans le cas où celui-ci possède n composantes, s'écrit:

$$Z[\mathcal{L}_n] = \left(\frac{S_0^\phi}{S_0^0} \right)^n \times S_0^0$$

Il nous reste à calculer α , β et γ . Nous laissons cela en exercice au lecteur. La méthode est élémentaire et consiste à utiliser deux fonctions de partition auxiliaires [36]. Le résultat final est alors:

$$(6.58) \quad x|C_+\rangle + x^{-1}|C_-\rangle = (x^2 + x^{-2})|C_0\rangle$$

En conséquence, nous disposons de la relation:

$$xZ[S_3, L_+] + x^{-1}Z[S_3, L_-] = (x^2 + x^{-2})Z[L_0]$$

et on peut alors exprimer $Z[S_3, \mathcal{L}_n]$ à partir de x . Dans le modèle de WZW, la matrice S est donnée par:

$$S_0^j = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \left(\frac{\pi(2j+1)}{k+2} \right)$$

et donc:

$$\frac{S_0^\phi}{S_0^0} = x^2 + x^{-2}$$

Nous définissons alors:

$$(6.59) \quad P_L(x, x^{-1}) = \sqrt{\frac{k+2}{2}} Z[S_3, L]$$

qui est un polynôme invariant topologique qui coïncide²⁶ avec le polynôme de Jones tel qu'il a été retrouvé par Kaufmann et d'autres. Notons que comme $Z[S_3, \hat{L}] = Z[S_3, L]^*$ où $\hat{L}$ est l'image miroir de L , on a:

$$P_{\hat{L}}(x) = P_L(x^{-1})$$

ce qui signifie que P_L distingue entre la droite et la gauche!

6.B.2 Propriétés de factorisation.

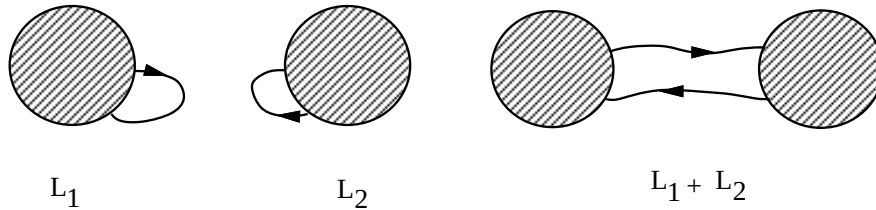
Finalement, on peut utiliser la fonctorialité de la théorie des champs. L'espace $H_{0,0}$ est unidimensionnel et une base en est donnée par $\phi[B_3]$ de norme au carré S_0^0 . En conséquence:

$$Z[S_3, L_1 \cup L_2] = \frac{Z[S_3, L_1] Z[S_3, L_2]}{S_0^0}$$

en supposant bien sûr que L_1 et L_2 ne sont pas entrelacés. De même avec $H_{0,2}^{[\phi,\phi]}$:

$$Z[S_3, L_1 + L_2] = \frac{Z[S_3, L_1] Z[S_3, L_2]}{S_0^\phi}$$

Ici $L_1 + L_2$ désigne la somme connexe des entrelacs L_1 et L_2 :



La traduction sur le polynôme de ces relations est:

$$(6.60) \quad P_{L_1 \cup L_2}(x) = P_{L_1}(x) P_{L_2}(x)$$

$$(6.61) \quad P_{L_1 + L_2}(x) = \frac{P_{L_1}(x) P_{L_2}(x)}{x^2 + x^{-2}}$$

Cette dernière propriété n'est d'ailleurs pas vraiment claire du point de vue de la relation de récurrence: son sens profond est un peu occulté et n'apparaît qu'en utilisant la théorie des champs.

²⁶A une normalisation près...

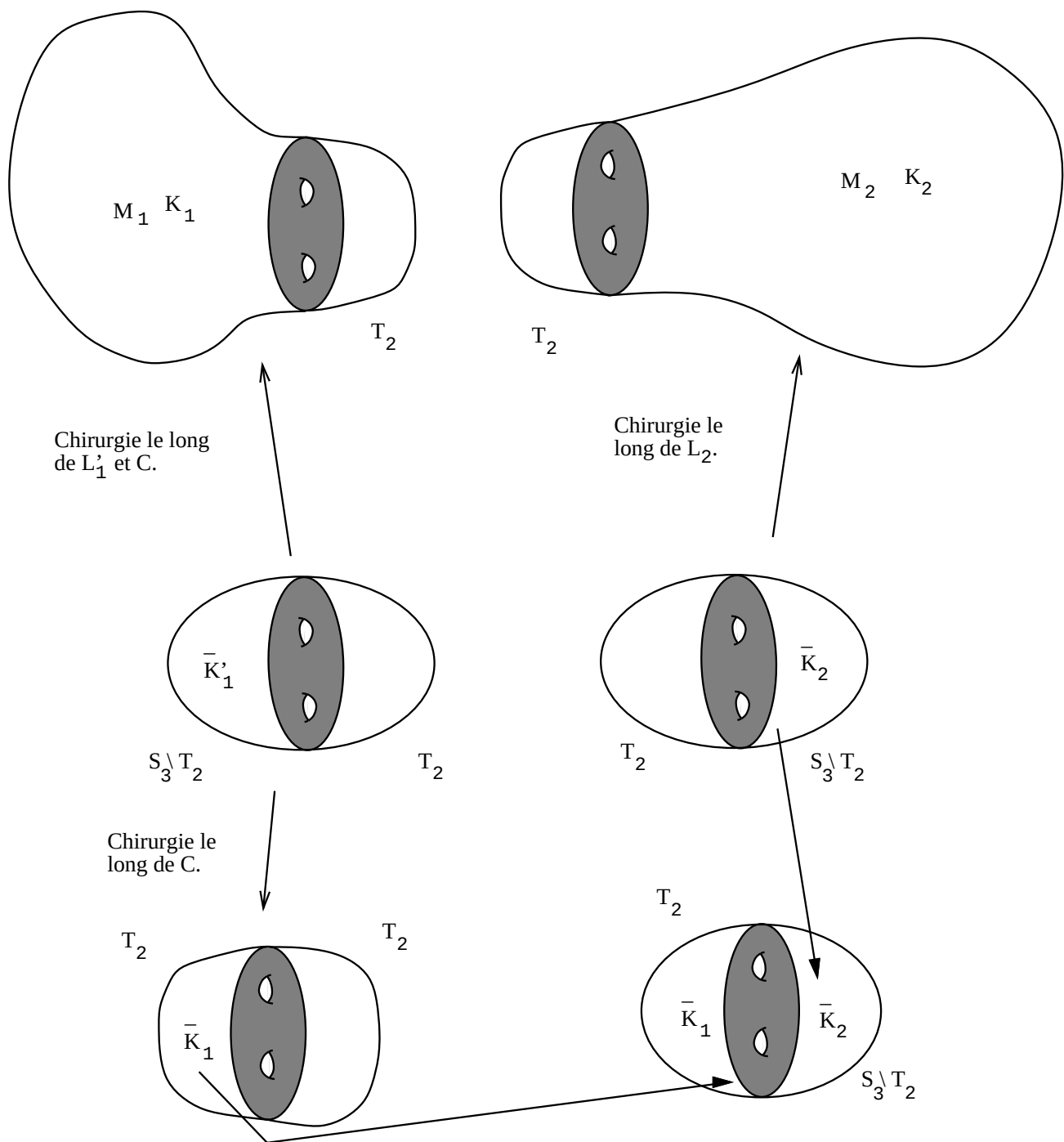


FIG. 6.2 - : Mouvements de chirurgie utilisés pour prouver la fonctorialité projective.

Chapitre 7

Affaires à Suivre...

Ce chapitre fait office de conclusion mais surtout indique quelques unes des directions ultérieures dans lesquelles s’est engagé mon travail. Le lecteur ne cherchera donc pas ici un constat d’autosatisfaction ni d’achèvement mais plutôt un état de mes ignorances et l’ébauche d’un travail ultérieur.

Je commence par résumer les principaux résultats obtenus dans cette thèse, puis j’indique quelques unes des directions de recherche que j’ai commencé à explorer. Par exemple, je me suis attaché à décrire comment les considérations des chapitres précédents pouvaient jeter un éclairage intéressant sur l’“Esquisse d’un programme” de Grothendieck [91]. En particulier, j’ai détaillé la construction, encore inachevée, de la “Tour modulaire”, telle que je l’ai entamée avec l’aide de Pascal Tran-Ngoc-Bich. Je détaille ensuite la construction des théories topologiques bidimensionnelles à partir des théories topologiques tridimensionnelles définies au chapitre 6. Enfin, j’indique comment ces considérations pourraient servir à explorer le monde des “dessins d’enfants” entrevu par Grothendieck dans l’Esquisse...

7.1 Histoire de résumer?

Dans cette section, je donne un résumé des résultats principaux que j’ai obtenu et j’esquisse les directions dans lesquelles je me suis engagé. J’insiste principalement sur les *motivations* de ces explorations ultérieures dont certains aspects sont détaillés dans les sections suivantes.

7.1.1 Le résultat principal.

La principale contribution de cette thèse est la construction d’une théorie topologique rationnelle projective à partir de toute solution des équations de Moore et Seiberg. Plus précisément, nous pouvons énoncer le théorème principal sous la forme suivante:

Théorème 73 *A toute solution des équations de Moore et Seiberg est associée une théorie topologique projective rationnelle en dimension trois.*

Une autocritique me paraît nécessaire: ce théorème n’est pas (encore) formulé dans le langage catégorique utilisé au chapitre 1. En effet, la forme explicite des équivalences entre ces théories n’est pas encore suffisamment claire pour moi. De même, je n’ai pas analysé le problème correspondant au niveau des théories conformes. En conséquence, je préfère ne pas en dire plus. Le lecteur pourrait mettre en cause l’utilité du langage “catégorique” introduit au chapitre 1 mais j’espère que la construction des théories topologiques bidimensionnelles que je décris plus loin dissipera ces doutes.

Une autre lacune qui n'aura pas échappé au lecteur est l'arbitraire du produit scalaire défini par la formule 5.24 du chapitre 5. Cette question reste encore ouverte, les arguments donnés en 5.3.2 constituent un état de l'art loin d'être définitif.

7.1.2 Comment aller beaucoup plus loin?

A partir de ce résultat subsistent un certain nombre de *gros* problèmes encore irrésolus. En vrac:

- D'abord les problèmes dits de reconstruction: comme nous l'avons vu, on peut essayer de construire une solution des équations de Moore et Seiberg à partir de la théorie des représentations d'un groupe ou d'un groupe quantique et même d'une algèbre de quasi-Hopf. Un préliminaire consiste à faire le lien entre la démarche de Reshetikhin et Turaev [151] qui construisent des théories topologiques projectives en dimension trois à partir de la théorie des représentations d'une algèbre de quasi-Hopf et notre point de vue. En particulier, une première étape dans ce programme est la proposition suivante:

Proposition 34 *La théorie des représentations d'une algèbre de quasi-Hopf fournit une solution des équations de Moore et Seiberg.*

Toutefois il n'est pas clair du tout que la structure de algèbre de quasi-Hopf soit la plus générale possible et la “face nord” de cette étude consiste à trouver quelle structure fournit *toutes* les solutions des équations de Moore et Seiberg (théorème de Tannaka-Krein-Deligne pour les théories topologiques tridimensionnelles).

Dans le même ordre d'idées, étant donné une solution des équations de Moore et Seiberg, nous aimerions réaliser les matrices de “braiding” et de matrices de transformations modulaires comme les matrices de monodromie de fonctions définies sur les espaces de modules correspondants. Par exemple, les matrices S et T obtenues à partir d'une algèbre de Verlinde peuvent-elles être obtenues comme matrices de transformations modulaires de fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré avec un développement en série entière en $q = \exp(2\pi i\tau)$ à coefficients entiers positifs¹?

Je n'ai aucune conjecture précise à proposer actuellement. Il me semble que ce problème touche à des questions d'arithmétique particulièrement profondes.

Enfin, si une solution des équations de Moore et Seiberg se réalise à partir des monodromies de certaines fonctions définies sur les espaces de modules, nous pouvons chercher à reconstruire une algèbre chirale dont les représentations redonnent précisément cette solution. Si ces étapes de reconstruction fonctionnaient, cela achèverait la reconstruction d'une théorie conforme bidimensionnelle (avec ses champs primaires, son algèbre chirale et donc *tous* ses champs) associée à la théorie tridimensionnelle définie par les données de Moore et Seiberg. Rappelons que la solution à ce problème, si elle existe, n'est pas unique².

Finalement, pour résumer:

Problème ouvert 6 *Quelles conditions doit on imposer à une solution des équations de Moore et Seiberg pour qu'elle provienne d'une théorie conforme rationnelle?*

¹Et peuvent donc éventuellement être des dimensions d'espaces vectoriels comme dans le contexte des théories conformes.

²Le module du Moonshine est une algèbre chirale dont les données de Moore et Seiberg sont triviales!

- La classification des solutions des équations de Moore et Seiberg est un problème majeur mais qui semble hors de portée actuellement. Mais plus simplement, étant donné une algèbre de Verlinde, nous avons vu comment reconstruire une matrice S (qui n'est d'ailleurs pas toujours symétrique); mais on peut chercher à relier entre elles toutes les solutions³ des équations de Moore et Seiberg associées à l'algèbre de Verlinde de départ.

D'un autre point de vue, il serait extrêmement important de savoir quelle est l'efficacité des invariants issus des théories topologiques dans la classification des variétés de dimension trois.

Définition 81 *On appelle famille séparante de théories topologiques, une famille $\mathfrak{F} = (T)_T$ de théories topologiques tridimensionnelles projectives rationnelles telle que, deux variétés tridimensionnelles sans bord, non décorées soient difféomorphes si et seulement si, pour toute théorie $T \in \mathfrak{F}$, leur fonctions de partition dans T soient égales.*

La conjecture principale est la suivante:

Conjecture 3 *La famille de théories topologiques associée aux équations de Moore et Seiberg est séparante.*

Il paraît actuellement impossible de savoir si ces invariants “séparent” les variétés de dimension trois, nous cherchons donc à ramener le problème au cas des nœuds et des entrelacs dans S_3 et à mesurer la “complexité” de ces nœuds grâce à ces invariants. Ces idées sont encore balbutiantes mais leur importance est indéniable. Rappelons qu'on définit la notion de nœud ou d'entrelac premier:

Définition 82 *Un entrelac L est dit premier s'il n'est pas possible de couper $[S_3, L]$ par une sphère avec au plus deux points marqués.*

Nous avons vu sur l'exemple du polynôme de Jones que, dans ce cas, nous disposons d'une formule très simple pour calculer la fonction de partition de la sphère S_3 , décorée par cet entrelac, en fonction des parties de celui-ci situées de part et d'autre de la sphère S_2 de découpage. Ce résultat est général car $\dim(H_{0,2}^{[i,i]}) = 1$. Il est donc légitime de se ramener à des entrelacs premiers. La conjecture que j'é mets est donc:

Conjecture 4 *Si les théories topologiques fournissent un jeu d'invariants séparants pour les entrelacs premiers dans S_3 , alors la conjecture 3 est vérifiée.*

Toutefois, il convient de souligner qu'aucun de ces problèmes ne semble vraiment facile. Heureusement, des objectifs plus modestes existent aussi.

³Quand il y en a!

7.1.3 Comment aller moins loin?

Parmi les points qui méritent d'être éclaircis se trouvent les questions relatives à la projectivité des théories topologiques que nous avons construites et à la localité à la frontière. Ces deux problèmes sont en fait reliés:

- Il est facile de montrer que les théories construites au chapitre 6 sont locales à la frontière et que de plus, nous avons une formule du type:

$$\psi_{\Sigma_1, \Sigma_2} \circ \rho_{\Sigma}(f_1 \sharp f_2) = [\rho_1(f_1) \otimes \rho_2(f_2)] \circ \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}$$

où $f_{1,2}$ sont des isomorphismes de $\Sigma_{1,2}$, surfaces avec un cercle frontière, et $f_1 \sharp f_2$ désigne le difféomorphisme de $\Sigma_1 \sharp \Sigma_2$ que l'on attend⁴. Nous verrons que les cocycles vérifient:

$$\mu(f_1 \sharp f_2, g_1 \sharp g_2) = \mu(f_1, g_1) \mu(f_2, g_2)$$

Nous allons donc commencer par montrer que les théories topologiques construites dans cette thèse sont bien locales à la frontière. Puis, comme le suggère la formule exprimant $\rho(f_1 \sharp f_2)$ comme un produit tensoriel, nous allons étudier la structure de *l'ensemble de tous les groupes modulaires* en essayant de deviner ce que peut être la *tour modulaire* entrevue par Grothendieck.

Je vais donc tenter de définir cette tour en m'appuyant sur la notion de découpe d'une surface au sens le plus naïf du terme! Si le lecteur a quelque connaissance de l'Esquisse, il comprendra que tout ceci devait être connu de Grothendieck lui-même... J'ai donc suivi le chemin naturel suivant:

- J'ai défini la notion de découpe d'une surface, de découpe équivalente et d'invariant associé à une découpe de manière à caractériser les classes d'équivalence de découpes.
- J'ai associé à chaque découpe un morphisme entre groupes modulaires. Ils jouent le rôle "d'escaliers" reliant les différents "étages" de la Tour. Les "étages" sont classés selon Grothendieck par la dimension de l'espace de Teichmüller associé. Les morphismes associés aux découpes équivalentes sont reliés: cette structure constitue pour moi une TOUR MODULAIRE.
- J'ai tenté de définir la notion de représentation (éventuellement projective) et d'automorphisme de cet objet. C'est dans la théorie des représentations de la Tour que la localité à la frontière joue un rôle important. Intuitivement, une représentation de la Tour est à valeurs dans une autre tour, formée cette fois par des espaces de Hilbert. Les morphismes de localité à la frontière sont alors le miroir des morphismes entre groupes modulaires dans la Tour.

Tout ceci fait l'objet de la section 7.3 de ce chapitre. Bien entendu, ce travail est encore en cours et ce que j'ai écrit est susceptible d'améliorations et de modifications. Il m'a néanmoins semblé utile de coucher ces réflexions sur le papier pour les quelques personnes que cela intéresse.

Enfin, un des buts de tout ceci est d'obtenir une preuve de la conjecture de Grothendieck [91, Paragraphe 2] qui dit:

L'intérêt d'une connaissance complète de la tour (savoir les cas où la dimension modulaire $N = 3g - 3 + n$ est inférieure ou égale à 2) réside dans ce principe, que la tour *entière* se

⁴Le lecteur aura remarqué que je désigne par $f_{1,2}$ les difféomorphismes de surfaces à bords mais aussi les difféomorphismes d'objets de la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ canoniquement associés à $f_{1,2}$!

reconstitue à partir des deux premiers étages, en ce sens que via l'opération de "recollement", l'étage 1 fournit un système complet de générateurs, et l'étage 2 un système complet de relations.

L'analogie au niveau de la théorie des représentations de ce résultat est la construction d'une théorie topologique tridimensionnelle à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg. La conjecture que j'avance mais qui demande encore à être précisée est la suivante:

Conjecture 5 *Il y a "équivalence" entre les représentations "rationnelles" de la tour modulaire, les théories topologiques tridimensionnelles locales à la frontière, et les solutions des équations de Moore et Seiberg.*

En particulier, "l'équivalence" en question se doit d'être une équivalence entre catégories. De plus, le rôle de l'unitarité dans la théorie topologique demande à être traduit dans le contexte de la théorie des représentations de la tour modulaire. Enfin, dans les théories topologiques que j'ai construites, la ligne portant l'indice 0 joue un rôle très particulier et je ne sais pas quel est l'analogie dans les représentations de la tour modulaire.

Dans cette optique, les équations de Moore et Seiberg apparaissent comme les "traces" des relations de la tour modulaire dans les deux premiers étages. Le fait que ces relations permettent de reconstruire toute la tour (selon Grothendieck) entraîne, si la conjecture 3 est vraie, que l'on peut reconstruire la théorie topologique à partir de la solution des équations de Moore et Seiberg. Toutefois, il est important de trouver une démonstration de ce résultat au niveau des groupes. J'ai déjà des indications très sérieuses dans ce sens.

Enfin, on peut penser étudier l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur la tour modulaire en suivant l'idée de Grothendieck. L'obstacle principal est la détermination de l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\hat{\pi}_{0,3}$:

Plus extraordinaire encore cette opération⁵ est *fidèle* -à vrai dire, elle est déjà fidèle sur le premier "étage" non trivial de cette tour, savoir $\hat{T}_{0,4}$ - ce qui signifie essentiellement que l'action extérieure de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur le groupe fondamental $\hat{\pi}_{0,3}$ de la droite projective $\mathbb{P}_1$ sur $\mathbb{Q}$ privée des trois points $\{0, 1, \infty\}$ est déjà fidèle. Ainsi le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe. Il s'ensuit qu'un élément de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ peut être "paramétré" (de diverses façons équivalentes d'ailleurs) par un élément convenable de ce groupe profini $\hat{\pi}_{0,3}$ (un groupe profini libre à deux générateurs), ou par un système de tels éléments, ce ou ces éléments étant d'ailleurs soumis à certaines conditions simples, nécessaires (et sans doute non suffisantes) pour que ce ou ces éléments correspondent bien à un élément de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Une des tâches les plus fascinantes ici, est justement d'appréhender des conditions nécessaires *et* suffisantes sur un automorphisme extérieur de $\hat{\pi}_{0,3}$ i.e. sur le ou les paramètres correspondants, pour qu'il provienne d'un élément de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -ce qui fournirait une description "purement algébrique", en termes de groupes profinis et sans référence à la théorie de Galois des corps de nombres de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$!

En résumé, le problème naturel qui se pose est le suivant:

Problème ouvert 7 *Quelles sont les données minimales qui définissent un automorphisme de la tour modulaire? Et quelles sont les contraintes que doivent satisfaire ces données?*

⁵De $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur la tour modulaire.

J'ai tenté de définir une notion d'automorphisme de la tour mais je ne prétends pas être arrivé à quelque chose de définitif. Ma définition est peut être incomplète. Il reste maintenant à regarder quelles sont les données minimales et quelles sont les contraintes qu'elles doivent vérifier. Dans notre optique, il devrait en ressortir un algorithme pour construire à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg d'autres solutions de ces mêmes équations⁶.

Enfin, le problème de reconstruction suivant semble de la plus haute importance pour l'étude de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et naturellement on arrive à:

Problème ouvert 8 *Est ce que tout automorphisme de la tour est dans l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$?*

Mais je ne vois pas de réponse à cette question! J'espère que l'approche globale que permet les théories topologiques permettra des avancées significatives dans ce domaine.

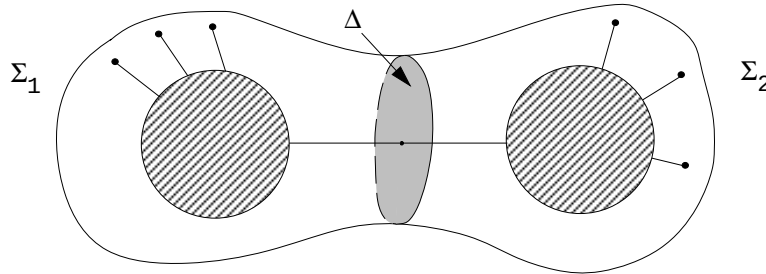
7.2 La localité à la frontière dans les théories tridimensionnelles.

Le but de cette section est de montrer que les théories construites au chapitre 6 sont locales à la frontière. Toutefois, comme nous allons le voir plus loin, la notion de localité à la frontière doit encore être perfectionnée, ou plutôt élargie, dans l'optique d'une étude de la Tour modulaire.

7.2.1 Expression des morphismes de localité à la frontière.

Il est relativement facile de construire explicitement les morphismes de localité à la frontière si l'on effectue un bon choix de base.

Dans ce qui suit, nous décomposons la surface Σ en deux surfaces $\Sigma_{1,2}$ recollées par un cercle commun. Σ_a est de genre g_a avec n_a points marqués et possède un cercle frontière! Nous utilisons la base définie en section 6.1.1 mais nous supposons que le cercle commun à Σ_1 et Σ_2 est homotopiquement trivial dans le tore plein. En faisant agir un difféomorphisme, il est toujours possible de se ramener à cette situation. De plus, nous supposons que le graphe est choisi de telle sorte qu'une et une seule ligne coupe le disque Δ s'appuyant sur le cercle $\partial\Sigma_{1,2}$ comme indiqué sur le schéma suivant:



Avec nos notations favorites, nous posons

$$(7.1) \quad \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}(|T_1 \sharp T_2, \mathcal{G}_1 \sharp \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_1 \sharp_p \mathcal{C}_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{S_0^p}} (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2\rangle)$$

⁶Certaines hypothèses techniques qui ont été adjointes aux relations modulaires et de dualité proprement dites devront sans doute être abandonnées...

Avant d'aller plus loin, il convient d'introduire une notation commode:

- Si $C = \{i_1, \dots, i_n\}$ est l'ensemble des pattes externes d'un graphe $\mathcal{G}$, alors on désigne par C la quantité

$$\prod_{j=1}^n S_0^{i_j}$$

Soient M_1 et M_2 deux morphismes allant du vide vers $\Sigma_1 \# \Sigma_{g,n}$ et $\widehat{\Sigma}_{g,n} \# \Sigma_2$. Les deux morphismes sont décorés par des graphes $\mathcal{G}_\alpha$ coloriés par $\mathcal{C}_\alpha$. Plus précisément, E_α désigne les indices des pattes externes sortant par Σ_α et C les indices des pattes externes de M_1 sortant par $\Sigma_{g,n}$. La base adaptée au calcul de $\psi_{12}(\phi[M_1 \#_{\Sigma_{g,n}} M_2])$ est notée $|T_1 \#_{\Delta} T_2, \mathcal{G}_{1,2}, \mathcal{C}_{1,2}^p\rangle$ ou $|T_1 \#_{\Delta} T_2, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_1 \#_p \mathcal{C}_2\rangle$. La norme au carré d'un tel vecteur est donnée par la formule (7.2):

$$(7.2) \quad N_{12} = \sqrt{E_1 E_2} (S_0^0)^{-g_1 - g_2 + 1 - (n_1 + n_2)/2}$$

Nous exprimons tous les vecteurs créés par les différents cobordismes dans les bases adaptées:

$$(7.3) \quad \phi[M_1 \#_{\Sigma_{g,n}} M_2] = \sum_{\mathcal{C}_{1,2}^p} \frac{Z[(M_1 \# M_2) \# (\widehat{T_1 \#_{\Delta} T_2}, \widehat{\mathcal{G}_{1,2}}, \widehat{\mathcal{C}_{1,2}^p})]}{N_{12}} |T_1 \#_{\Delta} T_2, \mathcal{G}_{1,2}, \mathcal{C}_{1,2}^p\rangle$$

et on applique $\psi_{12} = \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}$:

$$(7.4) \quad \psi_{12}(\phi[M_1 \#_{\Sigma_{g,n}} M_2]) = \sum_{\mathcal{C}_{1,2}^p} \frac{Z[(M_1 \# M_2) \# (\widehat{T_1 \#_{\Delta} T_2}, \widehat{\mathcal{G}_{1,2}}, \widehat{\mathcal{C}_{1,2}^p})]}{N_{12} \sqrt{S_0^p}} \times (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2\rangle)$$

D'autre part,

$$(7.5) \quad \phi[M_1] = \sum_{\mathcal{C}_1^q, \mathcal{L}^q} \frac{Z[M_1 \# (\widehat{T_1 \# T_g}, \widehat{\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_{g,n+1}}, \widehat{\mathcal{C}_1^q \# \mathcal{L}^q})]}{\| |T_1 \# T_g, \mathcal{G}_1 \#_{g,n+1}, \mathcal{C}_1 \# \mathcal{L}\rangle \|^2} |T_1 \# T_g, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{C}_1^q \# \mathcal{L}^q\rangle$$

$$(7.6) \quad \psi_{\Sigma_1, \Sigma_{g,n}}(|T_1 \# T_g, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{C}_1^q \# \mathcal{L}^q\rangle) = \frac{1}{\sqrt{S_0^q}} (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^q\rangle \otimes |T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^q\rangle)$$

avec une formule analogue concernant $\psi_{\widehat{\Sigma}_{g,n}, \Sigma_2}(\phi[M_2])$. Mais nous savons bien que

$$(7.7) \quad Z[M_1 \# (\widehat{T_1 \# T_g}, \widehat{\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_{g,n+1}}, \widehat{\mathcal{C}_1^q \# \mathcal{L}^q})] = Z[M_1 \# [\widehat{T_1}, \widehat{\mathcal{G}_1}, \widehat{\mathcal{C}_1^q}] \# [\widehat{T_g}, \widehat{\mathcal{G}_{g,n+1}}, \widehat{\mathcal{L}^q}]]$$

Ceci montre que:

$$(7.8) \quad \psi_{\Sigma_1, \Sigma_{g,n}}(\phi[M_1]) = \sum_{\mathcal{C}_1^q, \mathcal{L}^q} \frac{Z[(M_1 \# [\widehat{T_1}, \widehat{\mathcal{G}_1}, \widehat{\mathcal{C}_1^q}]) \# [\widehat{T_g}, \widehat{\mathcal{G}_{g,n+1}}, \widehat{\mathcal{L}^q}]]}{\sqrt{S_0^q E_1 C}} (S_0^0)^{-(g_1 + g + \frac{n+n_1}{2} - 1)} |T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^q\rangle \otimes |T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^q\rangle$$

Et de même,

$$(7.9) \quad \psi_{\widehat{\Sigma}_{g,n}, \Sigma_2}(\phi[M_2]) = \sum_{\mathcal{C}_2^{q'}, \mathcal{L}^{q'}} \frac{Z[[T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^{q'}] \# (M_2 \# [\widehat{T_2}, \widehat{\mathcal{G}_2}, \widehat{\mathcal{C}_2^{q'}}])]}{\sqrt{E_2 C S_0^{q'}}} (S_0^0)^{-(g_2 + g + \frac{n+n_2}{2} - 1)} |\widehat{T_g}, \widehat{\mathcal{G}_{g,n+1}}, \widehat{\mathcal{L}^{q'}}\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2^{q'}\rangle$$

Nous cherchons la forme $\mathcal{Q}_{\Sigma_{g,n}}$ et nous remarquons que le préfacteur de $|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2\rangle$ dans l'expression de $\psi_{12}(\phi[M_1 \#_{\Sigma_{g,n}} M_2])$ vaut:

$$(7.10) \quad \frac{Z_1^q Z_2^{q'}}{S_0^p \sqrt{C E_1 E_2}} (S_0^0)^{-(g_1+g_2+g+\frac{n_1+n_2+n}{2}-\frac{3}{2})}$$

où nous avons abrégé

$$\begin{aligned} Z_1^q &= Z[(M_1 \# [\widehat{T_1}, \mathcal{G}_1, \widehat{\mathcal{C}_1^q}]) \# [\widehat{T_g}, \mathcal{G}_{g,n+1}, \widehat{\mathcal{L}^q}]] \\ Z_2^{q'} &= Z[(T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}'^{q'}) \# (M_2 \# [\widehat{T_2}, \mathcal{G}_2, \widehat{\mathcal{C}_2^{q'}}])] \end{aligned}$$

Le nombre 7.10 doit également être égal à:

$$(7.11) \quad \mathcal{Q}_{\Sigma_{g,n}} \left(|\widehat{T_g}, \mathcal{G}_{g,n+1}, \widehat{\mathcal{L}^q}\rangle \otimes |T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^q\rangle \right) \times \frac{Z_1^q Z_2^{q'}}{\sqrt{S_0^q S_0^{q'} C} \sqrt{E_1 E_2}} (S_0^0)^{-(g_1+g_2+2g+\frac{2n+n_1+n_2}{2}-2)}$$

De la comparaison de 7.10 et 7.11, nous tirons l'expression de $\mathcal{Q}_{\Sigma_{g,n}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\Sigma_{g,n}} \left(|T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}'^{q'}\rangle, |T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^q\rangle \right) &= \frac{\delta_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}}{(S_0^0)^{g+\frac{n-1}{2}-1}} \times \sqrt{C} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_0^q}} \langle T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}'^{q'} | T_g, \mathcal{G}_{g,n+1}, \mathcal{L}^q \rangle \end{aligned}$$

Comme nous venons de le voir, cela assure que l'équation de compatibilité 1.9 du chapitre 1 est vérifiée.

Remarque: Le lecteur remarquera que la forme bilinéaire $\mathcal{Q}_{\Sigma_{g,n}}$ ne provient pas du produit scalaire usuel sur $H_{g,n+1}$! Enfin, j'ai construit ψ de manière à ce que ce soit une isométrie de $H_{\Sigma_1 \sharp \Sigma_2}$ dans $H_{\Sigma_1 \sharp \Delta} \otimes H_{\Delta \sharp \Sigma_2}$. Enfin, il est facile de vérifier la condition d'associativité 1.12.

Par ailleurs, cette application ψ est parfaitement définie quelle que soit la base choisie dans $H_{g_1+g_2, n_1+n_2}$. L'argument consiste à remarquer que je définis ψ sur les bases associées à des graphes tels que une et une seule ligne relie les moitiés de tore plein relatives à Σ_1 et Σ_2 . Ces différentes bases sont reliées par des transformations de dualité qui affectent *séparément* les graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. La formule 7.1 est alors parfaitement covariante.

Dans le cas où nous partons d'une base ne vérifiant plus la condition de départ, on commence par s'y ramener en utilisant des mouvements F . Là, on utilise notre définition 7.1 pour ψ . Il reste à voir que le résultat final est bien indépendant de la manière dont on effectue le changement de base. Ainsi, supposons que l'on passe d'un graphe $\mathcal{G}$ à un graphe $\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2$ dans le premier cas, et de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}'_1 \# \mathcal{G}'_2$ dans le second cas. Nous *définissons*

$$\begin{aligned} \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{(1)}(|T, \mathcal{G}\rangle) &= \sum_{c_1^p, c_2^p} P[\mathcal{G}, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2]_{c, c_1 \sharp_p c_2} \frac{1}{\sqrt{S_0^p}} (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1^p\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2^p\rangle) \\ \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{(2)}(|T, \mathcal{G}\rangle) &= \sum_{c_1^p, c_2^p} P[\mathcal{G}, \mathcal{G}'_1 \# \mathcal{G}'_2]_{c, c_1 \sharp_p c_2} \frac{1}{\sqrt{S_0^p}} (|T_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{C}_1'^p\rangle \otimes |T_2, \mathcal{G}_2, \mathcal{C}_2'^p\rangle) \end{aligned}$$

Mais il est bien clair que:

$$(7.12) \quad P[\mathcal{G}, \mathcal{G}'_1 \# \mathcal{G}'_2] = P[\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_1 \# \mathcal{G}'_2] \circ P[\mathcal{G}, \mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2]$$

et que d'autre part

$$(7.13) \quad P[\mathcal{G}_1 \# \mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_1 \# \mathcal{G}'_2] = P[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}'_1] \otimes P[\mathcal{G}_2, \mathcal{G}'_2]$$

et ceci montre que $\psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{(1)} = \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}^{(2)}$. L'application de localité à la frontière est donc bien définie! $\square$

7.2.2 Une propriété intéressante du cocycle!

Enfin, nous pouvons montrer très facilement la propriété suivante:

Proposition 35 *Soient f_1 et f_2 des difféomorphismes des surfaces $\Sigma_1 \# \Delta$ et $\hat{\Delta} \# \Sigma_2$ où Δ est le disque avec un point marqué, alors en notant $f_1 \# f_2$ le difféomorphisme de $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ obtenu en “recollant” f_1 et f_2 , nous avons:*

$$(7.14) \quad \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2} \circ \rho_{\Sigma}(f_1 \# f_2) = [\rho_1(f_1) \otimes \rho_2(f_2)] \circ \psi_{\Sigma_1, \Sigma_2}$$

Ceci permet de montrer une propriété importante et utile du cocycle:

$$(7.15) \quad \mu_{12}(f_1 \# f_2, g_1 \# g_2) = \mu_1(f_1, g_1) \mu_2(f_2, g_2)$$

Il suffit pour cela d’appliquer la formule 7.14 et la projectivité des représentations. Comme je l’ai annoncé, je ne sais toujours pas si cette équation permet de démontrer l’unicité du cocycle.

7.3 Vers une description de la tour de Teichmüller.

Dans cette section, nous indiquons quelques possibilités de formulation des notions de “tour de Teichmüller” et de “tour modulaire” selon les idées de Grothendieck [91, Paragraphe 2].

Selon les idées de celui-ci, l’ensemble de tous les espaces de modules convenablement compactifié se trouve muni d’une structure très riche et complexe. D’un point de vue purement topologique, cette structure reflète la possibilité de découper une surface en plusieurs surfaces élémentaires plus simples. Nous précisons cette idée en introduisant la notion de DÉCOUPE d’une surface topologique. Puis nous montrerons que à partir de chaque découpe, on peut construire des morphismes entre groupes modulaires qui définissent à proprement parler une “tour modulaire”. Ces morphismes ne sont pas tous indépendants.

Enfin nous définirons la notion de représentation de cette “tour modulaire” par la donnée de représentations de chaque groupe modulaire $\mathcal{M}^*(g, n)$ à valeurs dans des espaces $H_{g, n}$, qui sont reliées entre elles par des morphismes de “localité à la frontière” indexés par l’ensemble de toutes les découpes possibles. Enfin, la relation avec les équations de Moore et Seiberg sera esquissée.

7.3.1 Découpes de surfaces.

La notion de découpe que nous avons choisi ne prétend pas être définitive, elle trouve ses origines dans le “Jeu de Lego-Teichmüller” de Grothendieck et n’est qu’une modeste tentative de compréhension de ces notions.

Définition.

Par analogie avec le célèbre LEGO de notre enfance, nous allons construire des surfaces avec un bord paramétré par recollement de pièces élémentaires. Etant donné Σ , un morphisme de $\mathbf{Ma}_{2, NT}$, et Σ_1 un autre morphisme de cette catégorie, un plongement de Σ_1 dans Σ est une injection i de Σ_1 dans Σ qui, dans le cas où une composante connexe de $\partial \Sigma_1$ est envoyée sur une composante connexe de $\partial \Sigma$, vérifie la condition de compatibilité usuelle. Deux plongements de surfaces $\Sigma_{1,2}$ de bord⁷ S_1 sont dit assemblés si, d’une part

$$i_1(\Sigma_1) \cap i_2(\Sigma_2) = i_{1,2}(\partial \Sigma_{1,2})$$

⁷Pour fixer les idées... L’extension à plusieurs cercles est triviale.

et d'autre part, en désignant par $\varphi_{1,2}$ les paramétrisations des bords, nous avons:

$$(7.16) \quad i_1 \circ \varphi_1^{-1} = i_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

Nous introduisons la notion de découpe d'une surface par la définition suivante:

Définition 83 *On appelle découpe d'une surface la donnée d'un morphisme Σ de la catégorie $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ et d'une famille finie de couples $[\Sigma_\alpha, i_\alpha]$ où les Σ_α sont des morphismes de $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ et où les i_α sont des plongements assemblés de ces cobordismes paramétrés qui recouvrent Σ .*

Nous noterons $\mathcal{P} = [(\Sigma_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \Sigma]$ une découpe. Les Σ_α sont appelés les *pièces* de la découpe. Il est bien évident que l'on considérera des découpes comme isomorphes dans certaines circonstances.

Définition 84 *Deux découpes $\mathcal{P} = [(\Sigma_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \Sigma]$ et $\mathcal{P}' = [(\Sigma'_\alpha, i'_\alpha)_\alpha, \Sigma']$ seront dites isomorphes si et seulement si il existe une bijection σ entre les ensembles de pièces de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et si il existe pour chaque α un isomorphisme faible F_α entre les cobordismes paramétrés Σ_α et $\Sigma'_{\sigma(\alpha)}$, et F , un isomorphisme faible entre Σ et Σ' tels que:*

$$(7.17) \quad \begin{array}{ccc} \Sigma_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & \Sigma \\ \downarrow F_\alpha & & \downarrow F \\ \Sigma'_\alpha & \xrightarrow{i'_\alpha} & \Sigma \end{array}$$

commute.

Un tel $[(F_\alpha)_\alpha, F]$ est un isomorphisme de découpes. Nous disposons donc d'une *action* des groupes modulaires sur les découpes. Nous noterons $\mathcal{P}' = [(F_\alpha)_\alpha, F] \cdot \mathcal{P}$.

Il est judicieux d'emboîter les découpes. Nous considérons par exemple Σ_{12} un morphisme de $\mathbf{Ma}_{2,NT}$ et une découpe $\mathcal{P}_{12} = [(\Sigma_1, i_1)(\Sigma_2, i_2), \Sigma_{12}]$ de Σ_{12} . De même, $\mathcal{P}_{23} = [(\Sigma_2, j_2)(\Sigma_3, j_3), \Sigma_{23}]$ est une découpe de Σ_{23} . Nous formons $\mathcal{P}_{(12)3} = [(\Sigma_{12}, i_{12}), (\Sigma_3, i_3), \Sigma]$ et $\mathcal{P}_{1(23)} = [(\Sigma_1, j_1), (\Sigma_{23}, j_{23}), \Sigma]$ deux découpes de Σ . Si nous avons

$$(7.18) \quad \begin{array}{ccccc} i_{12} \circ i_1 & = & j_1 & = & k_1 \\ i_{12} \circ i_2 & = & j_{23} \circ j_2 & = & k_2 \\ i_3 & = & j_{23} \circ i_3 & = & k_3 \end{array}$$

alors la découpe

$$(7.19) \quad \mathcal{P}_{123} = [(\Sigma_a, k_a)_{a \in \langle 1,3 \rangle}, \Sigma]$$

est bien définie et est appelée l'emboîtée de $\mathcal{P}_{(12)3}$ avec $\mathcal{P}_{12}$ ou de $\mathcal{P}_{1(23)}$ avec $\mathcal{P}_{23}$. On s'autorise à noter

$$\mathcal{P}_{123} = [(\mathcal{P}_{12}, i_{12}), (\Sigma_3, i_3)] = [(\Sigma_3, j_3), (\mathcal{P}_{23}, j_{23})]$$

Cette notion est en fait extrêmement importante dans l'étude de la tour.

7.3.2 La catégorie des découpes.

La catégorie des découpes est définie par ses objets: les découpes; et ses morphismes qui sont les isomorphismes entre découpes. Nous la noterons $\mathfrak{D}$ dans la suite.

Nous allons associer à chaque découpe un invariant qui permet de déterminer précisément si deux découpes sont équivalentes. Puis nous donnerons quelques résultats quant à la structure de $\text{hom}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

Invariants de découpes.

Ce qui suit est inspiré du travail de Ladegaillerie [113]. Considérons une découpe $\mathcal{P} = [(\Sigma_\alpha, i_\alpha)_\alpha, \Sigma]$, et regardons précisément ce qui se passe le long d'un cercle commun à $i_\alpha(\Sigma_\alpha)$ et $i_\beta(\Sigma_\beta)$. Le diagramme suivant commute:

$$(7.20) \quad \begin{array}{ccc} S_1 & \xleftarrow{\varphi_\alpha^{(k)}} & \partial \Sigma_\alpha^{(k)} \\ \uparrow \varphi_\beta^{(l)} & & \downarrow i_\alpha \\ \partial \Sigma_\beta^{(l)} & \xrightarrow{i_\beta} & \Sigma \end{array}$$

En conséquence, nous définissons de manière cohérente un plongement d'un cercle dans la surface Σ par:

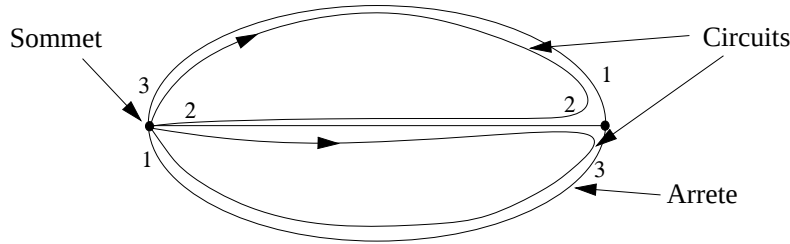
$$(7.21) \quad i_a = i_\alpha \circ (\varphi_\alpha^{(k)})^{-1} = i_\beta \circ (\varphi_\beta^{(l)})^{-1}$$

Nous associons à chaque découpe un plongement de cercles dans la surface topologique Σ . Nous le notons $[K_{\mathcal{P}}, i_{\mathcal{P}}]$ où $K_{\mathcal{P}}$ désigne l'union de cercles S_1 en question et $i_{\mathcal{P}}$ désigne leurs plongements dans Σ .

Ladegaillerie définit une relation d'équivalence entre deux plongements d'une 1-complexe dans une surface par

Définition 85 *Deux plongements de 1-complexes $[K, i]$ et $[K', i']$ dans une surface Σ sont dits équivalents si et seulement si $K = K'$ et il existe f un homéomorphisme de Σ tel que $i' = f \circ i$.*

De plus, nous disposons de résultats sur la détermination des classes d'équivalence de 1-complexes. Pour cela, il convient de définir les invariants associés à un tel plongement. Un graphe est formé de sommets et d'arêtes et pour chaque sommet, on définit un ordre circulaire sur les arêtes qui y aboutissent. L'ensemble de ces ordres circulaires est appelé par Ladegaillerie une *circularisation* du graphe. A partir d'une circularisation, nous pouvons définir les circuits du plongement comme les orbites pour l'action de la circularisation sur les arêtes du 1-complexe. Par exemple:



Nous avons dessiné ici deux des trois circuits de ce plongement. Un circuit peut être vu comme un chemin tracé dans $\Sigma \setminus i(K)$. L'ensemble des circuits est noté $\mathfrak{C}[K, i]$ et en fait, il ne dépend pas de la circularisation choisie. Une partition de l'ensemble des circuits est obtenue en regardant les composantes connexes de $\Sigma \setminus i(K)$: deux circuits appartiennent à la même partie si et seulement si ils sont dans la même composante connexe de $\Sigma \setminus i(K)$. L'invariant associé au plongement $[K, i_K]$ est alors la donnée de cette partition:

$$\mathfrak{C}[K, i] = \bigcup_{\Sigma_i} \mathfrak{C}_{\Sigma_i} \quad \Sigma \setminus i(K) = \bigcup_i \Sigma_i$$

et de l'association à chaque partie $\mathfrak{C}_{\Sigma_i}$ du type topologique de la surface Σ_i . Ladegaillerie démontre dans [113]:

Théorème 74 (Y. Ladegaillerie) *Deux plongements $[K, i]$ et $[K, i']$ d'un 1-complexe K dans une surface Σ sont équivalents si et seulement si ils ont les mêmes invariants.*

On peut donc se demander à quelles conditions deux découpes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont des graphes associés équivalents. En fait

Théorème 75 *Si $[K_{\mathcal{P}}, i_{\mathcal{P}}]$ et $[K_{\mathcal{P}'}, i_{\mathcal{P}'}]$ sont équivalents via un homéomorphisme F , alors il existe $[(F_{\alpha})_{\alpha}, F]$ qui est un isomorphisme entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*

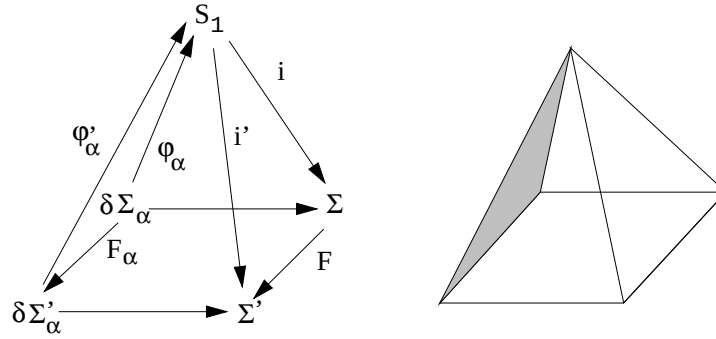
Le lecteur aura remarqué que l'isomorphisme se fait en utilisant *le même* homéomorphisme que celui qui effectue l'équivalence entre les graphes. Ceci montre qu'il n'y a pas unicité puisque un tel homéomorphisme peut être modifié sur $\Sigma \setminus i(K)$ sans que la relation $i_{\mathcal{P}'} = F \circ i_{\mathcal{P}}$ soit violée.

Preuve : Il est complètement évident que si $\mathcal{P}' = [(F_{\alpha})_{\alpha}, F].\mathcal{P}$, alors $i_{\mathcal{P}'} = F \circ i_{\mathcal{P}}$. Les invariants de ces deux découpes sont donc équivalents au sens de Ladegaillerie.

Réciproquement, supposons que deux découpes aient des invariants $[K, i_{\mathcal{P}}]$ et $[K, i_{\mathcal{P}'}]$ tels que

$$i_{\mathcal{P}'} = F \circ i_{\mathcal{P}}$$

où F est un isomorphisme faible de Σ dans Σ' , alors l'indexation des pièces de $\mathcal{P}$ fixe celle des pièces de $\mathcal{P}'$ car une pièce de $\mathcal{P}$ est envoyée sur une partie de Σ par la découpe, puis par F sur une partie de Σ' qui correspond à une pièce de la découpe $\mathcal{P}'$ comme le montre le théorème 74. A la pièce Σ_{α} de $\mathcal{P}$ est donc associée de manière bijective une pièce Σ'_{α} de $\mathcal{P}'$. La commutativité du diagramme 7.20 définit alors un homéomorphisme de Σ_{α} dans Σ'_{α} . Il est alors évident de voir que les F_{α} ainsi construits sont bien des isomorphismes faibles car dans le diagramme ci-dessous en forme de pyramide, trois des triangles et le carré sont commutatifs ce qui montre que le dernier triangle l'est aussi:



Sur la partie droite de cette figure, nous avons laissé en transparent les différentes faces commutatives et en grisé celle qui nous intéresse pour montrer que F_{α} est bien un isomorphisme faible. De la même manière, on montre que l'on a bien une condition de compatibilité aux bord de Σ_{α} qui est envoyés sur un bord de Σ : i et i' sont remplacés par les paramétrisations des bords de Σ et Σ' . En conclusion $[(F_{\alpha})_{\alpha}, F]$ est un isomorphisme de découpe entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. $\square$

Nous pouvons de plus énoncer:

Proposition 36 *Soit $[K, i]$ un plongement d'une union disjointe de cercles dans Σ , il existe une découpe $\mathcal{P}$ telle que $[K, i] = [K_{\mathcal{P}}, i_{\mathcal{P}}]$. Si $[K_{\mathcal{P}}, i_{\mathcal{P}}] = [K_{\mathcal{P}'}, i_{\mathcal{P}'}]$, alors les homéomorphismes qui réalisent l'isomorphisme entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ peuvent être choisis forts.*

Cette proposition est évidente. Nous laissons au lecteur le soin de s'en convaincre.

Il est également légitime de chercher l'influence d'un reparamétrage des cercles. Nous partons donc d'une découpe $\mathcal{P}$ et de $[K_{\mathcal{P}}, i_{\mathcal{P}}]$; et nous notons n le nombre de composantes connexes de K . Alors:

Proposition 37 *Soit $(f_k)_{k \in \langle 1, n \rangle} \in (\text{Diff}_+(S_1))^n$ et si $i' = i \circ (f_k)_{k \in \langle 1, n \rangle}$ alors toute découpe $\mathcal{P}'$ telle que $[K_{\mathcal{P}'}, i_{\mathcal{P}'}] = [K, i']$ est isomorphe à $\mathcal{P}$ par un isomorphisme de la forme $[(f_{\alpha})_{\alpha}, 1_{\Sigma}]$ où les f_{α} sont triviaux dans $\mathfrak{M}_{\alpha}$.*

En clair, le paramétrage des cercles ne joue aucun rôle au niveau modulaire.

7.3.3 Morphismes de groupes modulaires.

A partir de la notion de découpe, il est excessivement simple d'introduire des relations entre les groupes modulaires $\mathfrak{M}^*(\Sigma)$ où Σ est un cobordisme paramétré de $\mathbf{Ma}_{2,NT}$. Rappelons que $\mathfrak{M}^*(\Sigma)$ est le groupe des composantes connexes du groupe des isomorphismes *forts* de Σ .

Définition des morphismes $\Phi_{\mathcal{P}}$.

Prenons une découpe $\mathcal{P} = [(\Sigma_{\alpha}, i_{\alpha})_{\alpha}, \Sigma]$ de Σ ; à chaque famille $(f_{\alpha})_{\alpha} \in \prod \mathfrak{M}^*(\Sigma_{\alpha})$ d'isomorphismes forts des pièces de la découpe, nous associons un isomorphisme de Σ en recollant les différents f_{α} . Bien entendu, dans le cas où la découpe possède deux pièces, il existe un isomorphisme fort de Σ tel que le diagramme suivant:

$$(7.22) \quad \begin{array}{ccccc} \Sigma & \xleftarrow{i_1 \# i_2} & \Sigma_1 & \# & \Sigma_2 \\ \downarrow f_1 \# f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 \\ \Sigma & \xleftarrow{i_1 \# i_2} & \Sigma_1 & \# & \Sigma_2 \end{array}$$

commute. Ceci définit une application

$$(7.23) \quad \Phi_{\mathcal{P}} : \prod_{\alpha} \mathfrak{M}^*(\Sigma_{\alpha}) \longrightarrow \mathfrak{M}^*(\Sigma)$$

Il est bien évident que chaque $\Phi_{\mathcal{P}}$ est un morphisme de groupe. Finalement, ces applications traduisent au niveau de l'ensemble de tous les groupes modulaires les possibilités de découpage d'une surface en pièces élémentaires. Selon Grothendieck [91]:

... Il s'agit en fait du système de *toutes* les multiplicités $M_{g,\nu}$ pour g et ν variables liées entre elles par un certain nombre d'opérations fondamentales (telles les opérations de “bou-chage des trous”, de “gommage” de points marqués, celle de “recollement” et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro d'opérations familières du point de vue de la chirurgie topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c'est que cette structure géométrique très riche du système des multiplicités “ouvertes” $M_{g,\nu}$ se reflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les groupoïdes de Teichmüller $\hat{T}_{g,\nu}$, et que ces opérations au niveau des $\hat{T}_{g,\nu}$ ont un caractère suffisamment intrinsèque pour le groupe de Galois Γ de $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ opère sur cette tour de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures.

La notion de découpe qui a été introduite précédemment, ainsi que celle d'isomorphisme entre découpes constituent notre approche des opérations familières sur les surfaces dont parle Grothendieck. Comme ma compréhension de la structure analytique des espaces de Teichmüller, et donc en particulier de la “bonne” notion de groupoïde fondamental à employer, n'est pas très développée, j'ai préféré tenter de transposer directement ces opérations sur les surfaces en relations entre les groupes modulaires, en utilisant leur définition topologique⁸.

Les différents morphismes $\Phi_{\mathcal{P}}$ ne sont pas tous indépendants. Considérons deux découpes équivalentes: $\mathcal{P}' = [(F_{\alpha})_{\alpha}, F] \cdot \mathcal{P}$, et $(f_{\alpha})_{\alpha} \in \prod \mathfrak{M}_{\alpha}$, par construction, les morphismes $\Phi_{\mathcal{P}}$ et $\Phi_{\mathcal{P}'}$ rendent le diagramme

$$(7.24) \quad \begin{array}{ccc} \prod_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}^* & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} & \mathfrak{M}_{[\Sigma]}^* \\ \downarrow \prod_{\alpha} \text{Int}(F_{\alpha}) & & \downarrow \text{Int}(F) \\ \prod_{\alpha} \mathfrak{M}_{\alpha}^* & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}'}} & \mathfrak{M}_{[\Sigma]}^* \end{array}$$

commutatif. Ceci constitue l'ensemble des relations entre les morphismes associées aux différentes découpes. Je définirai donc une TOUR MODULAIRE par:

Définition 86 *La tour modulaire est la donnée de tous les groupes modulaires $\mathfrak{M}^*(\Sigma)$ ainsi que de toutes les applications $\Phi_{\mathcal{P}}$ associées à toutes les découpes de toutes les surfaces.*

Je tiens néanmoins à souligner que cette définition ne correspond sans doute pas à l'objet que considère Grothendieck dans l'Esquisse. C'est pour cela que j'ai préféré l'appellation “tour modulaire” à celle de tour de Teichmüller-Grothendieck. En effet, Grothendieck insiste lourdement sur la nécessité d'employer non pas des groupes fondamentaux mais des *groupoïdes* par rapport à plusieurs points base⁹. Il ne convient pas ici d'exposer dans le détail ce problème mais il me semble, à l'heure d'écrire ces lignes, que se limiter aux isomorphismes de découpes revient précisément à se limiter aux groupes fondamentaux et à oublier l'aspect groupoïde.

7.3.4 Vision à la Mumford de la tour modulaire.

Dans son livre [135], Mumford donne une définition des groupes modulaires en termes d'automorphismes des groupes fondamentaux des surfaces. Notre but est de montrer que la présentation que nous avons donné de la tour modulaire peut se reformuler dans les termes de Mumford. Nous identifions les groupes modulaires selon Mumford avec les groupes $\mathcal{M}(\Sigma)$ que nous avons introduit.

Ce travail est un préliminaire crucial dans l'étude de l'action du groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur la tour modulaire. En effet, l'action de ce groupe de Galois sur l'espace des modules en genre zéro avec quatre points marqué se fait au travers d'un automorphisme extérieur du complété profini de $\pi_{0,3}$, groupe fondamental de la sphère moins trois points. Cette image devrait se généraliser pour des surfaces de genre plus élevé et donc il est indispensable de bien comprendre comment les actions sur les groupes fondamentaux de surfaces de topologies différentes sont reliées entre elles. Le but étant de *caractériser* l'image de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\text{Out}(\hat{\pi}_{0,3})$. Ce paragraphe a été rédigé à l'intention de Leila Schneps qui a souligné l'importance de l'aspect “groupe fondamental” de ces questions!

⁸Comme quotients de groupes d'homéomorphismes...

⁹Tout ceci dans l'optique d'une interprétation géométrique de la tour de Teichmüller...

Groupes modulaires selon Mumford.

Plus précisément, Mumford définit les groupes modulaires de la manière suivante:

- Il commence par introduire le groupe $\Pi_{g,n}$ défini par générateurs et relations:

Générateurs Il y en a $2g + n$: $(a_i, b_i)_{i \in \langle 1, g \rangle}$ et $(c_j)_{j \in \langle 1, n \rangle}$.

Relations Il n'y en a qu'une:

$$(7.25) \quad \left[\prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \right] \prod_{j=1}^n c_j = 1$$

Il est bien connu que ce groupe est le groupe fondamental de toute surface de genre g avec n cercles frontières [26]. Les cycles c_j s'identifient avec les lacets qui s'enroulent une fois dans le sens direct autour de chaque cercle frontière.

- Il reste à identifier les classes de difféomorphismes à partir de leur action sur $\Pi_{g,n}$: si on choisit un isomorphisme entre le π_1 de la surface étudiée et $\Pi_{g,n}$ l'action d'un élément du groupe modulaire sur $\pi_1(\Sigma)$ se traduit par un automorphisme de $\Pi_{g,n}$. La définition choisie par Mumford est:

Définition 87 (D. Mumford) *Le groupe modulaire est formé par les classes d'équivalences sous l'action des automorphismes intérieurs d'automorphismes φ de $\Pi_{g,n}$ tels que, pour tout $j \in \langle 1, n \rangle$, $\varphi(c_j)$ soit conjugué à c_j , ou, si $n = 0$, que φ préserve l'orientation dans le sens évident.*

Ce groupe est noté $\Gamma_{g,n}$ par Mumford.

Relation avec les groupes précédemment définis.

Le résultat principal qui tombe sous le sens est alors:

Théorème 76 *Les groupes $\mathfrak{M}(\Sigma)$ et $\Gamma_{g,n}$ sont isomorphes pour tout cobordisme paramétré de topologie (g, n) .*

Preuve: Ceci est une conséquence triviale du théorème montré par Ladegaillerie dans [114]. En effet, si Σ désigne un cobordisme paramétré ayant la topologie (g, n) , alors choisissons F un isomorphisme de $\Pi_{g,n}$ sur $\pi_1(\Sigma)$ qui envoie les c_j sur des lacets simples homotopes aux cercles frontières. A chaque élément de $\mathfrak{M}(\Sigma)$, nous associons $f^* : \pi_1(\Sigma, b) \rightarrow \pi_1(\Sigma, b)$ où b est un point base. Clairement f^* est défini à un automorphisme intérieur près de $\pi_1(\Sigma, b)$ car nous devons à partir de f fabriquer un homéomorphisme qui laisse fixe le point base $b \in \Sigma$ pour définir f^* . Un tel choix est possible en considérant un chemin qui relie b à $f(b)$ dans Σ . Par la méthode de Birman [13] utilisée au chapitre 6, nous associons à ce chemin un homéomorphisme g isotope à l'identité dans Σ qui envoie b sur $f(b)$. Ainsi $g^{-1} \circ f$ est isotope à f et laisse fixe b . Changer le chemin reliant b à $f(b)$ induit sur $(g^{-1} \circ f)^*$ l'action d'un automorphisme intérieur! Ceci définit donc Φ_F qui envoie $\mathfrak{M}(\Sigma)$ dans $\Gamma_{g,n}$ et qui est un morphisme de groupes.

Examinons l'injectivité, le théorème de Ladegaillerie [113] nous dit essentiellement:

Théorème 77 (Y. Ladegaillerie) *Soit Σ une surface union de deux surfaces Σ_1 et Σ_2 dont l'intersection est une union finie de cercles, alors il existe une famille finie $\mathcal{F}_1$ de courbes simples de Σ_1 telle que, tout homéomorphisme h de Σ qui envoie chaque courbe de $\mathcal{F}_1$ sur une courbe homotope dans Σ_1 est isotope dans Σ à un homéomorphisme qui agit comme l'identité sur Σ_1 .*

Avec $\Sigma_2 = \emptyset$, ceci montre que f est isotope à l'identité sur Σ . Donc, comme nous n'avons pas de restriction sur le comportement au bord de f , cet élément est trivial dans le groupe $\mathfrak{M}(\Sigma)$. En conséquence, Φ_F est clairement injective.

On sait depuis longtemps que tout automorphisme du groupe fondamental d'une surface avec n points marqués qui envoie les lacets autour de ces points sur des conjugués provient d'un difféomorphisme de cette surface avec points marqués. En conséquence, la surjectivité de Φ_F est triviale: le groupe $\mathfrak{M}(\Sigma)$ est aussi le groupe modulaire d'une surface avec points marqués. $\square$

L'isomorphisme que nous avons construit dépend bien évidemment de F .

7.3.5 Automorphismes de la tour modulaire.

Dans l'optique du programme de Grothendieck, il est important de définir la notion d'automorphisme de la tour modulaire. J'ai essayé d'approcher cette notion en me basant sur la notion correspondante pour les groupes. Je pense toutefois que les considérations qui vont suivre sont perfectibles.

Tout d'abord, il est nécessaire de se donner pour chaque *type topologique* de surface un automorphisme Σ des différents groupes modulaires: $\sigma_{[\Sigma]} \in \text{Aut}(\mathcal{M}^*(\Sigma))$. Nous imposons que cet automorphisme préserve la manière dont un isomorphisme faible permute les composantes du bord d'une surface.

Pour aller plus loin, il faut aussi agir sur les relations entre les différents groupes modulaires et donc sur les $\Phi_{\mathcal{P}}$.

Définition 88 *Un automorphisme de la tour modulaire est la donnée d'un est la donnée d'une part d'un foncteur $\sigma_{\mathfrak{D}}$, automorphisme de la catégorie $\mathfrak{D}$, et d'autre part pour chaque type topologique Σ de surface, d'un automorphisme $\sigma_{[\Sigma]}$ du groupe $\mathcal{M}^*(\Sigma)$ qui respecte les permutations des composantes connexes de $\partial\Sigma$. Ces données doivent vérifier les relations suivantes:*

$$(7.26) \quad \Phi_{\mathcal{P}} \circ \left(\prod_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) = \sigma_{\Sigma} \circ \Phi_{\sigma_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P})}$$

$$(7.27) \quad \sigma_{\mathfrak{D}}([(F_{\alpha})_{\alpha}, F]) = [(\sigma_{\alpha}^{-1}(F_{\alpha}))_{\alpha}, \sigma_{\Sigma}^{-1}(F)]$$

Ceci revient d'une part à contraindre le foncteur $\sigma_{\mathfrak{D}}$ et d'autre part, à relier les différents automorphismes entre eux.

Nous laissons le lecteur vérifier que la relation 7.24 est bien covariante: partant de la relation 7.26, calculons

$$\begin{aligned} \Phi_{[(F_{\alpha})_{\alpha}, F].\mathcal{P}} \circ \left(\prod_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) &= \text{Int}(F) \circ \Phi_{\mathcal{P}} \circ \left\{ \prod_{\alpha} \text{Int}(F_{\alpha}^{-1}) \right\} \circ \left(\prod_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) \\ &= \sigma \circ \left(\text{Int}(\sigma^{-1}(F)) \circ \Phi_{\sigma_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P})} \circ \left\{ \prod_{\alpha} \text{Int}(\sigma_{\alpha}^{-1}(F_{\alpha}^{-1})) \right\} \right) \\ &= \sigma \circ \left(\Phi_{\sigma_{\mathfrak{D}}([(\sigma_{\alpha}^{-1}(F_{\alpha}))_{\alpha}, \sigma^{-1}(F)].\mathcal{P})} \right) \end{aligned}$$

Ceci montre la covariance désirée.

Parmi les automorphismes de la tour modulaire se trouvent les automorphismes *intérieurs*. Pour donner leur forme, nous partons d'un ensemble d'automorphismes intérieurs des différents groupes modulaires:

$$\sigma_{[\Sigma]} = \text{Int}(g_{\Sigma})$$

où $g_\Sigma \in \mathfrak{M}^*(\Sigma)$. Il reste à spécifier l'action du foncteur $\sigma_{\mathfrak{D}}$ sur les découpes:

$$(7.28) \quad \sigma_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P}) = [(g_\alpha)_\alpha, g]\mathcal{P}$$

$$(7.29) \quad \sigma_{\mathfrak{D}}([(F_\alpha)_\alpha, F]) = \text{Int}([(g_\alpha)_\alpha, g])^{-1} \cdot [(F_\alpha)_\alpha, F]$$

Le lecteur vérifiera de lui-même que l'on définit bien un automorphisme de la tour modulaire par cette méthode.

Pour finir, remarquons que si on se fixe un invariant de découpe, l'ensemble des découpes qui fournissent *exactement* cet invariant est une orbite sous l'action des automorphismes intérieurs de la tour modulaire!

7.3.6 Représentations de la tour modulaire.

Une représentation de la tour modulaire doit non seulement incorporer un ensemble de représentations linéaires de *tous* les groupes modulaires, mais aussi traduire la possibilité de faire des découpes. Nous partons donc d'une famille $(H_\Sigma)_\Sigma$ d'espaces vectoriels indexés par tous les *types topologiques* de cobordismes paramétrés. Pour chacun de ces types topologiques¹⁰, nous nous donnons aussi une représentation linéaire ρ_Σ de $\mathcal{M}^*(\Sigma)$ à valeurs dans H_Σ . Inspiré par les considérations des chapitres 1 et 5 sur la localité à la frontière et la forme des représentations des groupes modulaires produites par les théories topologiques, j'ai été conduit à proposer l'existence d'applications associées aux découpes:

$$(7.30) \quad \psi_{\mathcal{P}} : H_\Sigma \longrightarrow \bigotimes_{\alpha} H_{\Sigma_\alpha}$$

que nous supposons *injectives*. La condition fondamentale de compatibilité qui fera que nous avons véritablement une représentation de la tour modulaire est la suivante:

Définition 89 *Nous dirons que $[(\rho_\Sigma, H_\Sigma)_\Sigma, (\psi_{\mathcal{P}})_\mathcal{P}]$ définit une représentation de la tour modulaire si et seulement si pour tout isomorphisme $[(F_\alpha)_\alpha, F]$ entre les découpes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, nous avons:*

$$(7.31) \quad \psi_{\mathcal{P}'} \circ \rho_\Sigma(F) = \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\Sigma_\alpha}(F_\alpha) \right) \circ \psi_{\mathcal{P}}$$

Cette formule montre qu'il est très facile de calculer l'action d'un difféomorphisme compliqué à partir de son action sur chaque pièce de la découpe. Si $(f_\alpha)_\alpha$ est un élément du produit des groupes modulaires $\mathfrak{M}_\alpha$, alors comme $\mathcal{P} = [(f_\alpha)_\alpha, \Phi_{\mathcal{P}}((f_\alpha)_\alpha)] \cdot \mathcal{P}$, nous avons

$$(7.32) \quad \psi_{\mathcal{P}} \circ \rho_\Sigma(\Phi_{\mathcal{P}}((f_\alpha)_\alpha)) = \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\Sigma_\alpha}(F_\alpha) \right) \circ \psi_{\mathcal{P}}$$

Enfin, la relation de compatibilité 7.24 de la tour modulaire est également vérifiée. Précisément, soit $\mathcal{P}' = [(F_\alpha)_\alpha, F] \cdot \mathcal{P}$ nous avons

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma(\Phi_{\mathcal{P}'}((f_\alpha)_\alpha)) &= (\psi_{\mathcal{P}'}^{-1}) \circ \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\Sigma_\alpha}(f_\alpha) \right) \circ \psi_{\mathcal{P}'} \\ &= \text{Int}(\rho_\Sigma(F)) \cdot \left\{ \psi_{\mathcal{P}}^{-1} \circ \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\Sigma_\alpha}(F_\alpha^{-1} f_\alpha F_\alpha) \right) \circ \psi_{\mathcal{P}} \right\} \\ &= \text{Int}(\rho_\Sigma(F)) \cdot \left\{ \rho_\Sigma(\Phi_{\mathcal{P}}(\text{Int}(F_\alpha^{-1}) \cdot f_\alpha)) \right\} \end{aligned}$$

¹⁰Le lecteur aura sûrement remarqué que comme dans le cas des théories topologiques, les représentations que nous considérons dépendent seulement du type topologique du cobordisme paramétré. L'argument est le même: au niveau modulaire, le paramétrage des bords de la surface ne compte pas car $\text{Diff}_+(S_1)$ est connexe.

Finalement, nous devons aussi prendre en compte l'emboîtement des découpes. Avec les notations de la section 7.3.1, nous imposons

$$(7.33) \quad \psi_{\mathcal{P}_{123}} = (\psi_{\mathcal{P}_{12}} \otimes \mathbf{1}) \circ \psi_{\mathcal{P}_{(12)3}} = (\mathbf{1} \circ \psi_{\mathcal{P}_{23}}) \circ \psi_{\mathcal{P}_{1(23)}}$$

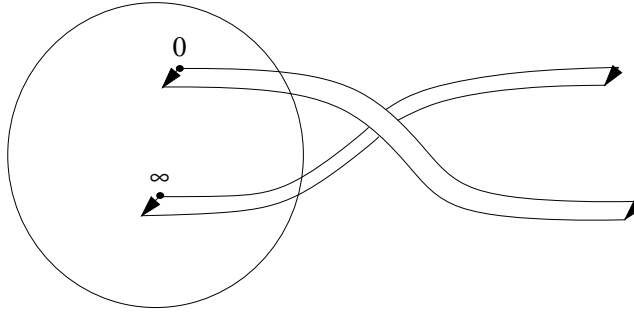
Dans ce cas, il suffit d'imposer la condition 7.31 pour une découpe en deux surfaces afin d'avoir la condition pour une découpe avec un nombre quelconque de pièces.

J'ai commencé à étudier les conséquences explicites de la notion de représentation de la tour modulaire. Le lecteur aura compris que les équations de Moore et Seiberg pointent leur nez assez rapidement [177]. A titre indicatif, je vais montrer comment on retrouve très naturellement les formes 3.177 et 3.178 données au chapitre 3 pour les matrices $\Omega(\pm)$ et $\Theta(\pm)$.

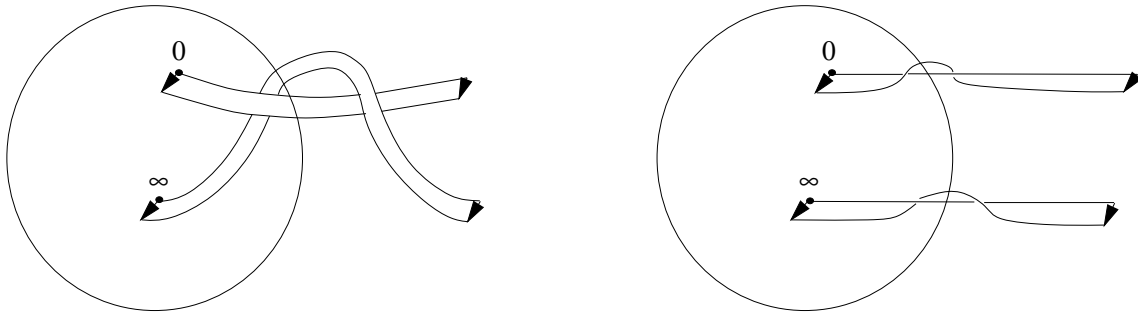
Pour cela, nous commençons par le cas $g = 0$ et $n = 2$. Nous savons que le groupe modulaire $\mathfrak{M}^*(0, 2)$ n'est autre que $\mathbb{Z}$. Il est engendré par un twist de Dehn R autour d'un générateur du groupe fondamental du cylindre. Rien ne nous empêche de choisir une base $(|i\rangle)_i$ de $H_{0,2}$ dans laquelle nous ayons

$$(7.34) \quad \rho_{0,2}(R)|i\rangle = e^{2\pi i h_i}|i\rangle$$

Si nous supposons que tous les $\rho_{g,n}$ sont unitaires, les h_i sont tous réels. Explicitement, si nous décrivons le cylindre $\Sigma_{0,2}$ comme l'ensemble des couples $(t, \vartheta) \in [0, 1] \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, avec les paramétrages $(0, \vartheta) \mapsto \vartheta$ et $(1, \vartheta) \mapsto \vartheta$, un représentant de la classe modulaire de R est donné par $R(t, \vartheta) = (t, \vartheta + 2\pi t)$. Le groupe $\mathcal{M}^*(0, 2)$ est engendré par R et par le difféomorphisme G associé à la tresse:



Le carré de G est associé à une tresse



et sur la partie droite de cette figure, nous avons indiqué une autre tresse munie d'un framing qui définit un autre représentant de la classe modulaire de G^2 . Il est clair que ce représentant est également dans la classe modulaire de R^2 . Ainsi, nous avons une présentation par générateurs et relations de $\mathcal{M}^*(0, 2)$:

$$(7.35) \quad (G, R); \quad G^2 = R^2$$

Ceci permet de définir σ par

$$(7.36) \quad \rho_{0,2}(G)|i\rangle = e^{2\pi i h_i} \sigma(|i\rangle)$$

qui est une involution sur $H_{0,2}$ qui commute avec R . Nous pouvons donc choisir la base $(|i\rangle)_i$ de telle sorte que $\sigma(|i\rangle) = |\hat{i}\rangle$ où $i \mapsto \hat{i}$ est une involution, et $h_i \equiv h_{\hat{i}} \pmod{1}$.

Maintenant, considérons le cas $g = 0$ et $n = 3$. Il existe trois découpes particulièrement naturelles de la sphère avec trois points marqués: modélisons celle-ci par

$$\Sigma_{0,3} = \{z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{4} \leq |z| \leq 2 \text{ et } |z - 1| \geq \frac{1}{4}\}$$

où les paramétrisations des cercles sont les paramétrisations naturelles $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}/4$, $\vartheta \mapsto 2e^{-i\vartheta}$ et $\vartheta \mapsto 1 + e^{i\vartheta}/4$. On découpe alors cette surface de trois manières différentes en une surface $\Sigma_{0,3}$ et un cylindre $\Sigma_{0,2}$ tout simplement en sélectionnant un voisinage tubulaire de chacun des bords de $\Sigma_{0,3}$. La découpe est effectuée de la manière la plus naturelle possible, les détails étant laissés au lecteur. Nous notons $\mathcal{P}_{0,1,\infty}$ les trois découpes ainsi obtenues. Dans ce cas, notre représentation de la tour nous donne trois injections:

$$\psi_{0,1,\infty} : H_{0,3} \rightarrow H_{0,3} \otimes H_{0,2}$$

Ces trois injections permettent de préciser la structure de $H_{0,3}$, j'introduis donc

$$(7.37) \quad H_{0,3}^{[i,j,k]} = \{x \in H_{0,3}, \quad \psi_0^{-1}(x) \in H_{0,3} \otimes \mathbb{C}|i\rangle, \quad \psi_1^{-1}(x) \in H_{0,3} \otimes \mathbb{C}|j\rangle, \quad \psi_\infty^{-1}(x) \in H_{0,3} \otimes \mathbb{C}|k\rangle\}$$

et il est bien clair que

$$H_{0,3} = \bigoplus_{[i,j,k]} H_{0,3}^{[i,j,k]}$$

sachant que certains de ces espaces peuvent être de dimension nulle. Bien entendu, notre notation $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ n'est en aucun cas innocente! Il est alors possible de donner une forme sympathique pour l'action du groupe modulaire $\mathcal{M}_{0,3}^*$ sur $H_{0,3}$. Remarquons que l'action des twists de Dehn autour de lacets homotopes à chacune des composantes connexes de $\Sigma_{0,3}$ est connue. Examinons le cas de R_0 , twist de Dehn autour d'un lacet homotope au bord $(\partial\Sigma_{0,3})_0$:

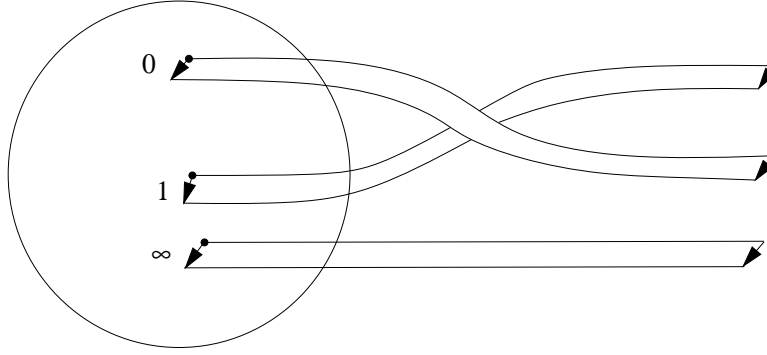
$$(7.38) \quad R_0 = \Phi_{\mathcal{P}_0}(R, \mathbf{1}_{\Sigma_{0,3}})$$

et donc, la relation 7.32 nous montre que $\rho_{0,3}(R)$ agit sur l'espace $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ par multiplication par la phase $\exp(2\pi i h_i)$ comme on s'y attend.

Il n'est pas tellement plus difficile de faire apparaître naturellement les matrices $\Omega(\pm)$ et $\Theta(\pm)$. Rappelons que le groupe $\mathcal{M}(0,3)$ n'est autre que le groupe des permutations de trois éléments et que $\mathcal{M}^*(0,3)$ en est une extension par $\mathbb{Z}^3$. Introduisons les générateurs $\omega_{1,2}$ qui correspondent aux tresses échangeant respectivement 0 et 1, puis 1 et ∞ . Comme nous devons travailler dans $\mathcal{M}^*(0,3)$ et donc garder trace des paramétrisations des bords, il faut utiliser des tresses munies de framings¹¹ et la tresse

¹¹L'argument qui montre que l'on puisse utiliser des tresses munies de framings pour représenter les éléments des groupes modulaires $\mathcal{M}^*(0,n)$ est standard, je ne le rappelle pas ici. On peut le généraliser considérablement ce qui ouvre la voie à une approche de la Tour modulaire, mais ceci est une autre histoire.

associée à ω_1 n'est autre que:



Nous avons alors les relations suivantes:

$$(7.39) \quad \omega_1 \omega_2 \omega_1 = \omega_2 \omega_1 \omega_2$$

$$(7.40) \quad \omega_1 \omega_2^2 \omega_1 = R_1$$

$$(7.41) \quad (\omega_1 \omega_2)^3 = R_1 R_2 R_3$$

Reportons dans 7.41 l'identité 7.41 et utilisons 7.40 pour transformer $\omega_1 \omega_2^2 \omega_1$, et nous obtenons

$$(7.42) \quad \omega_2 R_1^2 \omega_2 = R_1 R_2 R_3$$

En conséquence, comme ω_2 commute avec R_1 trivialement, nous voyons que

$$\forall x \in H_{0,3}^{[i,j,k]}, \quad \rho_{0,3}(\omega_2).x = e^{2\pi i(h_k + h_j - h_i)} x$$

De plus, $\rho_{0,3}(\omega_2)$ envoie $H_{0,3}^{[i,j,k]}$ dans $H_{0,3}^{[i,k,j]}$. Si nous introduisons σ_2 , défini par

$$(7.43) \quad \forall x \in H_{0,3}^{[i,j,k]}, \quad \rho_{0,3}(\omega_2).x = e^{i\pi(h_k + h_j - h_i)} \sigma_2(x)$$

et de même σ_1 défini de manière analogue en utilisant $\rho_{0,3}(\omega_1)$, alors σ_1 et σ_2 vérifient

$$(7.44) \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathbf{1}_{H_{0,3}} \quad (\sigma_1 \sigma_2)^3 = \mathbf{1}_{H_{0,3}}$$

en conséquence, ils définissent une représentation de Σ_3 , groupe des permutations de trois éléments sur $H_{0,3}$. Nous retrouvons les postulats énoncés au chapitre 3.

Enfin, pour passer à $H_{0,4}$, le lecteur remarquera qu'il devient nécessaire d'utiliser la condition "d'associativité" 7.33. Nous découpons la sphère avec quatre trous en deux sphères avec trois trous. Il existe bien des manières de procéder mais j'en choisis une, mon but étant de montrer comment obtenir une base de $H_{0,4}$ à partir de bases de $H_{0,3}$. Pour la commodité du raisonnement, je suppose que les deux pièces sont recollées par les bords ∞ et 0 . Soit $\mathcal{P}$ une telle découpe, nous disposons donc de

$$\psi_{\mathcal{P}} : H_{0,4} \rightarrow H_{0,3} \otimes H_{0,3}$$

Tout comme dans l'étude du cas $H_{0,3}$, nous pouvons décomposer $H_{0,4}$ en "secteurs":

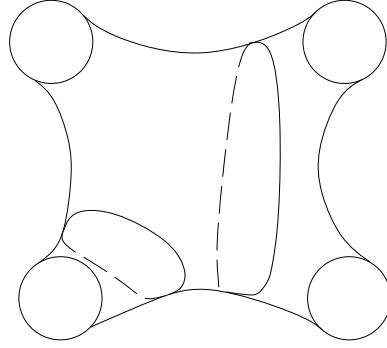
$$(7.45) \quad H_{0,4} = \bigotimes_{[i,j,k,l]} H_{0,4}^{[i,j,k,l]}$$

Nous pouvons faire des découpes emboîtées en découpant les deux pantalons qui sont les pièces de $\mathcal{P}$ en pantalons auxquels on a recollé des cylindres. La condition 7.33 montre plusieurs choses:

- L'application $\psi_{\mathcal{P}}$ envoie $H_{0,4}^{[i,j,k,l]}$ sur un sous espace de la somme directe

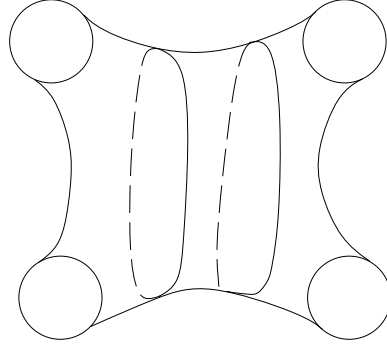
$$\bigoplus_{p,p'} (H_{0,3}^{[i,j,p]} \otimes H_{0,3}^{[p',k,l]})$$

Ceci se montre en en considérant des découpes de ce type:



et en appliquant la condition d'associativité 7.33.

- De même, en découpant la sphère avec quatre cercles frontières en deux pantalons et un cylindre intermédiaire ¹²:



nous voyons que $\psi_{\mathcal{P}}$ envoie $H_{0,4}^{[i,j,k,l]}$ dans l'espace

$$\bigoplus_p (H_{0,3}^{[i,j,p]} \otimes H_{0,3}^{[p,k,l]})$$

Ceci justifie l'utilisation d'une représentation en termes de graphes comme celle utilisée dans les chapitres précédents. A partir de là, on peut attaquer l'étude des représentations de la Tour de Teichmüller. Le but de tout ceci est de donner une formulation rigoureuse des considérations de Moore et Seiberg [130, Appendice B].

Enfin, pour montrer au lecteur que nos définitions d'automorphismes de la tour modulaire et de représentation n'ont pas été choisies au hasard, considérons un automorphisme de la tour modulaire

¹²Cette figure est bien incomplète mais le lecteur comprendra ce que je veux dire.

défini par une famille d'automorphismes $(\sigma_\Sigma)_\Sigma$ des différents groupes modulaires et un foncteur $\sigma_{\mathfrak{D}}$ de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$ vérifiant les conditions de la définition 88, ainsi qu'une représentation de la tour modulaire. Alors, posons:

$$(7.46) \quad \rho'_\Sigma = \rho_\Sigma \circ \sigma_\Sigma$$

$$(7.47) \quad \psi'_{\mathcal{P}} = \psi_{\sigma_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P})}$$

Remarquons tout d'abord que les ρ'_Σ définissent aussi des représentations des groupes modulaires et, de plus

$$\begin{aligned} \psi'_{\mathcal{P}} \circ \rho'_\Sigma(F) &= \psi_{\sigma_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P})} \circ \rho_\Sigma(\sigma_\Sigma(F)) \\ &= \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\alpha}(\sigma_{\alpha}(F_{\alpha})) \right) \circ \psi_{[(\sigma_{\alpha}(F_{\alpha}))_{\alpha}, \sigma_\Sigma(F)] \cdot \mathcal{P}} \\ &= \left(\bigotimes_{\alpha} \rho'_{\alpha}(F_{\alpha}) \right) \circ \psi'_{[(F_{\alpha})_{\alpha}, F] \cdot \mathcal{P}} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a construit une nouvelle représentation de la tour modulaire à partir de l'ancienne!

7.3.7 Le cas projectif.

Dans l'optique des théories topologiques déduites des équations de Moore et Seiberg, il est important de considérer le cas projectif. La définition est alors:

Définition 90 *Une représentation projective de la tour modulaire est la donnée de $[(\rho_\Sigma, H_\Sigma)_\Sigma, (\psi_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}}]$ où les ρ_Σ sont des représentations projectives des groupes modulaires $\mathcal{M}^*(\Sigma)$, à valeurs dans H_Σ , tels que si $[(F_{\alpha})_{\alpha}, F] \in \text{hom}_{\mathfrak{D}}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$, nous avons:*

$$(7.48) \quad \psi_{\mathcal{P}'} \circ \rho_\Sigma(F) = \left(\bigotimes_{\alpha} \rho_{\Sigma_{\alpha}}(F_{\alpha}) \right) \circ \psi_{\mathcal{P}}$$

De là, nous déduisons immédiatement:

Proposition 38 *Les cocycles des représentations des différents groupes modulaires vérifient:*

$$(7.49) \quad \mu_\Sigma(\Phi_{\mathcal{P}}((f_{\alpha})_{\alpha}), \Phi_{\mathcal{P}}((g_{\alpha})_{\alpha})) = \prod_{\alpha} \mu_{\alpha}(f_{\alpha}, g_{\alpha})$$

Ceci montre que les cocycles des groupes modulaires de "complexité" (au sens de Grothendieck) élevée sont reliés aux cocycles des groupes modulaires de complexité plus basse. Ceci pose immédiatement le problème suivant:

Problème ouvert 9 *Existe-t'il une notion "naturelle" d'extension centrale de la Tour modulaire telle que le cocycle correspondant vérifie 7.49 et soit précisément le cocycle universel d'Harer-Atiyah [4][93]?*

Je ne sais pas encore répondre à cette question. Seul un travail plus approfondi permettra d'aboutir à la caractérisation des extensions centrales de la tour modulaire.

Pour finir, je tiens à mentionner que le rôle des automorphismes de la tour dans l'étude du cas projectif n'a pas encore été abordé.

7.4 Dessins d'enfants et structures complexes.

Dans cette section, nous expliquons comment à partir d'un dessin quelconque tracé sur une surface on peut la munir d'une structure complexe. Ce résultat est décrit par Grothendieck dans son "Esquisse d'un programme" [91, Paragraphe 3] et s'appuie sur un résultat fondamental dû à Belyi [10]. Pour citer Grothendieck [91]:

Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et ∞ (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire: tout carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe. Mieux encore, comme la droite est définie sur le corps de base absolu $\mathbb{Q}$, ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques sont définies non seulement sur $\mathbb{Q}$ mais sur la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$.

Le théorème de Belyi stipule qu'à partir d'un dessin on reconstruit non seulement une structure de surface de Riemann sur $\mathbb{C}$ mais que cette structure est de plus "définie" sur $\bar{\mathbb{Q}}$! De ce fait, le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère sur l'ensemble des dessins d'enfants [91]:

Revenant donc au cas général, les cartes finies s'interprétant donc comme des revêtements sur le corps premier $\mathbb{Q}$ lui-même, il en résulte que le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère sur la catégorie de ces cartes de manière naturelle.

Ou pour résumer:

Il y a une identité profonde entre la combinatoire des cartes finies d'une part et la géométrie des courbes analytiques définies sur des corps de nombres d'autre part.

Dans la section suivante, nous montrerons comment définir des invariants topologiques pour les tags qui se construisent très facilement à partir de dessins d'enfants comme nous le verrons. Il serait très intéressant de voir comment l'action du groupe de Galois sur les dessins d'enfant se traduit au niveau des invariants topologiques associés. Dans la section 7.5.4, nous poserons quelques questions visant à une synthèse entre ces points de vues. Mais tout d'abord, il nous faut rappeler qu'est ce que la correspondance de Grothendieck d'une manière un peu plus explicite. C'est l'objet de la présente section.

Nous commençons par rappeler quel est l'énoncé de Belyi, puis nous décrivons la correspondance de Grothendieck qui permet à un dessin tracé sur la surface, d'associer une structure complexe. Quelques exemples sont ensuite discutés.

7.4.1 Théorème de Belyi.

Rappelons que si Σ est une surface de Riemann, on dit qu'elle est ramifiée au dessus de $\Delta \subset P_1(\mathbb{C})$ si on s'est donné une fonction holomorphe $\pi : \Sigma \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ telle que les images des points où la dérivée de π s'annule soit exactement Δ .

En dehors de ces points, la surface Σ forme un revêtement de $P_1(\mathbb{C}) \setminus \Delta$. Si Z_0 est un point de Δ , et si $\pi(x_0) = z_0$ et $\pi'(x_0) = 0$, nous pouvons définir l'indice de ramification en ce point en regardant l'expression de π dans une carte locale en x_0 . Elle est nécessairement de la forme

$$\pi(z_x) = Z_0 + (z_x - z_0)^\alpha h(z_x)$$

où h est holomorphe de dérivée non nulle en z_0 . L'indice de ramification est α qui ne dépend pas de la carte choisie et qui donne l'ordre du zéro de $\pi(z) - \pi(z_0)$ en z_0 .

Toute courbe algébrique étant définie par des équations polynomiales dans un espace projectif (théorème d'uniformisation de Riemann [15]), on peut l'écrire comme revêtement ramifié au dessus de $P_1(\mathbb{C})$. Le problème est de dire quelque chose sur les points de ramification. Le théorème de Belyi nous dit que l'ensemble des points de ramification se restreint à $\{0, 1, \infty\}$ quand la courbe est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, et seulement dans ce cas!

Initialement, nous avons défini la notion de surface de Riemann sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ en faisant référence à la notion de fonction holomorphe et donc en utilisant la topologie de $\mathbb{C}$. Pour définir la notion de surface de Riemann sur $\bar{\mathbb{Q}}$, cela n'est plus possible. Il devient nécessaire d'utiliser une définition plus algébrique. Celle qui convient ici est:

Définition 91 Une courbe algébrique définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ est définie par n polynômes homogènes $(f_i)_i$ en $n+1$ indéterminées à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$ et on pose

$$X(\bar{\mathbb{Q}}) = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in P_n(\bar{\mathbb{Q}}), \forall i \in \{1, \dots, n\}, f_i(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

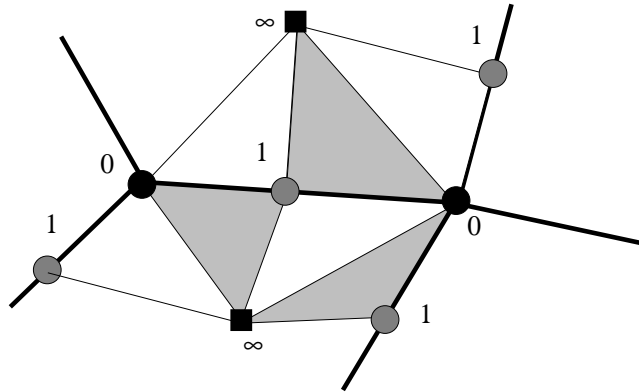
Il est bien évident que si $X(\bar{\mathbb{Q}})$ est une surface de Riemann définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ par les polynômes $(f_i)_i$, et si $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, alors $\sigma(X(\bar{\mathbb{Q}}))$ définie par les $\sigma(f_i)$ est aussi une surface de Riemann sur $\bar{\mathbb{Q}}$. En considérant le corps de nombres engendré par tous les coefficients des f_i , nous voyons que l'orbite de $X(\bar{\mathbb{Q}})$ sous l'action de $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est finie!

Le théorème de Belyi nous dit que:

Théorème 78 (Belyi) Une courbe algébrique est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ si et seulement si il existe une fonction β holomorphe sur cette courbe à valeurs dans $P_1(\mathbb{C})$ telle que $\Delta(\beta) = \{0, 1, \infty\}$.

La fonction β est appelée fonction de Belyi quand on la choisit de manière à avoir un indice de ramification exactement 2 au dessus des antécédents de 1. Un tel choix est toujours possible.

Reste donc à trouver un moyen "simple" de représenter tous les revêtements de $P_1(\mathbb{C})$ qui sont ramifiés seulement en $\{0, 1, \infty\}$. A titre d'exemple:



Ici les arêtes du 1-complexe sont en gras. Suivant la terminologie de Grothendieck, nous appellerons **DESSIN D'ENFANT** un plongement i_K d'un 1-complexe K connexe dans une surface connexe compacte

sans bord telle que $\Sigma \setminus i_K(K)$ soit une union de disques. Le théorème de Belyi nous dit que à chaque dessin d'enfant se trouve associé une courbe algébrique sur un corps de nombres algébriques.

Le dual d'un dessin est défini en échangeant le rôle des centres des faces délimitées par l'image $i_K(K)$ et les sommets $i_K(K_0)$. Bien évidemment:

Proposition 39 *Un dessin d'enfant et son dual définissent la même structure de surface de Riemann.*

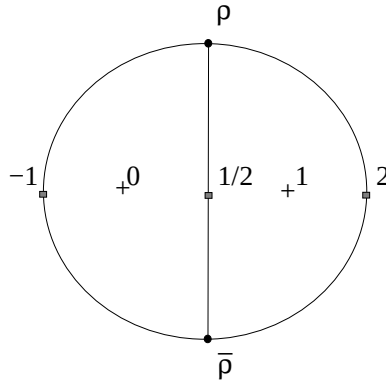
Preuve: C'est évident vu que l'on échange les points 0 et ∞ sur la sphère. $\square$

7.4.2 Exemples de fonctions de Belyi.

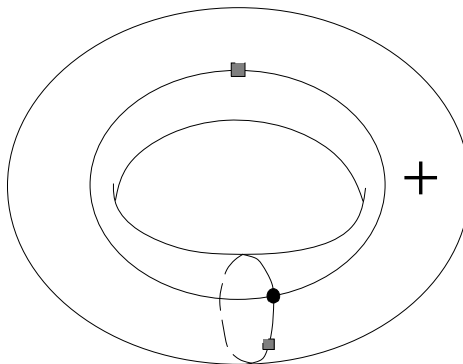
Remarquons que la fonction modulaire $j_{0,4}$ définie au chapitre 3, dans l'Appendice 3.C est "presque" une fonction de Belyi. Elle définit la sphère comme un revêtement ramifié au dessus de $P_1(\mathbb{C})$ qui possède un indice de ramification 2 au dessus de 0, un indice de ramification trois au dessus de 1 et un indice de ramification deux à l'infini. La fonction $1 - j_{0,4}$ est donc une fonction de Belyi sur la sphère:

$$1 - j_{0,4} = \frac{4(x^2 - x + 1)^3}{27x^2(1 - x)^2}$$

Il est possible de retrouver le dessin d'enfant dont elle est issue:



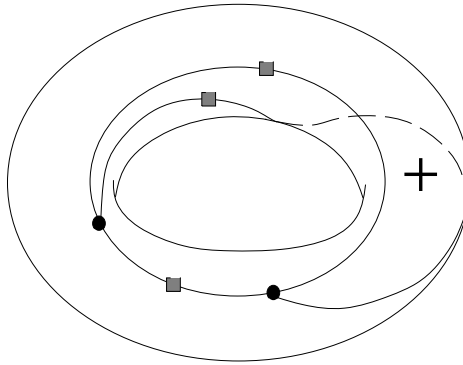
Un autre exemple provient des fonctions elliptiques. La courbe d'équation $Y^2 = X^3 - X$ de paramètre modulaire i est "épinglée" au dessus de $\{0, 1, \infty\}$ via les fonctions elliptiques: La fonction $\pi(X, Y) = X^2$ est une fonction de Belyi qui correspond au dessin d'enfant suivant sur le tore:



En effet, la fonction $\beta(X, Y) = X^2$ a une dérivée non nulle en tous les points pour lesquels $X \neq 0, \pm 1$ vu que dans ce cas, X est une bonne coordonnée sur la courbe! Au voisinage des trois points $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, Y est une bonne coordonnée mais alors, il est bien clair que la fonction $(X, Y) \mapsto X$ a une différentielle qui s'anule et donc β est aussi de différentielle nulle. Une analyse similaire peut être menée au voisinage du point à l'infini. Ceci montre que les points de ramification sont situés au dessus de $0, 1$ et ∞ . De plus, l'indice de ramification au dessus de 1 vaut 2 . L'autre tore complexe avec des automorphismes analytiques supplémentaires a pour paramètre modulaire $\tau = \exp(i\pi/3)$. Son équation est $Y^2 = X^3 - 1$. Une fonction de Belyi pour cette courbe est fournie par:

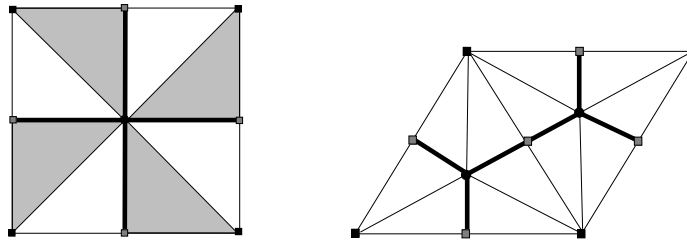
$$(7.50) \quad \beta(X, Y) = X^3$$

et le dessin d'enfant correspondant est:



Comme précédemment, sur la courbe $Y^2 = X^3 - 1$, en dehors des points $(1, 0)$, $(j, 0)$ et $(j^2, 0)$ où $j = \exp(2\pi i/3)$, la coordonnée X est une bonne coordonnée et donc clairement le seul point où la courbe est ramifiée correspond à $X = 0$, et donc à un zéro de la fonction β . Au dessus des trois autres points, nous pouvons exprimer la fonction β en termes de la bonne coordonnée Y , et elle est de la forme $\tilde{\beta}(Y) = 1 + Y^2$. En conséquence elle a une dérivée nulle et une valeur un. L'indice de ramification est deux. On conclut en analysant le cas du point à l'infini: β est une fonction de Belyi.

Dans les deux cas, il est amusant de visualiser les triangulations des tores que l'on peut obtenir¹³:



Enfin, nous laisserons le lecteur méditer sur les différentes manières de trianguler les tores.

7.5 Résolution du modèle de WZW jaugé.

Dans cette section, nous expliquons comment, à partir des considérations des chapitres 3, 5 et 6, il est possible de donner une “solution” complète et explicite du modèle de WZW jaugé défini dans

¹³Dans le second cas, nous n'avons pas colorié les différents triangles pour des raisons de temps.

cette section. Puis nous étendons ces considérations pour fabriquer à partir de toute théorie topologique tridimensionnelle obtenue selon le procédé du chapitre 6, une théorie topologique bidimensionnelle définie sur une catégorie de surfaces “taggées”.

7.5.1 Modèle de WZW jaugé.

Dans le chapitre 3, nous avons vu comment construire des actions effectives chirales pour le modèle de WZW. Malheureusement, ces actions chirales n’étaient pas invariantes de jauge. Nous allons voir comment définir deux actions invariantes de jauge à partir du modèle de WZW. L’une d’elle donne une théorie topologique bidimensionnelle qui s’identifie avec une réduction dimensionnelle de la théorie de Chern-Simons. Puis nous verrons comment définir des invariants topologiques associés aux dessins d’enfants. Enfin nous poserons quelques questions relatives à l’approche par les dessins d’enfants de l’action du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et sa relation avec l’approche de la section 7.3.

Actions invariantes de jauge.

Il existe deux manières de fabriquer une action invariante de jauge non chirale à partir du modèle de WZW. L’une d’elle est décrite dans le livre de Polyakov [145] mais aussi dans [146]. Si on additionne les variations des actions $\Gamma[A]$ et $\bar{\Gamma}[\bar{A}]$ (définies par les équations 3.104 et 3.105) calculées en 3.106 et 3.107 et que l’on explicite le résultat, on obtient

$$(7.51) \quad \Gamma[hA] + \bar{\Gamma}[h\bar{A}] = \Gamma[A] + \bar{\Gamma}[\bar{A}] - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A(\bar{\partial}h)h^{-1}) - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}((\partial h)h^{-1}\bar{A}) - S_{WZW}[h] - S_{WZW}[h^{-1}]$$

Mais d’autre part, la formule de Polyakov-Wiegmann:

$$S_{WZW}[h] + S_{WZW}[h^{-1}] = \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(h^{-1}(\bar{\partial}h)h^{-1}(\partial h))$$

nous dit que

$$(7.52) \quad \int_{\Sigma} \text{Tr}(hA\bar{A}) = \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A}) + \int_{\Sigma} \text{Tr}((A(\bar{\partial}h)h^{-1}) + \bar{A}(\partial h)h^{-1}) + \int_{\Sigma} \text{Tr}(h^{-1}(\partial h)h^{-1}(\bar{\partial}h))$$

et donc

$$(7.53) \quad S[A, \bar{A}] = \Gamma[A] + \bar{\Gamma}[\bar{A}] + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A})$$

est invariante de jauge. Polyakov suggère que cette action n’est autre que celle d’un modèle de WZW mais avec une constante de couplage renormalisée.

Il existe toutefois une autre manière de fabriquer une action invariante de jauge.

$$(7.54) \quad S[g, A, \bar{A}] = S[g] - \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(Ag^{-1}(\bar{\partial}g) - \bar{A}(\partial g)g^{-1}) + \frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A\bar{A} - gAg^{-1}\bar{A})$$

et l’action effective $\Gamma[A, \bar{A}]$ déduite de l’action $S[g, A, \bar{A}]$ est invariante de jauge. Ce modèle est appelé le modèle de WZW jaugé [82].

Dans l'article [82], l'auteur montre que l'action effective $\Gamma[A, \bar{A}]$ se met sous la forme (voir formule 19 de la référence précédente):

$$(7.55) \quad e^{-\Gamma[A, \bar{A}]} = e^{-\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A \bar{A})} \sum_{I, \bar{I}} \psi_I[A] \psi_{\bar{I}}[\bar{A}] h^{I, \bar{I}}$$

où les ψ_I et les $\psi_{\bar{I}}$ sont les blocs fonctionnels introduits en section 3.5 du chapitre 3. La matrice $(h^{I, \bar{I}})_{I, \bar{I}}$ commute avec toutes les transformations modulaires. En fait, il s'agit de la matrice du produit scalaire des états de la théorie de Chern-Simons. J'ai vu cette remarque pour la première fois dans [183].

Modèle de WZW jaugé et théorie de Chern-Simons.

En conséquence, il est facile de voir que le modèle de WZW jaugé est une théorie topologique dont on sait calculer toutes les observables. Soit $\mathcal{O}_K[A, \bar{A}]$ une observable associée à un graphe de Wilson décoré, il est évident que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \rangle &= \int \mathcal{D}[A, \bar{A}] e^{-\Gamma[A, \bar{A}]} \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \\ &= \sum_{I, \bar{I}} \int \mathcal{D}[A, \bar{A}] e^{-\frac{k}{2\pi} \int_{\Sigma} \text{Tr}(A \bar{A})} \psi_I[A] \psi_{\bar{I}}[\bar{A}] h^{I, \bar{I}} \mathcal{O}_K[A, \bar{A}] \\ &= \text{Tr}_{H_{\Sigma}}(\widehat{\mathcal{O}_K}) \end{aligned}$$

où l'espace H_{Σ} est l'espace des états de la théorie de Chern-Simons sur Σ et où $\widehat{\mathcal{O}_K}$ est l'opérateur associé à la fonctionnelle des champs $\mathcal{O}_K[A, \bar{A}]$. En conséquence, nous interprétons cela comme la fonction de partition de $\Sigma \times S_1$ décoré par K plongé dans $\Sigma \times \{0\}$, de la théorie de Chern-Simons.

La limite $k \mapsto +\infty$.

Dans le cas où $k \mapsto +\infty$, l'action de la théorie de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$ se réduit à une intégrale plus simple. La limite $k \mapsto +\infty$ correspond pour la théorie de Chern-Simons à une limite classique¹⁴. En conséquence, à la limite $k \rightarrow +\infty$, l'intégrale fonctionnelle de Chern-Simons se réduit à une intégrale sur l'espace des modules des solutions classiques. Dans le cas de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$, les équations du mouvement s'écrivent:

$$F_{12} = 0 \quad F_{01} = F_{02} = 0$$

où nous notons x_0 la coordonnée le long du cercle S_1 et $x_{1,2}$ les coordonnées sur la surface Σ . Les classes d'équivalence de solutions de ces équations de courbure nulle modulo les transformations de jauge sont classées par les morphismes de $\pi_1(\Sigma_g \times S_1) = \mathbb{Z} \times \pi_1(\Sigma_g)$, à valeurs dans G , modulo l'action de G par automorphisme intérieur. Un tel morphisme φ est entièrement défini par un morphisme φ_g de $\pi_1(\Sigma_g)$ dans G et un élément $h \in g$ de sorte que

$$(7.56) \quad \forall \gamma \in \pi_1(\Sigma_g), \forall n \in \mathbb{Z} \quad \varphi(n, \gamma) = h^n \varphi_0(\gamma)$$

Bien entendu, h commute avec tout élément de $\varphi_0(\pi_1(\Sigma_g))$. On introduit

$$\overline{\mathcal{M}}_{\Sigma_g} = \{A(z, \bar{z}) / F_A = 0\}$$

¹⁴Clairement, j'aurais pu noter $k = 1/\hbar$...

qui n'est autre que l'espace sur lequel il faut intégrer pour calculer la fonction de partition du modèle de Higgs topologique bidimensionnel. Rappelons que celle-ci, pour $G = SU(2)$, est bien définie dès que le genre est strictement supérieur à 1 et qu'elle s'obtient par la formule

$$(7.57) \quad Z_H(\Sigma_g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{2(g-1)}}$$

On s'attend à ce que, à la limite $k \rightarrow +\infty$, la fonction de partition $Z_{CS}(k, g)$ de la théorie de Chern-Simons au niveau k sur Σ_g diverge. Bien sûr, il convient dans l'évaluation de $Z_{CS}(k, g)$ de bien faire attention aux points suivants:

- A k fini, on doit prendre en compte les fluctuations autour des configurations classiques. Formellement, nous écrivons

$$Z_{CS}(k, g) = \int_{\mathcal{M}_{\Sigma_g}} \mathcal{D}[A] \det' \left(\frac{ik}{4\pi} \nabla_A \right)^{-1/2}$$

où le déterminant doit être convenablement défini. Ce déterminant joue un rôle dans la manière dont $Z_{CS}(k, g)$ diverge.

- Le calcul de $Z_{CS}(k, g)$ est trivial d'après les considérations du chapitre 6:

$$(7.58) \quad Z_{CS}(k, g) = \left(\frac{k+2}{2} \right)^{g-1} \sum_{m=1}^{k+1} \left(\sin \left(\frac{\pi m}{k+2} \right) \right)^{2(1-g)}$$

J'aimerais pouvoir donner une interprétation claire du facteur divergent $Z_{CS}(k, g)/Z_H(\Sigma_g)$.

Cette analyse n'a pas été poussée plus loin en ce qui me concerne. En effet, il m'a semblé bien plus intéressant de se cantonner au cas $k < +\infty$ pour lequel *tout* est facilement calculable et où *toutes* les fonctions de partition sont *finies*. En un sens, le modèle de WZW jauge est une “régularisation rationnelle” de la théorie de Higgs (qui est irrationnelle pour $SU(N)$). Nous allons donc maintenant abstraire la construction ci-dessus. Cela montrera qu'elle est considérablement plus générale que la simple “coïncidence” que nous venons d'exhiber entre le modèle de WZW jauge sur une surface Σ et la théorie de Chern-Simons sur $\Sigma \times S_1$.

7.5.2 Réduction dimensionnelle.

La procédure utilisée est extrêmement simple: à partir des données géométriques bidimensionnelles, on fabrique des données tridimensionnelles à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$. Puis on associe à nos données bidimensionnelles un invariant tridimensionnel!

Préliminaires géométriques.

La catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$ permet de construire très simplement une catégorie $\mathbf{Ma}_{2,1}$ formée de surfaces décorées par des tags, au sens du chapitre 1, Appendice 1.B. Rappelons que l'on procède par analogie avec la définition de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ donnée au chapitre 5.

Objets Les objets de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ sont des cercles avec un certain nombre de points marqués et coloriés.

Morphismes Les morphismes de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ sont les surfaces Σ orientées décorées par un graphe trivalent K . Les bords sont paramétrés de sorte que les orientations induites sur $\partial\Sigma$ coïncident avec celles des objets entre lesquels on interpole, et les points de ces objets sont les images des points de $K \cap \partial\Sigma$ par les paramétrisations des bords.

Le graphe est colorié exactement de la même manière qu'un graphe de la catégorie $\mathbf{Ma}_{3,1}$.

Nous envoyons cette catégorie dans $\mathbf{Ma}_{3,1}$ de la manière suivante:

- Un cercle avec n points marqués est envoyé sur un tore avec n points marqués. L'orientation du tore est prise directe si et seulement si celle du cercle l'est.
- Soit $[\Sigma, K]$ un morphisme de $\mathbf{Ma}_{2,1}$ qui interpole entre N_1 et N_2 qui, pour fixer les idées sont deux cercles. Nous désignons par $\varphi_{1,2}$ les paramétrisations des bords entrant $(\partial\Sigma)_1$ et sortant $(\partial\Sigma)_2$. Définissons sur le bord de $\Sigma \times S_1$:

$$(7.59) \quad \bar{\varphi}_1 : (x, \vartheta) \in (\partial\Sigma)_1 \times S_1 \mapsto (\varphi_1(x), \vartheta) \in (S_1 \times S_1)$$

$$(7.60) \quad \bar{\varphi}_2 : (x, \vartheta) \in (\partial\Sigma)_2 \times S_1 \mapsto (\varphi_2(x), \vartheta) \in (S_1 \times S_1)$$

L'orientation est définie par $\omega_\Sigma \wedge d\vartheta$ où ω_Σ est la forme volume définissant l'orientation de Σ . Définissons aussi $\bar{K} \subset \Sigma \times S_1 = K \times \{0\}$ dont le framing est pris selon S_1 : chaque ligne est un ruban dans la direction des $\vartheta \in S_1$ croissants. En conséquence, $[[\Sigma \times S_1, \bar{\varphi}_{1,2}], \bar{K}]$ interpole entre $N_1 \times S_1$ et $N_2 \times S_1$ comme prévu.

- Reste à régler le problème des coloriages: le coloriage de $\bar{K} = K \times \{0\}$ n'est autre que celui de K .

Il existe bien d'autres manières de réaliser cette opération. Nous pouvons choisir $f_n \in M_{1,n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et décider que si N_1 est un cercle avec n points marqués, alors

$$\bar{\varphi}_1(x, \vartheta) = f_n(\varphi_1(x), \vartheta)$$

Finalement, on définit une famille $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ de foncteurs de $\mathbf{Ma}_{3,1}$ dans $\mathbf{Ma}_{2,1}$. Ceux-ci vérifient

$$(7.61) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\emptyset) = \emptyset$$

$$(7.62) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](S_1 \times [0, 1]) = (S_1 \times S_1) \times [0, 1]$$

$$(7.63) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_1 \cup N_2) = \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_1) \cup \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](N_2)$$

$$(7.64) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1) \cup \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_2)$$

$$(7.65) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\hat{\Sigma}) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[\widehat{(f_n)_n}](\Sigma))$$

$$(7.66) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\hat{N}a) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[\widehat{(f_n)_n}](N))$$

$$(7.67) \quad \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_{[Y]}) = (\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma))_{[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](Y)]}$$

Le foncteur défini plus haut, ($f_n = \mathbf{1}$ pour tout n) sera noté $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ dans la suite. Il s'avère plus pratique à manipuler.

Définition de la théorie bidimensionnelle.

Définition 92 Si $\mathcal{T} = [\mathbf{Ma}_{3,1}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est une théorie topologique projective basée sur $\mathbf{Ma}_{3,1}$, alors on définit une théorie topologique bidimensionnelle (à priori projective) sur $\mathbf{Ma}_{2,1}$ par

$$(7.68) \quad \Phi_{2D} = \Phi \circ \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$$

Cette théorie dépend du foncteur $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ que l'on a choisi mais:

Théorème 79 Toutes les théories issues d'une même théorie tridimensionnelle par le procédé de la définition 92 sont équivalentes au sens de la définition 12 du chapitre 1.

Preuve : Comparons les théories issues de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ et $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(g_n)_n]$. Introduisons l'action $\rho_{g,n}$ du groupe modulaire $\mathcal{M}^*(g, n)$ sur $H_{g,n}$ dans la théorie tridimensionnelle. Pour fixer les idées, prenons Σ qui interpole entre $[S_i, m]$ et $[S_1, n]$:

$$(7.69) \quad \phi[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(g_n)_n](\Sigma)] = \rho_{1,n}(g_n \circ f_n^{-1}) \circ (\phi[\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma)]) \circ \rho_{1,n}(g_n \circ f_n^{-1})^{-1}$$

et donc, les deux théories sont bien reliées par une TNLU. $\square$

Bien entendu,

Proposition 40 Deux théories tridimensionnelles équivalentes donnent naissance à des théories bidimensionnelles équivalentes.

Preuve : Si $\hat{T}_{1,n}$ désigne l'opérateur qui agit sur $H_{1,n}$ pour réaliser la TNLU entre Φ et Φ' , alors les théories déduites de ces deux théories tridimensionnelles par application de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ sont reliées par une TNLU définie par les opérateur $\hat{T}_n$ agissant sur $H_{S_1,n}$:

$$(7.70) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{T}_n = \hat{T}_{1,n}$$

qui vérifie trivialement toutes les propriétés d'une TNLU. L'extension au cas de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ ne pose pas de problème au vu du théorème 79. $\square$

Finalement, comme l'équation 7.70 le montre, d'une part nous sommes capables d'associer à chaque TNLU entre deux TCT tridimensionnelles une TNLU entre les TCT bidimensionnelles associées et, d'autre part, la composition des TNLU au niveau tridimensionnel se traduit par la composition des TNLU associées au niveau bidimensionnel. En conséquence,

Théorème 80 Chaque $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n]$ définit un foncteur entre les catégories $[\mathbf{Ma}_{3,1} \mapsto \mathbf{Sp}]$ et $[\mathbf{Ma}_{2,1} \mapsto \mathbf{Sp}]$.

Après ces résultats généraux, il est bon de revenir à des propriétés plus contrètes.

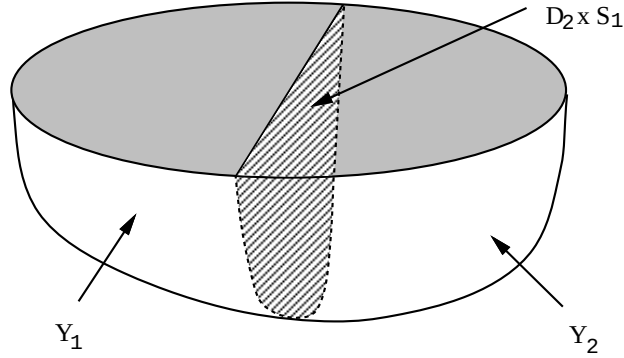
Quelques précisions.

Nous disposons aussi de l'expression explicite du cocycle de la théorie bidimensionnelle:

$$(7.71) \quad \mu_{3D}(\sigma_1, \sigma_2) = \mu_{3D}(\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_1), \mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}[(f_n)_n](\Sigma_2))$$

Dans le cas des théories bidimensionnelles issues d'une solution des équations de Moore et Seiberg, l'expression se simplifie grandement. Nous considérons tout d'abord le foncteur $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$.

Considérons $\Sigma_1 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,1}}(\emptyset, N)$ et $\Sigma_2 \in \text{hom}_{\mathbf{Ma}_{2,1}}(N, \emptyset)$. Notons $\bar{\Sigma}_1$ et $\bar{\Sigma}_2$ leurs images respectives par $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$. Supposons pour simplifier que N soit un cercle¹⁵, le cocycle est donné par l'équation 6.40. Ces formules font apparaître des variétés quadridimensionnelles qui bordent $\bar{\Sigma}_1 \sharp (S_1 \times D_2)$, $(\widehat{S_1 \times D_2}) \sharp \bar{\Sigma}_2$ et $\bar{\Sigma}_1 \sharp \bar{\Sigma}_2$. Notons $Y_{1,2}$ des variétés quadridimensionnelles obtenues à partir de présentations par chirurgie de $\bar{\Sigma}_1 \sharp (S_1 \times D_2)$ et $(\widehat{S_1 \times D_2}) \sharp \bar{\Sigma}_2$. On fabrique très simplement une variété quadridimensionnelle bordant $\bar{\Sigma}_1 \sharp \bar{\Sigma}_2$ en retirant un $D_2 \times D_2$ à chacune des variétés $Y_{1,2}$ et en recollant le long de $D_2 \times S_1$ comme sur notre schéma:



Comme la signature de $D_2 \times D_2$ est triviale, on en déduit qu'il existe des présentations par chirurgie $[L_1, \bar{K}_1]$, $[L_2, \bar{K}_2]$ et $[L_{12}, \bar{K}_{12}]$ de $\bar{\Sigma}_1 \sharp (S_1 \times D_2)$, $(\widehat{S_1 \times D_2}) \sharp \bar{\Sigma}_2$ et $\bar{\Sigma}_1 \sharp \bar{\Sigma}_2$ respectivement telles que

$$(7.72) \quad \text{Sign}(L_1, \bar{K}_1) + \text{Sign}(L_2, \bar{K}_2) = \text{Sign}(L_{12}, \bar{K}_{12})$$

En conséquence, ceci montre qu'il n'y a pas de projectivité:

Proposition 41 *Si $[\mathbf{Ma}_{3,1}, \mathbf{Sp}, \Phi]$ est obtenue à partir d'une solution des équations de Moore et Seiberg, alors la théorie déduite par application de $\mathcal{I}_{3 \rightarrow 2}$ n'est pas projective.*

7.5.3 Formulation “IRF”.

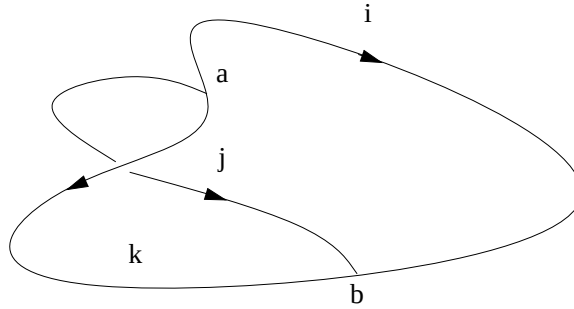
Le plus intéressant est qu'on dispose là aussi d'une formulation de type “IRF” (pour “Interaction Round the Faces”, voir [154]) pour calculer les fonctions de partition de surfaces taggées. Dans le cas d'invariants de nœuds dans S_3 , ceci résulte de nombreux travaux, mais nous pensons surtout à la vision synthétique de Witten qui a donné l'expression générale des poids de Boltzmann [191]. Notre but est de montrer que dans le cas bidimensionnel, des formules analogues existent.

Nous allons montrer que les fonctions de partitions se calculent par un modèle de type “IRF”. Les techniques utilisées sont très proches de celles employées par Witten dans [191] pour traiter le cas des invariants de nœuds et d'entrelacs dans S_3 . Nous commençons par examiner le cas d'une sphère S_2 taggée, puis nous passons au genre plus élevé.

¹⁵Pour le calcul des cocycles la décoration ne joue aucun rôle.

Calcul de fonctions de partitions sur la sphère.

Considérons donc un graphe trivalent plongé dans $S_2 \times S_1$. Nous nous intéressons à sa projection K sur $S_2 \times \{0\}$ que nous supposons régulière: c'est à dire ne présentant que des vertex trivalents ou des croisements. Nous colorions ce graphe de manière à en faire un tag K_C . Pour calculer la fonction de partition $Z[S_2, K_C]$, nous choisissons un point de $S_2 \setminus K$ que nous envoyons à l'infini. Dans ce cas, nous arrivons à une figure de ce type:

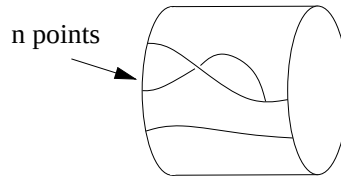


Exactement comme Witten dans [191], nous utilisons alors une méthode de matrice de transfert. Nous découpons la sphère en anneaux C_i sandwichés entre deux disques:

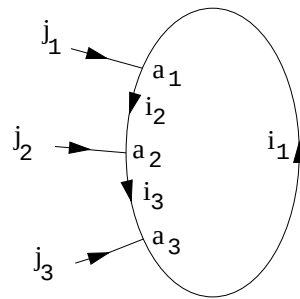
$$(7.73) \quad [S_2, K_C] = D_2 \# C_n \# \dots \# C_1 \# \hat{D}_2$$

Ceci revient à couper la variété $S_2 \times S_1$ en tranches de topologie $(S_1 \times S_1) \times [0, 1]$.

Examinons en détail ce qui se passe quand on coupe la sphère le long d'un cercle avec n points marqués:



Une base de H_n est fournie, au niveau de la théorie tridimensionnelle par



où $calC$ désigne le coloriage

$$[i_1, \dots, i_{n-1}; j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_n]$$

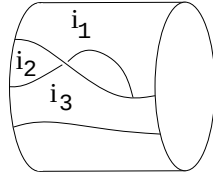
du graphe ci-dessus et dont la norme au carré est

$$(7.74) \quad |||C\rangle||^2 = \sqrt{\prod_{k=1}^n \frac{S_0^{i_k}}{S_0^0}}$$

La fonction de partition cherchée se met sous la forme:

$$(7.75) \quad Z_{2D}[S_2, K_C] = \sum_{c_1, \dots, c_n} \phi_{3D}[\widehat{D_2 \times S_1}] \frac{|\mathcal{C}_1\rangle\langle\mathcal{C}_1|}{|||\mathcal{C}_1\rangle||^2} \phi_{3D}[C_2] \dots \phi_{3D}[C_n] \frac{|\mathcal{C}_n\rangle\langle\mathcal{C}_n|}{|||\mathcal{C}_n\rangle||^2} \phi_{3D}[D_2 \times S_1]$$

Il nous faut calculer les éléments de matrice $\langle\mathcal{C}_{j-1}|\phi_{3D}[C_j]|\mathcal{C}_j\rangle$ dans la théorie tridimensionnelle. Avant ce calcul pénible, remarquons que les couleurs des lignes du graphe définissant la base de H_n fournissent un coloriage des composantes connexes de $S_2 \setminus K$:



Chaque ligne du graphe K est bordée par deux régions qui elles-aussi portent des indices de ligne. Le choix d'un terme dans la somme 7.75 correspond au choix d'une couleur de vertex posée sur une ligne de K , à la frontière entre deux régions de $S_2 \setminus K$. Si j, j' sont les couleurs de ces régions et i la couleur portée par la ligne de K , le vertex est de type $[j, i, j']$. Ceci motive la définition suivante:

Définition 93 *Un graffiti sur Σ est un tag $[K, \mathcal{C}]$ tracé sur Σ muni d'un coloriage de $\Sigma \setminus K$.*

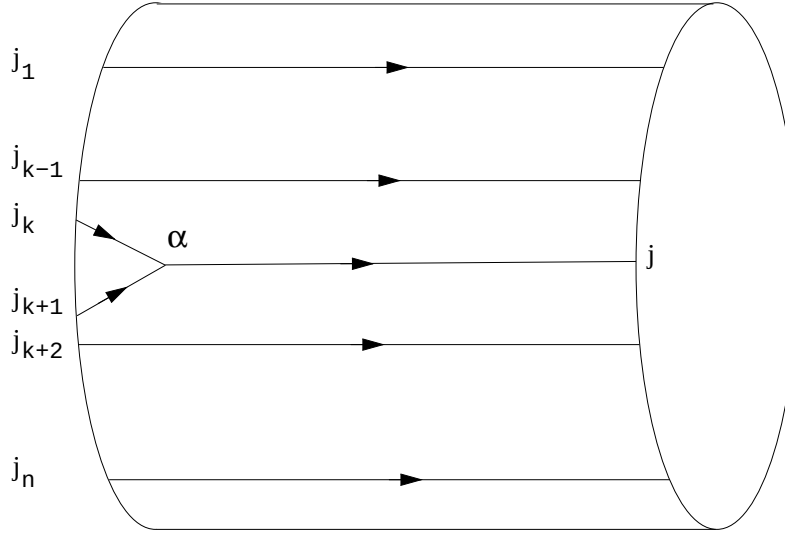
L'ensemble des graffitis basés sur un tag $\mathcal{C}$ sera noté $\mathfrak{G}_{\mathcal{C}}$. L'ensemble des coloriages de vertex d'un graffiti g sera noté $\mathcal{V}_g$. Comme le montre un calcul explicite, il est clair que le quotient

$$\frac{\langle\mathcal{C}_{j-1}|\phi[C_j]|\mathcal{C}_j\rangle}{|||\mathcal{C}_{j-1}\rangle|| \times |||\mathcal{C}_j\rangle||}$$

ne dépend en fait que de l'événement qui se trouve dans le cylindre C_j . En conséquence, sa contribution peut être vue comme celle d'une plaquette convenablement coloriée.

Pour éclairer notre propos, nous pouvons montrer comment évaluer ce quotient dans le cas où le

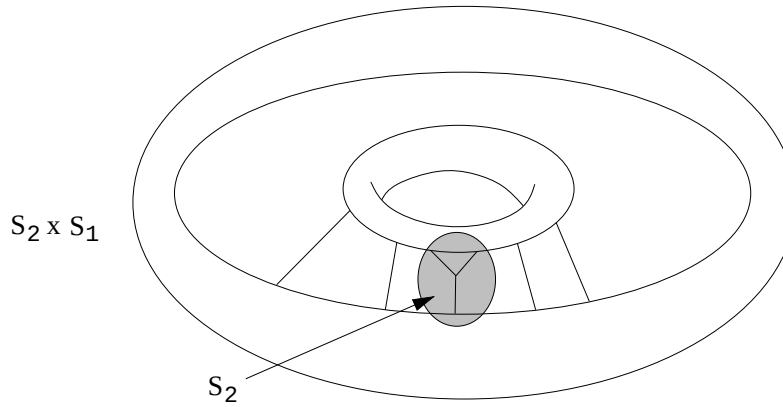
cylindre C_j contient un vertex:



L'élément de matrice qui nous intéresse est la fonction de partition calculée dans $S_2 \times S_1$ du graphe obtenu en saturant celui ci par des graphes en anneau. Nous notons $[p_1, \dots, p_n]$ les lignes internes et $[a_1, \dots, a_n]$ les vertex du graphe à une boucle avec comme pattes externes $[j_1, \dots, j_n]$. De même, nous notons $[p'_1, \dots, p'_{k-1}, p', p'_{k+2}, \dots, p'_n]$ les lignes internes et $[a'_1, \dots, a'_{k-1}, a', a'_{k+2}, \dots, a'_n]$ les vertex du graphe à une boucle de lignes externes $[j_1, \dots, j_{k-1}, j, j_{k+2}, \dots, j_n]$. Nous cherchons

$$Z_{3D}[S_2 \times S_1, \mathcal{G}_c \sharp K \sharp \mathcal{G}_{c'}]$$

que nous calculons en coupant le long d'une sphère S_2 avec quatre points marqués comme indiqué sur le dessin:



La partie située dans la boule délimitée par la sphère S_2 contribue par la fonction de partition d'un tétraèdre dans S_3 et tous calculs faits, nous obtenons pour notre élément de matrice:

$$(7.76) \quad \frac{\prod_{k=1}^n S_0^{j_k}}{(S^0)^{n/2-1}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{\alpha} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix} \prod_{l \neq k} \delta_{a_l, a'_l}$$

La division par les normes fournit alors:

$$(7.77) \quad \frac{(S_0^0)^{3/4} \sqrt{S_0^{j_k} S_0^{j_{k+1}}}}{\sqrt{S_0^j}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{\alpha} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$$

qui ne dépend que des couleurs au voisinage du croisement! Le lecteur est invité à analyser par lui-même les autres cas de figure. Finalement, chaque voisinage d'une croisement ou d'un vertex constitue une plaquette et la sphère S_2 est obtenue en recollant de telles plaquettes.

La fonction de partition se calcule donc grâce à:

$$(7.78) \quad Z[S_2, K_c] = \sum_{g \in \mathfrak{G}_c} \sum_{v \in \mathcal{V}_g} \prod_{\text{plaquettes}} W[\mathcal{C}, g, v]$$

où dans le produit sur les plaquettes, on fait le produit de tous les poids associés aux plaquettes convenablement coloriées. Il s'agit clairement d'une formulation de type "IRF" de notre théorie topologique. Les poids de Boltzmann obtenus pour cette théorie sont:

	$S_0^0 B_{p_k, p'_k}(+) \begin{bmatrix} a'_k & a'_{k+1} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$
	$\frac{(S_0^0)^{3/4}}{\sqrt{S_0^j}} \sqrt{S_0^{j_k} S_0^{j_{k+1}}} F_{p_k, j} \begin{bmatrix} a' & \hat{a} \\ a_k & a_{k+1} \end{bmatrix}$

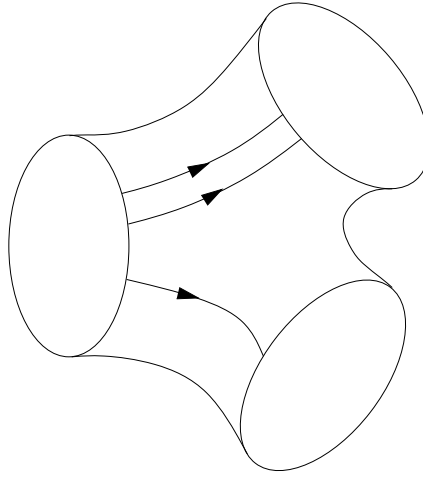
Bien entendu, on dispose d'une expression analogue quand le croisement se fait dans l'autre sens: la matrice $B(+)$ est remplacée par la matrice $B(-)$. Nous n'avons pas indiqué le cas où une ligne se coupe en deux mais le lecteur retrouvera le résultat sans difficultés. Deux remarques s'imposent:

- Le lecteur aura remarqué que l'expression du poids de Boltzmann associé au triangle n'est pas $\mathbb{Z}_3$ -invariante: en clair elle dépend de l'orientation du triangle.
- Le calcul de la fonction de partition ne se fait pas en utilisant une triangulation quelconque de la surface! Les plaquettes sont associées aux croisements et aux vertex du graphe. Il n'y a pas moyen de les choisir autrement.

Surfaces de genre plus élevées.

Le cas des surfaces de genre plus élevé pose quelques problèmes à cause des amplitudes avec changement de topologie. Il est facile de reprendre les raisonnements précédents pour se convaincre que sur une surface de topologie non triviale, la fonction de partition doit aussi se calculer par un modèle de type "IRF". Il suffit pour cela de choisir une fonction de Morse pour notre surface taggée et de découper en tranches ne contenant qu'un événement (croisement, vertex ou changement de topologie). Pour les tranches cylindriques, le travail a déjà été effectué. Mais il apparaît des tranches ayant la topologie d'une

sphère avec trois trous qui en plus servent “d’aiguillages” pour les lignes du tag:



Le calcul des éléments de matrice de tous ces aiguillages possibles ne me semble pas évident.

Il serait bien plus satisfaisant de disposer d’une méthode de calcul qui utilise une décomposition simpliciale de la variété: par exemple une triangulation. Malheureusement, le formalisme employé ici n’est pas adapté à ce travail. Il semble assez clair que si l’on formule la théorie à partir de triangulations, elle doit posséder des propriétés de localité très fortes (au sens de la fonctorialité bien évidemment). Je ne veux pas détailler ici mes essais infructueux pour contourner la difficulté que je viens de mentionner. Dans une formulation “simpliciale”, les briques de construction du modèle sont les opérateurs associés à des plaquettes (par exemple des triangles). On peut composer ces différents opérateurs pour fabriquer l’opérateur associé à une surface compliquée. Ceci présuppose que à chaque côté du triangle soit associé un espace des états, et que l’opération de recollement des triangles par leurs côtés corresponde à la contraction sur les espaces vectoriels correspondants. La localité à la frontière telle que je l’ai définie au chapitre 1 semble un tremplin bien agréable vers ce type de formulation. Je pense depuis longtemps formuler les théories tridimensionnelles que j’ai obtenu au chapitre 6 en ces termes mais j’ai tout d’abord tenté de voir ce qui se passait au niveau de la théorie bidimensionnelle.

Malheureusement, il s’avère que la théorie bidimensionnelle *n’est pas* locale à la frontière. Ceci provient du fait que nous ne disposons d’aucun moyen d’engendrer les états conformément à l’hypothèse de simplicité 3 du chapitre 5. L’idée qui apparaît alors la plus naturelle consiste à introduire un espace des états associé à un *segment* avec des points marqués. On définit alors des injections

$$(7.79) \quad \psi_{n,m} : H_{S_1,n+m} \longrightarrow H_{I,n} \otimes H_{I,m}$$

par un procédé combinatoire qui consiste à couper les graphes en anneaux en deux graphes en arbre¹⁶! Une base de $H_{I,n}$ est formée des graphes multipériphériques avec $n+2$ pattes externes. En fait, il est bien clair que $\psi_{n,m}$ n’est pas surjective. Ceci évite le phénomène d’“explosion dimensionnelle” remarqué par J.M. Maillet dans son travail [124].

¹⁶Il pourra sembler étrange au lecteur que je n’ai pas envisagé ces développements dès le premier chapitre. Mais je ne disposais pas d’exemples explicites pour lesquels de tels objets puissent être définis lorsque j’ai mis au point l’axiomatique du chapitre 1.

J’ai commencé à approfondir les quelques indications précédentes. Toutefois, ce travail n’est pas encore assez avancé pour en parler ici mais il semble possible de reprendre l’axiomatique du chapitre 1 pour inclure le cas où les objets sont à bords.

Dans le même genre d’idées, j’ai amorcé une réflexion sur la notion de “théorie des champs relative” qui devrait permettre de traiter le cas d’une théorie des champs définie sur une catégorie de variétés de dimension D munies de plongements de variétés de dimensions inférieures. Les catégories $\mathbf{Ma}_{3,1}$ et $\mathbf{Ma}_{2,1}$ qui sont apparues dans cette thèse sont des exemples particulièrement simples de cette situation car les sous variétés sont unidimensionnelles et donc sans structure¹⁷. Mais si on veut étudier des théories où les insertions sont localisées sur des surfaces (par exemple), il peut être utile de s’autoriser des opérations géométriques différentes sur la variété contenante et sur sa “décoration”, par exemple choisir différemment les difféomorphismes de recollement. Enfin, la motivation principale de ces explorations reste la mise au point d’un dictionnaire commun entre le travail de J.M. Maillet [124] et le mien. Enfin j’ai eu la surprise de constater que des idées similaires se trouvaient dans l’Esquisse...

7.5.4 Dessins d’enfants, tags et théorie de Galois.

On peut voir l’ensemble de tous les dessins d’enfants comme un modèle pour l’espace des modules des surfaces de Riemann sur $\bar{\mathbb{Q}}$. Des résultats récents ont d’ailleurs été obtenus dans ce sens [169, Théorème 2.4.2]. Le lien avec la notion de découpe présentés en section 7.3 de ce chapitre n’est pas encore clair pour moi. C’est clairement un passage obligé pour aller plus loin. De bons articles de revue sont [170] et [162].

Bien entendu, la courbe algébrique associée à un dessin ne dépend que de la classe d’isotopie du plongement de 1-complexe qui définit le dessin. Il serait donc extrêmement intéressant de disposer d’invariants topologiques pour différencier les dessins.

Comme nous l’avons vu, les théories topologiques permettent de définir des invariants de tags, c’est à dire de graphes trivalents décorés. D’autre part, un dessin définit une triangulation de la surface et donc par passage au graphe dual, un graphe trivalent sur la surface. Par ce biais, nous définissons tout un ensemble d’invariants associés aux dessins d’enfants. Reste à savoir s’ils sont séparants, et dans quel sens. Enfin, un problème important à mon avis est le suivant:

Problème ouvert 10 *Existe t’il un moyen de lire sur les invariants topologiques associés à un dessin d’enfant l’action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$? Si oui, est-elle reliée à l’action de ce même groupe sur les théories topologiques tridimensionnelles.*

Je n’ai pas encore la réponse à cette question mais le travail entamé dans les sections précédentes est clairement orienté dans ce but.

J’espère que le lecteur pardonnera l’aspect un peu elliptique de cette “conclusion”. Je n’ai malheureusement pas eu le temps de l’explicitier autant que je l’aurais voulu. Bien des points que j’ai soulevés sont encore conjecturaux mais seul un travail précis permettra de lever un coin du voile sur ces questions. Dans l’introduction de cette thèse, j’ai insisté sur la complexité des problèmes touchant à la classification des théories invariantes conformes bidimensionnelles et à la construction d’une hypothétique théorie des cordes quantique. J’espère avoir convaincu le lecteur de la difficulté du problème mais aussi de l’amusement qu’on peut y trouver.

¹⁷Complicquer l’axiomatique ne sert donc à rien!

Avertissement concernant la bibliographie.

La bibliographie qui va suivre n'est pas exhaustive. J'ai essayé autant que possible de citer la totalité des articles qui m'ont été utiles. Il ne me semble pas qu'une bibliographie trop lourde puisse aider le lecteur à se faire une idée claire des sujets abordés dans ma thèse. J'ai également pris le parti de me limiter aux textes que j'ai consultés à un certain nombre d'exceptions près. Malgré cela, la liste me semble encore bien indigeste.

Les références des livres qui sont cités dans cette thèse proviennent, d'une part de mon fond personnel (très limité), mais surtout des bibliothèques suivantes:

- Bibliothèque du LPTENS, 24 Rue Lhomond, 75005 Paris.
- Bibliothèque de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, 45 Rue d'Ulm, 75005 Paris.
- Bibliothèques de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 Allée d'Italie, 69007 Lyon.

Ces deux dernières sont interrogeables au travers du système WAIS, ce qui a permis la réalisation de la bibliographie qui va suivre sans quitter mon bureau de l'ENSLyon.

Avertissement concernant l'index

Dans cet index, les pages soulignées correspondent:

- A la première apparition d'une notion, quand il y a lieu.
- A la page de définition pour une notion définie dans cette thèse.
- A la page d'énoncé dans le cas d'un théorème.

Abbreviations utilisées

Abbréviation	Signification
BPZ	Belavin, Polyakov et Zamolodchikov
CIZ	Cappelli, Itzykson et Zuber
DVVV	Dijkgraaf, Vafa et les Verlinde
FQS	Freidan, Qiu et Shenker
GKO	Goddard, Kent et Olive
IRF	Interaction found the Faces
KZ	Khni et Zamolodchikov
MQT	Mécanique Quantique Topologique
TCT	Théorie des Champs Topologique
TIC	Théorie des Champs Conforme
TICR	Théorie des Champs Conforme Rationnelle
TNL	Transformation Naturelle Locale
TNLU	Transformation Naturelle Locale Unitaire
TNLUP	Transformation Naturelle Locale Unitaire Projective
TQC	Théorie Quantique des Champs
TQCG	Théorie Quantique des Champs Géométrique
TQCGP	Théorie Quantique des Champs Géométrique Projective
TTP	Théorie topologique Projective
TTPR	Théorie Topologique Projective Rationnelle
TTR	Théorie Topologique Rationnelle

Bibliographie

- [1] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand Mathematical Studies, 1966.
- [2] M. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η function*, Math. Ann. **278** (1987), 335–380.
- [3] ———, *Topological field theories*, Publ. Math. IHES **68** (1989), 175–186.
- [4] ———, *On the framing of three-manifolds*, Topology **20** (1990), 1–7.
- [5] M.F. Atiyah and R. Bott, *Yang-Mills equations on Riemann surfaces*, Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A **388** (1982), 523–615.
- [6] M. Bauer, *Aspects de l'invariance conforme bidimensionnelle*, Master's thesis, Université Paris-6, 1990.
- [7] M. Bauer and C. Itzykson, *Modular transformation of $SU(N)$ affine characters and their commutant*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 617–636.
- [8] L. Baulieu and I.M. Singer, *Topological Yang-Mills symmetry*, Conformal Field Theory and related topics (P. Binétruy, P. Sorba, and R. Stora, eds.), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.), vol. 5, North Holland., 1988, pp. 12–19.
- [9] A.A. Belavin, A.B. Polyakov, and A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in 2d field theory*, Nucl. Phys. **B**. **241** (1984), 333–380.
- [10] G.V. Bielyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 247–257.
- [11] J. Birman, *Mapping class groups and their relationship with braid groups*, Comm. in Pure and Applied Maths. **22** (1969), 213–228.
- [12] ———, *On braid groups*, Comm in Pure and Applied Maths. **22** (1969), 41–72.
- [13] ———, *Braids, links and mapping class group*, Annals of Math. Studies., vol. 82, Princeton University Press, 1975.
- [14] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffmann bracket*, Topology **31** (1992), 685–699.
- [15] J.B. Bost, *Surfaces de Riemann*, Cours donné à l'ENS., 1988.
- [16] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Diffusion CCLS., 1976.

- [17] P. Bouwknegt, *On the construction of modular invariant partition functions*, Nucl Phys **B** [FS 20] **290** (1988), 507–526.
- [18] Th. Bröcker and T. Tom-Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Springer Verlag, 1985.
- [19] A. Cappelli, C. Itzykson, and J.B. Zuber, *The ADE classification of $A_1^{(1)}$ and minimal conformal field theories*, Comm. Math. Phys. **113** (1987), 1–26.
- [20] J. Cardy, *Conformal invariance and surface critical behaviour.*, Nucl. Phys. **B. 240** (1984).
- [21] ———, *Operator content of 2d conformal field theories*, Nucl. Phys. **B. 270** (1986), 186–204.
- [22] ———, *Effect of boundary conditions on the operator content of CFTs*, Nucl. Phys. **B. 275 (FS17)** (1987).
- [23] ———, *Conformal invariance and statistical mechanics*, Fields, Strings and Critical phenomena, (XLIX Les Houches session) (E. Brézin and J. Zinn-Justin, eds.), Elsevier, 1989, pp. 169–246.
- [24] ———, *Boundary conditions in CFT.*, Advanced studies in pure Mathematics (1990), no. 19.
- [25] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1961.
- [26] D.J. Collins and H. Zieschang, *Combinatorial group theory and fundamental groups*, Preprint IHES/M/89/15, 1989.
- [27] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, and J.G. Thackray, *Atlas of finite groups.*, Clarendon Press, 1985.
- [28] L. Crane, *2d physics and 3d topology*, Comm. Math. Phys. **135** (1991), 615–640.
- [29] P. Cvitanovic, *Group theory*, Nordita Classics Illustrated, 1984.
- [30] Altschüler D. and A. Coste, *Quasi-quantum groups, three manifolds and topological field theory*, Comm. Math. Phys. **150** (1992), 83–107.
- [31] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei fragmenten von Riemann*, Riemann gesammelte mathematische werke, Dover (New York), 1982, pp. 466–478.
- [32] P. Degiovanni, *Modular invariance with a non-simple symmetry algebra*, Conformal Field Theory and Related Topics (P. Binétruy, P. Sorba, and R. Stora., eds.), Nucl. Phys. **B. (Proc. Suppl.)**, vol. 5, North Holland., 1988, pp. 71–86.
- [33] ———, *Topological field theory and rational conformal field theory*, Preprint LPTENS-89/25, 1989.
- [34] ———, *$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ Conformal Field Theories*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 71–99.
- [35] ———, *$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ Conformal Field Theories*, Number Theory and Physics (P. Moussah, J.M. Luck, and M. Waldschmidt., eds.), Springer Verlag., 1990, pp. 1–19.
- [36] ———, *Théories topologiques, développements récents*, Notes cours ENS, Paris, 1991.
- [37] ———, *Moore and Seiberg's equations and 3D topological field theories*, Comm. Math. Phys. **145** (1992), 459–505.

- [38] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Springer Verlag, ed.), MSRI Publications, vol. 016, 1989, pp. 79–297.
- [39] P. Deligne and J.S. Milne, *Tannakian categories*, Hodge cycles, motives and Shimura varieties (P. Deligne, J.S. Milne, A. Ogus, and K.Y. Shih, eds.), Lecture Notes in Maths, vol. 900, Springer Verlag, 1982, pp. 101–230.
- [40] A. Dewisme, *Surfaces de Riemann: théorie classique*, Exposé du groupe de travail sur les théories conformes (Paris), 1989.
- [41] J. Dieudonné, *Eléments d’analyse 3*, Gauthier Villars, 1980.
- [42] R. Dijkgraaf, *A geometric approach to 2D conformal field theory*, Master’s thesis, Utrecht University., 1989.
- [43] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, *$c = 1$ conformal field theories on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **115** (1987), 649.
- [44] ———, *Modular invariance and the fusion algebra*, Conformal Field Theories and Related Topics (P. Binétruy, P. Sorba, and R. Stora, eds.), Nucl. Phys. **B**. (Proc. Suppl.), vol. 5, North Holland., 1988, pp. 87–97.
- [45] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, and C. Vafa, *The operator algebra of orbifold models*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 16.
- [46] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), 393–429.
- [47] J. Distler, *A note on the Ising 3d model as a string theory*, Preprint PUPT-1324, hep-th 9205100, 1992.
- [48] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Cahiers Scientifiques ed., vol. 37, Gauthier Villars, 1974.
- [49] S. Doplicher, *Local observables and the structure of quantum field theory*, Algebraic theory of superselection sectors (D. Kastler, ed.), World Scientific, 1990.
- [50] S. Doplicher and J.E. Roberts, *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing superselection rules in particle physics*, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51–108.
- [51] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko, *Géométrie contemporaine (2)*, Mir, 1982.
- [52] V.G. Drinfeld, *Quasi Hopf algebras*, Algebra and Analysis **1** (1989), 114–148.
- [53] ———, *On quasi triangular algebras and a group connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Leningrad Math. Journal **2** (1991), 829–861.
- [54] B. Dubrovin, *Geometry and integrability of topological-antitopological fusion*, Preprint INFN-8/92-DSF, 1992.
- [55] T. Eguchi and H. Ooguri, *Conformal and current algebras on a general Riemann surface*, Nucl. Phys. **B 282** (1987), 308–329.

- [56] Wittacker E.T. and Watson G.N., *A course of modern analysis*, fourth ed., Cambridge University Press, 1980.
- [57] B.L. Feigin and D.B. Fuchs, *Verma modules over the Virasoro algebra*, *Funct. Anal. Appl.* **17** (1983), 241–248.
- [58] G. Felder, J. Fröhlich, and G. Keller, *On the structure of unitary conformal field theory (1): existence of conformal blocks*, *Comm. Math. Phys.* **124** (1989), 417–463.
- [59] ———, *On the structure of unitary conformal field theory (2): representation theoretic approach*, *Comm. Math. Phys.* **130** (1990), 1–49.
- [60] G. Felder, K. Gawedski, and A. Kupianen, *Spectra of WZW models with arbitrary simple groups*, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), 127–158.
- [61] R. Fenn and C. Rourke, *On Kirby’s calculus of links*, *Topology* **18** (1979), 1–15.
- [62] R. Feynman, *A new formulation of quantum mechanics*, *Rev. of Mod. Phys.* **20** (1948), 367.
- [63] R.P. Feynman, *Statistical mechanics*, *Frontiers in Physics.*, vol. 36, W.A. Benjamin Inc., 1972.
- [64] A. Floer, *An instanton invariant for three-manifolds*, *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), 215–240.
- [65] E. Fradkin and L. Susskind, *Order and disorder in gauge systems and magnets*, *Phys. Rev. D* **17** (1978), 2637–2658.
- [66] K. Fredenhagen, K.H. Rehren, and B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, *Comm. Math. Phys.* **125** (1989), 201–226.
- [67] M. Freedman, *Selected applications of geometry to low-dimensional topology*, American. Math. Soc., 1989.
- [68] I. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Academic Press, 1988.
- [69] I.B. Frenkel and N.Yu. Reshetikhin, *Quantum affine algebras and holonomic difference equations*, *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), 1–60.
- [70] J. Fröhlich, *2D conformal field theory and 3D topology*, *Int. Jour. of Modern Physics* **20** (1989), 5321–5393.
- [71] J. Fröhlich and T. Kerler, *Universality in Quantum Hall Systems*, *Nucl. Phys. B* **354** (1991), 369–417.
- [72] J. Fröhlich and C. King, *Chern-Simons theory and the Jones polynomial*, *Comm. Math. Phys.* **126** (1989), 167–199.
- [73] J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Quantum field theories of vortices and anyons*, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 177–223.
- [74] J. Fröhlich and U.M. Studer, *$SU(2) \times U(1)$ gauge invariance in non relativistic quantum mechanics and generalized Hall effects*, *Comm. Math. Phys.* **148** (1992), 553–600.

- [75] D. Friedan, *The space of conformal field theories and the space of strings classical ground states*, Physics and Mathematics of Strings, V.G. Knizhnik memorial volume (L Brinks and al., eds.), World Scientific Publ. Co., 1991.
- [76] D. Friedan, Z. Qiu, and S. Shenker, *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1575.
- [77] D. Friedan and S. Shenker, *The integrable analytic geometry of the quantum string*, Phys. Lett. B. **175** (1986), 287–296.
- [78] ———, *The analytic formulation of 2D conformal field theories*, Nucl. Phys. B **281** (1987), 509–545.
- [79] J. Fröhlich, *Condensed matter physics and gauge invariance*, Séminaire donné dans le cadre du Colloque L. Michel à L’ENS Lyon, June 1992.
- [80] E. Galois, *Ecrits et mémoires mathématiques d’Evariste Galois, édition critique intégrale de ses manuscrits et publications*, (Bourgne, R. et Azra, J. eds) Gauthier Villars, 1962.
- [81] C.F. Gauss, *Discussiones arithmeticae. [traduction]*, Hermann, 1970.
- [82] K. Gawedski, *Quadrature of conformal field theories*, Nucl. Phys. B **328** (1989), 733–752.
- [83] K. Gawedski and A. Kupianen, *Coset constructions from functional integrals*, Nucl. Phys. B. **320** (1989), 625–668.
- [84] D. Gepner and E. Witten, *String theory on group manifolds*, Nucl. Phys. B **278** (1986), 493–549.
- [85] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, Fields, Strings and Critical phenomena, (XLIX Les Houches session) (E. Brézin and J. Zinn-Justin., eds.), Elsevier, 1988, pp. 1–168.
- [86] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [87] P. Goddard and D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics*, Int. J. Mod. Phys. A **1** (1986), 303.
- [88] P. Goddard, D. Olive, and A. Kent, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), 105–119.
- [89] R.L. Griess, *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982), 1–102.
- [90] A. Grothendieck, *Seminaire de géométrie algébrique i*, 1962.
- [91] ———, *Esquisse d’un programme*, Rapport Scientifique, 1984.
- [92] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, 1938.
- [93] J. Harer, *The second homology of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **72** (1983), 221–269.
- [94] G. Huet, *Introduction à la théorie des catégories*, Notes de cours de DEA., 1987.
- [95] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and their representation theory*, Springer Verlag, 1980.

- [96] I.M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 69, Academic Press, 1976.
- [97] C. Itzykson, *Level one Kac-Moody characters and modular invariance*, Conformal Field Theories and related topics (P. Binetruy, P. Sorba, and R. Stora, eds.), Nucl. Phys. **B** (Proc Suppl.), vol. 5, North Holland., 1988, pp. 150–165.
- [98] C. Itzykson and J.M. Drouffe, *Théorie Statistique des champs*, vol. 2, ch. 10, Interéditions-CNRS, 1990.
- [99] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum field theory*, Mac Graw Hill, 1980.
- [100] V.F.R. Jones, *Hecke algebra, representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Maths. **126** (1987), 335.
- [101] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press, 1990.
- [102] A. Kato, *Classification of modular invariant partition functions in 2D*, Mod. Phys. Lett. **A 2** (1987), 585–600.
- [103] L. Kauffman, *On knots*, Annals of Math. Studies, vol. 115, Princeton University Press, 1987.
- [104] R. Kirby, *A calculus for framed links in S_3* , Invent. Math. **45** (1978), 35–56.
- [105] A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*, Springer Verlag, 1978.
- [106] M. Knecht, S. Lazzarini, and F. Thuillier, *On holomorphic factorization for free conformal fields (i)*, Phys. Lett. **B 251** (1990), 279.
- [107] Lazzarini S. Knecht M. and Stora R., *On holomorphic factorization for free conformal fields (ii)*, Phys. Lett. **B 273** (1991), 63–66.
- [108] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B 247** (1984), 83.
- [109] K. Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Springer Verlag, 1986.
- [110] T. Kohno, *Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups (1)*, Topology **31** (1992), 203–230.
- [111] M. Kontsevitch, *Rational conformal field theories and invariants of 3 dimensional manifolds*, Preprint CPT-88/P.2189, 1988.
- [112] I.M. Krichever, *The τ -function of the universal Witham hierarchy, matrix models and topological field theories*, Preprint LPTENS-92/18, May 1992.
- [113] Y. Ladegaillerie, *Classification topologique des plongements de 1-complexes compacts dans les surfaces*, C. R. Acad. Sc. Paris. A. **278** (1974), 1401–1403.
- [114] ———, *Classes d’isotopies de plongements de 1-complexes dans les surfaces*, Topology **23** (1984), 303–311.
- [115] S. Lang, *Algebraic number theory*, Addison-Wesley (Reading), 1970.

- [116] ———, *Elliptic functions*, Addison-Wesley (Reading), 1973.
- [117] R.B. Laughlin, *Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), no. 18, 1395–1398.
- [118] H.B. Lawson, *The theory of gauge fields in four dimensions*, Amercian Math. Soc., 1985.
- [119] M. Le Bellac, *Des phénomènes critiques aux théories de jauge*, Interéditions, 1988.
- [120] W.B.R. Lickorish, *Surgery on knots*, Proc. of the A.MS. **60** (1977), 296–298.
- [121] ———, *Invariants of three-manifolds from the combinatorics of the Jones polynomial*, Cambridge University Preprint, 1991.
- [122] S. Mac-Lane and G. Birkhoff, *Algèbre: structures fondamentales*, Cahiers Scientifiques., vol. 35, Gauthier Villars, 1971.
- [123] S. Mac Lane and G. Birkhoff, *Algèbre: les grands théorèmes*, Cahiers Scientifiques., vol. 36, Gauthier Villars, 1971.
- [124] J.M. Maillet, *Integrable systems and gauge theories*, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **18** (90), 212–241.
- [125] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Math. Notes, vol. 1, Princeton University Press, 1965.
- [126] ———, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.
- [127] ———, *Morse theory*, Annals of Maths. Studies, vol. 51, Princeton University Press, 1969.
- [128] G. Moore and N. Read, *Fractional quantum Hall effect and non-abelian statistics*, Tech. Report YCTP-P5-92, Departement of Physics, Yale University, Departement of Physics, Yale University, New Jersey, CT-06511, 1992.
- [129] G. Moore and N. Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Phys. Lett. **B** **212** (1988), 451–460.
- [130] ———, *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 177–255.
- [131] ———, *Naturality in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B** **313** (1989), 16.
- [132] ———, *Lectures on rational conformal field theories*, Trieste Superstrings 1989, 1990, pp. 1–129.
- [133] M. Motto, *Surfaces in three-manifolds and three-manifolds triads*, Ph.D. thesis, University of Texas at Austin, May 1988.
- [134] ———, *Maximal triads and prime decompositions of surfaces embedded in three-manifolds*, Preprint Indiana University, 1990.
- [135] D. Mumford, *Curves and their Jacobians*, Michigan University, 1976.
- [136] ———, *TATA lectures on theta functions*, Birkhauser, 1983-84.
- [137] M.S. Narasimhan and C.S. Seshadri, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface.*, Annals of Maths. **82** (1965), 540–567.

- [138] H. Niemaier, *Definite quadratiken formen der dimension 24 und diskriminant 1*, JNT **5** (1973), 142–178.
- [139] V. Pasquier, *Two-dimensionnal critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. **B** (FS 19) **285** (1987), 162–172.
- [140] D. Perrin, *Cours d’algèbre de l’ENS*, Collections de l’ENSJF (Paris), 1981.
- [141] S. Piunikhin, *Different presentations of 3-manifold invariants arising in rational conformal field theory*, Preprint Moscow State University, 1992.
- [142] ———, *Reshetikhin-Turaev and Kontsevitch-Kohno 3-manifold invariants coincide*, Preprint Moscow State University, 1992.
- [143] M. Planck, Sitz. Deut. Akad. Wiss. **440** (1899).
- [144] A.M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Phys. Lett. **B** **103** (1981), 207–210.
- [145] ———, *Gauge fields and strings*, Contemporary Concepts in Physics, vol. 3, Harwood Academic Publishers, 1988.
- [146] ———, *Quantum gravity in 2D, high temperature superconductivity*, Fields, Strings and Critical phenomena, (XLIX Les Houches session). (E. Brézin and J. Zinn-Justin, eds.), Elsevier, 1988, pp. 305–368.
- [147] ———, *Fermi-bose transmutation induced by gauge fields*, Int. Jour. of Mod. Phys. **A** **3** (1989), 325.
- [148] A.M. Pressley and G.B. Segal, *Loop groups*, Oxford University Press, 1986.
- [149] S.G. Rajeev, *Yang-Mills theory on a cylinder*, Phys. Lett. **B** **212** (1988), 203–205.
- [150] K.H. Rehren and B. Schroer, *Einstein causality and Artin braids*, Nucl. Phys. **B** **312** (1988), 715.
- [151] N.Y. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [152] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.
- [153] A. Rocha-Caridi, *Vacuum vector representations of the Virasoro algebra*, Vertex operators in mathematics and physics (J. Lepowsky, S. Mandelstam, and I.M. Singer, eds.), MSRI Publications., vol. 3, Springer Verlag, 1985, pp. 461–474.
- [154] Ph. Roche, *Structures algébriques liées à des modèles de mécanique statistique bidimensionnels*, Master’s thesis, Ecole Polytechnique, 1991.
- [155] ———, *On the construction of integrable dilute ADE models*, Phys. Lett. **B** **285** (1992), 49.
- [156] Ph. Roche and D. Arnaudon, *Irreducible representations of the quantum analogue of $SU(2)$* , Letters in Math. Phys. **17** (1989), 295–300.

- [157] R. Rouquier, *Partie sur les groupes à table de caractères symétriques*, Rapport de Magistère., July 1991.
- [158] L. Rozansky and H. Saleur, *S and T matrices for the super $U(1,1)$ WZW model. Application to surgery and 3-manifolds invariants based on the Alexander Conway polynomial*, Preprint YCTP-P10-92, UTTG-07-92, March 1992.
- [159] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mac Graw Hill, 1974.
- [160] A.N. Schellekens, *Meromorphic $c = 24$ conformal field theories*, Preprint CERN-TH-6478/92, 1992.
- [161] J. Scherk and J. Schwarz, *Dual models and geometry of space time*, Phys. Lett. B. **52** (1974), 347–350.
- [162] L. Schneps, *Dessins d’enfant on the Riemann sphere*, Preprint URA-741, 1992.
- [163] J. Schwarz, Superstrings: The first fifteen years of superstring theory, ch. 5, pp. 218–222, World Scientific Publishing Co., 1985, pp. 218–222.
- [164] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Oxford University Preprint., 1987.
- [165] ———, *Two dimensional conformal field theories and modular functors*, IXth International Congress on Mathematical Physics (B. Simon, A. Truman, and I.M. Davies, eds.), Adam Hilger, 1989, pp. 22–37.
- [166] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1967.
- [167] ———, *Cours d’arithmétique*, P.U.F., 1970.
- [168] ———, *Groupes finis*, Cours donné à l’ENSJF (Paris), 1979.
- [169] G. Shabat, *The arithmetics of 1, 2 and 3-edged Grothendieck dessins*, Preprint IHES/M/91/75, 1991.
- [170] G. Shabat and V. Voevodsky, *Drawing curves over number fields*, The Grothendieck Festschrift (P. Cartier, L. Illusie, N. Katz, G. Laumon, and al, eds.), vol. 3, Progress in mathematics, no. 88, Birkhäuser, 1990.
- [171] J. Sherk, *An introduction to the theory of dual models and strings*, Review of Modern Physics **47** (1975), 429–444.
- [172] J. Sherk and J. Schwarz, *Dual models for non-hadrons*, Nucl. Phys. B **81** (1974), 118–144.
- [173] J. Singer, *Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams*, Trans. Am. Math. Soc. **35** (1933), 88–111.
- [174] I. Stewart, *Galois theory*, Chapman and Hall, 1973.
- [175] S. Suzuki, *On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody*, Can. Journ. Maths. **XXIX** (1977), no. 1, 111–124.
- [176] D.J. Thouless and Y.S. Wu, *Remarks on fractional statistics*, Phys. Rev. B **31** (1985), 1191.

- [177] P. Tran Ngoc Bich, *Théories des champs en basse dimension*, Rapport Stage ENSLAPP, September 1992.
- [178] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}_1$ and monodromy representations of the braid group*, Adv. Studies in Pure Math. **16** (1987), 291–372.
- [179] C. Vafa, *Conformal field theories and punctured surfaces*, Phys. Lett. B. **199** (1987), 195.
- [180] ———, *Operator formulation on Riemann surfaces*, Phys. Lett. B. **190** (1987), 47–51.
- [181] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D CFT's*, Nucl. Phys. B **300** (FS 22) (1988), 360–376.
- [182] ———, *A note on braid statistics and the non-abelian Bohm-Aharonov effect*, Proc. of Int. Colloq. on Modern Quantum Field Theory, Bombay, India, Jan 8-14, 1990, 1990, p. 450.
- [183] E. Verlinde and H. Verlinde, *Conformal field theory and geometric quantization*, Trieste Spring school on superstrings, June 1989, p. 422.
- [184] G.E. Volovik and V.M. Yakovenko, *Fractional charge, spin and statistics for solitons in superfluid ^3He* , Journal of Physics, Condensed Matter **1** (1989), 5263–5274.
- [185] S.O. Warnaar, B. Nienhuis, and K.A. Seaton, *A new construction of solvable RSOS models including an Ising model in a magnetic field*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992), 710.
- [186] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer Verlag, 1976.
- [187] F. Wilczek, *Lectures on fractional statistics and anyon superconductivity*, Preprint IASSNS-HEP-89/59, 1989.
- [188] K.G. Wilson and J. Kogut, *The renormalization group and the ε expansion*, Physics Reports C **12** (1974), 77–199.
- [189] E. Witten, *Non-abelian bosonization in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **92** (1984), 455–472.
- [190] ———, *Topological quantum field theory*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 353–386.
- [191] ———, *Gauge theories and integrable lattice models*, Nucl. Phys. B **322** (1989), 629–697.
- [192] ———, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.
- [193] ———, *Topology changing amplitudes in 2 + 1 dimensional gravity*, Nucl. Phys. B. **323** (1989), 113–140.
- [194] T. Yoneya, *Connection of dual models to electrodynamics and gravitodynamics*, Progr. Theor. Phys. **51** (1974), 1907–1920.
- [195] Al. Zamolodchikov, Int. Jour. of Modern Physics A (1988), 743.
- [196] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Oxford Science Publications, 1992.

Index

- p -groupe, 229, 232, 234
- épimorphisme, [69](#)
- équation
 - de Knizhnik-Zamolodchikov, 101, 148, 206
 - de Knizhnik-Zamolodchikov généralisée, 206
 - de Yang-Baxter, 98, 185, [187](#), 195, 197, 293, 317, 371
 - pentagone, [178](#), 186, 187, 190, 193, 292–293
- équations
 - de Moore et Seiberg, [184](#), 160–198
- équivalence entre théories des champs, 19, 24, 31, [50](#), 49–53, 65, 227, 255–257, 375, 405
- action effective du modèle de WZW, 151–153, 279, 401
- algèbre
 - chirale, 24, 105, 156–166, 169, 180, 183, 238, 250–254, 376
 - de Cartan, 134, [198](#), 203
 - de groupe, 232, 253
 - de Hopf, 28, 67
 - de Kac-Moody, 136, 149, 155, 161, [199](#), 203–204, 254, 271
 - de quasi-Hopf, 22, 28, 67, 376
 - de Verlinde, [192](#), 228, 233, 250–251, 258–261, 308, 376, 377
 - de Virasoro, 106, 113, [122](#), 120–124, 144, 160, 161, 163, 198, 201, 205
- anomalie de Weyl, 16, 105–106, 111–119
- calcul de Kirby, 24, 307, 321–325, 353, 370–371
- calcul de Kirby amélioré, 364–369
- catégorie, [67](#), 67–71
 - algébrique, [37](#)
 - des découpes, [384](#), 390
 - des surfaces non-tagguées, [56](#)
 - des surfaces tagguées, 59, 401, 403–406
 - duale, [67](#)
 - géométrique, [36](#)
- champ
 - déscendant, 16, [134](#), 147–148, 202, 206
 - primaire, 106, 119, 124, [130](#), 130–137, 139–141, 144, 147–149, [152](#), 152–154, 161, 166, 167, 177, 236–237, 250, 251, 255–281
 - quasi-primaire, [130](#), 132
- PE descendant, 223
- charge centrale, 111, 132
- chirurgie, 24, 26, 28, 29, [44](#), 308, 309, [320](#), 320–321, 336–346, 353–356, 363–364, 387, 406
- circuits d’un plongement, [385](#)
- circularisation, [385](#)
- classification *ADE*, 141, 207–208, 239, 253
- cocycle, [62](#), 63–66, 122–124, 153, 280, 282, 294–296, 310, 328, 334, 335, 362–363, 378, 383, 396, 406
 - de Harer, 396
 - universel, 362–363
- connexions plates, 16, 72, 80–82
- construction
 - de Goddard-Kent et Olive, 137, 207–210
 - de Sugawara, 144, 154, 205–209
 - orbifold, 156–160, 207, 209, 253, 340
- corps de compression, [357](#), 356–359
- découpe, 378, [384](#), 383–388, 391–395, 412
- découpes
 - équivalentes, 378, [384](#), 388
 - emboîtées, [384](#), 392, 395
- dessins d’enfant, 375, 397, 401, 412
- diagrammes de Heegaard, [348](#), 348–350
- dualité de Kramers-Wanier, 138–141
- effet Bohm-Aharonov, 86, 93
- extension centrale
 - d’un groupe, 70
 - d’une algèbre de Lie, 122, 127, 153
 - d’une catégorie, 63–64, 70–71, [71](#)

- extention centrale
 - d'un groupe, 122
- facteur de phase topologique, 85–87, 90, 92–95, 98, 99
- fermions de Majorana, 139
- foncteur, [68](#), 67–68
 - d'oubli, 60–61, 68
 - modulaire, [37](#), 34–39
 - projectif, [62](#)
- fonction
 - $\varnothing$, 128, 132, [211](#), 211–214
 - j , [217](#), [218](#), 217–220, 254
 - de Belyi, [398](#), 399–400
 - de Dedekind, [143](#), 159
 - de Morse, 42, 302, 308, 311, 318, 410
- fonctions
 - elliptiques, 26, [210](#), 210–216, 399
 - thêta, 158–159, [216](#), 215–216
- forme
 - d'intersection, 328, 339, 370
 - de Killing, 71, 77, 100, 149, 152, 203
 - de Maurer-Cartan, 77
 - quadratique sur $\mathbb{F}_q$, 237
- formule de
 - Polyakov-Wiegmann, [150](#), 401
 - Verlinde, 27, 146, [192](#), 191–194, 198, 251, 256, 258, 260, 299
- framing, 28, 44–48, [48](#), 117, 167, 271–273, 280, 282–284, 287–289, 291–292, 296–301, 309, 310, 314, 315, 319–326, 328–332, 340, 341, 344, 346, 354–356, 359–371, 392, 393, 404
 - normal, [273](#), 288, 289, 299, 300, 314, 315, 329, 361
 - zéro, [273](#), 320, 326, 329, 336, 339, 341, 346
- Galois, 22, 24, 379, 388, 397, 401, 412
- graffiti, [408](#)
- groupe
 - auto-dual, [228](#), 229–232
 - de Griess-Fisher, 141, 160
 - de Heisenberg, 232
 - de Suzuki, [350](#), 352–353, 357
 - d'un cobordisme paramétré, [358](#)
 - des tresses, 85, 90–101, 223–225, 360–363
 - des tresses (non colorées), [91](#)
 - des tresses colorées, [91](#), 362
 - modulaire, [175](#), 383–396
 - nilpotent, 232
 - résoluble, 232
 - sporadique, 160, 229
- identités
 - de Dyson-Schwinger, 150, 152, 155
 - de Ward, 74, 106, 119–120, 126–132, 134, 137, 147, 149, 152–153, 164–165, 205
- indice
 - de ramification, [398](#), 399–400
- Interaction Round the Faces, 187
- invariants
 - de découpes, [385](#), 385–387
 - modulaires, 24, 25, 156–160, 182, 227, 236, 238–254
- IRF, 187
- isomorphisme
 - de découpes, [384](#), 386–388
 - entre cobordismes paramétrés, [35](#), 35–37, 56, 114, 276, 309, 341–342, 358, 378
 - faible, [35](#), 36, 175, 384, 386, 390
 - fort, [35](#), 56, 175, 334, 387
- Lego-Teichmüller, 383
- ligne de Wilson, 18, 45, 78–80, 281, 283, 298, 325, 402
- localité à la frontière, 19, 24, [39](#), 39–41, 45, 380, 52–383, 391
- mécanique quantique topologique, 59–61
- matrice
 - de transfert, 119, 304, 308, 311–318, 337, 407
- matrice S possible, 228, 233, [259](#), 259–261
- matrice de Cartan généralisée, 199, [199](#), 200
- mesure de Haar, 75–78, 150
- modèle
 - “IRF”, 406–410
 - d'Ising, 106, 138–141, 167–174
 - de Higgs, 21, 29, 41, 71–84, 270, 276, 403
 - de Wess-Zumino-Witten, 22, 106, 148–155, 161, 200, 207, 209, 223, 236, 253, 254, 269, 279, 281, 372, 401
 - de WZW jaugé, 29, 400–403
 - Gaussien, 106, 138, 141–148, 160, 236, 253–254

- Gaussien compactifié sur un cercle, 145–148, 236
- modèles
 - $A_N^{(1)}$ de niveau 1, 24, 149, 236–237, 253, 254
 - minimaux, 106, 141, 148, 160, 207, 239
- module
 - de Verma, 136, 200, 198–204
 - du Moonshine, 157–160, 376
- monomorphisme, 69
- mouvement
 - de Kirby, 328–332, 340
 - de Reidemeister, 294, 315
 - de Reshetikhin-Turaev, 98, 315–317
 - de Singer, 350, 350–353, 355
 - de type K , 322, 324, 322–326, 328–331, 354, 355
 - de type $\mathcal{O}_1$, 324, 332
 - de type $\mathcal{O}_2$, 324, 328, 332
- opérateur
 - de désordre de Kadanoff, 138
 - d’entrelacement, 79, 124, 163, 164, 228, 271
 - de vertex, 124
 - de vertex chirale, 125, 160, 163, 163–165, 173
- opérateurs
 - de Verlinde, 298, 298–299
- orbifold $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, 254–257, 346–347
- parastatistiques, 23, 53, 85, 96–99
- polynôme
 - d’Alexander, 281–282
 - de Jones, 18, 20, 27, 84, 99, 371–373
- principe d’“invariance conforme”, 110, 107–111
- réseau de Leech, 157
- représentation
 - indécomposable, 281
- revêtement ramifié, 397–399
- scindements de Heegaard, 21, 340, 347, 347–356
 - de cobordismes paramétrés, 357, 356–358
- sommes de Gauss, 235, 237, 257, 265, 265–267, 346–347
- statistiques fractionnaires, 22–23, 87, 93–97
- structure
 - complexe, 49, 111–114, 116, 117, 120, 123, 126, 128
 - conforme, 35, 42, 105, 106, 115, 116, 119
 - quasi-conforme, 114, 114–116
- superalgèbre de Lie, 281
- supergroupe, 281
- symétrie tétraédrale, 187, 191, 190–191, 194, 196, 197, 290–292, 317
- symétries de $S(p)$, 195–197, 301
- symbole
 - de Jacobi, 264
 - de Legendre, 262–264, 266
- tag, 59, 79, 407–410
- tenseur énergie-impulsion, 16, 107–108, 110, 112, 127–130, 133–135, 139, 144, 153–154, 161, 206
- tenseur énergie-impulsion, 131
- théorème
 - d’équivalence quantique, 205
 - d’Ahlfors-Bers, 115, 116
 - d’uniformisation de Riemann, 213, 398
 - de Baer, 274
 - de Belyi, 22, 397, 398
 - de Carathéodory, 114
 - de Freedman, 370
 - de Friedan-Qiu-Shenker, 137, 205
 - de Goursat, 114
 - de Kirby-Fenn-Rourke, 324
 - de Ladegaillerie, 389, 389
 - de Lickorish-Wallace, 24, 309, 321
 - de Liouville, 110
 - de Motto, 358
 - de naturalité, 27, 169, 182, 250, 251
 - de Peter-Weyl, 75
 - de Riemann-Hurwitz, 212
 - de Singer, 350
 - de Suzuki, 26, 352
- théorie
 - de Chern-Simons, 18, 20–21, 23, 27, 29, 61, 87, 269, 270, 276–280, 283, 286, 347, 401–403
 - de Yang-Mills, 29, 71–84, 278
- théorie des Champs
 - conforme, 119
 - géométrique, 38
 - projective, 62, 61–66
 - rationnelle, 55

- topologique, 55
- tore de Cartan, 148, 149, 236
- tour modulaire, 18, 363, 378–380, 388, 383–396
- transformation naturelle, 24, 50–52, 68, 68–70
 - locale, 32, 48, 50, 51, 53
 - locale projective, 65–66, 66
 - locale unitaire, 51, 53
- transformations
 - de Weyl, 105, 108, 110, 111
- triangulation, 71, 80–83, 400, 410–412
- twist de Dehn, 142, 165–182, 272, 352–355, 360–363, 392, 393
- variété
 - entrante, 35, 270, 303, 341
 - sortante, 35, 270, 303, 341