Résumé : Ce texte étudie la modélisation informatique, des méthodes de résolution et une utilisation possible de jeux à deux joueurs antagonistes pour lesquels chaque joueur a, à tout moment, une vision globale de la partie en cours.

Mots clefs : algorithmes de graphes, combinatoire, complexité

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Cadre général

On s'intéresse à l'étude théorique et algorithmique de jeux à deux joueurs antagonistes jouant alternativement. On appellera 0 et 1 ces joueurs. Ces jeux sont à information parfaite, c'est-à-dire qu'à tout instant d'une partie, chacun des joueurs a une vision complète de l'état du jeu. C'est par exemple le cas pour des jeux comme les échecs ou les dames, mais pas pour la plupart des jeux de cartes, où l'on ne connaît pas le jeu de ses adversaires. Une autre restriction est qu'à l'issue d'une partie, l'un des deux joueurs est déclaré gagnant, et l'autre joueur perdant : il n'y a pas de partie nulle.

2. Quelques exemples de jeux

Jeu de Nim. Un premier exemple est le *jeu de Nim*, parfois appelé *jeu de Marienbad* ou *Fan Tan*. Il se joue avec des allumettes posées en plusieurs lignes sur une table. Chacun son tour, un joueur choisit une ligne et lui enlève plusieurs allumettes — au moins une. Par exemple, à partir de la configuration (a) de la figure 1, le joueur 0 pourrait obtenir la configuration (b) en retirant 3 allumettes de la dernière ligne. Le joueur qui prend la dernière allumette a gagné.

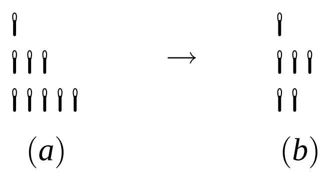
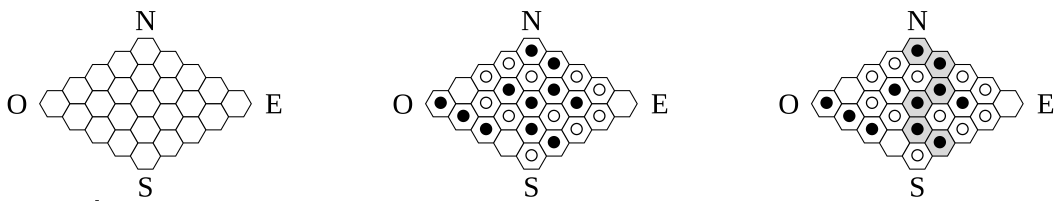


FIG. 1. Un coup joué dans le jeu de Nim

Jeu Hex. Un second exemple est le jeu appelé *Hex*. Il se joue sur un plateau en forme de losange à cases hexagonales. Un tel plateau, à 25 cases, est représenté en figure 2 (a). Ses coins sont notés N (Nord), E (Est), S (Sud), O (Ouest) et ses côtés NE, NO, SE, SO. À tour de rôle, chaque joueur pose un pion sur une des cases encore libres. Le premier joueur parvenant à relier deux côtés *opposés* par un chemin formé de cases adjacentes couvertes par ses pions a gagné. La partie de la figure 2 (b) a été terminée avant que toutes les cases ne soient remplies. Le joueur 0 a posé 11 pions $\circ$; le joueur 1 a également posé 11 pions $\bullet$, et son dernier coup lui a permis de relier le côté NO au côté SE par un chemin représenté en figure 2 (c). On peut montrer que dans ce jeu également, il n'y a jamais de partie nulle.



(a) Échiquier (b) Une partie… (c) …gagnée par le joueur 1 ($\bullet$)

FIG. 2. Le jeu Hex

Chomp. Un troisième exemple est le jeu *Chomp*, se jouant avec une tablette de chocolat initialement rectangulaire, posée devant les joueurs et dont le coin supérieur gauche, de coordonnées $(0,0)$, est empoisonné. Chaque joueur choisit à tour de rôle un carré et le mange ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carré choisi. S'il choisit le morceau de coordonnées (i, j), il mange aussi les morceaux de coordonnées (i', j') avec $i' \geqslant i$ et $j' \geqslant j$. Le joueur qui doit jouer lorsqu'il ne reste plus comme dernier carré que celui empoisonné a perdu. La figure 3 représente une suite de configurations formant une partie, jouée à partir d'une tablette 3×4. Le carré empoisonné est indiqué en noir et le symbole ◌ indique quel carré est choisi (alternativement par les joueurs 0 et 1) pour passer à la configuration suivante.

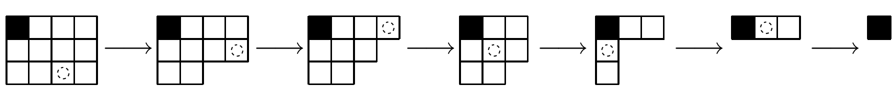


FIG. 3. Suite de configurations du jeu chomp

3. Modélisation

Comme dans les exemples précédents, les jeux étudiés ici ont un nombre fini de configurations. À un tel jeu est associé un graphe orienté fini (S,A), appelé *arène*. Chaque élément de l'ensemble S des sommets représente une configuration du jeu, aussi appelée *position*. L'une des positions, s_0, est distinguée, et appelée *position de départ* du jeu. Une arête $a = (s,t) \in A$ indique la possibilité, pour le joueur jouant à partir de la position s, d'atteindre la position t en un coup. Par exemple, les positions (a) et (b) de la figure 1 seraient reliées par une arête dans l'arène du jeu de Nim. Pour le jeu Chomp avec une tablette 2×2, on obtiendrait le graphe de la figure 4 (a). On considère qu'aucun joueur ne perd volontairement en mangeant le carré empoisonné s'il n'y est pas obligé.

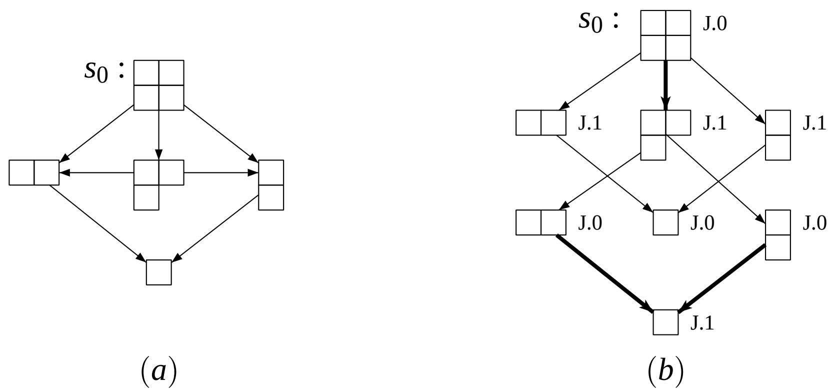


FIG. 4. (a) Graphe et (b) graphe biparti — associés au jeu de Chomp 2×2.

Pour jouer sur le graphe, un jeton est initialement posé sur la position de départ s_0. À tour de rôle, chaque joueur le déplace le long d'une arête issue de la position courante s, et le pose sur un successeur de s. Une *partie* est une suite de tels mouvements depuis s_0 : c'est un chemin d'origine s_0 dans l'arène. Une fois fixé le joueur qui commence, disons 0, on peut, quitte à enrichir chaque position avec le numéro du joueur devant jouer, supposer que les positions sont partitionnées en $S = S_0 \cup S_1$ (avec donc $S_0 \cap S_1 = \varnothing$), où S_ℓ est l'ensemble des positions depuis lesquelles jouera le joueur ℓ, de sorte que $A \subseteq (S_0 \times S_1) \cup (S_1 \times S_0)$: le graphe est biparti. Dans l'exemple précédent, on obtient le graphe de la figure 4 (b), où les positions du joueur 0 sont marquées J.0 et celles du joueur 1 sont marquées J.1. Un mouvement du joueur ℓ à partir de $s \in S_\ell$ consiste donc à choisir un successeur de s dans $S_{1-\ell}$. Pour compléter la description du jeu, on se donne un ensemble $\mathscr{W}$ de chemins dans l'arène. Une partie est gagnée par le joueur 0 si elle est dans $\mathscr{W}$, et par le joueur 1 sinon. Le jeu est ainsi complètement décrit par le quadruplet $(S, A, s_0, \mathscr{W})$.

Stratégies. Une *stratégie (positionnelle) pour le joueur* $\ell \in \{0,1\}$ est une application $f : S_\ell \to S_{1-\ell}$ telle que $(s, f(s)) \in A$ pour tout $s \in S_\ell$. Si f est une stratégie pour le joueur ℓ, on dit qu'une partie $s_0 \to s_1 \to s_2 \to \cdots$ est *jouée selon* f si pour tout couple (s_k, s_{k+1}) de positions consécutives dans la partie avec $s_k \in S_\ell$, on a $s_{k+1} = f(s_k)$. Informellement, suivre une stratégie consiste à choisir à l'avance, pour chaque position, le mouvement à jouer. Une stratégie f pour le joueur ℓ est *gagnante* si toute partie maximale (c'est-à-dire, qui ne peut pas être prolongée) et qui est jouée selon f est gagnée par le joueur ℓ : informellement, si, quelque soit ce que fait l'autre joueur, l'application de la stratégie garantit le gain de la partie. Sur la figure 4 (b), le choix des mouvements marqués en gras définit une stratégie gagnante pour le joueur 0.

4. Jeux d'accessibilité

Dans cette partie seulement, on se restreint aux arènes acycliques (ainsi, toute partie est finie). Pour définir un jeu à *condition de gain rationnelle*, on se donne un langage rationnel $L \subseteq S^*$.

Une partie est dans l'ensemble $\mathscr{W}$ des parties gagnantes pour le joueur 0 si et seulement si le mot formé par la suite de sommets qu'elle traverse est dans L. Pour ces jeux, l'existence d'une stratégie positionnelle pour l'un des joueurs n'est en général pas assurée.

Fait 1. *Dans un jeu à condition de gain rationnelle, il est possible qu'aucun des deux joueurs n'ait une stratégie positionnelle.*

Un jeu est d'*accessibilité* si $\mathscr{W}$ est déterminé par un ensemble T de positions, appelées *cibles*, supposées sans successeurs : une partie est dans $\mathscr{W}$ si et seulement si elle rencontre au moins une position de T. Autrement dit, le jeu est à condition de gain rationnelle donnée par le langage S^*T. On peut vérifier que les jeux décrits jusqu'à présent sont des jeux d'accessibilité.

Fait 2. *Les jeux de Nim, Hex et Chomp peuvent être décrits comme des jeux d'accessibilité.*

Existence de stratégies gagnantes. La proposition suivante énonce une propriété intéressante des jeux d'accessibilité. Elle peut se prouver en considérant l'ensemble T_i des positions dans l'arène à partir desquelles le joueur 0 peut forcer une visite dans T en au plus i mouvements.

Proposition 1. *Dans un jeu d'accessibilité $(S, A, s_0, \mathscr{W})$, il existe $W_0, W_1 \subseteq S$, avec $S = W_0 \cup W_1$, et pour chaque $\ell \in \{0, 1\}$, une stratégie f_ℓ gagnante pour le joueur ℓ dans chacun des jeux $(S, A, s, \mathscr{W})$, pour $s \in W_\ell$. On peut calculer W_0, W_1, f_0 et f_1 en temps $O(n)$, où $n = |S| + |A|$.*

Le calcul d'une stratégie gagnante pour le joueur 0 est en fait un problème P-complet. La situation est plus simple dans le cas particulier des jeux dans lesquels le joueur 1 n'a aucun choix : on dit qu'un jeu est *à un joueur* si tout sommet de S_1 a au plus un successeur.

Proposition 2. *Dans un jeu d'accessibilité à un joueur, on peut calculer en temps $O(|S|^3)$ une partie gagnée par le joueur 0 de taille minimale, si une telle partie existe.*

Il peut arriver que ce soit toujours le même joueur qui possède une stratégie gagnante.

Proposition 3. *Dans le jeu Hex quelle que soit la taille du plateau, et dans le jeu Chomp, partant d'une tablette à au moins 4 carrés, le joueur qui joue le premier a une stratégie gagnante.*

Cependant, savoir qui a une stratégie gagnante est plus simple — et moins utile — que d'en calculer une. Plusieurs jeux ont un nombre de configurations trop élevé pour pouvoir calculer des stratégies gagnantes de façon efficace. On peut montrer le résultat suivant.

Proposition 4. *Le problème de calculer une stratégie gagnante pour le joueur 0 (qui joue le premier) dans le jeu de Hex peut être décidé par une machine de Turing utilisant un nombre polynomial de cellules en fonction de la taille du plateau d'entrée.*

Le nombre de configurations est un obstacle qui peut être contourné lorsque le jeu se décompose en sous-jeux plus simples. On considère ici un jeu d'accessibilité $(S, A, s_0, \mathscr{W})$, dit *de blocage* : l'arène est acyclique, et $\mathscr{W}$ impose que le joueur qui ne peut plus jouer perd. C'est par exemple le cas dans le jeu de Nim. Pour $s \in S$, on note $s.A$ l'ensemble des successeurs de s dans l'arène. On définit une fonction $\gamma : S \to \mathbb{N}$, appelée *fonction de Sprague-Grundy*, par

$$\gamma(s) = \operatorname{mex}\big(\gamma(s.A)\big)$$

où, pour tout ensemble fini X d'entiers naturels, $\mathrm{mex}(X)$ désigne le plus petit entier de $\mathbb{N}\setminus X$. Sur une arène acyclique, la fonction γ est bien définie. Par exemple, pour le jeu de Chomp partant de la tablette 2×2, on obtient les valeurs indiquées au dessus de chaque position sur la figure 5. On constate sur cet exemple le fait suivant. Soit f une stratégie pour le joueur $\ell \in \{0,1\}$ qui

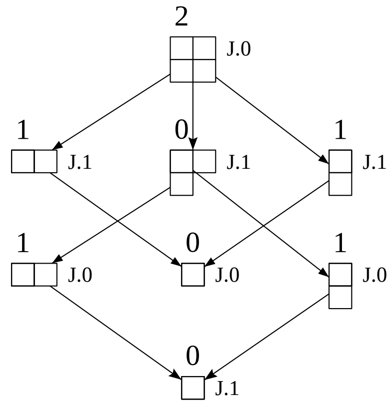


FIG. 5. Valeurs de la fonction de Sprague-Grundy sur un jeu Chomp

consiste, à partir de chaque position dont la valeur par γ est non nulle, à choisir un successeur dont la valeur par γ est nulle (et définie de façon arbitraire sur les autres sommets de S_ℓ). Alors, f est gagnante pour le joueur ℓ dans tous les jeux $(S,A,s_0,\mathscr{W})$, dès que $s_0 \in S_\ell$ et $\gamma(s_0) \neq 0$. Ce fait est général.

Proposition 5. *Soit $s_0 \in S_\ell$. Alors, le joueur ℓ a une stratégie gagnante sur $(S,A,s_0,\mathscr{W})$ si et seulement si $\gamma(s_0) \neq 0$. Si $\gamma(s_0) \neq 0$, le premier coup d'une stratégie gagnante pour le joueur ℓ consiste à choisir un successeur de s dont la valeur par γ est nulle.*

Ce résultat motive le calcul de la fonction de Sprague-Grundy. Il permet par exemple de résoudre le jeu d'Euclide. Une position de ce jeu est un couple (n,m) d'entiers strictement positifs. Le joueur qui joue sur la position (n,m) peut retirer au plus grand des entiers n,m un multiple du plus petit, pourvu que le résultat reste strictement positif. Par exemple, à partir de la position $(7,38)$, on peut jouer vers l'une des positions $(7,31)$, $(7,24)$, $(7,17)$, $(7,10)$, ou $(7,3)$.

Proposition 6. *La fonction de Sprague-Grundy du jeu d'Euclide associe à une position (n,m) la valeur $\left\lfloor \left| \frac{n}{m} - \frac{m}{n} \right| \right\rfloor$.*

Ainsi, le calcul de la fonction de Sprague-Grundy peut être réalisé sans nécessairement avoir à parcourir l'arène. C'est aussi le cas pour certains jeux se décomposant en sous-jeux.

Soit, pour $i = 1,2$ un jeu de blocage $\mathscr{J}_i = (S^{(i)},A^{(i)},s_0^{(i)},\mathscr{W}^{(i)})$. On construit à partir de $\mathscr{J}_1$ et $\mathscr{J}_2$ un nouveau jeu de blocage $\mathscr{J} = (S,A,s_0,\mathscr{W})$, appelé leur *somme*. Les positions de $\mathscr{J}$ sont définies par $S = S^{(1)} \times S^{(2)}$. La position initiale est $s_0 = (s_0^{(1)},s_0^{(2)})$. Finalement, $((s^{(1)},s^{(2)}),(t^{(1)},t^{(2)})) \in A$ si et seulement si ou bien $(s^{(1)},t^{(1)}) \in A^{(1)}$ et $s^{(2)} = t^{(2)}$, ou bien $(s^{(2)},t^{(2)}) \in A^{(2)}$ et $s^{(1)} = t^{(1)}$.

Notons $\oplus$ l'addition modulo 2. Pour $x,y \in \mathbb{N}$, soient $x_k \cdots x_0$ et $y_k \cdots y_0$ deux représentations en base 2 de même longueur de x et y, respectivement. La *somme de Nim* de x et y, notée

$x \oplus y$, est l'entier représenté en base 2 par $(x_k \oplus y_k) \cdots (x_0 \oplus y_0)$. Si on connaît les fonctions de Sprague-Grundy de $\mathscr{J}^{(1)}$ et $\mathscr{J}^{(2)}$, on peut alors calculer celle de $\mathscr{J}$.

Proposition 7. *Soient $\gamma^{(1)}$, et $\gamma^{(2)}$ les fonctions de Sprague-Grundy de jeux de blocage $\mathscr{J}^{(1)}$ et $\mathscr{J}^{(2)}$, respectivement. Alors, la fonction de Sprague-Grundy γ de leur somme est définie par $\gamma((s^{(1)}, s^{(2)})) = \gamma_1(s^{(1)}) \oplus \gamma_2(s^{(2)})$.*

Une conséquence est qu'on peut calculer les fonctions de Sprague-Grundy, et donc les stratégies, pour certains jeux. Notons $\mathrm{Nim}(x_1, \ldots, x_k)$ la configuration du jeu de Nim, avec des rangées d'allumettes de tailles $0 < x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k$. Par exemple, la configuration (a) de la figure 1 se note $\mathrm{Nim}(1,3,5)$ et la configuration (b) se note $\mathrm{Nim}(1,2,3)$.

Corollaire 1. *La valeur de la fonction de Sprague-Grundy sur la position Nim$(x_1, \ldots, x_k)$ est $x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$.*

On peut faire ce même type de calcul pour des variations du jeu de Nim. Par exemple, on peut envisager la version où on ne peut retirer de chaque rangée qu'entre 1 et 3 allumettes, ou la version ou l'on doit retirer au minimum la moitié des allumettes de la rangée choisie.

Exercice de programmation :

► *Il vous est demandé de rédiger un programme conforme aux spécifications ci-dessous dans l'un des langages C, Caml ou Java à votre choix. Ce programme devra être accompagné d'un exemple d'exécution permettant d'en vérifier le bon fonctionnement. La clarté et la concision du programme seront des éléments importants d'appréciation pour le jury.*

Écrire une fonction qui, étant donnée une position $s = \mathrm{Nim}(x_1, \ldots, x_k)$ du jeu de Nim, teste si le joueur 0 a une stratégie gagnante dans le jeu de Nim avec s comme position de départ, et qui, si c'est le cas, indique le coup à jouer selon une stratégie gagnante. L'entier k n'est pas fixé.

5. Jeux infinis

On peut aussi s'intéresser à des jeux sur des graphes avec cycles. On considère ici des jeux pour lesquels chaque sommet de l'arène a au moins un successeur. Une partie est alors un chemin *infini* dans l'arène. Il est nécessaire d'avoir une condition de gain adaptée. Dans un *jeu de Büchi*, un ensemble $R \subseteq S$ de positions dites *répétées* est donné. L'objectif du joueur 0 est de faire passer la partie infiniment souvent par une position de R. En utilisant le même type de techniques que pour les jeux d'accessibilité, on peut montrer le résultat suivant.

Proposition 8. *Dans un jeu de Büchi, l'un des deux joueurs a une stratégie positionnelle gagnante qu'on peut calculer en temps polymonial.*

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Pour se familiariser avec les définitions, on pourra prouver les faits 1 et 2 (en montrant qu'il n'y a pas de parties nulles dans Hex), puis, illustrer les notions de stratégies sur de petits graphes – par exemple, le jeu de Chomp partant d'une tablette 2×3.
- On pourra donner un exemple concret de jeu à un joueur et prouver les propositions 1, 2, 3.
- On pourra calculer le nombre de configurations atteignables dans le jeu de Chomp à partir d'une tablette de taille $n \times m$, et vérifier qu'il n'est borné par aucun polynôme de n et m.
- On pourra étudier les positions à partir desquelles le joueur 0 a une stratégie gagnante dans le jeu de Chomp partant d'une configuration $2 \times n$.
- On pourra prouver les résultats sur la fonction de Sprague-Grundy : la caractérisation des positions gagnantes (proposition 5), son calcul pour le jeu d'Euclide (proposition 6), sur un jeu somme (proposition 7) et pour le jeu de Nim (corollaire 1) et ses variantes. On n'essaiera pas de calculer la fonction de Sprague-Grundy pour les jeux de Chomp ou Hex.
- On pourra proposer des bornes (inférieure, supérieure) raisonnables pour le nombre de configurations du jeu Hex sur un plateau à $n \times n$ cases.
- On pourra ensuite montrer que le calcul d'une stratégie gagnante peut être réalisé par une machine de Turing utilisant un nombre polymonial $P(n)$ de cellules.
- On pourra enfin prouver la proposition 8 et proposer un algorithme de calcul de stratégie gagnante dans un jeu de Büchi, en en évaluant la complexité.