Optique

Bibliographie

Taillet. Houard. Perez.
TD de Montrouge (microscope optique).
Compensateur de Babinet top !

Historique de la nature de la lumière

Survol historique

- Au début, on constate la propagation en ligne droite dans les milieux homogènes, ce qui a donné lieu à la théorie corpusculaire et l'optique géométrique.
- 1665 Grimaldi découvre la diffraction.
- Huyghens puis Fresnel (1818) proposent une théorie ondulatoire. Point d'Arago ou tache de Poisson.
- 1864 : Equations de Maxwell, prédisant l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la même vitesse que celle de la lumière.
- 1888 : Hertz met en évidence expérimentalement les ondes EM. Il émet des ondes EM radio avec un circuit LC oscillant au-delà de la limite de claquage et produisant une série d'arcs électriques. Le récepteur est une boucle dont les extrémités sont séparées par un petit interstice. L'émission d'ondes électromagnétiques (dans le domaine radio) induit un courant électrique dans la boucle réceptrice qui se traduit par des arcs électriques.
- 1905 : effet photoélectrique expliqué par Einstein. Dualité onde-corpuscule.
- 1936 : Expérience de Beth : mesure de la rotation d'une lame de quartz traversée par une onde polarisée, qui montre le transfert de moment cinétique.

Optiques

Optique quantique $\xrightarrow{approx.}$ électromagnétisme, équations de Maxwell $\xrightarrow{approx.}$ optique ondulatoire $\xrightarrow{approx.}$ optique géométrique.

Optique quantique

Dans l'optique quantique, la lumière ou bien l'interaction entre lumière et matière sont quantifiées. Exemple : transfert d'impulsion lors du refroidissement Doppler, sideband cooling (voir Laser matière).

En électrodynamique quantique, la lumière est décrite par des opérateurs de création et annihilation de photons.

Electromagnétisme

La lumière est décrite par une onde électromagnétique. Les ondes monochromatiques vérifient l'équation de Helmholtz $\boxed{\Delta A + n^2\omega^2/c^2 A = 0}$. C'est la base de la théorie de Kirchhoff, qui utilise les fonctions de Green du d'Alembertien.

On peut comprendre les phénomènes de polarisation et d'interaction lumière-matière.

Optique ondulatoire en approximation scalaire

L'approximation scalaire utilise l'intensité vibratoire ψ qui représente une composante quelconque du champ EM. On considère que les composantes des champs électriques et magnétiques ne sont pas couplées (par $\vec{j}$ par exemple). Elle suppose :

- la lumière est non polarisée ou de polarisation constante au cours de la propagation.
- (à vérifier) un milieu linéaire, isotrope, **lentement variable** $|\vec{\nabla}\psi| \ll |\psi|/\lambda$.

L'approximation scalaire n'explique pas les phénomènes de diffraction (si l'indice du milieu varie sur des échelles comparables à la longueur d'onde), n'est pas valable à la frontière de l'ombre géométrique, à proximité d'un foyer.

Optique géométrique

L'optique géométrique s'appuie sur le modèle du rayon lumineux et ne fait pas d'hypothèses sur la nature de la lumière. A la place, on utilise des règles issues d'observations empiriques (i) propagation rectiligne dans un milieu homogène (ii) retour inverse (iii) relation de Descartes de la réflexion et réfraction pour un dioptre.

Pour être valable, il faut vérifier les hypothèses : milieu lentement variable, pas d'effet de polarisation, pas d'interférences.

Vrac

Lumière et transport

La lumière transporte de l'énergie par transport radiatif. Eclairement énergétique $\mathcal{E}(\vec{r}) =< |\vec{\pi}(\vec{r},t)| >_T$ en W/m^2.

La lumière transporte de la quantité de mouvement : pression de radiation.

La lumière transporte du moment cinétique à travers sa polarisation. Expérience de Beth (1936) : mesure de la rotation d'une lame de quartz traversée par une onde polarisée.

Blanc d'ordre supérieur

Le blanc d'ordre supérieur possède un spectre cannelé. Pour p élevé, les cannelures sont très rapprochées, on dirait du blanc car l'oeil ne fait pas la différence entre un spectre très cannelé et un spectre plat (taille des cannelures plus petites que les fenêtres d'intégration des récepteurs rétiniens).

De l'électromagnétisme à l'optique géométrique

Approximation de l'optique géométrique, limites

Approximation de l'optique géométrique : les dimensions du milieu sont grandes par rapport à la longueur d'onde : $d \gg \lambda$ *i.e.* les grandeurs sont lentement variables $|\nabla A| \ll A/\lambda$ avec A qui vaut $\vec{E}$,$\vec{B}$, ϵ_r et μ_r..

Limites : L'optique géométrique est insuffisante pour décrire la diffraction et les effets de polarisation. Elle ne permet pas de calculer des flux, des puissances et ne dit rien sur la nature physique de la lumière ou son interaction avec la matière.

L'indice optique dans les milieux

Pour de faibles champs, la théorie de la réponse linéaire fournit la susceptibilité électrique $\chi(\omega)$ définie par $\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega)\vec{E}$, qui est complexe. La partie réelle et la partie imaginaire sont reliés par les relations de Kramers-Kronig, découlant de la causalité. On définit ensuite la permittivité relative $\epsilon_r = 1 + \chi$, puis l'indice optique : $n^2 = \epsilon_r$ où n peut être complexe. On peut alors classer les milieux :

- milieu isotrope. ϵ_r et χ sont des scalaires. Ex : verre amorphe.
- milieu anisotrope. $\underline{\underline{\epsilon_r}}$ et $\underline{\underline{\chi}}$ sont des tenseurs. Ex : structure cristalline, quartz.
- milieu non linéaire. Un terme en $\vec{E}\otimes\vec{E}$ est à prendre en compte dans l'expression de $\vec{P} \rightarrow$ doublement de fréquence *i.e.* si $\vec{E}$ oscille à ω et la réponse $\vec{P}$ a une composante à 2ω. Les non-linéarités sont à prendre en compte pour de grandes amplitudes de $\vec{E}$ ou des milieux concentrés (rétroaction des dipôles induits sur le milieu).

Le modèle de l'électron élastiquement lié permet d'obtenir des expressions de la polarisabilité $\alpha(\omega)$, proportionnelle à $\chi(\omega)$ dans un milieu dilué où les dipôles n'interagissent pas.

Sans notions d'électromagnétisme, on peut définir empiriquement l'indice optique à l'aide de la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu. En effet, dans un diélectrique linéaire isotrope, c'est justifié par le calcul de rot rot E, qui aboutit à l'équation de d'Alembert pour $\vec{E}$, de vitesse associée $v = c/n$. C'est la vitesse de phase et la vitesse de groupe. La relation de dispersion est obtenue en injectant une onde plane : $k^2 = n^2/c^2\omega^2$.

NB : L'indice optique effectif peut être négatif dans un métamatériau.

Interfaces, loi de Descartes, angle de Brewster

Conditions de passage

Les relations de passage découlent des conditions de continuité des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Dans les milieux diélectriques, sans charges libres et courants libres, $\boxed{E_T \text{ et } n^2E_N,\ B_N \text{ et } B_T/\mu}$ sont continus (T pour tangentiel, N pour normal). Si la perméabilité magnétique n'est pas discontinue, toutes les composantes de $\vec{B}$ sont continues.

Avec les relations de passage, en distinguant les polarisations TE et TM, on déduit les lois de Descartes sur les directions de propagation et les formules de Fresnel, sur les amplitudes.

On note que $r_{12} = -r_{12}$ mais $|t_{12}| \neq |t_{21}|$. En incidence normale, $r = (n_1-n_2)/(n_1+n_2)$. **ODG:** interface air-verre, $R \sim 4\%$ réfléchie à chaque dioptre.

Bilan de puissance. La puissance est proportionnelle à $n|E|^2$. De plus, $t_{21} \neq t_{12}$, mais la conservation de la puissance donne $\boxed{|r_{12}|^2 + t_{21}t_{12} = 1}$ car les coefficients de réflexion/transmission sont définis par les puissances $R + T = 1$. On note que $B \sim nE/c$ et donc $\Pi \sim nE^2/c$.

Réflexion totale, onde évanescente

Si $n_2 < n_1$, il existe un angle limite de réflexion totale. En dessous, les coefficients de réflexion/transmission dépendent de l'angle d'incidence. La réflexion sur un milieu plus réfringent (indice plus élevé) s'accompagne d'un changement de phase de π sauf pour une incidence supérieure à l'angle de Brewster pour la polarisation TM.

Lors d'un réflection totale, une onde évanescente est transmise. En la récupérant avec un second dioptre, on parle de **réflexion totale frustrée**. La longueur de pénétration est infinie à l'angle limite θ_{lim} puis décroît rapidement pour atteindre la longueur d'onde. $\delta \sim \lambda_0/n_1\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_i - n_2^2}$.

On peut le voir avec l'équation de propagation qui impose $\boxed{k_T^2 + k_N^2 = (n_i\omega/c)^2}$ et la continuité tangentielle de $\vec{E}$ qui impose l'égalité de k_T. Si $n_1 > n_2$, on peut avoir $k_T^2 > (n_2\omega/c)^2$ dans ce cas $k_N^2 < 0$ c'est-à-dire k_N imaginaire pure donc onde évanescente selon la normale au dioptre, de longueur de pénétration $\sim 1/|k_z| \sim 1/\sqrt{k_T^2 - n_2^2\omega^2/c^2}$.

L'onde réfléchie présente un déphasage avec l'onde incidente, différent selon la polarisation TE ou TM. Application : le principe du parallélépipède de Fresnel est d'agir comme une lame quart d'onde en produisant deux réflexions totales sur le bords du parallélépipède.

Angle de Brewster

Lorsque l'onde est polarisée selon le plan d'incidence, il existe un angle particulier où r s'annule : l'angle de Brewster θ_B, définit par $r = 0$ *i.e.* $\boxed{\tan\theta_B = n_2/n_1}$. La direction du rayon qui se serait réfléchi est orthogonal à celui qui s'est transmis. On a toujours $\theta_B < \theta_{lim}$ donc ce phénomène n'est jamais empêché par la réflexion totale. Application : on peut polariser l'onde réfléchie perpendiculairement au plan d'incidence.

On peut interpréter cet angle avec la notion de rayonnement dipolaire. Les charges excitées ne rayonnement pas dans la direction de l'excitation. Or à l'angle de Brewster, la direction de la réflexion est la même que celle de $\vec{E}$, donc les dipoles ne rayonnent pas dans la direction de réflexion, d'où un coefficient de réflexion nul.

De l'électromagnétisme à l'optique géométrique, formalisme eikonal

Fonction eikonale et milieu lentement variable

Dans un milieu non homogène mais lentement variable, on écrit un onde monochromatique sous la forme $\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0(r)e^{ik_0\mathcal{S}(r)-\omega t}$ avec $k_0 = \omega/c$ et $\mathcal{S}$ la fonction eikonale. Pour une onde plane, $\mathcal{S}(r) = n\vec{u}\cdot\vec{r}$. On injecte dans l'équation de d'Alembert, qui devient alors une équation de Helmholtz. L'approximation de l'optique géométrique permet de négliger les dérivées spatiales de l'enveloppe $E_0(r)$. Finalement, on ne conserve que les termes en k_0^2 issu de $\partial^2/\partial t^2$ et le terme où on a dérivé deux fois l'exponentielle $E_0(r)(-k_0^2)(\partial\mathcal{S}/\partial x_i)^2 e^{ik_0\mathcal{S}(r)}$. On obtient $-k_0^2\vec{\nabla}^2\mathcal{S}(r)\vec{E} = -n^2k_0^2\vec{E}$ et donc $\boxed{\vec{\nabla}^2\mathcal{S} = n^2 \text{ et } \vec{\nabla}\mathcal{S} = n\vec{u}}$.

On en déduit $\vec{B}$ avec $\partial B/\partial t = -i\omega B = -\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_0(r)e^{ik_0\mathcal{S}(r)})$. Ainsi, $\vec{B} = (n/c)\vec{u}\times\vec{E}$. En faisant la même démarche avec $\vec{B}(r,t) = B_0(r)e^{ik_0\mathcal{S}(r)-\omega t}$ et en utilisant l'expression de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$, on trouve $\vec{E} = (c/n)\vec{u}\times\vec{B}$. Structure locale d'onde plane. Le vecteur de Poynting est alors $\vec{\Pi} = (|E|^2 n/\mu_0 c)\vec{u}$.

Définition du rayon lumineux

Définition du rayon lumineux : lignes tangentes à $\vec{u}$ donc au vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$, en tout point. Le rayon lumineux est la direction de propagation de l'énergie *i.e.* du vecteur de Poynting.

Sa trajectoire est donc $\vec{r}(s)$ paramétrée par l'abscisse curviligne, tel que $\vec{u} = \vec{T} = d\vec{r}/ds$. Puisque $\vec{\nabla}\mathcal{S} = n\vec{u}$, le rayon lumineux est orthogonal aux surfaces de phase : c'est le théorème de Malus.

Définition du chemin optique

Chemin optique $(P_1P_2) = \int_{P_1}^{P_2} d\mathcal{S} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla}\mathcal{S}\vec{dl} = \int_{P_1}^{P_2} n\vec{u}\vec{dl} = \int_{P_1}^{P_2} nds = \int_{P_1}^{P_2} c/vds = c\int_{P_1}^{P_2} dt = c\Delta t$ où ds est l'abscisse curviligne et Δt est le temps de parcours de la lumière.

Lois de l'optique géométrique

Loi de Descartes En passant au rotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\nabla}\mathcal{S}) = \overrightarrow{\text{rot}}(n\vec{u}) = 0$ donc à une interface, il y a continuité de $n\vec{u}$ à l'interface (dessin). Cependant, un dioptre est une discontinuité d'indice et l'optique géométrique fait l'approximation de milieux lentement variables.

Equation des rayons lumineux ou équation eikonale

On veut maintenant éliminer $\mathcal{S}$ pour ne travailler qu'avec n et $\vec{u}$. Après calcul [...], $\boxed{\vec{\nabla}n = d(n\vec{u})/ds}$ on a éliminé $\mathcal{S}$. ou encore $\vec{\nabla}n = d(nd\vec{r}/ds)/ds$.

Applications. (i) indice uniforme, $n\vec{u} = d\vec{r}/ds = cst.$, $\vec{r}(s) = \vec{a}s + \vec{b}$ ligne droite. (ii) Indice non uniforme, développer la dérivée du produit, avec $d\vec{u}/ds = \vec{N}/R$, $\vec{N}$ le vecteur normal vers l'intérieur et $R > 0$ le rayon de courbure. On obtient : $(dn/ds)\vec{u} + (n/R)\vec{N} = \vec{\nabla}n$. Les rayons se courbent vers les hauts indices. Application aux fibres à gradient d'indice.

Optique géométrique, principe de Fermat

Bases de l'optique géométrique

Approximations de l'optique géométrique (bis)

Approximation de l'optique géométrique : les dimensions du milieu sont grandes par rapport à la longueur d'onde : $d \gg \lambda$ *i.e.* les grandeurs sont lentement variables $|\nabla A| \ll A/\lambda$.

Limites : L'optique géométrique est insuffisante pour décrire la diffraction et les effets de polarisation. Elle ne permet pas de calculer des flux, des puissances et ne dit rien sur la nature physique de la lumière ou son interaction avec la matière.

Lois de Snell-Descartes

À la surface de séparation de deux milieux transparents et homogènes d'indice n_1 et n_2, appelée dioptre, une partie de la lumière est réfléchie et une autre est transmise (on parle de réfraction). Les lois de Snell-Descartes sont :

(i) le rayon réfracté et le rayon réfléchis sont dans le plan d'incidence

(ii) $\theta_r = -\theta_i$

(iii) $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$

Les lois de Descartes traduisent la continuité des champs et invariance par translation *i.e.* conservation de la composante de $\vec{k}$ selon l'interface.

Le principe de Fermat

Enoncé du principe de Fermat

Principe de Fermat : le chemin optique est stationnaire. C'est un principe variationnel. Attention, stationnaire ne veut pas dire extrémal et encore moins minimal. Selon la direction du courbure d'un miroir, le rayon peut minimiser ou maximiser le chemin optique (schémas).

Les lois de l'optique géométrique retrouvées

Propagation rectiligne dans un milieu homogène Géodésique en métrique plate.

Retour inverse de la lumière. avec la définition du chemin optique : changer les bornes et faire $s \to -s$ montre que (BA)=(AB) . Si (AB) est stationnaire, alors (BA)=(AB) aussi.

Lois de Descartes. En faisant varier le point M' où passe le rayon à l'interface. Analogie avec le noyeur et le sauveteur sur la plage. On peut aussi le faire avec dA, dB, dI [Sayrin].

L'équation des rayons lumineux

Le principe de Fermat est un principe variationnel, dont l'action est le chemin optique $(AB) = \int_A^B n ds$. Pour appliquer les équations d'Euler-Lagrange, on ne peut pas paramétriser par s qui n'est pas fixe en B pour des chemins suivis différents. On paramétrise par τ qui est choisi pour valoir 0 en A et 1 en B : $(AB) = \int_A^B n ds = \int_A^B n(\vec{r}(\tau))\sqrt{\vec{r}'(\tau)\cdot\vec{r}'(\tau)}d\tau$ où par définition de l'abscisse curviligne, $ds = \sqrt{|d\vec{r}/d\tau|^2}d\tau$. Le lagrangien à minimiser est donc $L(\tau, \vec{r}(\tau), \vec{r}'(\tau)) = n(\vec{r})\sqrt{\vec{r}'\cdot\vec{r}'}$. Les équations d'Euler-Lagrange pour L donnent, après repassage de $d\tau$ en ds, $\vec{\nabla} n = d(nd\vec{r}/ds)/ds$, qui l'équation des rayons lumineux. Réf : http://frederic.chambat.free.fr/ens/sismo/cours.pdf. http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/

Applications

Mirages

Quand ça chauffe, la densité diminue, la densité en dipôle diminue, l'indice optique diminue.

Stigmatisme

Pour un système rigoureusement stigmatique, pour tout point d'entrée/sortie/intermédiaire, le chemin est stationnaire donc constant.

En exercice d'optique géométrique : qui est $\vec{u}$? $\vec{u}$ est la direction de grad S, le vecteur tangent pour l'abscisse curviligne $\vec{u} = \vec{T} = d\vec{r}/ds$, la direction de $\vec{k}$, avec $\vec{u}$ de norme 1.

Optique géométrique

Formation des images et systèmes optiques

Stigmatisme

Image réelle : A' image réelle de A par le système optique Σ : tous les rayons sortant de Σ se rencontrent en A'.
Image virtuelle : A' image virtuelle de A : tous les rayons sortant de Σ semblent venir de A'.
Stigmatisme rigoureux : tous les rayons provenant de A passent par A'. Si c'est le cas, le chemin optique est constant (ne dépend pas du point d'entrée sur Σ, dessin avec surfaces d'onde). A' réel : $nAI + nIA' = cst$ (équation d'une ellipse). A' virtuel : $nAI - nIA' = cst$ (équation d'une hyperbole). Ce sont des CNS.
Seul le miroir plan est stigmatique en tout point. Une interface n'est pas stigmatique.
Un système optique peut être stigmatique pour un couple de points.

- en réflexion. (i) un ellipsoïde de révolution de foyer A1 et A2, si A1 et A2 sont de même nature (tous deux réels ou tous deux virtuels) (ii) un hyperboloïde de révolution de foyers A1 et A2, si A1 et A2 sont de nature différente. (iii) un paraboloïde de révolution si l'un des points est situé à l'infini, l'autre point étant au foyer du paraboloïde.

- en réfraction, on peut choisir l'orientation de l'interface pour satisfaire $nAI \pm n'IA' = cst$: c'est l'ovoïde de Descartes. Pour A' virtuel, avec un dioptre sphérique, on a stigmatisme rigoureux pour deux points : les points de Weierstrass.

Stigmatisme approché Dans la plupart des cas, les rayons ne se recoupent pas exactement en un point, mais passent dans un petit élément de volume. Si cet élément de volume reste suffisamment petit, on parle de stigmatisme approché : si la tache qui en résulte est plus petite que la taille du détecteur élémentaire (grain photographique, bâtonnet de l'oeil...), l'image paraît nette.

Aplanétisme et stigmatisme longitudinal

Un système stigmatique transversalement *i.e.* aplanétique vérifie la condition des sinus d'Abbe.
Un système stigmatique longitudinalement vérifie la condition de Herschel.
Seuls les instruments de grossissement unité et de grandissement fixé à $n_o/n_i \approx 1$ peuvent vérifier les deux conditions.

Performance d'un système optique

- Grandissement : rapport des tailles de l'image et de l'objet. Pour une lentille, le grandissement de la lentille est d'autant plus grand, en valeur absolue, que l'objet est proche de la lentille. Évidemment, il ne faut pas pour autant que l'objet soit plus proche de la lentille que le plan focal objet, i.e. que A dépasse F. Quand A = F, le grandissement diverge.

- Grossissement : rapport des angles. C'est la grandeur adaptée pour des objets à l'infini.

- Grossissement commercial : rapport de l'angle image sur l'angle au punctum proximum (25 cm) (l'angle le plus grand selon lequel l'oeil nu peut voir l'objet).

- La profondeur de champ est la distance qui sépare deux points extrêmes de l'axe optique dont les images sont vues avec une netteté suffisante sur le détecteur (pellicule, oeil, CCD...).

- Nombre d'ouverture $n = f'/D$

Eléments cardinaux

Le foyer image est l'image d'un objet à l'infini sur l'axe optique. Le foyer objet est l'objet dont l'image est située à l'infini sur l'axe optique.
On appelle **plans (anti) principaux** les plans conjugués pour lesquels le grandissement est unité (-1). On appelle **points (anti) nodaux** les points conjugués de l'axe optique pour lesquels le grossissement est unité (-1).
Les plans anti-principaux sont les symétriques des plans principaux par rapport aux foyers correspondants.
Les foyers, plans (anti-)principaux et points (anti-)nodaux sont appelés éléments cardinaux du dispositif optique. La donnée de deux éléments cardinaux distincts suffit à construire la trajectoire de tout rayon lumineux à travers le dispositif optique. Quand on connaît deux éléments cardinaux, on connaît les autres.
L'interstice du dispositif est donc défini indifféremment comme la distance entre les plans principaux ou entre les points nodaux.

Lentilles

Configuration 4f

La configuration qui minimise la distance objet-image est la configuration $4f$. Le grandissement est $\gamma = -1$.
Si on fixe la position de l'objet et de l'écran, ainsi que la focale f de la lentille. Si $4f < d$, alors deux positions de la lentille peuvent conjuguer l'objet et l'écran. Ces positions sont symétriques l'une de l'autre.

Classification des verres

Pour distinguer les verres en fonction de leur pouvoir dispersif, on introduit en général le coefficient appelé **nombre d'Abbe ou constringence**, et défini comme

$$A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \tag{1}$$

où n_D est l'indice du verre à $\lambda = 589,3$ nm (raie jaune du sodium), n_C est l'indice du verre à $\lambda = 656,3$ nm (raie rouge de l'hydrogène), et n_F est l'indice du verre à $\lambda = 486,1$ nm (raie bleue de l'hydrogène). D'autres longueurs d'onde sont parfois utilisées dans la définition de ce nombre, en particulier si l'on s'intéresse à une autre gamme du spectre optique que le spectre visible. Ce nombre est défini tel que plus A est grand, moins le verre est dispersif.
On distingue alors :

- Les verres crown, peu dispersifs (A $>$ 50) et d'indice optique limité (n<1,6). Ce sont typiquement des silicates de potassium et de calcium, et notamment le verre très répandu appelé BK7.
- Les verres flint, très dispersifs (A $<$ 50) et d'indice optique élevé ($n_D >$ 1,6). Ils contiennent souvent du plomb ou de l'arsenic, quoique les versions les plus récentes de ces verres en soient dépourvues.

Eléments cardinaux

Dans le cas de la lentille mince, les plans principaux et les points nodaux sont tous confondus avec la lentille.
Puisque les plans anti-principaux sont les symétriques des plans principaux par rapport aux foyers, situés à distance focale de la lentille, on retrouve bien le fait que le grandissement vaut -1 pour un objet situé à 2f' de la lentille : il s'agit du montage 4f.

Achromats

Avec les mains Une lentille convergente envoie le rouge plus loin sur l'axe optique que le bleu. La situation serait en fait inversée si la lentille était divergente. Dans ce cas en effet, le point focal image (virtuel) est toujours plus proche de la lentille pour le bleu que pour le rouge. Ils sont toutefois situés du même côté de la lentille que l'objet, et le point focal bleu est donc plus loin sur l'axe optique que le point focal rouge. On conçoit alors bien qu'il doit être possible de corriger les aberrations chromatiques des lentilles en associant une lentille convergente et une lentille divergente d'un verre différent, pour ramener les points focaux rouge et bleu au même endroit.
Après calculs, il faut deux verres différents avec deux focales différentes de signe opposés.

Mesures de focale

Autocollimation. Silbermann.

Applications

Téléscope : objet à l'infini et image réelle, on utilise ellipsoide et hyperbole.
Microscope à immersion. Liquide d'indice n et sphère d'indice n' pour utiliser les points de Weierstrass, réduction des angles pour être dans les conditions de Gauss pour la lentille suivante.
Lentilles asphériques. Stigmatique pour un couple de points : $\infty \to A'$, ovoide de Descartes.

Culture

Stigmatisme approché. Système optique : suite de dioptres.
Condition d'Abbe, condition de Herschel.

Diaphragmes, pupilles

Un diaphragme est un élément physique qui limite le faisceau.

Le diaphragme qui définit le faisceau le plus étroit est le diaphragme d'ouverture. Dans l'espace image/objet, il définit la pupille d'entrée et la pupille de sortie. Le diaphragme d'ouverture définit l'ouverture numérique $ON = n_o \sin\theta_o$ où n_o est l'indice objet.

Le diaphragme de l'espace objet qui fait l'angle le plus petit avec la pupille d'entrée définit la lucarne d'entrée. Le diaphragme réel correspondant est le diaphragme de champ. Dans l'espace image c'est la lucarne de sortie.

Optique dans les conditions de Gauss

Conditions de Gauss

On ne considère ici que des systèmes optiques dits centrés, i.e. présentant une symétrie de révolution autour d'un axe. Tous les éléments du montage optique doivent posséder le même axe de symétrie, appelé *axe optique*.

Les conditions de Gauss sont

1. (i) rayons peu inclinés
2. (ii) proches de l'axe optique. Ou encore $\sin i \sim i$.

Conséquences

Les surfaces d'ondes deviennent sphériques dans cette approximation.

Formalisme matriciel

Les conditions de Gauss suppriment les non-linéarités, ce qui justifie le formalisme matriciel. Codage du vecteur tangent par $(h, n\alpha)$ sa hauteur, l'indice optique et l'angle par rapport à l'axe optique. Matrices de propagation libre, de dioptre, de miroir sphérique.

Abberrations, hors conditions de Gauss

Hors conditions de Gauss, la plupart des systèmes sont non stigmatiques. Les taches qu'ont peut observer, au lieu de points, peuvent provenir : des abberrations géométriques, des abberations chromatiques, de la diffraction, de la taille du détecteur.

Pour les surfaces d'ondes, l'ordre suivant après l'approximation de Gauss x^2 est x^4. En effet x^3 est éliminé par symétrie de rotation.

Pour les rayons, dans l'approximation de Gauss c'est $(x, n\alpha)$. L'ordre 2 est proscrit par symétrie de rotation. On ne retient que l'ordre 3 : $x^3, x^2\alpha, x\alpha^2, \alpha^3$, avec les coefficients de Seidel.

Abberrations sphériques α^3. Indépendant de distance à l'axe du point objet, présent même quand on fait l'image d'un point. La caustique est la nappe tangentielle (forme de cône) aux rayons issus d'un point A et sortant de Σ. La nappe sagittale est le segment lumineux porté par l'axe optique. L'abberration sphérique longitudinale est la longueur de la nappe sagittale. On peut s'affranchir de cette aberration en réduisant les angles d'incidence, en utilisant la règle des 4P : plus plat plus près (du plus focalisé) pour minimiser les angles par rapport à l'axe optique, des doublets asphériques ou des systèmes optiques qui conjuguent de façon rigoureuse 2 points, par exemple les miroirs paraboliques $\infty \to A'$ réel.

La coma $r\alpha^2$, hors de l'axe (cercles alignés qui diminuent en taille en s'éloignant de l'axe, au total cela fait un cône, en forme de comète).

Astigmatisme et courbure de champ $r^2\alpha$**.** Cette aberration est due à des manques de symétrie de la lentille. Comme c'est en r^2, il faut s'éloigner de l'axe pour les observer. Astigmatisme : focale tangentielle et focale sagittale orthogonaux et séparés par une zone de moindre diffusion. Courbure de champ : l'image géométrique d'un objet plan est une surface courbe : en translatant l'écran on a des bord flous et un centre net ou des bords nets et un centre flou.

Distorsion r^3**. Coussinet ou barillet** selon le signe du coefficient de Seidel. Ce phénomène explique aussi l'allure des photos obtenus avec un objectif dit fish-eye, c'est un objectif de distance focale très courte, qui ressemble un peu à nos condenseurs de TP et qui est diaphragmé par le diaphragme de l'appareil photo situé en amont. Du fait de sa courte focale, il a un angle de champ très important, et il permet par exemple de prendre des photos de très près sur 180 degrés par exemple. On observe évidemment cette même déformations au travers des judas des portes

Abberations chromatiques $n(\lambda)$. Loi de Cauchy : développement de la branche décroissante de $\epsilon_r(\omega)$.

On définit le pouvoir dispersif : $\Delta = (n_F - n_C)/(n_D - 1) = n_{bleu} - n_{rouge}/(n_{jaune} - 1)$.

Pour les réduire, on accole une lentille CV à une lentille DV de matériau différent (par exemple verres Flint, Crown).

Grandeurs photométriques

Flux lumineux ϕ en J/s. Luminance $d^2\phi = L\cos\theta dS d\Omega$ en J/s/m^2/sr où θ est l'angle entre la normale à la surface et la direction de visée. Intensité photométrique $I = \int L\cos\theta dS$ en J/s/sr. Emittance $E_m = \int L\cos\theta d\Omega$ en J/s/m^2.

A la réception, illumination, éclairement.

Evaluation de la sensation visuelle : pondération par la sensibilité $k(\lambda)$ maximum à 555 nm. On recalcule ϕ' en lumen, l'intensité I' en candela, la lumiance en Cd/m^2, l'éclairement en lux.

Microscopies

Microscopie électronique

La longueur d'onde est $\lambda \sim h/p$ donc en donnant p aux électrons en les accélérant avec ΔV, on peut réduire la limite de diffraction.

Microscope optique à deux lentilles

Objet réel vers infini vers réel. L'idée du microscope est d'obtenir une image agrandie que l'on observe ensuite à la loupe (oculaire).

performance

Le grossissement commercial du microscope est le produit du grandissement de l'objectif et du grossissement commercial de l'oculaire.

Autres microscopies

Force atomique. Microscope à effet tunnel.

Interférences

Présentation et discussion pédagogique

On peut observer des interférences sur les flaques d'huile ou la couleur des ailes de certains papillons.

Pédagogiquement, l'approche historique des trous de Young complexifie le problème en faisant intervenir la notion de diffraction. Le biprisme de Fresnel fait intervenir la réfraction ce qui affecte les propriétés chromatiques du phénomène. Les miroirs de Fresnel évite les écueils précédents.

FAIRE REMONTER LA NOTION DE COHERENCE spatio-temporelle ENTRE LES SOURCES SECONDAIRES PLUS HAUT.

On voit aussi des interférences dans d'autres domaines. Ondes mécaniques : son (casques anti-bruit), ondes à la surface d'un liquide, vibrations mécaniques. Ondes de probabilité en mécanique quantique.

Conditions d'interférence

Les conditions d'interférence viennent de l'effet de moyenne induite par la séparation des échelles temporelles du signal lumineux et du temps de moyenne des détecteurs. **ODG:** Période des fréquences visibles $\sim 10^{-15}s$. Temps de détection des photodétecteurs $\sim 10^{-9}s$. Cela conduit aux conditions d'interférences :

(i) même pulsation (ii) cohérence de phase (iii) polarisation non orthogonales.

Interférences à deux ondes

Interférences à deux ondes monochromatiques cohérentes

Pour deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes, les surfaces équidéphasage en 3D vérifient

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}((S_1P) - (S_2P)) \tag{2}$$

Ce sont des hyperboloïdes de révolution de foyer S_1 et S_2. En mettant des plans, on observe des coupes de ces hyperboloïdes. En faisant des développements limités à l'ordre le plus bas, on trouve des anneaux si S_1 et S_2 sont l'une derrière l'autre et on trouve des franges rectilignes si S_1 et S_2 sont équidistants au plan. L'intensité résultante est donnée par la formule de Fresnel :

$$I = 2I_0(1 + \cos\Delta\phi) \tag{3}$$

Plus généralement,

$$\boxed{I(P) = I_0(1 + Re\{g^{(1)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \tau(P))\}} \tag{4}$$

où $g^{(1)}$ est la fonction de corrélation spatio-temporelle des deux sources en $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ et $\tau(P) = \delta(P)/c$ est le décalage temporel entre les rayons qui interfèrent $g^{(1)}(\Delta\vec{r}, \Delta t) =< A(\vec{r}, t)A^\star(\vec{r} + \Delta\vec{r} + \Delta t) > /I_0$. En éclairant avec une source étendue incohérente, on change la partie spatiale de $g^{(1)}$. En éclairant avec une source avec une largeur spectrale, on modifie la partie temporelle de $g^{(1)}$.

L'intensité résultante peut être plus grande que la somme des intensités, en certains points. Cela ne viole pas la conservation de l'énergie car elle est redistribuée (intensité plus faibles dans les zones d'interférence destructive).

Division du front d'onde

Trous d'Young. $\delta = ax/D$, $i = \lambda D/a$. Les interférences sont localisées partout dans le recouvrement des faisceaux.

On a ici fait comme si les deux fentes sources étaient en fait ponctuelles. Il faut, en toute rigueur, aussi considérer les interférences avec toutes les autres sources secondaires alignées le long des fentes secondaires. Cela revient en fait à calculer la figure de diffraction par les fentes qui vient moduler la figure d'interférences. On laisse ce calcul pour le TD suivant.

Biprisme de Fresnel.

Bilentilles de Billet (idem avec des lentilles).

Miroirs de Fresnel. Désavantages : (i) la figure d'interférence n'est visible que dans la petite région de l'espace où se recoupent les faisceaux. (ii) la réfraction et donc l'indice dépendant de la longueur d'onde complexifie le phénomène.

Miroirs de Lloyd.

Division d'amplitude

Avantages pour la métrologie car il permet de s'affranchir de la cohérence spatiale donc d'obtenir des figures lumineuses en utilisant des sources étendues.

Interféromètre de Michelson

Constitution

Compensatrice : pour les abberrations chromatiques.

Lame d'air

Lame d'air, $\delta_p = 2e\cos\theta_p = p\lambda$, anneaux $\rho(p) \propto \sqrt{p-p_0}$. En élargissant la source transversalement à l'axe des miroirs de b, les figures d'interférences se décalent aussi et se brouillent à distance finie. En observant assez loin $d \geq b\sqrt{e/\lambda}$ ou à l'infini ou au foyer d'un lentille, les figures dues aux différents points de la sources sont assez peu décalées pour préserver la figure d'interférences.

Eclairage

Pour observer l'ensemble de la figure d'interférence, ou encore pour observer plusieurs anneaux, il faut que de nombreuses inclinaisons soient mises en jeu. On veillera donc à éclairer l'interféromètre avec un faisceau bien divergent.

Recherche du contact optique

Si $|e|$ augmente, i.e. si l'on s'éloigne du contact optique, les anneaux semblent sortir, alors qu'ils rentrent si l'on se rapproche du contact optique.

Coin d'air

Si on introduit un angle α entre les deux miroirs, on dit qu'on obtient un coin d'air, plutôt qu'une lame d'air. La différence de marche entre deux rayons, issus d'un même faisceau en entrée de l'interféromètre, est proportionnelle à l'épaisseur du coin d'air à l'endroit où les rayons interceptent les miroirs.

Elargissment de la source

Si on élargit la source, les franges se translatent et ça se brouille, sauf au voisinage des miroirs, qu'on peut observer en faisant leur image avec une lentille ou en accommodant l'oeil dessus. On peut le voir avec un schéma [Sayrin].

Eclairage

Pour des angles d'incidence non nuls, la différence de marche au même point x est plus petite que $2e(x)$. Si on éclaire le coin d'air avec un faisceau non collimaté, on superpose alors des figures d'interférence d'interfranges différents, réduisant alors le contraste. On éclaire donc toujours un coin d'air avec un faisceau parallèle

Teinte plate. Blanc d'ordre supérieur.

Les interférences sont localisées à cause de l'étendue spatiale de la source. Elargir la source ne modifie pas la figure car les rayons atterissent au même point. La rétrécir à un point délocalise les interférences.

Aspect expérimental

Cohérence spatiale

Localisation

Une figure d'interférences est dite **localisée** lorsqu'elle n'est observable que dans une fraction du champ d'interférence. Un tel phénomène n'apparaît qu'avec une **source étendue** : il s'agit d'une question de cohérence spatiale.

Théorème de localisation

Le théorème de localisation indique, pour un interféromètre donné, si les interférences peuvent être localisées et la méthode permettant de déterminer la zone de localisation.

On cherche à établir un critère de non-brouillage des interférences sous l'effet de l'élargissement de la source, supposée classique donc modélisée comme une assemblée de sources ponctuelles deux à deux incohérentes. En pratique, trouver ce critère revient à chercher les points M du champ d'interférence pour lesquels la différence de marche $\delta_{12}(S, M)$ entre deux rayons $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne dépend pas, à l'ordre 1, de la position de la source S. En ces points M, toutes les sources élémentaires incohérentes donnent lieu à des interférences du même type qui ont donc un contraste parfait. Après calcul, pour deux sources S et S',

$$\boxed{\delta(S,M)=\delta(S',M) \iff \vec{SS'}\cdot(\vec{u}_1-\vec{u}_2)=0} \tag{5}$$

au premier ordre en SS'/SM. A priori, tous les points M de l'espace ne permettent pas de vérifier ce critère. Les interférences sont alors localisées au voisinage des points M qui le permettent.

Commentaires. Il y a deux possibilités pour que le contraste des interférences soit préservé quand la source est élargie :

- l'élargissement se fait orthogonalement aux rayons qui interfèrent. C'est une condition sur la source, donc indépendante du point M. C'est ce qui se passe lorsqu'on élargit la source parallèlement aux fentes de Young.
- ou bien, les rayons qui interfèrent vérifient $\vec{u}_1=\vec{u}_2$, ce qui signifie qu'ils proviennent du même rayon incident. Ce n'est pas une condition contraignante sur la source mais sur l'interféromètre. En effet, il n'est pas possible de vérifier le critère $\vec{u}_1=\vec{u}_2$ avec un interféromètre à division de front d'onde. Seul un interféromètre à division d'amplitude le permet.

On peut le reformuler sous la forme :

1. Seuls les interféromètres à division d'amplitude peuvent donner lieu à l'observation d'interférences contrastées produites par une source arbitrairement large.
2. Alors, ces interférences sont localisées au voisinage des points où les rayons qui interfèrent sont issus du même rayon entrant dans l'interféromètre.
3. Ces résultats ne sont valables qu'à l'ordre 1.

Application à l'interféromètre de Michelson

Exemple de l'interféromètre de Michelson, en éclairage avec une source étendue. Si l'on ouvre maintenant la source, par exemple dans un plan parallèle à l'écran, la source étant incohérente spatialement, on additionne les figures d'interférence générées par chaque point de la source. On observe donc la somme d'anneaux d'interférence dont le centre est à une position sur l'écran qui dépend du point source considéré. A priori, il y a donc brouillage des interférences : les anneaux ne se superposent pas. Il existe toutefois une position de l'écran pour laquelle il n'y a pas de brouillage : l'infini. Dans ce cas, en effet, seule l'inclinaison des rayons lumineux importe ; un déplacement spatial de la source parallèlement à l'écran ne modifie pas la figure observée. Les anneaux d'interférence correspondant aux différents points de la fente source sont alors tous centrés au même point de l'écran, les anneaux se superposent et il n'y a plus de brouillage. Parce qu'il existe une position particulière de l'écran pour laquelle le contraste des interférences dépend de façon minimale de la taille de la source (ici, il n'en dépend même plus du tout), on dit que les interférences sont localisées en ce point, en l'occurrence à l'infini.

Elargissement de la source

Lorsqu'on élargit la source, on change la partie spatiale de $g^{(1)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\tau(M))\}$, qui ne dépend pas de M donc le contraste baisse uniformément sur la figure d'interférence.

Cône de cohérence

Le critère semi-quantitatif de non-brouillage peut se mettre sous la forme : $\Delta\theta' \leq \lambda/a$ avec $\Delta\theta'$ l'angle sous lequel on soit la source depuis les fentes de Young. Ainsi, si le dispositif se trouve à l'intérieur du cône de cohérence, la figure n'est pas brouillée. Plus la source est grande, plus le cône de cohérence est étroit. On comprend alors pourquoi les étoiles peuvent, malgré leurs grandes tailles, être considérées comme des sources ponctuelles cohérentes spatialement : nous sommes tellement loin d'elles que la Terre est entièrement contenue dans leurs cônes de cohérence (ex : mesure interférométrique de la distance angulaire d'une étoile double).

On peut aussi le mettre sous la forme $\boxed{S \leq A_c \equiv \lambda^2/\Delta\Omega}$ où A_c est l'aire de cohérence, S est la surface du dispositif interférentiel et $\Delta\Omega$ est l'angle solide sous lequel est vue la source. *Si l'aire de cohérence est plus grande que la surface du dispostif interférentiel, on observe des interférences, sinon c'est brouillé.* **ODG:** $A \sim 10^{-3}mm^2$ pour le Soleil contre $A \sim 6m^2$ pour Bételgeuse. C'est très dur de voir des interférences avec comme source le Soleil ! D'où l'ambition de construire un réseau de téléscopes à l'échelle de la planète.

Exemple des fentes de Young

Pour les fentes de Young, $\delta = ax/D + aX/L$ par symétrie. Pour avoir l'intensité en un point sur l'écran il faut intégrer l'intensité de la source. On obtient $I = 2I_0(1+\gamma\cos(2\pi/\lambda ax/D)$ où $\gamma = \mathrm{sin}_c(\pi ab/\lambda L)$. Le contraste est constant sur l'écran *i.e.* les oscillations d'intensité ont une amplitude fixe et diminuent avec la largeur de la source. Au premier maxima secondaire, le contraste est de $\sim 21\%$.

Critère quantitatif : Théorème de Van Cittert-Zernike

Théorème de Van Cittert-Zernike

Théorème de Van Cittert-Zernike pour une source étendue **incohérente et quasi-monochromatique**. Le degré de cohérence spatial dans le plan d'observation $\Gamma(\Delta x, \Delta y)$ est la TF de la distribution d'intensité angulaire de la source.

$$\Gamma(\Delta x, \Delta y) = \int\int d\alpha d\beta I(\alpha, \beta) \exp\left(2i\pi\frac{\alpha\Delta X + \beta\Delta y}{\lambda}\right) \tag{6}$$

Applications : interféromètre de Labeyrie

Interféromètre stellaire de Michelson (1920) : l'objet est à l'infini avec un angle α et une largeur angulaire $\delta\theta$: $\delta = a\alpha + ax/d$, comme les fentes de Young avec source étendue. En jouant sur a, on repère les annulations de contraste, ce qui donne la largeur angulaire $\delta\theta$ et donc le diamètre de l'étoile. Application à Beltégeuse. Défi technique : garder la longueur des bras fixes : une variation de l'ordre de la longueur de cohérence brouille les interférences.

Interféromètre de Labeyrie. Pour une source comme une étoile, de largeur ΔS à une distance L, le dispositif interférentiel la voit sous un angle apparent $\Delta\alpha = \Delta S/L$. $\Gamma(\Delta x, \Delta y)$ est assimilable à une sinus cardinal $\propto \sin_c(\pi\Delta S\Delta x/\lambda L)$ où Δx est la distance entre les deux sources secondaires (les trous d'Young). Si $\Delta x > \lambda L/\Delta S$, la figure d'interférence sera brouillée. En faisant variant Δx, on repère la perte de contraste, ce qui permet de remonter au diamètre apparent de l'étoile.

Si la source est une étoile double où chaque étoile est considérée ponctuelle (dirac), on obtient des battements. On remonte alors à la distance angulaire entre les deux étoiles de l'étoile double.

Cohérence temporelle

Elargissement spectral

Si la source n'est pas monochromatique, chaque raie du spectre forme son propre système d'interférences, qui se superpose aux autres. Pour obtenir l'intensité, il faut intégrer sur le spectre de la source, multiplié par la fenêtre de sensibilié du récepteur. En effet, le contraste dépend du capteur. Par exemple, l'oeil agit comme filtre dans la plage du visible, ce qui élargit peut la zone non brouillée.

Lorsque le spectre de la source change, c'est la partie temporelle de $g^{(1)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \tau(M))\}$ qui change. Le contraste dépend de la différence de marche donc de la position de M sur l'écran.

Le théorème de Wiener-Khintchine donne que le degré de cohérence temporel (dont le module est le contraste) est la TF de la densité spectrale d'énergie.

Battement d'un doublet spectral

Pour deux longueurs d'onde, quand on somme les intensités, on va avoir une somme de cosinus donc un battement en fonction de δ. Le variation rapide vient de la longueur d'onde moyenne. La variation lente vient de la différence des longueurs d'onde : lorsque δ compense ce terme, le contraste s'annule.

Longueur de cohérence

Le contraste des interférences décroît quand la différence de marche entre les deux ondes émises par les deux trous d'Young devient grande par rapport à la longueur de cohérence. On la définit avec la largeur de raie ou de manière équivalente, c'est la variation de différence de marche $d\delta$ induite par la variation de fréquence $d\nu$ égale à la largeur de raie.

ODG: Lumière blanche : 1 micron. Lampe spectrale : 1 cm. Laser : > plusieurs mètres.

Théorème de Wiener Khintchine

La transformée de Fourier d'une lorentzienne est une exponentielle décroissante.

Cohérence temporelle et cohérence spatiale

Volume de cohérence Pour un faisceau monochromatique, l'aire transverse de cohérence est $A_c \leq \lambda^2/\theta_x\theta_y$. La longeur longitudinale de cohérence est $l_c = c\tau_c$. On forme alors le volume de cohérence $\boxed{V_c \equiv A_c l_c}$ qui représente le volume où doit se trouver le dispositif interférentiel (ex : fentes de Young) pour avoir cohérence. En assimilant $\theta_x \sim \Delta p_x/p_x$, $\theta_y \sim \Delta p_y/p_y$, $l_c = h/\Delta p_z$, l'inégalité de Heisenberg donne $\boxed{V_c \sim h^3/\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z}$

Lien avec la fonction d'autocorrélation. En fait l'intensité s'écrit

$$\boxed{I(P) = I_0(1 + Re(g^{(1)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \delta(P)/c)))} \tag{7}$$

où $g^{(1)}(\Delta\vec{r}, \Delta t) =< A(\vec{r}, t)A^\star(\vec{r} + \Delta\vec{r} + \Delta t) > /I_0$ est l'autocorrélation de degré 1, $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ les positions des sources et $\delta(P)$ la différence de marche au point P.

Application : spectroscopie par transformée de Fourier. En enregistrant la figure d'interférence, on mesure la fonction de corrélation de la source, donc son spectre. Plus on mesure des retards τ sur une grande plage, meilleure est la résolution.

Si les deux sources primaires incohérentes A et B envoient des ondes planes de vecteur d'onde $\vec{k}_A$, $\vec{k}_B$, après calculs (Taillet p85), on trouve

$\boxed{I(P) = I_0(1 + \cos\Big(\Delta\vec{k}/2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\Big)\cos\Big((\vec{k}_A + \vec{k}_B)/2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \omega\delta(P)/2c\Big)}$. La partie variant lentement est le terme d'effet de cohérence spatiale. Le terme variant rapidement est le terme d'interférences. On voit que les fluctuations de $\vec{k}_A + \vec{k}_B$ décalent la figure d'interférence (ex : turbulence atmosphérique).

Interféromètre stellaire de Michelson (1920) : l'objet est à l'infini avec un angle α et une largeur angulaire $\delta\theta$: $\delta = a\alpha + ax/d$, comme les fentes de Young avec source étendue. En jouant sur a, on repère les annulations de contraste, ce qui donne la largeur angulaire $\delta\theta$ et donc le diamètre de l'étoile. Application à Beltégeuse. Défi technique : garder la longueur des bras fixes : une variation de l'ordre de la longueur de cohérence brouille les interférences.

Interférences à N ondes

Réseaux

Profil d'intensité

La différence de marche est $\delta = a\sin\theta - a\sin\theta'$. Calcul avec des séries géométriques. Fonction de transfert pour N fentes avec une incidence normale $\theta' = 0$

$$\boxed{I(\theta) = I_0 \sin^2(N\pi a \sin\theta/\lambda)/\sin^2(\pi a \sin\theta/\lambda)} \tag{8}$$

La position des maxima principaux dépend du dénominateur donc ne dépend pas de N, ce sont les maximas pour le dispositif des fentes de Young avec le même écart. Le pic central est en $I_0 N^2$. La largeur à mi-hauteur des pics périphériques est en $2\pi/N$. On tend vers des dirac. La finesse est $\mathcal{F} \equiv \Delta\theta/\delta\theta$=écart/largeur à mi-hauteur. En fait $\mathcal{F} = N$.

Si l'incidence n'est pas normale, les directions des interférences constructives sont décalées. En incidence trop rasante, le pic principal disparaît (on le voit avec la construction de Huyghens).

Point de vue TF :, avec Π la fonction porte, la transparence est $t = (\Pi_b * III_a)\Pi_{Na}$ de transformée de Fourier $(\mathrm{sin}_{c,1/b}\, III_{1/a}) * \mathrm{sin}_{c,1/Na}$

On remarque en particulier qu'il n'y a pas de dispersion dans l'ordre 0, et que le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre est important et que a est petit.

On remarque toutefois, d'après l'expression trouvée pour I, que plus l'ordre m est élevé, plus l'intensité du maximum de diffraction est faible, à cause du facteur de forme F.

Pouvoir de résolution

Chaque longueur d'onde conduit à sa propre figure d'interférence. Pour résoudre l'ordre p de deux maxima, il faut $\theta'_p - \theta_p \geq \delta\theta$ donc $p(\lambda' - \lambda)/a \geq \bar{\lambda}/Na$ donc $\Delta\lambda/\bar{\lambda} \geq 1/Np$. On définit le pouvoir de résolution $PR \equiv \lambda/\Delta\lambda = pN = p\mathcal{F}$. Le pouvoir de résolution d'un réseau est d'autant plus important que l'ordre de diffraction est élevé, ou que le nombre de figures diffractantes éclairées est important **ODG:** On peut séparer le doublet du sodium $\lambda_1 = 589.0$nm et $\lambda_2 = 589.6$nm au premier ordre avec un réseau 1000 traits.

Un réseau à N fentes, à l'ordre m de diffraction, est l'équivalent d'un Fabry-Pérot de finesse $F = N$, utilisé dans l'ordre d'interférence $p = m$, i.e. de facteur de qualité $Q = mN$.

En spectroscopie, il faut donc faire un compromis entre pouvoir de dispersion et intensité. On utilise en pratique des réseaux dit blazés qui permettent de déplacer le maximum d'intensité (maximum de F) sur un ordre de diffraction non nul (m = 1 en général).

Largeur de la fente source

Influence de la largeur de la fente source. On peut l'élargir parallèlement aux fentes du réseau sans réduire ses performances. Si on élargit perpendiculairement aux fentes tel que l'angle apparent vérifie $\theta_{app} \leq \delta\theta$, les performances du dispositif ne sont pas modifiées, sinon on dégrade la finesse du dispositif. Pour les appareils à réseau, la taille de la fente d'entrée est soumise à des contraintes antagonistes entre luminosité/nombre de traits éclairés et résolution.

Influence de la largeur des fentes du réseau. Un calcul de diffraction montre que l'amplitude des pics principaux est modulé par un sinus cardinal.

Réseaux blazés

On module périodiquement (ex : forme de prisme sur chaque fente) la transparence du réseau pour décaler spatialement le maximum d'intensité. Cela permet d'augmenter le pouvoir de résolution.

Applications

Avantages : relation linéaire entre l'angle (son sinus) et la longueur d'onde, contre $n(\lambda)$ non-linéaire pour le prisme, permet d'avoir des pouvoirs dispersifs plus importants car on est limité que par le nombre de traits. Inconvénients : la lumière émise dans l'ordre 0 et dans les ordres élevés est perdue, les différents ordres peuvent se chevaucher, ce qui complique l'interprétation des spectres. Les ordres peuvent se chevaucher, ce qui complique l'interprétation.

- monochromateur
- multiplexage pour séparer spatialement les composantes spectrales d'un signal
- laser pour disperser les modes non désirés.

L'interféromètre de Fabry-Pérot

Présentation

Dans une certaine mesure, l'interféromètre de Fabry-Pérot est à l'interféromètre de Michelson ce que le réseau est aux fentes de Young.

Calcul de la fonction de transfert

Calcul de la figure d'interférences : on peut voir de manière équivalente que les rayons provenant des multiples réflexions viennent de sources espacées de $2e$ perpendiculairement à la lame. La différence de marche est alors $\delta_q = q2e\cos\theta$ où θ est l'angle d'incidence à l'intérieur de la lame. La différence de marche ne dépend que de l'angle d'incidence donc la figure est d'interférences est constituée d'anneaux. Les interférences sont localisées à l'infini.

L'amplitude totale émergente dans la direction θ vaut :

$$\boxed{A(\theta) = \sum_{q=0}^{\infty} A_0 t_{21} t_{12} r_{12}^{2q} \epsilon(\theta)^q \text{ où } \epsilon(\theta) = \exp(i2\pi 2e\cos\theta/\lambda)} \tag{9}$$

Avec le coefficient de finesse $\boxed{F \equiv 4R/(1-R)^2}$ à ne pas confondre avec la finesse $\boxed{\mathcal{F} = \pi\sqrt{R}/(1-R)}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{1}{1 + F\sin^2(2\pi a\cos\theta/\lambda)}} \tag{10}$$

Les maxima sont obtenus quand le sinus s'annule. Avec x l'argument du sinus, la finesse $\mathcal{F}$ est définie par $\boxed{\mathcal{F} \equiv \Delta x/\delta x}$ avec $\Delta x = \pi$ l'espacement entre les pics et $\delta x = (1-R)/\sqrt{R}$ la largeur à mi-hauteur. En incidence normale, $\boxed{\mathcal{F} = p\Delta\lambda/\lambda}$.

Plus les miroirs sont réfléchissants *i.e.* R proche de 1, plus la cavité est sélective. Interprétation en terme de temps moyen passé dans la cavité $\tau_{cav} = < n > 2e/c = \sum nR^n 2e/c = R/(1-R)2e/c \sim 1/\Delta\omega_{cav}$.

Pour un interféromètre à 2 ondes, comme le Michelson en lame d'air, la figure d'interférence est une sinusoïde pour laquelle on trouverait une finesse $F = \Delta\phi/\delta\phi = 2\pi/\pi = 2$. En fait, un interféromètre de finesse F est l'équivalent d'un interféromètre à F ondes. Un Fabry-Pérot de finesse F est ainsi aussi performant qu'un réseau à N = F fentes.

Applications

Utilisé pour séparer des longueurs d'onde, le pouvoir de résolution est donné par $PR = \lambda/\Delta\lambda = p\mathcal{F}$. Le facteur de qualité, ou pouvoir de résolution, est défini comme l'inverse de la variation relative minimale de fréquence ou de longueur d'onde détectable par l'interféromètre. Il est d'autant plus grand que la finesse est grande et que l'ordre d'interférence est élevé. Contrairement à la finesse, sa valeur dépend donc de la façon dont on se sert de l'interféromètre !

Considérations pratiques

Difficultés pratiques : parallélisme des miroirs, il faut que l'épaisseur varie sur une distance inférieure à la longueur d'onde. On le fait manuellement avec des vis micrométrique ou électroniquement avec des quartz piézoélectriques.

Généralisation aux lames minces

Généralisation aux lames minces, milieux d'indices différents. Par conservation de l'impulsion, chaque milieu doit satisfaire l'équation de Helmholtz donc la relation de dispersion associée $k_T^2 + k_N^2 = (n_i\omega/c)^2$ avec continuité de k_T. Sauf cas des ondes évanescentes, dans chaque milieu, la dépendance dans la direction z perpendiculaire aux faces des lames est en $A_q\exp(ik_{t,q}z) + B_q\exp(-ik_{t,q}z)$. On obtient A_q et B_q avec la continuité de E et de sa dérivée aux interfaces. Conséquences : le coefficient de réflexion dépend fortement de la longueur d'onde, ce qui explique les couleurs des bulles de savons, des flaques d'huiles, ou des ailes de papillons dont les ailes jouent le rôle de lame mince.

Diffraction

Pour calculer la façon dont l'onde interagit avec l'objet diffractant, il faudrait résoudre les équations de Maxwell avec les conditions limites liés à l'obstacle. Pour le cas d'un objet métallique, il faut calculer les courants de surfaces, résultat du couplage onde-matière. C'est généralement compliqué.

Historique

- 1690 : Huyghens publie son principe dans le "Traité de la lumière", alors que la nature électromagnétique de la lumière n'était pas encore connue. L'arrivée de la lumière en un point crée une nouvelle perturbation qui se propage sphériquement. Pas de calcul quantitaif.
- Contribution de Fresnel : remplacer les perturbations du milieu par des vibrations périodiques avec une phase et une amplitude définies. Calculs quantitatifs.
- 1818 : tache de Poisson.
- Formule de Fresnel-Kirchoff en partant de l'équation de Helmholtz $\Delta A + k^2 A = 0$.

Interprétation quantique

On peut interpréter la diffraction de la lumière, des électrons, des particules avec l'inégalité de Heisenberg. La fente induit une incertitude $\Delta x = a$ donc l'incertitude en impulsion doit être $\Delta p_x \geq \hbar/a$. Or l'angle de diffraction est $\theta_x = \Delta p_x/p_x$, avec $p_x = \hbar k_x$ on retrouve $\theta_x \sim \lambda/a$.

Principe de Huygens-Fresnel

Principe de Huygens-Fresnel

Chaque point M de la surface du diaphragme se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente en M. Les ondes des issues des différentes sources interfèrent entre elles.

Théorie de Kirchhoff

En partant de l'équation de Helmholtz $\Delta A + k^2 A = 0$. La valeur de A est parfaitement définie dans une région V si on connait ses valeurs et celles de sa dérivées sur une surface S entourant la région V. On exprime alors la valeur de A dans V à l'aide de celles de A sur S. C'est la formule de Fresnel-Kirchhoff :

$$\boxed{A(P) = -i/\lambda \iint_S d^2\vec{r}_M \frac{A(M)\exp(ikr_{MP})}{r_{MP}} \frac{(\cos\theta_p - \cos\theta_s)}{2}} \tag{11}$$

On note : l'intégration sur la surface S, le déphasage $-i/\lambda$, le facteur d'inclinaison avec θ_S l'angle entre la normale en M et SM et θ_p l'angle entre la normale en M et MP. De plus il doit y avoir un facteur $A(\theta)$ qui assure la non-diffraction vers l'arrière (?).

On retient le **principe de Huyghens-Fresnel** : *Tout se passe comme si chaque point de la surface se comporte comme une source émettant une distribution angulaire donnée par le facteur d'inclinaison, dont l'amplitude est proportionnelle à celle de l'onde incidente et de phase décalée de $\pi/2$ par rapport à l'onde originale.* En réalité, il n'y a pas de source secondaire, c'est un résultat mathématique.

Eclairage par une onde plane en incidence normale

Dans le cas d'une surface plane et d'un éclairage par une onde plane en incidence normale, en regardant sur un plan d'observation parallèle à une distance d :

$$\boxed{A(P = (x_P, y_P, d)) = \frac{-iA_0}{2\lambda} \iint_S \frac{\exp(ikr_{MP})}{r_{MP}} (1 + \cos\theta_p) dx_M dy_M} \tag{12}$$

avec $r_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + d^2}$ et $\cos\theta_p = d/r$. Cette expression est la base des calculs de diffraction.

Première approximation des points stationnaires

Les termes qui contribuent le plus à l'intégrale sont ceux où la phase de l'exponentielle varie lentement. Pour évaluer la phase $\phi = kr_{PM}$, il faut tenir compte des variations de PM **à l'échelle de la longueur d'onde**. Ce sont en les points stationnaires P tel que r_{MP} varie peu devant λ que l'intégrale aura une valeur significative. C'est en lien avec le principe de Fermat.

Au voisinage de ces points stationnaires, le facteur $\cos\theta_p / r_{MP} = 1/d(1 + ((x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2)/d^2)^{-1}$ varie lentement et on peut considérer que $\cos\theta_p / r_{MP} \sim 1/d$, d'où :

$$\boxed{A(P = (x_P, y_P, d)) = \frac{-iA_0}{\lambda d} \iint_S \exp(ikr_{MP}) dx_M dy_M} \tag{13}$$

Approximation de Fresnel

Dans l'expression de r_{MP}, on garde pour (x_p, y_p) l'ordre 2 dans la phase et l'ordre 0 pour la dilution géométrique.

$$\boxed{A(x_P, y_P, d) = \frac{-iA_0}{\lambda d} \exp(ikd) \iint_S \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}{2d}\right) dxdy} \tag{14}$$

Approximation de Fraunhofer

Dans l'expression de r, on garde pour (x_p, y_p) l'ordre 1 dans la phase et l'ordre 0 pour la dilution géométrique.

$$\boxed{A(x_P, y_P, d) = \frac{-iA_0}{\lambda d} \exp(ikd) \exp\left(\frac{i2\pi(x_p^2 + y_p^2)}{2\lambda d}\right) \iint_S \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{xx_p + yy_p}{d}\right) dxdy} \tag{15}$$

ou encore avec les angles $\theta_x \equiv x_p/d$ et $\theta_y = y_p/d$ et en interprétant avec la transformée de Fourier

$$\boxed{A(\theta_x, \theta_y, d) \propto \exp(ikd) \iint_{\mathbb{R}^2} t(x,y) \exp\left(-ik(x\theta_x + y\theta_y)\right) dxdy = \exp(ikd) TF[t](\theta_x, \theta_y)} \tag{16}$$

où $t = \mathbb{1}_{(x,y)\in S}$ est la fonction transparence de l'ouverture.

Diffraction de Fraunhofer

Réalisations

(i) Diffraction d'une onde plane à l'infini. $(1/d = 0, 1/D = 0)$ (ii) Diffraction d'une onde plane à grande distance. $(1/d = 0, 1/D \approx 0)$ (iii) Diffraction au voisinage de l'**image géométrique de la source** $(1/d + 1/D = 0)$. (cf. Sextant p139).

Propriétés de la diffraction de Fraunhofer

Avec le lien avec la TF, on en déduit les propriétés :

- Invariance par translation de l'objet diffractant *i.e.* translation induit modulation.
- Théorème de Babinet des ouvertures complémentaires. Les intensités sont identiques sauf au centre *i.e.* $TF[1 - t] = \delta_0 - TF[t]$.
-

Diffraction de Fraunhofer pour des géométries particulières

Pour une ouverture rectangulaire, on obtient des sinus cardinaux. On peut vérifier la conservation de l'intensité totale. Au premier maxima secondaire, l'intensité est de 5%. Représentation avec les lobes de diffraction (diagrammes de rayonnement).

Pour les fentes de Young, on retrouve les franges en $\cos^2$ avec modulation du contraste en $\sin_c^2$ issu de la largeur des fentes.

Pour le réseau, on retrouve une modulation en $\sin_c^2$ issu de la largeur des fentes.

$$\boxed{I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\pi a \sin\theta/\lambda)}{\sin^2(\pi a \sin\theta/\lambda)} \sin_c^2\left(\frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}\right)} \tag{17}$$

Géométrie circulaire

La phase dans l'intégrale est alors $ik\vec{\rho}\cdot\vec{u}$ où ρ est le vecteur position sur l'objet diffractant et $\vec{u}$ la direction visée. Dans les géométries cylindriques, les fonctions de Bessel apparaissent.

On obtient une tache d'Airy $I(\vec{u}) = (J_1(x)/x)^2$ $\alpha = 1.22\lambda/D$, premier zéro de Bessel.

Applications de la diffraction de Fraunhofer

Critère de Rayleigh

Ce n'est pas un critère rigoureux ou aboslu. Un téléscope fait d'un objet à l'infini une image circulaire avec une certaine extension. Différence minimale d'angle visible $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$ pour séparer les largeurs à mi-hauteur.

Applications : on peut calculer la résolution angulaire d'un téléscope en connaissant son diamètre. On peut estimer la résolution angulaire de l'oeil avec le diamètre de la pupille $d \sim 2mm$ ce qui donne $\Delta\theta \sim 3.10^{-4}$rad. De plus, (à prendre avec des pincettes), les pupilles verticales sont efficaces pour voir en profondeurs (prédateurs) mais les pupilles horizontales ont un meilleur champ de vision (proies). Exception du koala.

Apodisation

Lorsqu'on recherche des exoplanètes au voisinage d'étoiles, comme l'étoile émet un flux $\sim 10^9$ fois plus important que celui de l'exoplanète, les lobes secondaires de la tache d'Airy de l'étoile vont cacher la tache d'Airy de l'exoplanète.

En introduisant un masque dans le plan diffractant (ex : fenêtre de Hamming), on peut atténuer les pics secondaires mais en contrepartie, on étale le pic central. Il faut faire un compromis en fonction du système qu'on veut étudier.

En revanche, en introduisant un cache au centre de la figure diffractée, ce qui est le cas dans les téléscopes où la partie centrale est cachée par le miroir secondaire, l'amplitude des maxima secondaires augmente. Il faut donc faire un compromis, choisir la bonne forme du masque apodisant.

Résumé

- Une fente nue a un meilleur pouvoir de résolution car sa figure de diffraction est la plus fine possible. Par ailleurs, c'est ce type d'ouverture qui permet de faire passer le plus de lumière possible, puisqu'elle n'utilise aucun filtre. C'est un bon dispositif pour l'observation de deux étoiles d'intensités comparables.
- Le filtre apodisant élargit la figure de diffraction mais permet d'aplanir les rebonds présents dus au sinus cardinal. Il permet de faire ressortir les objets de faible intensité, qui auraient été perdus au milieu des lobes latéraux. On perd cependant en résolution et en intensité

Les mêmes concepts entrent en jeu dans le calcul de la transformée de Fourier d'un signal électrique sur les oscilloscopes numériques qui offrent la possibilité d'appliquer une fonction «porte» sur le signal

Optique de Fourier

- Expérience d'Abbe.
- L'oculaire d'un microscope peut constituer un filtre passe-bas qui limite la résolution.
- Détramage d'un image avec des filtres. On considère une image avec un bruit à haute fréquence, telle qu'une image pixelisée. On peut utiliser le dispositif précédent, mais avec un diaphragme à la place du point opaque, pour filtrer les hautes fréquences spatiales, par exemple celles dues à la pixellisation de l'image. Après filtrage, les pixels (de hautes fréquences) sont alors «gommés» et on obtient une image de meilleure qualité.

Visualisation d'un objet de phase

Les objets caractérisés par des variations d'indice ou d'épaisseur sont appelés «objets de phase». Ces objets, parfaitement transparents, ne présentent pas de contraste avec le champ qui les entoure, c'est-à-dire qu'ils sont invisibles par les méthodes d'imagerie ordinaires, car ils sont caractérisés seulement par des variations du chemin optique et non par des variations d'amplitude ($|t(X,Y)| = 1$). Sans rien faire, l'éclairement est donc uniforme sur l'écran d'observation.

Les variations spatiales de phase font toutefois apparaître une figure de diffraction dans le plan de Fourier. Le principe de la **strioscopie** consiste à filtrer l'image géométrique dans le plan de Fourier. Si on place un petit écran opaque au centre du plan de Fourier, les fréquences spatiales les plus basses sont filtrées. En fait, on cherche à bloquer toute la lumière qui arriverait à l'écran si l'objet de phase n'était pas présent. En présence de l'objet de phase, la lumière diffractée, correspondant aux fréquences spatiales non nulles, n'est pas bloquée par le petit écran dans le plan de Fourier. Finalement, seule la lumière diffractée parvient à l'écran. Les variations de phase, et donc l'objet de phase, deviennent visibles.

Strioscopie : On reprend le raisonnement qualitatif précédent expliquant le principe de la strioscopie, de façon plus quantitative. Sans écran dans le plan de Fourier, la vibration lumineuse sur l'écran d'observation est

$$s = s_0 e^{i\phi} \tag{18}$$

où ϕ est la phase introduite par l'objet de phase au point considéré. On peut toujours décomposer la vibration lumineuse selon

$$s = s_0(e^{i\phi} - 1) + s_0 \tag{19}$$

où le deuxième terme est l'onde directe est le premier l'onde diffractée. S'il n'y a pas d'objet de phase, l'éclairement est uniforme, sans déphasage, soit une vibration lumineuse $s = s_0$. Si on bloque les très basses fréquences spatiales dans le plan de Fourier, alors on retire s_0 de la vibration lumineuse sur l'écran d'observation (les ondes non diffractées), et on obtient finalement une vibration

$$s = s_0(e^{i\phi} - 1) \tag{20}$$

Si on suppose que la phase ϕ est faible devant 2π, alors $e^{i\phi} - 1 \approx i\phi$, d'où l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran d'observation

$$\boxed{I = I_0 \phi^2} \tag{21}$$

On observe donc les variations de phase sur un fond noir ($I = 0$ si $\phi = 0$) : le contraste est maximal et toujours égal à 1. L'inconvénient de cette méthode est la faible intensité des images obtenues : si ϕ est petit, ϕ^2 l'est plus encore ! De plus, on n'a accès qu'à la norme de ϕ, et son signe reste inconnu.

L'imagerie par contraste de phase (Zernike, PN 1953) est une autre technique permettant de remonter au signe de la phase. Au lieu d'avoir un petit écran opaque au foyer de la lentille, on place une petite lame à retard $\lambda/4$ introduisant un déphasage de $\pi/2$. Si l'on introduit la lame $\lambda/4$, alors les ondes non diffractées accumulent une phase $\pi/2$ supplémentaire et alors

$$s = s_0(e^{i\phi} - 1) - is_0 \approx s_0 i(\phi - 1) \tag{22}$$

en supposant une nouvelle fois que la phase ϕ petite. Il faut donc travailler avec une onde monochromatique. d'où une intensité

$$\boxed{I = I_0(1 - 2\phi)} \tag{23}$$

car ϕ^2 est négligeable. On peut donc mesurer directement ϕ avec cette méthode. On a ici une image avec un contraste égal à 2ϕ (d'où le nom de la technique). Contrairement à la strioscopie, le contraste donc faible. On peut toutefois augmenter la sensibilité en rendant la lame de phase absorbante. Supposons qu'elle réduise l'intensité de la lumière directe par un facteur β, on a alors

$$\boxed{I = I_0(1/\sqrt{\beta} - \phi)^2 \approx I_0/\beta(1 - 2\phi\sqrt{\beta})} \tag{24}$$

et donc un contraste $C = 2\phi\sqrt{\beta}$. Le contraste est multiplié par $\sqrt{\beta}$. L'imagerie par contraste de phase est employée en microscopie. Les microscopes à contraste de phase sont utilisés dans les laboratoires de biologie car ils permettent d'étudier les objets vivants sans les colorer et donc sans les tuer.

Diffraction de Fresnel

Dans l'expression de r, on garde jusque l'ordre 2 pour la phase et l'ordre 0 pour la dilution géométrique.

Diffraction de Fraunhofer

Diffraction par une fente infinie, intégrales de Fresnel et spirale de Cornu

Dans le cas d'une fente infinie de largeur b,

$$A(x_p) \sim \frac{e^{ikd}}{d} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(ik\frac{(x - x_p)^2}{2d}\right) dx = \frac{e^{ikd}}{d} \int_{-b/2-x_p}^{b/2-x_p} \exp\left(i\pi\frac{x^2}{\lambda d}\right) dx \tag{25}$$

On définit alors les intégrales de Fraunhofer par

$$\mathcal{C}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du \qquad \mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du, \tag{26}$$

La courbe décrite par $z(x) = \mathcal{C}(x) + i\mathcal{S}(x)$ est une spirale dans le plan complexe, qui tend vers $\pm(1/2, 1/2)$ lorsque $x \to \pm\infty$. En écrivant $A(x_p)$ comme la différence de deux nombres complexes, on trouve que l'intensité est donnée par le carré de la distance entre les deux points sur la spirale de Cornu.

Profil d'intensité

Pour un petit nombre de Fresnel $\boxed{N_F = a^2/\lambda d}$, on se trouve dans l'approximation de Fraunhofer, la figure de diffraction a des oscillations de période spatiale $x \sim \lambda d/a$.

Pour des grands nombres de Fresnel, on trouve en plus des oscillations de période spatiale $\boxed{x \sim \sqrt{\lambda d}}$, comme pour la diffraction par un bord d'écran.

Application : lorsque la Lune passe devant une étoile *i.e.* une occultation, l'intensité de l'étoile fluctue comme pour la diffraction sur un bord d'écran (Eddington 1909).

Voir Taillet p.163 pour la visualisation des différents régimes.

Diffraction de Fresnel d'une ouverture circulaire

Quand le trou est grand, on trouve l'image de l'optique géométrique avec des franges circulaires venant de la diffraction par le bord.

Quand le trou est petit, on retrouve la diffraction de Fraunhofer *i.e.* la tache d'Airy.

Entre les deux, il y a une taille optimale $R_{opt} \sim \sqrt{\lambda d}$ qui minimise la taille de la tache. (cf. Taillet p.163, super illustration) Application aux sténopés.

Il est possible de calculer analytiquement l'amplitude le long de l'axe, avec le facteur d'inclinaison z/r, en utilisant $\boxed{\rho d\rho = rdr}$ pour intégrer sur r au lieu de ρ le rayon de l'ouverture (et un calcul de résidu pour primitiver e^x/x).

Point de Poisson-Arago

Pour un disque opaque, il y a un point lumineux au centre, dans l'ombre du disque opaque. L'intensité ne s'annule jamais le long de l'axe. Le point d'Arago-Poisson grandit pour devenir la tache d'Airy.

Distribution de l'intensité au voisinage d'un foyer

Selon l'optique géométrique, la concentration de rayons lumineux devient infinie au voisinage d'un foyer d'une lentille. Mais le calcul en diffraction montre que le faisceau a une extension transverse de l'ordre de λ et une extension axiale de l'ordre de $\lambda(f/a)^2$, qui est l'ordre de grandeur de la latitude de mise au point. On appelle souvent f/a l'ouverture numérique, où a est le rayon de la lentille.

Axicons et faisceaux de Bessel

Un axicon est un dispositif optique qui focalise la lumière le long d'un axe. Ils sont utilisés pour produire des faisceaux rectilignes étroits, utilisés pour vérifier avec précision l'alignement ou la planéité de surface ou encore augmenter la profondeur de champ (lecteur de code barre).

On peut réaliser un axicon avec le point de Fresnel-Arago.

On peut aussi réaliser un axicon en éclairant en onde place un cône de faible angle à la base α. Un rayon en incidence normale côté plan sort en ayant été réfracé d'un angle $(n-1)\alpha$ avec l'horizontale. A la distance z sur l'axe, la principale contribution vient de la portion de cône située à la distance $r \sim z(n-1)\alpha$ de l'axe. Donc la dilution sphérique en $1/z$ est compensée par l'augmentation du nombre de sources secondaires en z, ceci réalise un faisceau dont la forme est invariante selon z sur une distance $\sim R\alpha$. Cela réalise des faisceaux de Bessel. Les fluctuations d'intensité dues à la diffraction peuvent être réduites par apodisation.

En combinant un axicon avec une lentille sphérique, on peut foormer un faisceau où l'intensité est maximale sur un anneau, ce qui peut être utilisé pour usiner des trous circulaires.

Zones de Fresnel et lentilles diffractantes

But : on veut focaliser une onde plane sur un point particulier (lentille diffractante) ou la réémettre dans une direction $\vec{u}$ privilégiée (fente diffractante), pour des longueurs d'ondes où ne dispose pas de milieu réfractant (rayons X, ondes radio) donc pas de lentille. On peut utiliser la diffraction.

Fentes diffractantes

Pour rediriger une onde plane dans une direction donnée, quelle transparence $t(x, y)$ utiliser ?

La différence de marche entre l'onde émise par l'origine et celle en $\vec{r} = (x, y)$, dans la direction $\vec{u}$ est $\delta = \vec{r} \cdot \vec{u}$. On pourrait masquer les parties de l'écran où δ est plus proche d'un demi entier de longueur d'onde (destructif) plutôt qu'un nombre entier de longueurs d'ondes (constructif) : $t(x, y) = \Theta(\sin 2\pi\delta/\lambda)$ où Θ est la fonction de Heaviside. Cela correspond à une réseau diffractant de pas $a = \lambda/\sin\theta_0$. Mais il y a de l'intensité dans autres ordres du réseau.

On peut choisir $\boxed{t(x,y) = 1/2(1+\cos 2\pi\delta/\lambda)}$ modulation périodique. La propriété de translation-modulation de la TF donne que l'onde émergente a des composantes angulaires en $\theta = 0$ et $\theta = \pm\theta_0$. C'est plus performant que le tout ou rien.

Lentille diffractante

Pour faire converger une onde plane en un point donné, quelle transparence $t(x,y) = t(\rho)$ utiliser ?

Similairement aux fentes diffractantes, on peut masquer les zones du plan diffractant dont les ondes secondaires n'arrivent pas en phase au point $(0,0,z_F)$ convergent. Avec $\phi = k\sqrt{\rho^2 + z_F^2}$, on peut prendre $t_1(x,y) = 1/2(1 + signe(\cos\phi))$ (analogue au Heaviside précédent) ou $t_2(x,y) = 1/2(1+\cos\phi)$ (analogue au deuxième filtre précédent). Le premier filtre vaut 1 sur certains anneaux, entre ρ_{2p} et ρ_{2p+1} et 0 entre ρ_{2p+1} et ρ_{2p+2}. La lumière est diffractée sur plusieurs positions sur l'axe. Pour le deuxième filtre, on trouve un ordre +1 convergent, un ordre -1 divergence et un ordre 0 correspondant au faisceau incident.

Ces dispositifs sont fortement chromatiques *i.e.* très sensibles à la longueur d'onde.

Diffraction par des structures périodiques

La figure de diffraction obtenue est le produit d'un facteur de structure, qui ne dépend que de la répartition des structures sur l'écran diffractant, et d'un facteur de forme, qui ne dépend que de la forme d'une structure unique.

Structures réparties aléatoirement

Si on a N motifs répartis aléatoirement, le facteur de structure vaut environ N (cauf au centre, où elle vaut N^2). On obtient la figure de diffraction d'un seul motif mais N fois plus intense qu'avec un motif unique.

Cette situation est particulièrement utile quand l'on cherche, par exemple, à connaître le rayon moyen des grains d'une poudre. En répartissant de façon aléatoire les grains sur une plaque, la figure de diffraction obtenue pour l'ensemble des grains est la figure de diffraction d'un grain de diamètre moyen. En montage, on peut par exemple mesurer le diamètre de spores de lycopode par cette méthode.

Diffraction dans les solides critallins

Pour avoir une figure de diffraction notable, il faut

- des longueurs d'ondes supérieures à la taille atomique, pour que la diffraction soit traitable dans l'approximation où l'on néglige les effets de bord de l'élément diffractant (mouvement électroniques dans l'atome...) (? ? ?)
- des longueurs d'onde de l'ordre de grandeur de la distance atome-atome donc de l'angstrom donc des rayons X pour le rayonnement EM.

Comme source d'ondes, on peut utiliser du rayonnement EM ou des ondes de matière :

- Dans le cas du rayonnement électromagnétique, $\lambda \sim$1 Angstrom correspond aux rayons X. Ils sont produits par ralentissement d'électrons envoyés sur une cible métallique (Brehmstrahlung). Le spectre produit est large.
- électrons : la longueur d'onde est celle de De Broglie. Il faut donc avoir un jet monocinétique pour éviter d'avoir une largeur spectrale importante. Par exemple, on peut accélérer des électrons via une différence de potentiel U. **ODG:** il faut typiquement $U \sim 100V$, ce qui est facile à réaliser. Les électrons sont des particules chargées, elles interagissent fortement avec la matière, et donnent principalement des informations sur la surface.
- neutrons : Pour des neutrons thermiques, la longueur d'onde est la longueur d'onde thermique de De Broglie, soit quelques angstrom à 300K. L'avantage des neutrons est qu'ils sont neutres et donc pénètrent plus efficacement dans la matière que les électrons. De plus, ils ont un moment magnétique non nul et donnent donc des informations sur les moments magnétiques des noyaux sondés.

Condition de Bragg, de Laue.

Milieux biréfringents

Milieux cristallins, quartz. Exemples : quartz $\delta n \equiv n_e - n_o \sim 0.01$, calcite $CaCO_3$ $n_e - n_o \sim -0.1$.

Optique anisotrope

Voir fiche manuscrite. Milieux isotropes, uniaxes, biaxes.
Structure de l'OPPM. Trièdes directs.
Ellipsoide des indices, des surfaces.

Milieux uniaxes

Si l'axe optique de la lame uniaxe n'est pas parallèle ou perpendiculaire (orientation quelconque), les rayons extraordinaire et ordinaire n'ont donc pas la même direction et sont séparés en sortie de la lame. Ce phénomène est appelé **double réfraction**.

Les axes principaux d'une lame, et notamment son axe optique, sont liés au cristal : ce sont les axes propres qui correspondent aux vecteurs propres du tenseur de permittivité $[\epsilon_r]$. Les axes neutres, en revanche, dépendent de la direction de propagation de l'onde. Si une onde est polarisée selon un axe neutre de la lame, sa direction de polarisation n'est pas modifiée, et tout se passe comme si l'onde traversait un milieu isotrope. La direction de propagation dans le cristal et l'indice «vu» par l'onde dépendent en revanche de son état de polarisation.

En se plaçant toujours dans le cas d'un cristal uniaxe, au moins l'un des axes propres de la lame est contenu dans le plan de la face d'entrée. C'est la première ligne neutre de la lame, l'indice vu par l'onde est l'indice ordinaire n_o. Dans le cas d'une onde en incidence normale, la seconde ligne neutre est obtenue par projection sur la face d'entrée de l'axe optique, ou axe extraordinaire, de la lame. L'indice vu par l'onde est alors compris entre n_e et n_o. Cet axe neutre n'est donc pas, en général, un axe propre de la lame. On appelle alors axe rapide l'axe neutre pour lequel l'indice est le plus faible (vitesse de propagation de la lumière c/n la plus élevée) et axe lent l'axe neutre pour lequel l'indice est le plus grand (vitesse de propagation de la lumière c/n la plus faible).

Expérimental

Lame fine, lame épaisse

Une lame fine est associée à un ordre p faible *i.e.* Δne est un petit multiple de la longueur d'onde.

A priori, une lame mince se comporte de la même façon qu'une lame épaisse qui induirait un déphasage $\Delta\phi' = \Delta\phi + 2p\pi$, avec p grand. Toutefois, une faible variation de la longueur d'onde ou de l'épaisseur de la lame (dilatation thermique par exemple) pourrait alors induire une variation notable de $\Delta\phi'$. Comme $d\Delta\phi/d\lambda$ est proportionnel à e, plus la lame est mince, plus la sensibilité à ces fluctuations est donc faible. Les lames à retard d'ordre zéro, quoique plus difficiles à réaliser, sont donc en général préférées à des lames d'ordre élevé puisqu'elles autorisent une variation plus grande de longueur d'onde sans pour autant changer significativement l'effet de la lame sur la polarisation

Spectre en sortie

En éclairant avec de la lumière blanche, le spectre en sortie est cannelé, puisque la différence de marche dépend de λ.

Pour des lames fines, on voit des teintes de couleurs. Pour des lames épaisses, on voit du blanc d'ordre supérieur.

Géométries

Rochon, Wollaston, Glann-Taylor.

Biréfringence provoquée

Contrainte anisotrope

Contrainte anisotrope : mécanique ou électrique. Par exemple, scotch ou film étiré, plexiglas en flexion. Application : en plaçant un objet entre deux polariseurs croisés, si les contraintes de son pas homogènes donc la biréfringence n'est pas homogène, on voit des couleurs différentes, qui changent en tournant l'objet.

Milieux électroptique

Effet Pockels (linéaire en E), effet Kerr $n_e - n_o = K\lambda E_{stat}^2$. Le déphasage devient indépendant de λ. Application aux obturateurs.

Biréfringence rotatoire

Certaines substances ont la propriété de faire tourner le plan de polarisation d'une onde polarisée rectilignement, lorsque celle-ci les traverse, d'un angle qui ne dépend pas de la polarisation incidente. On parle de pouvoir rotatoire ou activité optique

Biréfringence rotatoire : quartz (perpendiculaire pour ne pas voir la biréfringence non rotatoire), milieux chiraux comme le glucose ou avec un champ magnétique (effet Faraday, effet Kundt, effet magnéto-optique). On attribue un indice gauche/droit n_g et n_d.

Pouvoir rotatoire

Le pouvoir rotatoire d'une lame peut en fait être interprété comme une biréfringence circulaire du milieu optiquement actif. Dans le cas des lames parallèles vues précédemment, la biréfringence Δn est la différence des indices correspondants à deux polarisations rectilignes orthogonales de l'onde incidente. Si on suppose maintenant que le milieu est tel qu'une onde polarisée circulaire gauche «voit» un indice n_g alors qu'une onde polarisée circulaire droite «voit» un indice n_d. On note $\Delta n = n_g - n_d$. la biréfringence circulaire de ce milieu.

En décomposant sur la base des polarisations circulaires, on voit qu'une polarisation linéaire tourne d'un angle appelé activité optique $\alpha = \pi(n_g - n_d)e/\lambda$, où $[\alpha] = \pi(n_g - n_d)/\lambda$ est le pouvoir rotatoire.

Effet Faraday

Pour l'effet Faraday, la différence d'indice est proportionnelle à l'amplitude du champ appliqué B et alors $\alpha = VBe$ avec V la constante de Verdet, dépendant du matériau. **ODG:** $V = 0.004$rad/T/mm quartz, $V = 0.1$rad/T/mm flint, $V = 0.009$ rad/T/mm benzène.

Contrairement à un milieu optiquement actif, l'effet sur la polarisation de l'onde est donc différent si l'onde se propage selon les z croissants ou les z décroissants. En fait, la polarisation tourne toujours d'un angle θ_0 autour de l'axe orienté dans le sens de B. Application aux **isolateurs de Faraday**, pour éviter que la lumière ne repénètre dans le laser par ex.

On peut donner un modèle avec l'électron élastiquement lié où on rajoute la partie magnétique de la force de Lorentz en $\vec{f} = \pm\omega B_0 \vec{r}$, où le signe dépend du sens de rotation de la distribution de charge donc de la polarisation incidente. En calculant la polarisabilité dans les deux situations, on remonte pour les milieux dilués à $n^2 = 1 + \chi = 1 + N\alpha_p$ où α_p est la polarisabilité. En faisant la différences pour les deux polarisations possibles, on obtient le pouvoir rotatoire $\alpha \propto 1/\lambda^2$ pour les diélectriques où $\omega \ll \omega_0$ et $\alpha \propto \lambda^2$ pour les plasmas où $\omega \gg \omega_0$.

Application à la production et analyse de polarisation

Compensateur de Babiner

Voir Sayrin. Très complet.

Voir partie suivante.

Description des états de polarisation

A z fixé, $\vec{E}(z,t)$ décrit une ellipse orientée.

Vecteurs de Jones

Les vecteurs de Jones utilisent deux complexes mais sont définis à une constante multiplicative près (donc 3 réels). Analogie avec un système quantique à deux niveaux. Si les deux paramètres ont la même phase, c'est une polarisation rectiligne. Si les deux paramètres sont déphasés de $\pi/2$, c'est un cercle. En convection $\exp(i(-\omega t+\phi_x))$, $(1,i)/\sqrt{2}$ tourne dans le sens trigonométrique donc circulaire gauche. On le retrouve avec y est en avance de $\pi/2$ par rapport à x donc lorsque $x=1$ va diminuer, $y=0$ diminue, ça tourne vers la droite mais avec la convention $-i\omega t$, ça tourne vers la gauche.

Sphère de Poincaré

Sphère de Poincaré : analogue de la sphère de Bloch pour le spin en mécanique quantique. L'équateur représente les polarisations rectilignes. Les pôles sont les polarisations circulaires.

La lumière partiellement polarisée se trouve à l'intérieur de la sphère de Poincaré.

Paramètres de Stokes

Les paramètres de Stokes utilisent 4 paramètres réels et peuvent aussi décrire la lumière partiellement polarisée (déphasages aléatoires *i.e.* fluctuant vite par rapport aux temps des détecteurs).

Les paramètres de Stokes sont : $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(I_x+I_y, I_x-I_y, I_{45}-I_{-45}, I_{CD}-I_{CG})$.

Pour la lumière intégralement polarisée, $P_0^2=P_1^2+P_2^+P_3^2$ avec $P_2=2E_xE_y\cos(\phi_x-\phi_y)$ et $P_3=2E_xE_y\sin(\phi_x-\phi_y)$.

Les sources thermiques, les sources spectrales, la lumière solaire ne favorisent aucune polarisation. La lumière est non-polarisée : $(1,0,0,0)$. On parle de lumière naturelle.

Pour la lumière partiellement polarisée, $\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}\leq P_0$. On définit le degré de polarisation :

$p\equiv\sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}/P_0\leq 1$. C'est le cas de la lumière issue d'un laser ou du rayonnement synchrotron.

Formalisme matriciel et lien avec la mécanique quantique

Comme la polarisation a la même structure que les systèmes à deux niveaux en mécanique quantique, on peut, en plus de la sphère de Poincaré/Bloch, dresser une analogie matricielle.

On introduit la matrice de corrélation : C=$\begin{pmatrix}\langle E_x^\star(t)E_x(t)\rangle_t & \langle E_x^\star(t)E_y(t)\rangle_t\\ \langle E_y^\star(t)E_x(t)\rangle_t & \langle E_y^\star(t)E_y(t)\rangle_t\end{pmatrix}$ Alors les paramètres de Stokes sont donnés par $(P_0,P_1,P_2,P_3)=(C_{xx}+C_{yy}, C_{xx}-C_{yy}, C_{xy}+C_{yx}, i(C_{yx}-C_{xy})$.

En fait, on les retrouve de manière plus concise avec $\boxed{P_i=Tr(C\sigma_i)}$ où σ_i sont les matrices de Pauli, $\sigma_0=Id$.

Production d'une lumière polarisée

Polarisation par réflexion

A la réflexion sur un dioptre, la lumière naturelle (p=0) acquiert une polarisation selon $p=(\langle E_{//}^2\rangle-\langle E_\perp^2\rangle)/(\langle E_{//}^2\rangle+\langle E_\perp^2\rangle)$, qu'on calcule avec les coefficients de réflexion, différents selon la polarisation (idem pour la lumière réfractée).

Si $n_1<n_2$ (pas de réflexion totale), en réflexion, p vaut 0 en incidence normale, est maximum et vaut 1 à l'angle de Brewster θ_b, puis diminue pour valoir 0 en $\theta=\pi/2$. En réfraction, p augmente de 0 à 1 de $\theta=0$ à $\pi/2$.

Si le soleil est à une hauteur proche de l'angle de Brewster, la lumière réfléchie sur l'étendue d'eau peut être polarisée. Les photographes utilisent ce phénomène lorsqu'ils emploient des polariseurs pour éliminer des reflets.

Si $n_1>n_2$, le déphasage entre les deux polarisations réfléchies à des angles supérieurs à l'angle de réflexion totale peut être utilisé pour polariser elliptiquement une lumière polarisée initialement linéairement.

Polarisation par diffusion

Le champ électrique provoque des mouvements de charge dans la particule diffusante. Loin des sources, l'onde a localement la structure d'une onde plane (rayonnement dipolaire) et est linéairement polarisée. L'onde est polarisée partiellement à cause des réflexions multiples.

Polariseurs dichroïques

Les matériaux dichroïques reposent sur la différence de mobilité des électrons dans deux directions différentes, par exemples dans des longues chaînes de polymèrse. Les polariseurs sont actuellement réalisés artificiellement en étirant des films de polymères sur lesquels sont attachées des molécules de pigments. Le substrat obtenu possède une conductivité électrique parallèlement à la direction dans laquelle les polymères ont été étirés, et absorbe efficacement l'état de polarisation rectiligne de champ électrique parallèle à cette direction, il laisse passer l'état de polarisation orthogonal. Dans la direction où les électrons sont mobiles, la lumière est absorbée (pas totalement) alors que dans l'autre elle est transmise. Cependant, la polarisation engendrée n'est pas totale.

Milieux biréfringents

Les matériaux biréfringents uniaxes ont un axe privilégé. Les polarisations selon cet axe voient un indice n_e.

Pour déterminer les axes neutres d'une lame taillée parallèlement à l'axe optique, on la met entre deux polariseurs croisés et on cherche l'extinction.

Le déphasage induit entre les composantes des axes neutres est $\Delta\phi = 2\pi/\lambda(n_e - n_0)e$. Comme $\Delta\phi$ dépend de la longueur d'onde λ, on obtient un spectre cannelé en sortie d'un analyseur. Pour une lame fine, l'oeil peut percevoir les couleurs (cannelures larges). Pour des lames épaisses, l'oeil voit du blanc d'ordre supérieur (cannelures étroites).

Une lame quart d'onde transforme une polarisation rectiligne (pour la longueur d'onde de la lame) en polarisation circulaire, si l'angle entre la polarisation et les axes neutres est de $\pi/4$. Dans la base des axes neutres, elle déphase les composantes de i.

Une lame demi-onde change la direction de polarisation d'une onde polarisée linéaire (symétrie par rapport aux axes neutres) ou change le sens d'une onde polarisée circulairement. Dans la base des axes neutres, elle déphase les composantes de -1.

Analyse d'une lumière polarisée

Un polariseur linéaire ne suffit pas à déterminer la polarisation d'une lumière : on ne peut distinguer une polarisation circulaire d'une lumière non polarisée.

On montre qu'une lumière est polarisée circulairement en la faisant passer par une lame quart d'onde puis un analyseur.

Lasers

Un laser est constitué d'un milieu amplificateur et d'une cavité optique qui permet de faire des aller-retours dans le milieu amplificateur et d'augmenter la sélectivité spectrale.

L'inversion de population ne peut se faire qu'hors équilibre thermique.

Produit gain-bande.

Rôles de la cavité

Bouclage

En faisant le calcul de la cavité, style Fabry-Pérot, on obtient une fonction de transfert d'un amplificateur bouclé. Si un des deux miroirs est parfait (R=1), alors :

$$\boxed{A_{tot} = \frac{TG_0}{1 - RG_0^2} A_{inc}} \tag{27}$$

où $G_0 = \exp \int_0^L \sigma(n_2 - n_1) dl$ où σ est la section efficace.

Mathématiquement, l'amplitude diverge en $G_0^2 R = 1$. Physiquement l'amplitude finale est limitée par le nombre d'atomes disponibles dans le milieu pour participer à l'amplification.

Sélection fréquentielle

Pour un laser He-Ne, l'élargissement Doppler conduit, à température ambiante, à une largeur de raie $\Delta\lambda_{Dop} \sim 3 \times 10^{-4}$nm. Le Fabry-Pérot va sélectionner une raie beaucoup plus fine. Pour qu'il n'y ait qu'un seul mode de la cavité Fabry-Pérot (espacés de $\Delta\lambda = \lambda^2/2d$) qui soit amplifié, il faut choisir $\Delta\lambda \sim \Delta\lambda_{Dop}$ (ou choisir plus grand mais être plus précis sur d).

Si plusieurs modes de la cavité peuvent être amplifiés, le temps de cohérence $\tau_c \sim 1/\Delta\nu$ sera plus court car il faudra prendre $\Delta\nu$ comme l'espacement entre deux pics. Si un seul mode est amplifié *i.e.* le laser est **monomode**, le temps de cohérence est donné par $\delta\lambda = \Delta\lambda/\mathcal{F}$où $\mathcal{F} \sim \pi/T \gg 1$ est la de la cavité. Donc, *le fonctionnement monomode améliore la cohérence temporelle du rayonnement émis.*

Limitation fondamentale de la pureté spectrale

La pureté spectrale du faisceau peut être plus faible que celle donnée par la finesse de la cavité. **La limitation fondamentale est les fluctuations de phase induites par l'émission spontanée.**

Par l'inégalité de Heisenberg, $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ où Δt est le temps de séjour moyen dans la cavité ou encore le temps moyen entre les fluctuations de phase (?). Or $\Delta E = N\hbar\omega$ avec N le nombre de photons dans la cavité. En régime permanent, on relie $P\Delta t = N\hbar\omega$ avec P la puissance du laser alors $\Delta\omega \sim \hbar\omega/(P\Delta t^2)$ or on avait vu que $\Delta t \sim 1/\delta\omega_{cav}$ donc on obtient

$$\boxed{\Delta\omega \sim \hbar\omega \frac{\delta\omega_{cav}^2}{P}} \tag{28}$$

Cette formule a été proposée par Schawlow et Townes en 1958 (cf. The uncertainty principle and the spectral width of a laser beam, AJP, Hugo Weichel).

Application numérique : pour une cavité de longueur 20cm, de coefficient de réflexion 0.99, on trouve $\delta\omega_{cav} \sim 15 \times 10^6$rad/s. Pour une puissance de 1mW typique des laser He-Ne, on obtient $\Delta\omega \sim 0.07$rad/s soit $\boxed{\Delta\omega/\omega \sim 10^{-17}}$. Or on ne contrôle pas les paramètres du laser à un précision relative de 10^{-17} : ce sont les vibrations, changement de position/forme des miroirs, fluctuations thermiques qui limitent la pureté spectrale.

Comment distinguer si la largeur du spectre est due à des fluctuations thermiques ou à des fluctuations quantiques ? Le premier donne un profil Gaussien et le deuxième un profil Lorentzien.

Forme des miroirs

Pour ne pas que la cavité soit instable *i.e.* que les rayons ayant un faible angle d'incidence s'échappent au bout de N réflexions, il faut que les miroirs soient courbés.

Réalisation de l'inversion de population : pompage

Le pompage optique consiste à exciter des niveaux supérieurs qui se désexcitent rapidement vers le niveau excité de a transition laser.

Il n'est pas possible de réaliser une inversion de population en pompant directement vers le niveau excité de la transition laser.

Dans le pompage collisionnel, l'excitation est fournie par collision avec des atomes du milieu ayant une énergie adéquate.

Modes d'ordre supérieur

Les modes Laguerre-Gaussien ont une symétrie cylindrique. Les modes Hermite-Gaussien ont une symétrie cartésienne.

Diffraction d'un laser

Si le waist est plus petit que l'objet diffractant, on ne peut plus considérer l'onde incidente comme une onde plane et il faut ajuster le principe de Huyghens Fresnel pour prendre en compte le profil Gaussien.

Sécurité laser

Un laser a une puissance surfacique de $1.5\text{mW}/\text{mm}^2 = 1500\text{W}/\text{m}^2$ contre $340\text{W}/\text{m}^2$ pour le rayonnement solaire.

Il faut faire attention aux rayonnements parasites, aux bijoux, montres etc. Attention, le réflexe oculaire ne se présente que pour les laser émettant dans le visible.

- Classe I : risque quasi-nul même en exposition prolongée.
- Classe II : rayonnement visible de moins de 1 mW. Il peut endommager la rétine mais sur les 0.25s de réflexe pour fermer la paupière, il ne cause pas de dommages.
- Classe IIIa : rayonnement visible de 1 à 5 mW. Dangereux si focalisé par des système optiques.
- Classe IIIb : rayonnement visible de 5 à 500 mW ou invisible de moins de 500 mW. Dangereux si le faisceau atteint l'oeil, le réflexe oculaire est trop lent pour le protéger.
- Classe IV : très dangereux si le faisceau touche l'oeil ou la peau.

Dans le cadre pédagogique ou scolaire, la manipulation des laser de classe III ou IV est interdite.

Types de laser

Maser à ammoniac

L'inversion de population est basée sur la séparation physique des molécules excités de celles dans l'état fondamental (moment dipolaire différent). Utilisé comme sources de rayonnement micro-ondes, en astrophysique.

Lasers à solide : rubis à YAG

Le premier laser (1960) était un laser à rubis. L'inversion de population était réalisée avec une lampe flash.

Aujourd'hui on trouve les YAG (Yttrium Aluminium Garnet), dopé avec des lanthanides (Nd :YAG, Er :YAG). Un arrangement courant est un barreau YAG et une lampe flash aux foyers d'un réflecteur elliptique.

Lasers à gaz : He-Ne

Le laser He-Ne exploite un transition du néon, excité par collision avec des atomes d'hélium eux-mêmes dans un état excité (2s, 3s).

$$\boxed{He^\star + Ne \to He + Ne^\star + \Delta E} \tag{29}$$

Ce processus est très efficace grâce à la coïncidence des niveaux électroniques des deux espèces. On exploite la raie à 632.8 nm (3s vers 2p) dans les laser rouges et la raie à 543 nm dans les laser verts.

On utilise les laser à CO_2 qui fonctionnent dans l'infrarouge et peuvent atteindre des puissances de l'ordre du Gigawatt. Application à la découpe industrielle et la chirurgie.

Lasers à semi-conducteurs

La lumière émise vient des recombinaisons des paries électron-trou dans la zone de déplétion. Si la densité de paires électron-trous est suffisante, l'effet laser a lieu : c'est une diode laser. Avantages : petite taille, intensité facilement modulable en faisant varier le courant qui passe à travers la diode. Applications aux CD, codes barres, pointeurs laser.

Lasers chimiques

La réaction $\mathrm{H_2} + \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{H} + \mathrm{HF}^\star$ produit des molécules excitées. En les plaçant dans une cavité optique avant désexcitation spontanée, on peut atteindre des puissances élevées, jusqu'à détruire des missiles en plein vol.

Lasers naturels en astrophysique

On observe l'effet laser dans la lumière émise par certaines étoiles. L'inversion de population est réalisée dans l'atmosphère stellaire par pompage optique car le milieu baigne dans une intense irradiation externe.

Lasers sans inversion de population

On peut fortement réduire l'absorption dans le milieu actif, ce qui entraîne qu'on n'a plus besoin d'inversion de population pour avoir l'effet laser. On s'arrange pour que l'absorption puisse se faire par deux voies : directement ou en passant par un niveau intermédiaire. Si les amplitudes de probabilité interfèrent destructivement, le processus d'absorption est inefficace : on parle de transparence induite.

Appareils

Interfaces

Traitement anti-reflet

Pour les lentilles des instruments d'optique ou les lunettes de vue, on veut maximiser l'intensité transmise donc minimiser le coefficient de réflexion R. Sur une interface air-verre en incidence normale, $R(\theta = 0) = (1 - 1.5)^2/(1 + 1.5)^2 = 0.04$. Pour récupérer les 4% d'intensité perdue, on peut intercaler une lame mince d'indice n_2 et d'épaisseur e entre les deux surfaces, tel que $\boxed{n_2^2 = n_1 n_2 \text{ et } e = p\lambda_2/2}$, alors $R = 0$ en incidence normale. Si p est trop grand, R passe rapidement d'un minimum à un maximum quand la longueur d'onde varie, il faut choisir e de l'ordre de la longueur d'onde.

En fait on a fait une adaptation d'impédance.

Miroirs diélectriques multicouches

Voir miroirs de Bragg.

Confinement par des ondes évanescentes

Lors d'une réflexion totale de deux faisceaux, l'onde évanescente en $A(x) = A_1 \exp\{-x/\delta_1\} + A_2 \exp\{-x/\delta_2\}$ présente un minimum et peut être utilisé pour piéger des atomes.

Sources

Sources thermiques. Le spectre ne dépend que de la température et suit la loi de Planck.
Sources spectrales : atomes excités électriquement, émission spontanée.
Source quelconque combinée avec un filtre interférentiel.
Lasers : rayonnement issu de l'émission stimulée.

Interférométrie et corrélations

Gyromètre optiques à effet Sagnac

Le gyromètre optique permet de mesurer la rotation d'un dispositif sans pièce mobile. Basé sur un effet relativiste, une différence de marche apparaît lorsque les bras (en forme d'anneau) tournent autour de leur axe. On enroule les fibre optiques avec N spires pour augmenter la sensibilité. Exemple : changement de cap d'un avion. Sensibilité : 10^{-3} rad/s soit 1 tour/30 min.

Tomographie en optique cohérente

La tomographie en optique cohérente est une application de la notion de cohérence temporelle. On remplace un des miroirs d'un Michelson par un échantillon (non complètement opaque) à analyser. Une partie de la lumière pénètre dans l'échantillon et va être *rétrodiffusée* par les molécules de l'échantillon. La lumière rétrodiffusée est alors composée de lumière ayant été diffusée à des profondeurs différentes. En recombinant avec le faisceau initial, seul la partie du faisceau rétrodiffusé ayant un décalage temporel inférieur au temps de cohérence va donner lieu à des interférences (ce qui correspond à une plage de profondeur donnée). Plus le temps de cohérence est court, meilleure est la définition en profondeur. En faisant varier la position du miroir, on explore différentes profondeurs. (schéma Taillet p85). Applications : images en coupe d'échantillons biologiques (oeil) sans les endommager.

Corrélations d'intensité

Corrélation d'intensité : on relève les intensités instantanées et on les injecte dans un circuit multiplieur puis on moyenne, ce qui permet de remonter à la séparation angulaire $\delta\vec{k}$ donc le diamètre. Ce ne sont pas vraiment des interférences car les amplitudes de sont jamais sommées. La méthode de corrélation d'intensité mesure $g^{(2)}(\Delta\vec{r}, \Delta t) \equiv < I(\vec{r}, t) I(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) > / < I(\vec{r}, t)^2 >$. Ex : 1956 mesure du diamètre de l'étoile Sirius. Moins sensible aux fluctuations de $\delta\vec{k}$ donc à la turbulence atmosphérique.

Lecture optique des pistes CD

Dans un CD, l'information est stockée sous la forme de micro-cuvettes séparées par des régions plates. Leur profondeur est de quart de longueur d'onde donc le faisceau réfléchi par le fond est en opposition de phase.

Détection d'ondes gravitationnelles

LIGO (US) et VIRGO (Pise). Les bras font plusieurs kilomètres de long et peuvent détecter des variations de longueur de moins d'un fraction de noyau. Défi : ne pas être senible à l'activité sismique. Projet LISA : interféromètre spatial avec des miroirs portés par des satellites espacés de 150 millions de km.

Métrologie

En plaçant un objet dans l'un des bras des miroirs, la figure d'nterférences change. En se plaçant en lame d'air avec source étendue (parallèle ?), alors en faisant l'image des miroirs on verra une carte du déphasage. En remplaçant un des miroirs par un objet réfléchissant quelconque, on peut mesurer la différence de forme entre cet objet et le second miroir.

Interférométrie optique dans l'astronomie moderne

En superposant l'onde venue de deux téléscopes différents, on peut mettre en évidence de très faibles différences de chemin optique (Labeyrie, 1975). Application au VLT du Chili.

Lame semi-réfléchissante

Epaisseur de peau $e^-x/\delta \sim 1/\sqrt{2}$ pour que $I_t = I_r = I_i/2$.

Miroirs de Bragg

Les pertes diélectriques sont plus faibles que les pertes métalliques pour les longueurs d'onde optiques car la puissance absorbée à cause des courants de surface est plus petite.

Deux milieux d'indice différents $n_H > n_B, n_H > 1$ avec l'épaisseur d'une couche choisie pour introduire un déphasage $\lambda/4$ *i.e.* $\pi/2$ (et π entre n_H et n_B). Chaque rayon issu des réflexions est en phase avec les autres. Très bonne réflectivité, importance pour la qualité des cavités laser.

Spectroscopie par transformée de Fourier

En changeant la différence de marche δ on sonde des retard τ donc on mesure la fonction d'autocohérence $g(\tau)$ et on peut remonter au spectre avec WK. Mais on mesure le module et pas la phase.

Biréfringence

0.0.1 Obturateur rapide

L'application soudaine d'un champs électrique à un milieu électroptique bien choisi le transforme en lame demi onde. S'il est placé entre deux polariseurs alignés d'axes orientés à $\pi/4$ par rapport aux axes neutres de la lame, la lumière est coupée. Il s'agit donc d'un obturateur qui peut avoir un temps de réponse de 1 ns, bien plus rapide que les obturateurs mécaniques.

Effet Faraday

Mesure de champ magnétique en astronomie. En astronomie, en analysant la dépendance en λ^2 de l'angle de rotation de la direction de polarisation, on peut mesurer des champs magnétiques.

Isolateur optique. Le sens de rotation des polarisations rectilignes ne dépend pas du sens de parcours du milieu. On place deux polariseurs orientés à $\pi/4$ dans un milieu optiquement actif dont la longueur est ajustée pour que la polarisation tourne d'un angle $\pi/4$. En arrivant dans un sens, la lumière est transmise. En arrivant dans l'autre, elle est coupée. Application : limite l'effet des signaux réfléchis dans une fibre optique, permet à la lumière de sortir d'un laser tout en éviter qu'elle repénètre dedans.

Ampèremètre à fibre optique. Un courant dans un fil crée un champ orthoradial. En plaçant une boucle de fibre optique, l'effet Faraday causé par le champ magnétique une différence de propagation selon le sens de parcours de la boucle, dans une géométrie similaire à celle du gryoscope optique. En faisant interférer les faisceaux en sortie, on peut remonter à la valeur du champ magnétique donc au courant.

Ecrans à cristaux liquides (LCD). Les cristaux liquides sont des liquides nématiques. Ce sont de longues chaîne moléculaires qui acquièrent une activité optique en s'enroulant en forme d'hélice sous l'action d'un champ électrique. Dans les afficheurs à cristaux liquides, on place un liquide nématique entre deux polariseurs et on contrôle la transmission optique avec un champ électrique.

Modulation d'un signal lumineux De la même manière qu'avec les écrans LCD, on peut moduler l'intensité d'un faisceaux lumineux en appliquant un champ $B(t)$ lentement variable (par rapport aux fréquences optiques) à un milieu magnéto-optique placé entre deux polariseurs. Ceci peut être utilisé pour transporter un signal.

Diffraction

Le sténopé

Appareils photographiques où l'objectif est un simple trou dans une plaque opaque. Le rayon du trou est $\sim \sqrt{\lambda d}$. Bonne profondeur de champ. Résolution limitée par la diffraction par le trou et la régularité des bords du trou.

Holographie (Gabor, PN 1971)

Par le principe de Huyghens Fresnel, il suffit de connaître l'onde sur l'ouverture pour la reconstruire sur tout le demi-espace en aval. La difficulté est qu'on est sensible au module de l'amplitude et qu'il est indispensable d'accéder à la phase pour récupérer tout l'information. L'holographie récupère la phase.

On éclaire un objet/une scène avec de la lumière cohérente $A_i e^{i\psi_i}$ avec lequel on fait interférer l'onde diffusée ou réfléchie par l'objet $A_s e^{i\psi_s}$. On enregistre alors $I = AA^\star$ où $A = A_i e^{i\psi_i} + A_s e^{i\psi_s}$ sur une plaque photographique qui acquiert une transparence proportionnelle à l'intensité. On utilise alors l'enregistrement de I comme masque diffractant en rééclairant avec le même éclairage source. La diffraction par le masque va donc produire, par unicité dans la théorie de Kirchhoff, une onde très similaire à l'onde initiale, ce qui donne l'impression de voir directement l'objet de départ. Tout calcul fait, parmi les termes de l'onde résultante se trouve l'onde diffusée par l'objet.

Pinces optiques

Avec des faisceaux de Bessel ?

Analyse d'un cristal par diffraction

La diffraction rayons X permet d'étudier la structure cristalline.

Lasers

Directivité

On tire profit de leur directivité dans : les pointeurs lasers, mesure de variation de distance Terre-Lune, alignement de précision, spectacles sons et lumière,

Puissance

On tire profit de la concentration de puissance sur une petite surface dans : la découpe industrielle, la chirurgie (cautérisation au niveau de l'incision), applications militaires.

Finesse spectrale

On tire profit de la finesse spectrale pour la spectroscopie : on peut exciter des atomes ou molécules à des fréquences spécifiques pour étudier leur réponse (PN 1981, 2005).

On l'utilise dans les LIDAR (light detection and ranging), équivalent optique des radars. On analyse les propriétés de l'onde réfléchie ou rétrodiffusée pour étudier le milieu traversé ou l'objet réfléchissant. Application : pureté de l'atmosphère, contrôle de pollution.

On utilise la finesse spectrale pour faire de la lumière laser une onde porteuse en télécommunications optique.

Cohérence

On utilise la cohérence dans les applications interférométriques. On peut créer des impulsions femtoseconde 10^{-15}s, pour étudier les propriétés spectroscopiques des molécules chimiques en cours de réaction.

Mélasses optiques

On peut utiliser des lasers pour refroidir des atomes : les atomes subissent un recul lorsqu'ils absorbent de l'énergie lumineuse. Si le recul est dirigé dans la direction opposée à leur mouvement (refroidissment Doppler), ils sont ralentis. On utilise pour cela des faisceaux croisés de laser.

N ondes

Monochromateur à réseau

Le réseau joue le rôle de dispersant. On sélectionne une partie du spectre avec une fente en sortie. La performance est déterminée par les caractéristiques intrinsèques du réseau ET la taille de la fente d'entrée (qui détermine le nombre de traits éclairés).

Spectromètres

Pouvoir de résolution d'un spectromètre : à prime $PR = bdn/d\lambda \sim 3000$, à réseau $PR = mN \sim 30000$, Fabry-Pérot $PR = p\mathcal{F} \sim 300000$.

Pouvoir de résolution : $PR = \lambda/\Delta\lambda$ plus petit écart détectable dans le plan d'observation.

Spectromètre à prisme : au minimum de déviation on minimise l'influence de toute erreur. Alors $r_1 = i_2 = A/2$ donc $D_m = 2i_m - A$.

Téléscopes

Le pouvoir de résolution est limité par la turbulence de l'atmosphère.

Ordres de grandeur

Vergence d'un oeil 60δ, verre divergence pour corriger la myopie -4δ.