

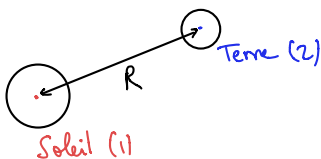
I) Caractéristiques de l'interaction gravitationnelle

1) Approche historique de la force gravitationnelle

Observations et lois historiques

- **Brumaghupta** (VIIe siècle): « La terre est ronde et tous les corps chutent vers le centre de la Terre. »
- **Kepler** (XVIe siècle)
 - Loi des orbites « Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil occupe l'un des foyers »
 - Loi des périodes « Le rapport entre le demi grand axe de la trajectoire au cube avec le carré de la période est une constante du système solaire »
- **Galilée** (XVIIe siècle) Tout corps en chute libre a la même vitesse, donc indépendante de la masse.
- **Newton** (fin XVIIe siècle)
 - Principe fondamental de la dynamique
 - Principe des actions réciproques.

→ vidéo BBC chute d'une plume et balle de bowling à 0.01 bar



Galilée + 1^{re} loi de Newton →

$$F_{1 \rightarrow 2} = m_2 \underline{a_2} \propto m_2$$

indép. de m_2

3^e loi de Newton →

$$F_{1 \rightarrow 2} \propto m_1 m_2$$

Brumaghupta →

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \propto -m_1 m_2 \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

3^e loi de Kepler + orbite circulaire →

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cte} \quad \text{or} \quad a_2 \propto \frac{R}{T^2} \propto \frac{1}{R^2}$$

donc $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{a_2} \propto \frac{1}{R^2}$

Ainsi

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{R^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$$

ODG

$$F_{\text{proton} \rightarrow \text{électron}} \sim 10^{-47} \text{ N} \ll \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (1\text{\AA})^2} \sim 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_{\text{Terre} \rightarrow \text{humain}} \sim 10^3 \text{ N}$$

$$F_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} \sim 10^{22} \text{ N}$$

La gravitation domine aux grandes échelles. Ex: échelle astrophysique

- Newton doutait de la validité de ses arguments car il a dû assimiler la Terre à une masse ponctuelle équivalente placée en son centre → pourquoi est-ce valable ? → on va voir plus tard que c'est lié à la symétrie sphérique.
- On a considéré des trajectoires circulaires, mais ce qui a confirmé la validité de la forme de la force gravitationnelle, c'est que Newton a retrouvé les trajectoires elliptiques des lois empiriques de Kepler.

Transition : on va retrouver les trajectoires elliptiques avec une approche moderne

2) Trajectoires elliptiques par l'invariant de Runge-Lenz

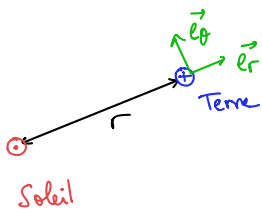
Objectif : on met en évidence une propriété importante du problème à 1 et 2 corps gravitationnel : l'invariance du vecteur de Runge-Lenz, dont découle les trajectoires fermées elliptiques.

Système : {Terre ⊕}

Référentiel : de Copernic
considéré galiléen

Hypothèse : comme $\frac{m_{\oplus}}{m_{\odot}} \sim 10^{-6} \ll 1$, on considère le soleil ⊙ immobile

Rappel : le moment cinétique $\vec{L} = m_{\oplus} \vec{r} \wedge \vec{v} = L \vec{e}_z$ est conservé
la trajectoire est plane, perpendiculaire à $\vec{e}_z$



En appliquant la 2^e loi de Newton, en coordonnées cylindriques

$$m_{\oplus} \frac{d\vec{v}}{dt} = - \underbrace{\frac{G m_{\oplus} m_{\odot}}{r^2}}_{\equiv K} \vec{e}_r = + \frac{K}{r^2} \frac{d\vec{\theta}}{d\theta} = + \frac{K}{r^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

$\vec{e}_r = -\frac{d\vec{\theta}}{d\theta}$

$$\hookrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{L} \frac{d\vec{\theta}}{dt} \quad \text{ie} \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left(\vec{v} - \frac{K}{L} \vec{e}_{\theta} \right) = 0}$$

$\frac{K}{L} = m_{\oplus} r^2 \dot{\theta}$ moment cinétique

↳ en intégrant, $\boxed{\vec{e} = \frac{L}{K} \vec{v} - \vec{e}_{\theta}}$ vecteur excentricité est constant
 $\|\vec{e}\| = e$

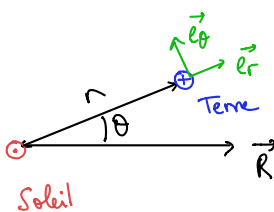
On définit alors

le vecteur de Runge-Lenz
qui est constant :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{K}{L} \vec{e} \times \vec{L} = \vec{v} \times \vec{L} - K \vec{e}_r}$$

sur transparent

Trajectoire elliptique



$\vec{R} \cdot \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{R}$ dans le plan du mouvement

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{r} &= (\vec{v} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - K \vec{e}_r \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{v} \times (m \vec{v} \times \vec{r})) \cdot \vec{r} - K r \\ &= m |\vec{v} \times \vec{r}|^2 - K r \end{aligned}$$

$$R \cdot r \cos \theta = \frac{L^2}{m} - K r$$

Trajectoire conique

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}}$$

avec

$$e = \frac{R}{K}$$

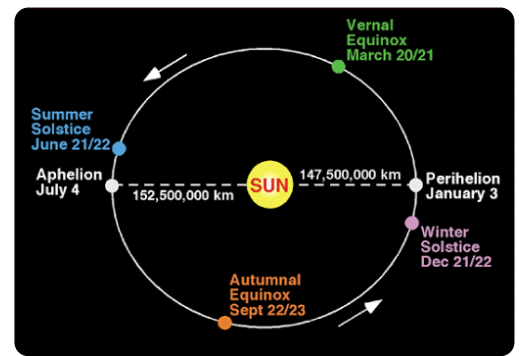
$$p = \frac{L^2}{mK} = \frac{L^2}{G m^2 M}$$

Si $e < 1$, la trajectoire est liée et elliptique, avec le Soleil à un foyer

Valeur numérique
pour l'orbite de la Terre

$$e = 0.017 < 1 \quad \text{quasi-circulaire}$$

$$p = 1.5 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 1 \text{ u.a. unité astronomique}$$



Transition : application importante des lois de Kepler : la mesure de masse par la mesure de mouvement

3) Lien mouvement - masse

Message : le mouvement des astres reflète la distribution de masse.

mouvement $\rightarrow$ masse

Application 1 : la 3^e loi de Kepler donne $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$

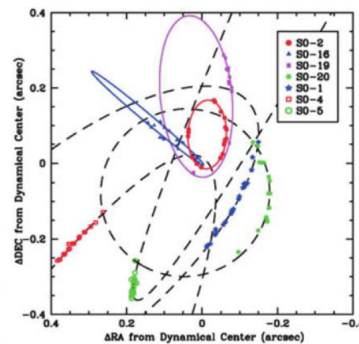
$$T \sim 365 \text{ jours} \rightarrow M_{\odot} = 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$a \sim 1 \text{ u.a.}$$

grâce au mouvement de la Terre, on a pu estimer la masse du Soleil

Application 2 Depuis les années 1930, des télescopes puissants ont permis d'observer que les étoiles proches du centre de la voie lactée suivent des orbites elliptiques, cf. figure $\rightarrow$

à l'aide de la période et des paramètres de la trajectoire, on estime la masse de l'objet massif autour duquel ils gravitent, en utilisant la loi de Kepler



Ghly et al.

Numéro de l'étoile	Période T (an)	Demi-grand axe a (10^{14} m)
2	14.53	1.37
16	36	2.51
19	37.3	2.57

Loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

$\rightarrow M = 3.7 \times 10^6 M_{\odot}$

C'est le trou noir supermassif Sagittarius A*

on trouve $M = 3.7 \cdot 10^6 M_{\odot}$

c'est trop grand pour que ce soit une étoile

$\rightarrow$ c'est le trou noir supermassif Sagittarius A*.

Transition : on revient sur l'argument de Newton : pourquoi a-t-il pu assimiler la Terre à une masse ponctuelle équivalente?

4) Caractérisation du champ gravitationnel

Intérêts de la description en terme de champ :

- * on peut traiter des distributions continues de masse
- * des nombres statistiques de corps par une approx. continue
ex : 10^{11} étoiles dans la Voie lactée
- * on justifie l'argument de Newton Terre $\leftrightarrow$ masse ponctuelle

Par analogie avec l'électrostatique

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} \quad \leftrightarrow \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{G m_1 m_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

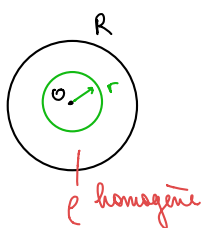
	Electrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	$\vec{E}$	$\vec{G}$
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$-G = -6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla} \Phi$
Equations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi G \rho$
Théorème de Gauss	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$
Equation de Poisson	$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$	$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$

caractérisation du champ gravitationnel par son rotationnel et sa divergence

limites de l'analogie

- effet de signe : une masse est positive $\rightarrow$ la gravitation est attractive alors que l'interaction électrostatique peut être repulsive
- les lois de l'électrostatique ne sont valables que si les charges sont immobiles

Application à un système à symétrie sphérique : on va justifier l'argument de Newton

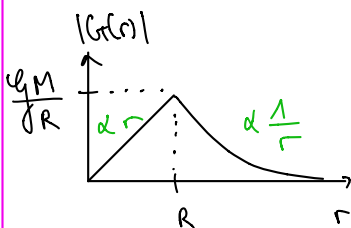


Objectif : déterminer $\vec{G}(\vec{r})$

Symétrie sphérique $\rightarrow \vec{G}(\vec{r}) = G(r) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques
Invariance par rotation

théorème de Gauss avec la surface $S =$ sphère de rayon r

$$G(r) 4\pi r^2 = \iint_S \vec{G}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$



$$r < R, \quad M_{int} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 \rightarrow$$

$$G(r) = -\frac{4\pi G \rho \frac{4\pi}{3} r^3}{4\pi r^2} = -\frac{4}{3} \pi G \rho r$$

$$r > R, \quad M_{int} = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \equiv M \rightarrow$$

$$G(r) = -\frac{GM}{r^2}$$

comme une masse ponctuelle

valable si $\rho(r)$ non homogène comme la Terre, le Soleil...

sur transparent

Conclusion : la symétrie sphérique implique l'équivalence Terre $\leftrightarrow$ masse ponctuelle

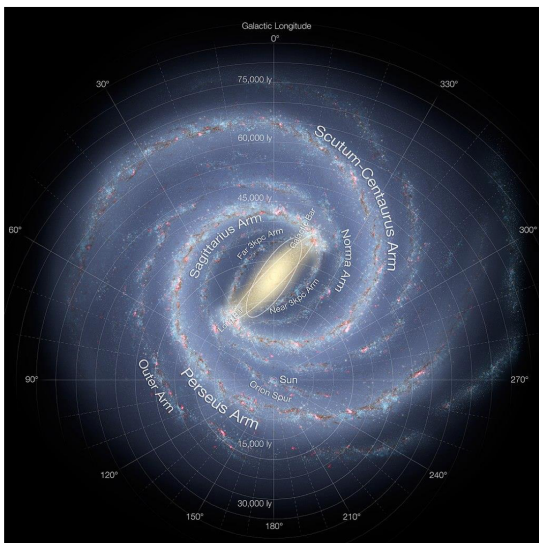
Transition : on utilise les outils développés pour étudier un système astrophysique

II) Etude des galaxies spirales

- Motivations
- (i) illustrer l'utilité de la description en termes de champ pour étudier des systèmes à symétrie non sphérique, avec l'équation de Poisson.
 - (ii) illustrer le lien mouvement $\rightarrow$ masse, derrière l'hypothèse de la matière noire.
- $\rightarrow$ on choisit d'étudier un objet d'échelle astrophysique où la gravitation domine : les galaxies spirales.

1) les galaxies spirales

Vue d'artiste de la voie Lactée



Ordres de grandeur:

bulbe ~ 1 kpc

taille totale ~ 200000 a.l.
 ~ 60 kpc

masse $\sim 10^{10}$ masses solaires

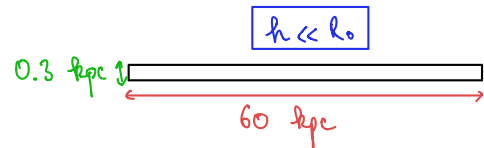
épaisseur ~ 0.3 kpc

masse volumique
 $\rho_0 \sim 1.15 M_{\odot} / \text{pc}^3$

Luminosité par unité de surface
 $l_0 \sim 10^{-6} \text{ W/m}^2$

$$l(r) = l_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

Une galaxie spirale a la forme d'un disque avec des bras spiraux.



La voie lactée contient $\sim 10^{10}$ étoiles
 $\hookrightarrow$ modélisation continue $\rho(\vec{r})$

structure orthoradiale : on observe des bras spiraux mais on ne s'y intéresse pas
on suppose une invariance orthoradiale $G(r, \phi, z)$

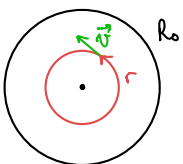
structure radiale

- on explique la structure radiale dans l'approximation du disque infiniment fin : on mesure en effet $h \ll R_0 \rightarrow \vec{G}(r) = -G(r)\vec{e}_r$ est radial
- on ignore le bulbe. Vue de face, la luminosité surfacique est maximale au centre et décroît selon :

combe de lumière $l(r) = l_0 e^{-\frac{r}{R_0}}$

$l_0 \sim 10^{-4} \text{ W/m}^2$
 $R_0 \sim 10 \text{ kpc}$

vue de dessus



$$v^2(r) = G(r)$$

accélération centripète

norme du champ gravitationnel

- la stabilité radiale est issue de l'équilibre rotation $\leftrightarrow$ gravité
on assimile les trajectoires des étoiles à des orbites circulaires

$\rightarrow v(r) = \sqrt{r G(r)}$ combe de rotation

Structure verticale : Bien que $h \ll R_0$, on va présenter un modèle qui rend compte de l'épaisseur finie du disque galactique

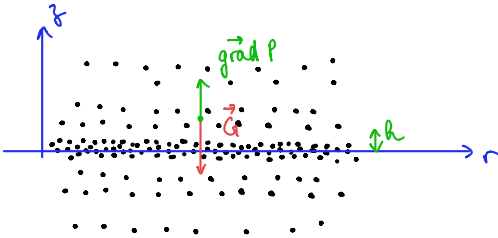
2) Structure verticale du disque

Origine de l'épaisseur finie de la galaxie

la gravité a tendance à rapprocher les étoiles
qu'est-ce qui cause l'épaisseur finie ?
c'est la dispersion des vitesses $\langle v_z^2 \rangle \neq 0$ des étoiles
qui engendre une pression cinétique
dont le gradient est dirigé vers l'extérieur

$$P = \rho \langle v_z^2 \rangle$$

joue le rôle de la température



Modèle et hypothèses

- on s'intéresse à un état stationnaire $\rho(r, z, *), \phi(r, z, *)$
même si les étoiles ont un mouvement orbital, leur répartition est stationnaire
- la séparation d'échelles $h \ll R_0$ motive un modèle 1D vertical
 $\sim 0.3 \text{ kpc} \quad \sim 3.5 \text{ kpc}$
- comme en mécanique des fluides
- les étoiles ont une dispersion de vitesses $\sigma_z^2 \equiv \langle v_z^2 \rangle$ indépendant de z
 $\frac{d}{dz} \rho \gg \frac{d}{dr} \rho$

Ingédients

(i) équilibre hydrostatique

$$\text{grad } P = \rho \vec{g} = -\rho \text{grad } \phi$$

(ii) équation de Poisson

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

(i) + (ii)

$$\Delta \phi = \text{div grad } \phi = \text{div} \left(-\frac{1}{\rho} \text{grad } P \right) = -\sigma_z^2 \text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } \rho \right) = -\sigma_z^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)$$

modèle 1D
 $\frac{d}{dz} \rho \gg \frac{d}{dr} \rho$

$$4\pi G \rho$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) = -\frac{\sigma_z^2}{4\pi G} \rho$$

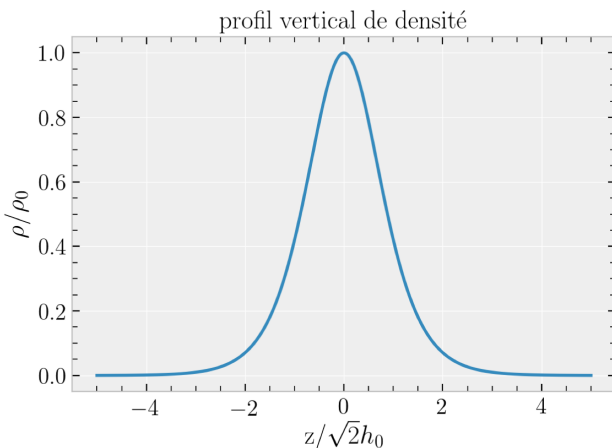
Solution :

$$\rho(r, z) = \frac{\rho(r, z=0) \equiv \rho_0(r)}{\cosh^2\left(\frac{z}{\sqrt{2} h_0(r)}\right)}$$

où

$$h_0(r) = \left(\frac{\sigma_z^2}{2\pi G \rho_0(r)} \right)^{1/2}$$

dispersion
hauteur caractéristique
gravité



Comparaison avec les observations pour la Voie lactée

observations

$$h(r) \simeq \text{cte} \sim 0.3 \text{ kpc} \Rightarrow \rho_0(r) \propto \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

hypothèse : $\rho_0(r) \propto I(r)$
le rapport masse-lumière est constant

théorie

$$\sigma_z(r) \propto e^{-\frac{r}{2R_0}}$$

mesure Doppler

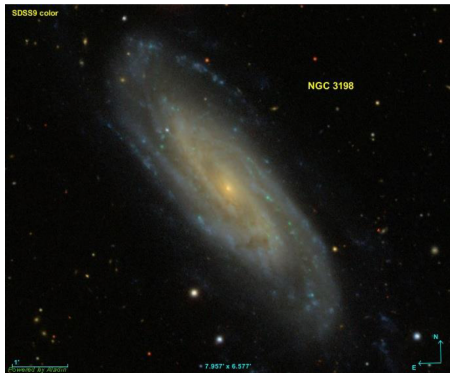
en accord avec les observations ✓

Conclusion : on a réussi à caractériser la structure verticale avec des outils contenus, ce qu'on n'aurait pas pu faire en appliquant la 1^{re} loi de Newton à toutes les étoiles de la galaxie!

Transition : on a fait l'hypothèse du rapport masse-lumière constant. Cependant, on va voir que le lien mouvement $\rightarrow$ masse et la structure radiale la remet en question

3) Courbe de rotation et matière noire

Galaxie spirale NGC 3198



Localisation : constellation de la Grande Ourse à environ 9.4 Mpc de la Terre

Rayon : $R_0 \sim 12$ kpc

Luminosité par unité de surface : $I_0 \sim 10^{-4} W/m^2$

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r}{R_0}\right)$$

On étudie la galaxie NGC 3198 car elle n'a pas de renflement prononcé tout en ayant une structure en disque.

Hypothèses :

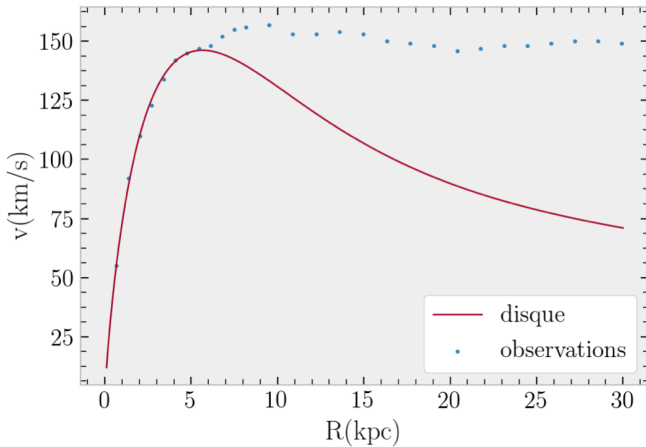
- disque infiniment fin $h \ll R_0$
- rapport masse lumière constant $\rho_0(r) \sim e^{-\frac{r}{R_0}}$
- trajectoires circulaires

On a vu que la courbe de rotation est donnée par.

$$v(r) = \sqrt{r G(r)}$$

Approche numérique : pour calculer $G(r, j=0)$ pour un disque, il faudrait résoudre l'équation de Poisson avec conditions limites! On fait une approche numérique

Courbe de rotation NGC 3198



Commentaires : comme pour le champ gravitationnel

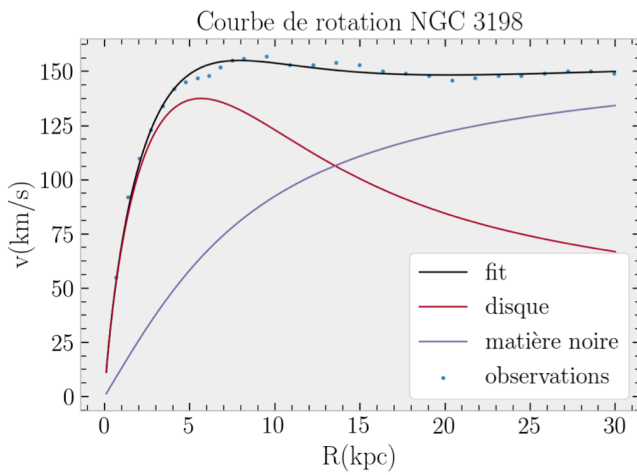
dans une sphère, $G(r)$ donc $v(r)$ croît à l'intérieur du disque. À l'extérieur, on s'attendrait à une décroissance hyperbolique $G \propto \frac{M_{\text{disque}}}{r^2}$

$$v \propto \frac{M_{\text{disque}}}{\sqrt{r}}$$

Cependant, la courbe de rotation est plate!

Interprétation : en utilisant le lien mouvement $\rightarrow$ masse, si la vitesse orbitale est plus élevée, cela signifie que le champ gravitationnel est plus intense donc qu'il y a plus de masse que ce que la courbe de lumière indique $\rightarrow$ c'est l'argument pour la matière noire

Modélisation : en supposant l'existence d'une répartition sphérique de matière noire, $\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + \frac{r}{R_c})^2}$, en ajustant numériquement ρ_0 et R_c et en supposant le champ gravitationnel du disque, on arrive à reproduire la courbe de rotation.



Halo sphérique de matière noire:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r}{R_c}\right)^2}$$

$$\rho_0 \sim 24 M_{\odot}/\text{kpc}^3$$

$$R_c = 6.4 \text{ kpc}$$

Pourquoi $\rho(r) \sim \frac{1}{r^2}$?

Pour avoir $v_{\text{orb}} = \sqrt{r G(r)} = \text{cte}$,
il faut $G(r) \propto \frac{M(r)}{r^2} \propto \frac{1}{r}$ max dans la boule de rayon r
th. de Gauss

donc $M(r) \propto r$

or $M(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$

donc $\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM}{dr} \propto \frac{1}{r^2}$

On choisit $\rho \propto \frac{1}{1 + (\frac{r}{R_c})^2}$ pour éviter une divergence en 0.

Question : une question ouverte est la confirmation de la réalité physique de la matière noire, par exemple par mirage gravitationnel ou par détection dans un accélérateur de particules.

Annexe : résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right) = - \frac{4\pi G}{\sigma_z^2} \rho$$

changement
de fonction
d'échelle

$$\psi = \ln \rho - \frac{\rho}{\rho_0} \quad \rho_0 \leftarrow \rho(r, z=0)$$

$$z = \ln x$$

↑ adimensionné

$$\frac{\sigma_z}{\sqrt{4\pi G \rho_0}}$$

interprétation
physique

$\rho = \rho_0 e^{-\psi}$ — distribution de Boltzmann
 $\psi = \frac{\phi}{\sigma_z^2}$ — potentiel gravitationnel
cinétique

→ $\psi''(x) = e^{-\psi(x)}$ comme 1 PFD

↓ $\times \psi'$, bilan d'énergie + intégration

$$\psi'^2(z) - \psi'^2(0) = -e^{-\psi(z)} + e^{-\psi(0)}$$

$\psi(0) = 0$ car $\rho_0 = \rho(0)$ référence des potentiels
 $\psi'(0) = 0$ par symétrie

$$\psi'' = 1 - \frac{\psi'^2}{2}$$

↓ séparation variable

$$\frac{d\psi'}{1 - \frac{\psi'^2}{2}} = dx$$

↓ $\int \frac{dx}{1-x^2} = \text{argth}$

$$\sqrt{2} \text{argth} \left(\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2}} \right) = x$$

$$\psi' = \sqrt{2} \operatorname{th}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\psi = 2 \ln \operatorname{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\psi} = \frac{\rho_0}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}h_0}\right)}$$