
Gravitation

Agrégation de chimie – 2017-2018
Guillaume Laibe

Table des matières

1	Champ de gravitation d'une distribution de masse	1
1.1	Force gravitationnelle	1
1.2	Propriétés du champ de gravitation	2
1.3	Champ de gravitation de distributions de masses	2
1.3.1	Point matériel	2
1.3.2	Sphère	4
1.3.3	Autres géométries	5
2	Mouvement dans un champ en $1/r^2$	5
2.1	Quantités conservées	5
2.2	Trajectoire	7
2.3	Cas de l'ellipse	8
2.4	En pratique	9
3	Application à la Terre	10
3.1	PFD dans le référentiel du laboratoire	10
3.2	Modèle d'astres sphériques	11
3.3	Chute d'un corps	12
3.4	Effets de marée	13
3.5	Satellisation	13

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la dynamique d'un point était donnée par le principe fondamental de la dynamique $m_i \mathbf{a} = \mathbf{F}$ sans avoir détaillé la nature de la force $\mathbf{F}$. Dans la nature, il existe quatre interactions fondamentales : les interactions électro-faibles (transmise par les boson W^+ , W^- et Z) et électro-fortes (transmise par les gluons), électromagnétiques (transmise par les photons) et la gravitation (existe-il un graviton?). La portée d d'une interaction fondamentale est $d = \mathcal{O}(\hbar/m_{\text{boson}}c)$, ce qui explique que les interactions faibles et fortes sont de faibles portées alors que les interactions électromagnétiques et gravitationnelles sont de portée infinie. Finalement, les trois premières interactions ont été intégrées à un modèle théorique unique, la gravitation étant étudiée séparément. C'est cette dernière que nous allons aborder dans ce chapitre, sous l'angle de la mécanique classique.

1 Champ de gravitation d'une distribution de masse

1.1 Force gravitationnelle

La force gravitationnelle écrit

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}, \quad (1)$$

où m_g est la masse gravitationnelle et $\mathbf{g}$ est le champ de gravitation. Le **principe d'équivalence** stipule que

$$m_g = m_i = m, \quad (2)$$

c'est à dire que la résistance à la mise en mouvement d'un corps et sa propension à être soumis à l'interaction gravitationnelle sont déterminées par une seule et même constante, la masse du corps. Au XIX^es, ce principe a été validé expérimentalement, par Cavendish ou encore Etvös. Les tests consistent généralement à mettre en compétition un effet inertiel (type Coriolis ou axifuge) et la force de gravité. La théorie moderne de la relativité générale relie directement m_g à la structure non-euclidienne de l'espace-temps, i.e. à l'accélération et donc à m_i .

1.2 Propriétés du champ de gravitation

Le champ de gravitation est caractérisé par les valeurs de son rotationnel et de sa divergence. On a

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0, \quad (3)$$

D'après le chapitre précédent, il existe donc scalaire ϕ appelé potentiel gravitationnel, défini à une constante près, tel que

$$\mathcal{G} \equiv -\nabla\phi. \quad (4)$$

En particulier, $\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla(m\phi)$ est une force conservative. Par ailleurs,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi\mathcal{G}\rho, \quad (5)$$

où ρ est la densité volumique de matière et $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation. $\mathcal{G} = 6.67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est une constante *mesurée* (valeur donnée par le CODATA). En intégrant l'équation locale Eq. 5 sur un volume élémentaire dV d'élément de surface $d\mathbf{S}$, on obtient

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{g} dV = -4\pi\mathcal{G} \iiint \rho dV. \quad (6)$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky sur le membre de gauche de l'équation Eq. 6 et en définissant $M_{\text{int}} \equiv \iiint \rho dV$ la masse contenue dans le volume dV , on obtient une équation intégrale appelée **théorème de Gauss pour la gravitation**. En prenant le gradient de Eq. 6 et en utilisant Eq. 4, on obtient **l'équation de Poisson**

$$\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}\rho. \quad (7)$$

Remarques :

- Les équations Eqs. 3 – 5 sont linéaires. Les solutions sont donc additives et l'on peut appliquer le principe de superposition.
- En mécanique classique, $\mathbf{F}$ est une force instantanée : un corps placé dans le champ gravitationnel d'une distribution de masse qui évolue ressent instantanément les modifications du champ gravitationnel. En relativité générale, l'interaction gravitationnelle se propage à la vitesse c par ondes gravitationnelles.
- Il est possible de faire l'analogie électrostatique suivante : $\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{E}$, $-4\pi\mathcal{G}\rho \leftrightarrow \rho_c/\epsilon_0$, $\phi \leftrightarrow V$, mais contrairement à la charge qui peut être positive ou négative, la masse est uniquement positive.
- Le point d'application de $\mathbf{F}$, appelé centre de gravité, est à priori différent du centre de masse si le champ $\mathbf{g}$ est non-uniforme.

1.3 Champ de gravitation de distributions de masses

1.3.1 Point matériel

On cherche le champ de gravitation exercé par la distribution ponctuelle de masse $\rho = M\delta(\mathbf{r})$, où δ désigne la distribution de Dirac (on a placé l'origine du repère sur la masse - si ce n'est pas le cas, on effectue la transformation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$). L'équation de Poisson associée à cette distribution ponctuelle est

$$\Delta\phi = 4\pi\mathcal{G}M\delta(\mathbf{r}), \quad (8)$$

dont on admet que la solution, obtenue par transformation de Fourier, est

$$\phi = -\frac{\mathcal{G}M}{r}, \quad (9)$$

où l'on a choisit la constante du potentiel pour avoir $\phi(\infty) = 0$. D'après Eq. 9, on a

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (10)$$

où $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction radiale. Un autre point matériel de masse m placé dans un tel champ de force subit une force

$$\mathbf{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2}\mathbf{e}_r. \quad (11)$$

Il subit donc une force centrale attractive.

En particulier, le PFD appliqué à la masse m s'écrit

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2}\mathbf{e}_r. \quad (12)$$

Orbite circulaire :

- Parmi les solutions de l'équation Eq. 12 (cf. Sect. 2.2) se trouve une orbite évidente, l'orbite circulaire de rayon r_0 ($\mathbf{r} = r_0\mathbf{e}_r$, $\mathbf{v} = v_0\mathbf{e}_\theta$) telle que

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{v_0^2}{r_0}\mathbf{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M}{r_0^2}\mathbf{e}_r, \quad (13)$$

i.e. satisfaisant $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_0}}$. En utilisant $T = 2\pi/\omega_0$ où $\omega_0 = v_0/r_0$, on obtient la relation

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}, \quad (14)$$

appelée relation de Kepler pour l'orbite circulaire (il suffit de faire $r \leftrightarrow a$ pour avoir la relation dans le cas de l'orbite elliptique, cf. Sect. 2.3).

- Par ailleurs, le moment angulaire par unité de masse $l \equiv r_0v_0$ est pour l'orbite Keplérienne circulaire $l = \sqrt{\mathcal{G}Mr_0}$, qui est une fonction croissante de la distance à l'objet central. Cette relation est à mettre en perspective avec le fait que le Soleil contient l'essentiel de la masse du Système Solaire, mais que Jupiter contient l'essentiel de son moment angulaire.
- En appliquant le théorème du Viriel à ce potentiel en $1/r$ pour la trajectoire circulaire, on obtient $0 = -V + 2E_c$, i.e. $E_m = V/2 < 0$ (la trajectoire circulaire est bien liée).

Invariances et symétries :

- Par invariance par rotation, le potentiel gravitationnel d'une distribution à symétrie sphérique de masse se met sous la forme $\phi = \phi(r)$. Ainsi, $\mathbf{F} = F(r)\mathbf{e}_r$. Le théorème du moment cinétique assure alors que le moment cinétique $\mathbf{L}$ est une quantité conservée (en particulier, le mouvement s'effectue dans un plan et la loi des aires est vérifiée).
- Avancé : cet exemple constitue un cas particulier du *théorème de Noether*, qui associe à toute invariance par transformation continue une quantité conservée.
- Le théorème de superposition assure que le champ de gravitation résultant de deux masses symétriques par rapport à un plan est la somme vectorielle des champs individuels des masses et par conséquent, est dans le plan de symétrie des masses.
- Par extension, si la distribution de masse possède un plan de symétrie $\mathcal{S}$, alors pour tout point M de $\mathcal{S}$, $\mathbf{g}(M) \in \mathcal{S}$.

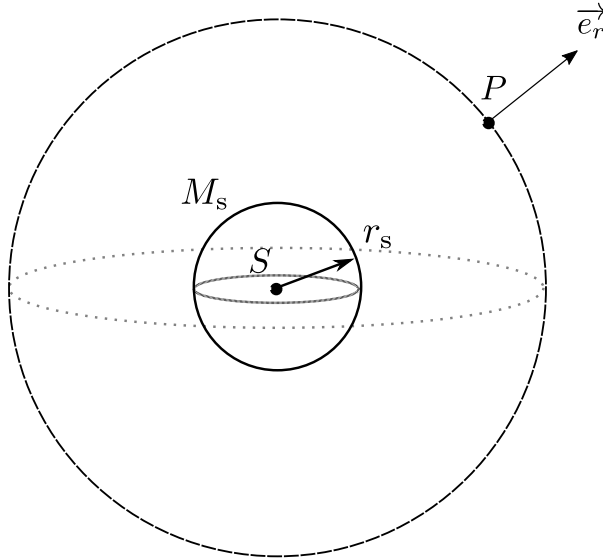


FIGURE 1 – Théorème de Gauss sur une sphère homogène isotrope.

1.3.2 Sphère

On considère maintenant le champ de gravitation créé à l'extérieur d'une sphère homogène isotrope de densité quelconque (Fig. 1).

Invariances et symétries :

- Par invariance par rotation, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(r)$.
- Par symétrie, $\mathbf{g}(P) \in$ tout plan contenant $\mathbf{SP}$, ce qui implique $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_r$.
- En combinant les deux résultats précédents, on obtient $\mathbf{g} = g(r)\mathbf{e}_r$.

En appliquant le théorème de Gauss sur la sphère de centre S et de rayon SP , on obtient

$$\iint g(r)\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}. \quad (15)$$

Cas important : $r \geq r_s$. Dans le cas, le membre de gauche de l'équation Eq. 15 s'écrit $g(r)4\pi r^2$. Ainsi, à l'extérieur de la sphère,

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M_{\text{int}}}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (16)$$

qui est aussi de manière remarquable le champ créé par une masse ponctuelle M_{int} située en S .

Remarques :

- Il est à retenir que la loi en $1/r^2$ est valable pour un point matériel où à l'extérieur d'une sphère, ce qui constitue un excellent modèle pour une étoile ou une planète.
- Le théorème de Gauss (Eq. 15) ne contient que l'information sur la divergence de g . L'information sur le rotationnel est cachée dans les symétries et les invariances ($\nabla \times [g(r)\mathbf{e}_r] = 0$).
- L'expression donnée par Eq. 16 peut aussi se retrouver par superposition de champs créés par des points matériels.
- Pour $r < r_s$, g dépend de la distribution de masse $\rho(r)$. Le théorème de Gauss assure une dépendance linéaire $g \propto r$ uniquement dans le cas d'une densité uniforme $\rho = \rho_0$ (ce qui n'est par exemple pas le cas dans une étoile).

1.3.3 Autres géométries

Il est à noter qu'il existe d'autres potentiels que les potentiels en $1/r$ caractéristiques des distributions sphériques. Par exemple, le potentiel typique d'une galaxie est donné par

$$\phi(r, z) = \frac{v_0^2}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 + \left(\frac{z}{qr_c} \right)^2 \right], \quad (17)$$

avec $0 < q < 1$. Ainsi, la vitesse v_c de l'orbite circulaire en $z = 0$ s'écrit $v_c = \frac{rv_0}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}$. En particulier, si $r \gg r_c$, $v \sim v_0$ (courbe de rotation plate, i.e. indépendantes de r , interprétée comme résultant de la contribution d'une source de matière invisible au potentiel galactique appelée *matière noire*).

Le cas d'une distribution de masse quelconque est généralement compliquée (Fig. 2). Toutefois,

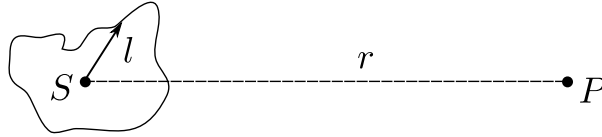


FIGURE 2 – Distribution quelconque de masse : on effectue un développement multipolaire pour $r \gg l$.

en se plaçant à une distance r très supérieure à la taille caractéristique de la distribution l , on peut approximer $\mathbf{g}$ par la méthode du développement multipolaire, i.e.

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{A}(r, \theta)}{r^4} l^2 + \dots \quad (18)$$

Réduire le membre de droite de l'équation Eq. 18 à son premier terme (terme monopolaire) revient à traiter la distribution comme une masse ponctuelle. En incluant la correction d'ordre supérieur (terme quadrupolaire) permet par exemple d'inclure des déviations aux lois de Kepler (la force n'est plus centrale). Note : il n'y a pas de terme dipolaire, car il n'existe pas de masse négative.

2 Mouvement dans un champ en $1/r^2$

2.1 Quantités conservées

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle de masse m soumise à la force $\mathbf{F} = -\frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \mathbf{e}_r$. On note premièrement que $\mathbf{F} \parallel \mathbf{e}_r$: le TMC assure que le moment cinétique $\mathbf{L}$ est une constante. En particulier, le mouvement se fait dans le plan $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$ que l'on paramétrise par des coordonnées polaires (r, θ) , et la composante du moment angulaire orthogonale à la trajectoire L_z est une constante. Ainsi

$$l = \frac{L_z}{m} = r^2 \dot{\theta} = \text{cste}. \quad (19)$$

Par ailleurs, $\mathbf{F} = -\nabla V$: $\mathbf{F}$ est conservative. Ainsi, l'énergie mécanique est une constante du mouvement, i.e.

$$E_m = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right] - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}, \quad (20)$$

que l'on peut réécrire en utilisant Eq. 19

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}. \quad (21)$$

Les équations Eqs. ?? – Eq. 19 sont respectivement équivalentes aux projections des composantes radiales et azimutales du PDF. Ainsi, Eq. 21 contient bien toute l'information physique sur le mouvement du corps.

Le problème d'un corps dans un champ en $1/r^2$ est un problème 2D comme vu ci-dessus, et non 1D. Toutefois, la structure mathématique de l'équation Eq. 21 est la même que celle obtenue dans le

problème du mouvement d'une particule dans un potentiel en 1D. On peut donc réutiliser la méthode graphique vue pour caractériser les trajectoires admissibles, en comparant E_m au potentiel effectif

$$V_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{2}m\frac{l^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r}. \quad (22)$$

On étudie la signification physique de chacun des deux termes du membre de droite de l'équation Eq. 22 :

- Le terme $\frac{1}{2}m\frac{l^2}{r^2}$ correspond au potentiel effectif d'une particule libre en translation rectiligne uniforme. La trajectoire ne passe pas nécessairement par l'origine. Elle se rapproche au plus près d'une distance $r_{\min}$ telle que $l = r_{\min}v_0$, où l et v_0 sont les normes respectives du moment angulaire et de la vitesse du corps (Fig. 4).

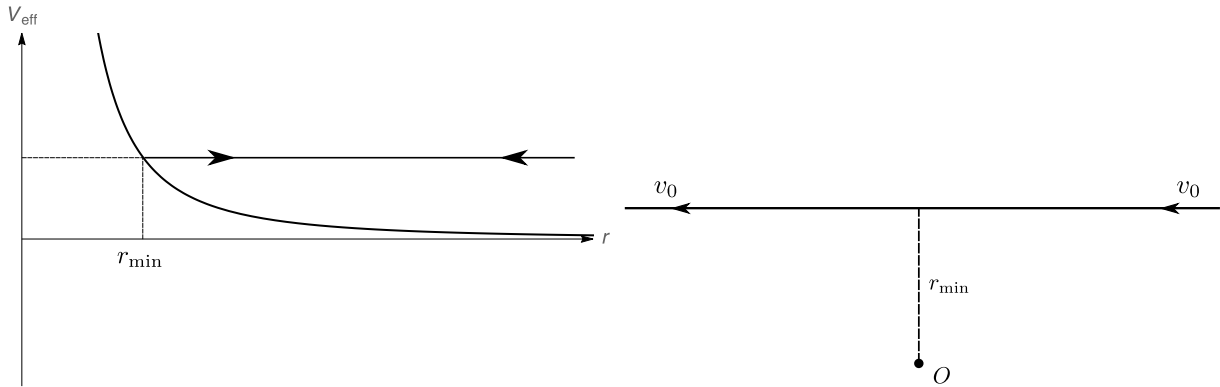


FIGURE 3 – Potentiel effectif et trajectoire d'une particule libre. La particule est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0 . La distance minimale d'approche par rapport à l'origine du repère dépend du moment angulaire l (constant).

- La contribution du potentiel gravitationnel $-\frac{\mathcal{G}Mm}{r}$ implique l'existence de deux types de trajectoires possibles : des trajectoires libres à $E_m \geq 0$ et des trajectoires liées à $E_m < 0$ (Fig. 4). Il est à noter qu'à ce stade, il n'est pas possible de savoir si la trajectoire est fermée (e.g. ellipse) ou non (e.g. courbe en trèfle...).

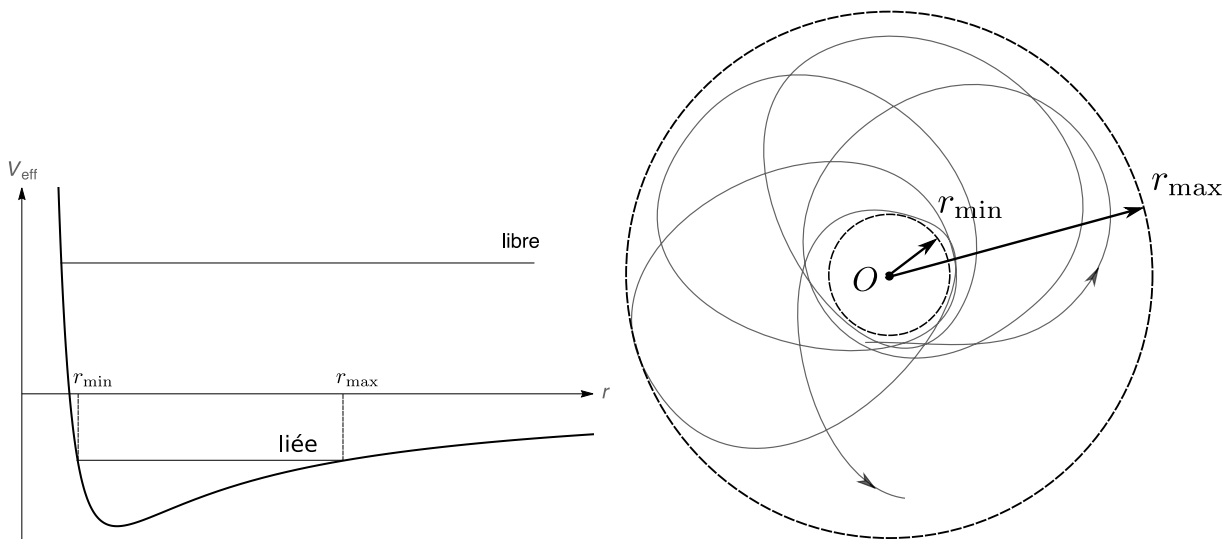


FIGURE 4 – Potentiel effectif et trajectoire *possible* d'une particule en orbite liée. À ce stade, il n'est pas possible de déterminer si l'orbite est fermée ou non.

- La conservation du moment angulaire caractérise l'évolution d'une particule dans un champ de force central. L'existence d'états libres et liés vient de la décroissance suffisamment lente

du potentiel en $1/r$. *A priori*, d'autres formes fonctionnelles de la force attractive pourraient conduire à l'existence de tels états.

- Il existe des quantités conservées spécifiques au champ de force en $1/r^2$, voir ci-dessous.

2.2 Trajectoire

La méthode pédestre pour déterminer la trajectoire $r(\theta)$ d'une particule dans un champ de $1/r^2$ revient à déterminer l'équation horaire $r(t)$ en utilisant la conservation de l'énergie et la méthode de séparation des variables. Mathématiquement,

$$t = \pm \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_m - V - \text{eff}(r'))}}. \quad (23)$$

On obtient $\theta(t)$ à partir de $r(t)$ en utilisant la relation $l = r^2\dot{\theta}$. On obtient la trajectoire en utilisant l'identité

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (24)$$

La démonstration complète est laissée en exercice - on notera l'identité $\int \frac{dz'}{\sqrt{B^2 - z'^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{z'}{B}\right)$. Une démonstration plus astucieuse consiste à utiliser la structure spécifique de champ de force en $1/r^2$, i.e. en $\dot{\theta}/l$. D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}M}{r^2} \mathbf{e}_r = -\frac{\mathcal{G}M}{l} \dot{\theta} \mathbf{e}_r = \frac{\mathcal{G}M}{l} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}. \quad (25)$$

qui s'intègre directement par rapport au temps en

$$\mathbf{v} = \frac{\mathcal{G}M}{l} (\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}). \quad (26)$$

Eq. 26 fait apparaître l'existence d'une constante du mouvement, le vecteur $\mathbf{e}$, que l'on appellera **vecteur excentricité**. En notant $\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_r$ et en multipliant Eq. 25 scalairement par $\mathbf{e}_\theta$, on obtient

$$\frac{l}{r} = \frac{\mathcal{G}M}{l} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)) \quad (27)$$

On peut remarquer que la direction de $\mathbf{e}$ donne une direction privilégiée au plan de la trajectoire et aligner la base polaire de manière que $\theta_0 = 0$ (Fig.XX). On obtient ainsi

$$r = \frac{l^2/\mathcal{G}M}{1 + e \cos \theta}, \quad (28)$$

La trajectoire donnée par Eq. 28 est une conique dont la masse centrale est située sur l'un des foyers, de paramètre $p \equiv l^2/\mathcal{G}M$ et d'excentricité e . Trois cas sont possibles :

- si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole,
- si $e = 1$, la trajectoire est une parabole,
- si $0 \leq e < 1$, la trajectoire est une ellipse. Le cas $e = 0$ correspond au cas limite d'un cercle.

Remarques :

- La constante p paramétrise la taille de la conique. Physiquement, p traduit la compétition entre la conservation du moment cinétique qui tend à maintenir la particule loin de la masse centrale, et la gravité qui tend à faire tomber cette particule.
- L'équation de la trajectoire est symétrique par rapport à la transformation $\theta \rightarrow -\theta$. Cette invariance est liée au choix de l'orientation de l'axe z (la trajectoire peut être vue par dessus ou par dessous).

- C'est la dépendance en $1/r^2$ qui assure que l'orbite est fermée et ne précède pas. La seule autre force centrale qui admet des trajectoires fermées est $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ (théorème de Bertrand). Dans ce cas, la trajectoire est aussi une ellipse, mais dont la masse centrale occupe de centre et non un foyer.
- Le vecteur excentricité $\mathbf{e}$ est une fonction de E_m et l et ne constitue donc pas une quantité conservée supplémentaire. L'intérêt de $\mathbf{e}$ réside dans le fait qu'il est dans le plan de la trajectoire.
- Si $e < 1$, on interprète e comme la déviation à la circularité. On a $e \ll 1$ pour les planètes du Système Solaire ($e_\oplus \sim 0,017$), mais on peut avoir $0 \leq e < 1$ pour les planètes extra solaires.
- Dans le cas où le potentiel du système n'est pas en $1/r$, les trajectoires ne sont pas des coniques (dans une galaxie, les trajectoires peuvent être en forme de papillon).

D'après Eq. 28, on voit que la distance à l'objet central passe par un minimum pour $\theta = 0 [2\pi]$. Ce point s'appelle le *périastre* de la trajectoire. D'après Eq. 24, la vitesse radiale au périastre est aussi nulle :

$$\dot{r}|_{\theta=0} = \frac{l}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = 0. \quad (29)$$

La deuxième loi de Kepler assure que la vitesse de la particule est maximale au périastre de l'orbite, ce qui est utile pour lancer des satellites efficacement (Fig. 5). On exprime alors l'énergie totale de

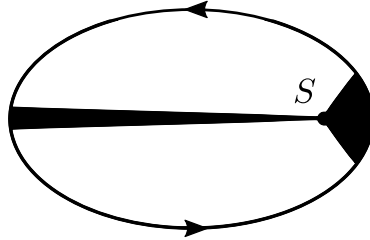


FIGURE 5 – Représentation schématique d'une vitesse aréolaire constante sur une orbite elliptique.

système en fonction des paramètres de la conique en estimant sa valeur au périastre. En notant que $r(\theta = 0) = \frac{p}{1+e}$ d'après Eq. 28 et $\dot{r}|_{\theta=0} = 0$,

$$E_m = E_m(\theta = 0) = \frac{1}{2}m \frac{l^2 (\mathcal{G}M)^2}{l^4} (1 + e^2) - m \frac{(\mathcal{G}M)^2}{l^2} (1 + e). \quad (30)$$

En notant que $p = \mathcal{G}M/l^2$ (Eq. 28), on obtient

$$E_m = -\frac{m\mathcal{G}M}{2} \frac{(1 - e^2)}{p}. \quad (31)$$

D'après l'équation Eq. 31, on retrouve simplement le fait que la trajectoire est libre si $e \geq 1 \Leftrightarrow E_m \geq 0$ et que la trajectoire est liée si $e < 1 \Leftrightarrow E_m < 0$

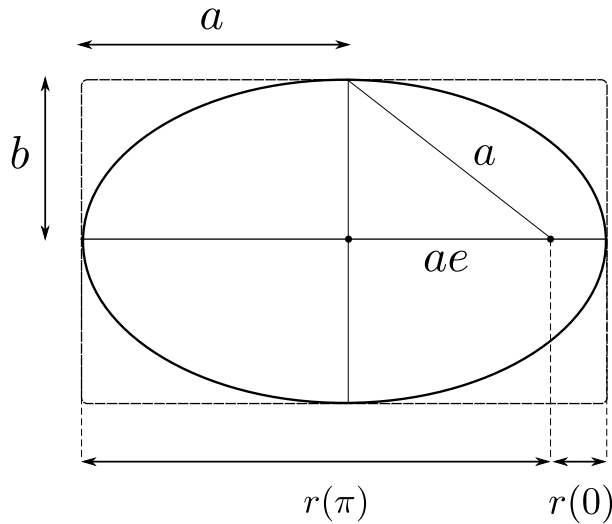
2.3 Cas de l'ellipse

Dans le cas où $E_m < 0$, la trajectoire est une ellipse. On introduit deux paramètres géométriques, le *demi grand-axe* a et le *demi petit-axe* b (cf. Fig. 6). En notant que $2a = r(0) + r(\pi)$, on a $a = \frac{p}{1-e^2}$. Eq. 31 se réduit alors simplement à

$$E_m = -\frac{mM\mathcal{G}}{2a}. \quad (32)$$

Par ailleurs, la conservation du moment angulaire assure que la vitesse aréolaire sur l'orbite est constante avec $\frac{dA}{dt} = l/2$. En intégrant cette relation sur une période orbitale T , on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{l}{2}T. \quad (33)$$

FIGURE 6 – Lien entre les demi grand-axe a , petit-axe b et l'équation polaire d'une ellipse.

Or, l'aire d'une ellipse s'exprime géométriquement par $\mathcal{A}\pi ab$. En appliquant le théorème de Pythagore, on a $b = a\sqrt{1 - e^2}$ et donc $p = b^2/a$. De $\pi ab = lT/2$, on obtient la **troisième loi de Kepler**

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}. \quad (34)$$

On remarque que les équations Eqs. 34, assez techniques à obtenir mathématiquement, se retrouvent en utilisant les relations obtenues pour l'orbite circulaire et en faisant la substitution $r \leftrightarrow a$. Pour le Système Solaire, Eq. 34 se met sous la forme pratique

$$T \simeq 1 \text{ an} \left(\frac{a}{1 \text{ UA}} \right)^{3/2}, \quad (35)$$

où 1 UA (unité astronomique) correspond à une fois la distance Soleil-Terre (1.5×10^8 km). Par exemple, Eq. 35 permet d'estimer simplement la période orbitale de Jupiter située à 5UA du Soleil ($T \sim 12$ ans) ou encore la période de l'hypothétique planète 9 située à 500UA ($T \sim 10000$ ans).

2.4 En pratique

Dans la nature, il n'existe pas de source de champ indépendante. Les corps sont soumis au principe des actions réciproques et s'attirent mutuellement. Il est toutefois possible de réduire le problème physique de deux corps en interaction au problème du mouvement d'une seule particule dans un champ de force externe. Par exemple, traiter le mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle revient à résoudre l'évolution de leurs positions $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ ou alternativement l'évolution de la position de leur barycentre $\mathbf{R} \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ et de leur position différentielle $\mathbf{r}_{21} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Le système étant isolé, le barycentre est en translation uniforme dans n'importe quel référentiel galiléen. De plus, les PFD pour les corps (1) et (2) donnent

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = + \frac{\mathcal{G}m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}, \quad (36)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G}m_1}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (37)$$

En soustrayant Eq. 36 et Eq. 37, on obtient

$$\frac{d^2\mathbf{r}_{21}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}. \quad (38)$$

L'équation Eq. 38 est la même que celle du mouvement d'une particule dans un champ de force en $1/r^2$, moyennant la transformation $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_{21}$ et $m \rightarrow m_1 + m_2$. On peut alternativement réduire le

problème à celui d'une particule fictive de masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

À trois corps ou plus, le problème n'est pas soluble analytiquement en général. De petites perturbations peuvent se retrouver fortement amplifiées par l'action combinée de plusieurs corps : le système peut être chaotique.

Remarques :

- Il existe des solutions analytiques dans le cas limite du problème à trois corps réduit, i.e. $m_1 \ll m_2, m_3$. Dans ce cas, il existe 5 positions d'équilibre possible pour la masse m_1 , appelés points de Lagrange. Les points L_1 et L_2 sont instables, tandis que les points L_3 , L_4 et L_5 sont stables (on y envoie des instruments astronomiques).
- On peut approximer les trajectoires par des théories de perturbation. C'est ainsi que l'existence et la position de Neptune ont été prédites par le calcul à partir des données observationnelles obtenues sur Uranus.
- Comment un être humain peut-il savoir si c'est le Soleil qui orbite autour de la terre ou l'inverse ? En regardant le mouvement des autres planètes, qui orbitent aussi autour de l'astre central (ex : mouvement rétrograde de Mars).
- Parfois, des corrections de relativité générale sont nécessaires, même au sein du Système Solaire (ex : précession du périhélie de Mercure, GPS).

3 Application à la Terre

3.1 PFD dans le référentiel du laboratoire

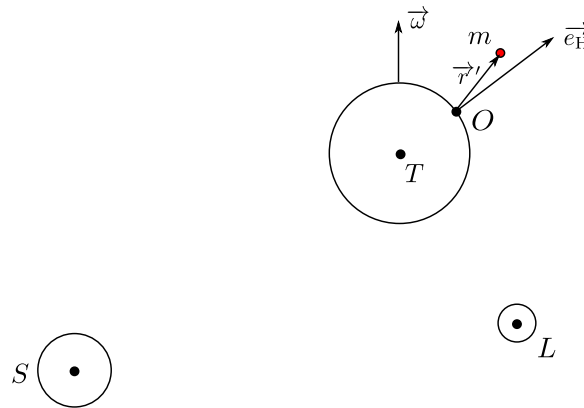


FIGURE 7 – Schéma de principe (pas à l'échelle) pour écrire le PFD dans le référentiel terrestre non-galiléen.

But : Écrire le PFD appliqué une masse m dans un référentiel terrestre (dit « du laboratoire »), sachant que celui-ci est non-galiléen (Fig. 7).

Hypothèses :

- Les objets astrophysique proche de la masse m sont la Terre, la Lune et le Soleil, de masses respectives M_T , M_L et M_S . Les autres autres objets ont une contribution négligeable sur le mouvement de m . Ces 4 corps forment un système hiérarchique de masses, i.e. $m \ll M_L \ll M_T \ll M_S$. En particulier, on fera l'hypothèse que le barycentre du système Soleil-Terre-Lune-masse au centre du Soleil et le barycentre du système Terre - Lune - masse au centre de la Terre.
- La période de rotation du Soleil autour du centre de la galaxie est $T_{S,gal} \sim 66$ Myr, ce qui est beaucoup plus grand que le temps Δt de n'importe quelle expérience faite dans le laboratoire. On

pourra assimiler la trajectoire du Soleil autour du centre galactique à un mouvement rectiligne uniforme pendant Δt . On supposera donc qu'un référentiel héliocentrique (3 axes pointant vers des étoiles lointaines fixes dans lequel le Soleil est immobile) est galiléen.

- On modélise la Terre par un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe. La précession de la Terre est très lente devant sa rotation propre, i.e. $|\dot{\omega}| \ll \omega^2$, où ω est le spin terrestre.

Le PFD au centre de masse de la Terre dans un référentiel héliocentrique galiléen avec origine des coordonnées en S donne :

$$\frac{d^2 \mathbf{ST}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow T} + \mathbf{g}_{L \rightarrow T} + \mathbf{g}_{m \rightarrow T}, \quad (39)$$

où $\mathbf{g}_{S \rightarrow T}$ et $\mathbf{g}_{L \rightarrow T}$ sont les champs de gravitations du Soleil et de la Lune sur la Terre respectivement.

Le PFD à la masse m dans un référentiel terrestre non-galiléen avec origine des coordonnées dans un point fixe du référentiel O donne :

$$m\mathbf{a}' = m(\mathbf{g}_{S \rightarrow m} + \mathbf{g}_{L \rightarrow m} + \mathbf{g}_{T \rightarrow m}) - m\mathbf{A}_{O/S} - \underbrace{m\dot{\omega} \times \mathbf{r}'}_{\dot{\omega} \ll \omega^2} - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}') - 2m\omega \times \mathbf{v}' + \mathbf{F}_{\text{autres}}, \quad (40)$$

où $\mathbf{A}_{O/S}$ désigne l'accélération du point O dans le référentiel héliocentrique. Or

$$\mathbf{A}_{O/S} = \frac{d^2 \mathbf{ST}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{TO}}{dt^2}. \quad (41)$$

La Terre étant considéré comme un solide indéformable en rotation autour de son axe,

$$\frac{d^2 \mathbf{TO}}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\omega \times \mathbf{TO}) = \omega \times (\omega \times \mathbf{TO}) + \underbrace{\dot{\omega} \times \mathbf{TO}}_{\dot{\omega} \ll \omega^2}. \quad (42)$$

En combinants Eqs. 39 et 42 avec Eqs. 41 et 40 et en supposant $r' \ll TO$, on obtient

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_{\text{autres}} + \underbrace{m[\mathbf{g}_{T \rightarrow m} - \omega \times (\omega \times \mathbf{TO})]}_{\text{pesenteur}} - \underbrace{2m\omega \times \mathbf{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{[m(\mathbf{g}_{S \rightarrow m} - \mathbf{g}_{S \rightarrow T}) + m(\mathbf{g}_{L \rightarrow m} - \mathbf{g}_{L \rightarrow T})]}_{\text{marées}}. \quad (43)$$

On définit le **champ de pesenteur terrestre** $\mathbf{g}$ comme la somme du champ gravitationnel terrestre et la correction de la force axifuge s'exerçant sur le laboratoire due à la rotation terrestre :

$$\mathbf{g} \equiv \underbrace{\mathbf{g}_{T \rightarrow m}}_{\text{chp d'un ellipsoïde}} - \underbrace{\omega \times (\omega \times \mathbf{TO})}_{\Delta g/g \simeq 0.3\%}. \quad (44)$$

Remarques :

- $\mathbf{g}$ définit la *verticale* d'un lieu, de vecteur unitaire $\mathbf{e}_H$, par $\mathbf{e}_H // \mathbf{g}$
- par défaut, on donne $\mathbf{g}$ et non $\mathbf{g}_{T \rightarrow m}$.
- on différencie le *jour sidéral* $j_{\text{sid}} = 86164$ s (i.e. le temps mis par la Terre pour faire une orbite autour du Soleil) du *jour solaire* $j_{\text{sol}} = 86400$ s (i.e. l'intervalle de temps entre deux passage du Soleil par la verticale d'un lieu).

3.2 Modèle d'astres sphériques

Si l'on suppose que la Terre est sphérique, on a pour $r \geq r_T$

$$\mathbf{g}_{T \rightarrow m} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (45)$$

On notera qu'en général, $\mathbf{g}_{T \rightarrow m} \neq \mathbf{g}_{T \rightarrow m}(r_T)$. En particulier, à une hauteur h de la surface de la Terre, telle que $h \ll r_T$,

$$\mathbf{g}_{T \rightarrow m} \simeq \underbrace{-\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2}}_{\text{cste}=9.8\text{m.s}^{-2}} \mathbf{e}_r + 2\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2} \left(\frac{h}{r_T}\right) \mathbf{e}_r + \dots \quad (46)$$

Au premier ordre en h/r_T , l'accélération de la pesanteur est une constante

$$\mathbf{g} \equiv g\mathbf{e}_H \simeq -\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T^2}\mathbf{e}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{TO}). \quad (47)$$

Sous cette approximation, l'énergie potentielle de pesanteur est linéaire, $E_p = mgz + \text{cste}$. Il est à noter qu'il existe des modèles plus raffinés où l'aplatissement de la Terre dû à sa rotation apporte des faibles corrections quadrupolaires.

3.3 Chute d'un corps

On étudie qualitativement la chute d'un corps de masse m dans un référentiel terrestre (non-galiléen, car la Terre est en rotation propre autour de son axe). En plus de son poids, la masse subit la force de Coriolis. On fixe $t = 0$ au moment où le corps est lâché d'une hauteur h sans vitesse initiale, i.e. $z(0) = h$, $\dot{z}(0) = 0$. Dans une base Est-Nord, Haut, le PDF se projette sous la forme

$$\ddot{x}' = -2\dot{z}'\omega_c - 2\dot{y}'\omega_s, \quad (48)$$

$$\ddot{y}' = -2\dot{x}'\omega_s, \quad (49)$$

$$\ddot{z}' = -2\dot{x}'\omega_c - g, \quad (50)$$

où $\omega_c \equiv \omega \cos \lambda$ et $\omega_s \equiv \omega \sin \lambda$, avec λ la latitude du laboratoire.

Méthode : on va procéder ici par ordres de grandeur. Le mouvement associé au poids est la chute libre. En l'absence de Coriolis, la conservation de l'énergie mécanique donne les temps et vitesse caractéristiques associées au poids $t_{cl} \equiv \sqrt{2h/g} = \mathcal{O}(\sqrt{h/g})$ et $v_{cl} \equiv \sqrt{2gh} = \mathcal{O}(\sqrt{gh})$.

On a $\frac{|\omega v'|}{g} \sim \omega t_{cl} \ll 1$. Les corrections du au terme de Coriolis sont donc perturbatives pour des hauteurs de chute usuelles. À l'ordre 1 en $\omega t_{cl} \ll 1$, Eq. 48 se simplifie en

$$\ddot{x}' \simeq -2\dot{z}'\omega_c. \quad (51)$$

Ainsi, $\ddot{x}' \sim \mathcal{O}(-\omega_c\sqrt{gh})$, d'où $\dot{x}' \sim \mathcal{O}(\ddot{x}')t_{cl} = \mathcal{O}(\omega_ch)$ et $x' \sim \mathcal{O}(\dot{x}')t_{cl} = \mathcal{O}(\omega_ch\sqrt{h/g})$. Ainsi, au premier ordre, l'effet de la rotation terrestre se traduit par une déviation vers l'Est de la chute des corps (AN : pour $h \sim 150$ m, on trouve $x \sim 4$ cm).

L'équation Eq. 49 est donc un terme d'ordre 2, dont l'ordre de grandeur fournit $\ddot{y}' \sim \mathcal{O}(-\omega_s\omega_ch)$ et donc $\dot{y}' \sim \mathcal{O}(-\omega_s\omega_ch\sqrt{h/g})$ et $y' \sim \mathcal{O}(-\omega_s\omega_ch^2/g)$. Ainsi, au deuxième ordre, la chute est déviée vers le sud *dans l'hémisphère nord* (AN : pour $h \sim 150$ m, on trouve $y \sim 10\mu\text{m}$).

Remarques :

- La déviation vers l'Est de la chute d'un corps est indépendante de l'hémisphère, car le mouvement s'effectue principalement selon la verticale. Ce n'est pas le cas pour le Pendule de Foucault, dont le mouvement est dans un plan horizontal : le sens de précession des oscillations dépend de l'hémisphère.
- En pratique, il existe des effets de frottements et de pesanteur dépendant de l'altitude : la déviation vers le sud est très difficile à observer.
- L'expérience de la balance d'Etvös, qui a permis de vérifier $m_i = m_g$ se base de la même manière sur une compétition gravité vs. Coriolis : d'un bateau, on observe la déviation d'un pendule vers le nord.

3.4 Effets de marée

Le dernier terme de l'Eq. 43 est un terme de marée, qui traduit l'effet ressenti par un corps non-ponctuel *en orbite* dans un champ *inhomogène* de gravité. Au voisinage l d'un point situé à une distance r_0 d'une source,

$$r = \left(r_0^2 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \Delta\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}^2 \right)^{1/2} \simeq r_0 \left(1 + \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \cdot \Delta\mathbf{r} \right) + \dots = r_0 + \underbrace{\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r0}}_{\equiv l}. \quad (52)$$

Au premier ordre, l'inhomogénéité du champ source s'écrit

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathcal{G}M\mathbf{r}}{r^3} \simeq -\frac{\mathcal{G}M}{r_0^3} \left(1 - 3\frac{\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r0}}{r_0} \right) \mathbf{r}. \quad (53)$$

Eq. 53 est générale et ne dépend pas du référentiel d'étude. D'après Eq. 43, les forces de marées générées par un astre A ressenties dans le référentiel terrestre sont de la forme

$$\mathbf{F}_{\text{marées}} = m(\mathbf{g}_{A \rightarrow m} - \mathbf{g}_{A \rightarrow T}). \quad (54)$$

On note qu'au centre de la Terre, ce terme est nul. Au premier ordre en l/r_0 ,

$$\mathbf{F}_{\text{marées}} = -\frac{mM\mathcal{G}}{r_0^3} (\Delta\mathbf{r} - 3(\Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{r0}) \cdot \mathbf{e}_{r0}), \quad (55)$$

$$= \frac{mM\mathcal{G}}{r_0^2} \left(\frac{\Delta r}{r_0} \right) (2 \cos \theta \mathbf{e}_{r0} - \sin \theta \mathbf{e}_{\theta 0}), \quad (56)$$

où $(\mathbf{e}_{r0}, \mathbf{e}_{\theta 0})$ est la base polaire centrée sur la Terre (cf. Fig XXX).

Remarques :

- Le terme de marée est correctif, d'ordre de grandeur $\mathcal{O}(g\Delta r/r_0)$.
- En regardant les contributions radiales des deux termes, $\theta = 0$, $f_{\text{axi}} > f_{\text{grav}}$, si $\theta = \pi$, $f_{\text{axi}} < f_{\text{grav}}$ et si $\theta = \pm\pi/2$, $f_{\text{axi}} = f_{\text{grav}}$, ce qui explique la forme de bulbe allongé.
- Sur Terre, on a de plus $\omega \neq 0$, ce qui explique que l'on ait 2 marées par jour.
- Les contribution du Soleil et de la Lune s'ajoutent, avec $|f_{L \rightarrow m} \sim 2f_{S \rightarrow m}|$, ce qui explique des marées de grandes amplitudes (de vives eaux) lorsque les trois astres sont alignés (nouvelle et pleine Lune) et des marées de faibles amplitudes (de mortes eaux) lorsque les trois astres forment un triangle rectangle (quartiers).
- si $|f_{\text{marées}} > f_{\text{internes}}|$, les marées peuvent détruire l'astre (cf. les astéroïdes près de Jupiter).
- Pour un satellite en orbite, le centre de gravité et le centre de masse ne *sont pas* confondus. Les marées font osciller le satellite, qui doit être stabilisé par corrections magnétiques.

3.5 Satellisation

Pour étudier la mise en orbite d'un satellite, on se place dans un référentiel *héliocentrique* galiléen. Un satellite P est soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre et du Soleil. Le PFD appliqué à la Terre donne

$$\frac{d^2\mathbf{ST}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow T} + \underbrace{\mathbf{g}_{P \rightarrow T}}_{m_P \ll m_T}, \quad (57)$$

et le PFD appliqué au satellite donne

$$\frac{d^2\mathbf{SP}}{dt^2} = \mathbf{g}_{S \rightarrow P} + \mathbf{g}_{T \rightarrow P}. \quad (58)$$

En soustrayant Eqs. 57 et 58, on obtient

$$\underbrace{\frac{d^2 \mathbf{T}\mathbf{M}}{dt^2}}_{\text{pb. de Kepler}} = \underbrace{\mathbf{g}_{T \rightarrow M}}_{\text{au vois. de la Terre : marées}} + \underbrace{(\mathbf{g}_{S \rightarrow M} - \mathbf{g}_{S \rightarrow T})}_{\text{au vois. de la Terre : marées}}. \quad (59)$$

Au voisinage de la Terre, le terme de marée est négligeable et l'évolution du satellite se réduit à un problème de Kepler. Ceci n'est plus vrai loin de la Terre. Dans ce cas, $g_{T \rightarrow P} \ll g_{S \rightarrow P}$ et Eq. 58 montre que le mouvement du satellite s'approxime par un autre problème de Kepler, autour du Soleil.

Si $\frac{d^2 \mathbf{T}\mathbf{M}}{dt^2} \simeq \mathbf{g}_{T \rightarrow M}$, on connaît les vitesse et fréquences des orbites circulaires $v_c = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r}$ et $\omega_c = \sqrt{\mathcal{G}M_T/r^3}$, où $r = TP$. La vitesse requise pour maintenir une orbite circulaire à r_T , dite *vitesse de première libération* s'obtient en faisant $r = r_T$ (AN : $v_1 \simeq 7.9 \text{ km.s}^{-1}$).

Pour qu'un satellite (ou une particule) sorte du potentiel gravitationnel terrestre, il suffit que l'énergie mécanique du mouvement du satellite par rapport à la Terre vérifie $E_m \geq 0$ (condition de trajectoire libre, potentiel nul à l'infini). Pour cela $v \geq v_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_T}} \sim 11.2 \text{ km.s}^{-1}$.

Remarques :

- Sur Terre, la vitesse thermique des molécules est inférieure à v_2 (sauf cas extrêmes de la distribution de Boltzmann) : l'atmosphère ne s'évapore pratiquement pas.
- La marge fine entre v_1 et v_2 rend la mise en orbite d'un satellite difficile.
- Dans le référentiel héliocentrique, le satellite a une vitesse initiale non-nulle, due à la rotation propre de la Terre, qui aide à sa satellisation (il est plus facile de lancer une fusée de Kourou que de Baïkonour).

On définit une orbite géostationnaire circulaire comme une orbite où un satellite suit exactement la rotation terrestre, de telle sorte qu'il reste à la verticale d'un lieu. L'altitude d'une telle orbite se détermine par

$$\omega_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_T + h}} = \omega_T, \quad (60)$$

ce qui donne $h \simeq 35784 \text{ km}$.

Remarques :

- L'orbite géostationnaire appartient au plan équatorial terrestre (le centre de masse terrestre est à l'un des foyers de l'orbite de la trajectoire, cf Kepler).
- Pour une inclinaison faible par rapport au plan équatorial, le satellite est à la verticale d'une courbe appelée analeme.
- Il existe des satellites sur des orbites *non* géostationnaires (ex : pour la station spatiale internationale, $h \sim 350 \text{ km}$).
- Il existe d'autres orbites géosynchrones, très elliptiques.
- Il existe d'autres orbites intéressantes, comme les orbites de Molnia qui forment des couvertures à très hautes latitudes.