LP26 – Propagation avec dispersion

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau : L2

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ http://www.mmelzani.fr/documents/plasma/plasma_ondes.pdf ⟶ commentaires sur le plasma
✍ http://www.mmelzani.fr/documents/plasma/plasma_demo_pfd_un_elec.pdf ⟶ commentaires sur le plasma

Prérequis

➢ prérequis

Expériences

☕ Biréfringence du quartz

Table des matières

Préparation

Biblio : on suit principalement le Sanz, HPrepa, Melzani 1 Melzani 2, Polydon, Portelli, GHP, De Gennes, Berkeley Physique des ondes, Physics of Waves, Arnt Inge Vistnes, calcul étalement en jpg, regarder Tec et Doc pour l'ordre 2

Choix : on peut amener KG avec le plasma mais ça reste un peu abstrait. On peu l'amener avec le guide d'onde pour raccorder au câble coaxial, mais β n'est pas un vrai vecteur d'onde. Il faudrait parler d'applications de la dispersion : limitation de débit en communication ou analyse de spectre de lumière

Plan : il faut dégager du temps pour montrer l'évolution du paquet d'ondes. Pour amener Klein-Gordon, on peut faire le guide d'onde, ce qui permet de faire le lien avec la manip du câble coaxial. Alternative : chaine infinie de ressorts,

Manip :

Passage : Le but est d'expliquer clairement vitesse de phase, groupe, étalement, dispersion. Essayer de faire 15/15/10. Si on est en retard, faire un III/ Cable coaxial et ouvrir sur les ondes gravito-capillaires.

Questions : plasma (voir biblio)

Introduction

On a déjà vu l'équation de d'Alembert, dont les solutions sont des ondes progressives se déplaçant à la célérité du milieu sans se déformer. Dans des situations où l'équation d'évolution est plus compliquée, mais reste linéaire, on va introduire des outils nouveaux pour décrire la propagation d'un signal réel, notamment pour étudier sa vitesse de propagation et son étalement.

Propagation dans un câble coaxial
Est-ce pertinent de montrer le pulse dans le câble coaxial si on n'y revient pas ensuite ?On envoie un pulse carré dans le cable coaxial, et on prend des points de mesures à l'oscilloscope en sortie du GBF, au milieu du cable, et au bout du cable. Le pulse se déforme, et en étant optimiste on peut attribuer ceci à la dispersion lors de la propagation. Prendre un pulse étroit pour bien visualiser. Attention à ne pas associer diminution en amplitude (qui s'accompagne d'un étalement) à une perte énergétique du signal lors de la propagation

Présentation On montre la vidéo : `https://youtu.be/5lCQCcgIIXw?t=194`. On utilise un câble coaxial de 50m. Il faut choisir une impulsion suffisamment courte pour distinguer les signaux aller et retour (pas de chevauchement). En diminuant le rapport cyclique, on observe bien le signal aller et le signal retour. On observe un retard, alors qu'en régime permanent ou en ARQS globale, les retards n'existent pas. *L'impulsion est déformée : il y a eu dispersion et absorption. On aurait pu prendre une pulse sinusoidal pour avoir moins de dispersion.*

Milieu dispersif La dispersion peut-être due aux CL ou au milieu. Dans cette leçon, on ne s'intéresse qu'au milieu : on prend des milieux (semi-infinis). Un milieu est dispersif lorsque la vitesse de phase d'une OPPM dépend de la fréquence.

Objectif Etablir une équation de propagation qui présente des phénomènes de dispersion : nécessairement, ce ne sera pas l'équation de d'Alembert. Ensuite, on va étudier l'évolution d'un signal réel, modélisé par un paquet d'onde, dans un milieu dispersif. On va introduire des concepts que nous pourrons appliquer à d'autres phénomènes du moment que les équations qui les régissent sont linéaires. Enfin, on va voir les conséquences de l'étude sur les ondes à la surface de l'eau.

1 Propagation dans un plasma

✍ suivre Sanz, regarder Melzani.

1.1 Modélisation du plasma dilué

Plutôt donner les hypothèses sur un tableau séparé au fur et à mesure de la démarche.
Attention, les pièges à ne pas faire sont d'affirmer que $\rho = 0$ localement parce que le plasma est neutre globalement, et d'affirmer que toutes les interactions entre les charges sont négligeables car le plasma est peu dense, sinon l'onde se propagerait comme dans le vide.

Définition du plasma Un plasma est un gaz ionisé ou partiellement ionisé, constitué d'ions d'électrons libres et d'atomes neutres. L'ensemble est globalement neutre.

Exemples de plasma L'ionosphère est une couche de l'atmosphère située à plus de 50 km d'altitude. Le gaz est partiellement ionisé par le rayonnement UV du Soleil. On l'assimile à un plasma peu dense, de densité d'électrons variant entre $10^{10} m^{-3}$ et $10^{12} m^{-3}$ en raison de processus d'ionisation induits par le rayonnement UV le jour, et de recombinaison électron-ion la nuit. Autres exemples : éclairs produits par la foudre, décharge dans un gaz $n_0 = 10^{16} m^{-3}$, tokamak $n_0 = 10^{20} m^{-3}$, noyau solaire $n_0 = 10^{30} m^{-3}$, ITER, nébuleuses de pulsar, écrans plasma, "boule plasma". On peut voir un plasma grâce aux photons envoyés par les atomes qui se désexcitent.

Bonus : écran plasma Les écrans à plasma fonctionnent de façon similaire aux tubes d'éclairage fluorescents. Ils utilisent l'électricité pour illuminer un gaz. Le gaz utilisé est un mélange de gaz nobles (argon 90 % et xénon 10 %). Pour qu'il émette de la lumière on lui applique un courant électrique qui le transforme en plasma, un fluide ionisé dont les atomes ont perdu un ou plusieurs de leurs électrons et ne sont plus électriquement neutres, alors que les électrons ainsi libérés forment un nuage autour. Le gaz est contenu dans les cellules, correspondant aux sous-pixels (luminophores). Chaque cellule est adressée par une électrode ligne et une électrode colonne ; en modulant la tension appliquée entre les électrodes et la fréquence de l'excitation, il est possible de définir l'intensité lumineuse (en pratique on utilise jusqu'à 256 valeurs). Ils ont été remplacés par les écrans à cristaux liquides (LCD). A liquid-crystal display (LCD) is a flat-panel display or other electronically modulated optical device that uses the light-modulating properties of liquid crystals combined with polarizers. Liquid crystals do not emit light directly, instead using a backlight or reflector to produce images in color or monochrome

Bonus : lampe plasma Une alimentation haute tension convertit la tension alternative du 230V en haute tension ($\sim$ 4000V) pour exciter le système radiofréquence. Le système radiofréquence convertit la haute tension en une onde électromagnétique à 2,45 GHz (fréquence similaire aux ondes Wi-Fi). Cette onde électromagnétique est injectée dans une cavité résonnante, afin d'obtenir le claquage du gaz dans l'ampoule. La décharge générée dans l'ampoule chauffe les éléments solides, qui se vaporisent pour se stabiliser thermiquement à l'état de plasma froid (entre 2000 et 3000°C). Ces atomes portés à haute température émettent un spectre lumineux. Ce phénomène se déroule à une pression proche de la pression atmosphérique.

Bonus : température typique d'un plasma Typiquement l'énergie d'ionisation d'un corps est de quelques électronvolts. La température nécessaire pour former un plasma est donc celle à partir de laquelle l'énergie thermique, qui peut être estimée par le produit kT, atteint cet ordre de grandeur, c'est-à-dire lorsque kT$\sim$1 eV, soit une température d'environ 11 000 K.

Hypothèses ✍ Sanz PC 2019

- le plasma est dilué : les interactions à courte portée *(les collisions binaires coulombiennes)* entre charges sont négligées. Cela revient à ce que l'énergie cinétique des particules soit très supérieure à leur énergie potentielle d'interaction électrique $e_c/e_p \gg 1$. C'est la même hypothèse que pour un gaz parfait. *Un plasma vérifie donc $PV = NRT$ et $U = (3/2)Nk_BT$. Pour vérifier, l'hypothèse, il faut que la longueur de Landau λ_L qui est celle où $e_c = e_p$ i.e. $3/2k_BT = e^2/(4\pi\epsilon_0\lambda_L)$ i.e. soit petite devant la distance inter-particulaire :* $\boxed{\lambda_L \ll n_e^{-1/3}}$ ***ODG:*** *pour la ionosphère, dans Sanz.*
- il n'y a pas d'effets quantiques $\lambda_{DB} \ll n^{-1/3}$
- les électrons sont non relativistes : la composante magnétique de la force de Lorentz est négligée. Cela se traduit par $v \ll c \leq v_\phi$. *On verra plus tard que $c \leq v_\phi$*
- comme la masse des noyaux est très supérieure à celle des électrons, les ions seront considérés comme immobiles (Born Oppenheimer) *On lit parfois que si les températures des ions et des électrons sont égales, alors $m_pv_p^2 = m_ev_e^2$, donc $v_p/v_e = \sqrt{m_e/m_p} \ll 1$. Mais ceci n'a en fait aucun rapport avec nos ondes : les vitesses que l'on vient de considérer sont les vitesses thermiques, totalement différentes de la vitesse moyenne v_e qui interviendra ensuite. On montre d'ailleurs que T n'a aucune influence sur les ondes EM transverses*
- poids négligeable **ODG:**
- le plasma est localement neutre. On ne fait pas cette hypothèse qui est inutile si on considère des ondes transverses. *Pour le vérifier spatialement, on introduit la longueur d'onde d'écrantage de Debye $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_e/(n_e e^2)}$, qu'on retrouve avec l'équation de Poisson-Boltzmann linéarisée (équation de Debye-Huckel). Pour assurer la neutralité locale, il faut un paramètre plasma grand : $\Lambda = n_e\lambda_D^3 \gg 1$. La condition dilué et chaud vient de la dépendance $\Lambda \propto T_e^{3/2}/n_e 1/2$. Pour le vérifier temporellement, il faut que les phénomènes soient lents devant la période plasma.* ***ODG:*** *ionosphère $\lambda_D \sim 1mm$.*

Cadre de travail : ondes transverses On considère des ondes transverses. Il exsite des ondes longitudinales mais on se restreint aux ondes transverses car c'est le type d'onde qui se propage lorsqu'arrive, depuis le vide, une OPPM en incidence normale, qui elle est automatiquement transverse.

Bonus : ondes longitudinales dans les plasma On en trouve à $\omega = \omega_p$ si on néglige les effets thermiques. En effet, la conservation de la charge donnerait $(\omega^2 - \omega_p^2)\rho = 0$ Plus généralement, les ondes de Langmuir sont longitudinales et $\omega^2 \simeq \omega_p^2 + 3k^2v_{th}^2$, pour lesquelles $\vec{k}$ est parallèle à $\vec{E}$ et $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \delta\rho/\epsilon_0 \neq 0$. On peut montrer que les deux modes longitudinal et transverse sont découplés et se propagent indépendamment (un peu comme les modes TM et TE dans un guide d'onde). On les étudie donc séparément. Il existe aussi des modes longitudinaux électrostatiques, acoustiques électroniques ou ioniques (qui ont une relation de dispersion type KG avec la même pulsation plasma mais une célérité différente), et également, dans les plasmas magnétisés, des ondes à la fois transverses et longitudinales : les ondes magnétohydrodynamiques.

Cadre de travail : état au repos ✍ Sanz p2016. Etat au repos du plasma. A recopier et projeter. On suppose le plasma non magnétisé à grande échelle. *En présence d'un champ magnétique comme le champ magnétique terrestre,* *la relation de dispersion est modifiée pour E perpendiculaire à B, non modifiée pour E parallèle à B (force magnétique nulle).*

Décompte des équations et des inconnues On a les inconnues E, B, ρ, j. On a les 6 équations de Maxwell + la condition d'onde transverse. Il manque 3 équations. On doit établir une relation constitutive du plasma dilué.

Justification du PFD à 1 électron Préciser l'utilité des hypothèses préliminaires à chaque fois On suit une particule. Pour justifier cette approche, il faut

- Négliger la partie fluctuante du champ électrique : hypothèse des collisions coulombiennes négligeables. Le champ ressenti par l'électron $E_{meso}+E_{local}$ est la superposition du champ E_{meso} qui se propage dans le plasma (produit par l'onde injectée et par les ions et électrons de manière collective) et E_{local} dû aux interactions à courte distance. En utilisant l'hypothèse du plasma dilué, on néglige E_{local}, mais on ne néglige pas les interactions collectives (contenues dans $\vec{j}$), sinon l'onde se progagerait comme dans le vide ! Cette approximation est valable lorsque le temps moyen entre deux collisions est très grand devant le temps caractéristique du phénomène étudié, qui ici est la période plasma $T_p = 2\pi/\omega_p$.
- admettre qu'il n'y a pas d'effets de pression, dans le cas des ondes transverses. *Une approche eulérienne montre que la pression et donc la température sont inchangés au passage de l'onde transverse, ce qui permet de négliger les effets thermiques qui se manifesteraient par un terme en gradient de la pression et justifie l'approche lagrangienne du PFD à 1 électron. Pour des ondes non transverses, il faudrait supposer que la vitesse thermique est très inférieure à la vitesse de phase des ondes.*
- la vitesse thermique très inférieure à la vitesse moyenne mésoscopique (hypothèse superflue pour le modèle du plasma froid mais nécessaire pour justifier la méthode "PFD appliqué à un électron"), ce qui permet de dire que tous les électrons en un point M à un instant t ont la même vitesse.

Application du PFD à 1 électron On applique le PFD à un électron, dans le référentiel où le plasma est au repos sans ondes. Lors du passage de v à j, on néglige la contribution des ions car $M_{ion} \gg m_e$. *En fait, en faisait $j = nev$ en notation complexe, un produit de deux complexes apparaît. On sous-tend que $n = n_0 + n_1$ et qu'on néglige le terme $n_1 v_1$ d'ordre 2.*

Equation constitutive La relation constitutive s'écrit :

$$\vec{j} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$$

Cette relation définit la conductivité complexe du plasma. La conductivité complexe du plasma est :

$$\underline{\gamma} = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{ où } \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}$$

La conductivité est imaginaire pure. Les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature donc la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule, $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$, est nulle. Enfin, puisqu'on étudie une onde transverse, la divergence du champ électrique est nulle donc, d'après l'équation de Maxwell-Gauss, la densité volumique de charges l'est aussi. Le plasma reste localement neutre en présence de l'onde électromagnétique.

Contribution des ions Les densités volumiques $\vec{j}$ dues aux électrons, et $\vec{J}$ due aux ions sont telles que $\vec{j} = -ne\vec{v}$ et $\vec{J} = ne\vec{V}$, soit $\vec{J} = -ne\vec{v}\frac{m}{M} = \frac{m}{M}\vec{j}$: comme $\frac{m}{M} \ll 1$, la densité volumique de courant dans le plasma est donc égale à celle des électrons. La masse des ions positifs étant très supérieure à celle des électrons : dans un plasma, seul le mouvement des électrons est à prendre en compte ; la densité volumique de courant est égale à celle des électrons car la vitesse des ions positifs est négligeable.

Bonus : point de vue eulérien On peut partir des équations locales de conservation. Mais elles ne concernent pas des particules fluides. Contrairement à la mécanique des fluides, dans le plasma dilué, le libre parcours moyen est en général supérieur à la taille caractéristique du plasma. De plus, le terme de pression n'est pas associé à des collisions mais au flux de quantité de mouvement à travers la surface du système ouvert sur lequel s'effectue le bilan : c'est une pression cinétique. En fait, on peut y arriver avec des bilans de quantité de mouvement/charge/énergie ou en introduisant une distribution dans l'espace des phases, qui évolue avec l'équation de Vlasov. Si $n^{-1/3} \ll \lambda_D$, on peut choisir le volume mésoscopique comme plus grand que la distance interparticules et plus petite que la longueur de Debye. Après linéarisation des équations de conservation de la masse et du bilan de quantité de mouvement, on trouve que

- Négliger les interaction électrons-électrons binaires à courte portée, c'est négliger le terme visqueux associé en $\eta\Delta\vec{v}$.

- Par transversalité de l'onde, la densité électronique ne change pas au passage de l'onde.
- Le champ de pression n'est pas perturbé (on prend la divergence du bilan de quantité de mouvement). Ainsi, comme $PV = nRT$ dans le plasma chaud dilué, les effets thermiques peuvent être négligés. *En faisant l'hypothèse du plasma froid* $v_\phi \gg v_{th}$, le mouvement d'agitation thermique est petit pendnat une période de l'onde. On peut négliger la propagation d'ondes acoustiques dans le plasma. C'est l'approximation de plasma froid, qui permet d'emblée de négliger le terme de pression dans l'équation du mouvement des charges.

1.2 Equation de propagation

Equation de Klein-Gordon On a l'apparition du terme supplémentaire. L'objet de cette leçon est d'étudier l'influence de termes supplémentaires comme celui-ci

Linéarité L'équation est toujours linéaire, cela justifie l'étude de la relation de dispersion.

1.3 Relation de dispersion

1.3.1 Relation de dispersion

Relation de dispersion On calcule et on distingue deux cas.

1.3.2 $\omega > \omega_p$

Propagation sans atténuation k est réel et l'onde peut se propager dans atténuation. En fait, E et j sont en quadrature, et en moyenne $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$: le milieu n'est pas absorbant : on dit que le milieu est transparent. Pour $\omega \gg \omega_p$, on retrouve la relation de dispersion des ondes EM dans le vide : physiquement, le champ oscille tellement rapidement que les charges n'ont pas le temps de répondre, c'est comme si elles n'étaient pas là.

Définition : dispersion En revanche on voit que la vitesse de l'OPPH ω/k, dépend de sa fréquence. Le milieu est alors dit dispersif.

> Il y a dispersion lorsque la relation de dispersion $\omega(k)$ est non linéaire en k ou de manière équivalente $v_\phi = \omega/k$ dépend de k.

1.3.3 $\omega < \omega_p$

Interprétation de la partie imaginaire k'' Jusqu'ici, on a vu que des vecteurs d'ondes réels. La partie imaginaire de k est liée à l'atténuation. La partie réelle est liée à la célérité de l'onde.

Onde évanescente k est imaginaire pur, et l'onde ne se propage pas, elle s'atténue exponentiellement dans le milieu : elle est dite évanescente. On donne la profondeur de pénétration **ODG:**

Réflexion ou absorption ? Il y a deux possibilités : soit l'onde cède de l'énergie au milieu (absorption), soit elle est en fait réfléchie. Ici on remarque que E et j sont en quadrature, et en moyenne $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$: il n'y a pas d'énergie transmise aux particules, ce qui signifie que l'onde est réfléchie intégralement $\vec{k}'$ *et* $\vec{k}''$ *sont orthogonaux ?*.

1.4 Application à l'ionosphère

Fréquence de coupure On revient à la ionosphère terrestre. On avait dit que la densité d'électrons est comprise entre $10^{10} m^{-3}$ et $10^{12} m^{-3}$, d'où une fréquence de coupure comprise entre $\omega_p/(2\pi) = 900 kHz$ et $9 MHz$.

Communications par réflexion successives Pour communiquer avec des satellites, on utilise des ondes au MHz. Pour communiquer avec un autre endroit de la Terre, on utilise des ondes à quelques centaines de kHz, car les réflexions successives entre l'ionosphère et la Terre permettent de s'affranchir de l'horizon optique [schéma]. On peut ainsi effectuer une propagation sur 600km à 4000km *la distance parcourue par saut dépend de l'onde incidente. L'indice optique diminue avec la densité (loi de Gladstone) donc avec l'altitude. Les rayons sont en réalité courbés, concaves.*. C'est ainsi qu'à été réalisée la première ligne radio transatlantique par Marconi en 1901. C'est d'ailleurs comme ceci que la ionosphère a été découverte. Les radios grandes ondes (f = 200 kHz, par exemple RTL) peuvent se réfléchir sur l'ionosphère et donc parcourir de grandes distances, alors que les ondes courtes (f = 10 MHz, comme Radio France) ne peuvent pas car elles traversent l'ionosphère.

Mesure de l'altitude de la ionosphère On peut étudier la ionosphère en envoyant des OPPH à la verticale : à bas ω, l'onde est réfléchie et revient, et en augmentant ω on fini par atteindre ω_p et l'onde ne revient plus. On en déduit n_e, et l'altitude à l'aide du temps d'aller-retour.

Coupure des communications à la réentrée Lorsqu'un vaisseau spatial entre dans l'atmosphère, il se forme à l'avant une onde de choc qui chauffe le gaz et le comprime. Ainsi, la pulsation de coupure augmente, et de moins en moins d'ondes peuvent passer. Il en résulte une coupure des communications avec Houston, comme dans les films.

Communications GPS et corrections pour l'ionosphère ✍ La physique en applications, Carpentier. Un récepteur GPS reçoit le signal de stallites. La traversée de l'ionosphère, de composition variable (jour/nuit), induit un retard. Le satellite envoie en fait deux signaux identiques (deux mêmes enveloppes), de fréquences porteuses différentes : 1228 et 1575MHz. Le récepteur peut calculer le retard entre ces deux signaux, et en déduire le délai lié à la ionosphère.

Il faut insister sur la démarche. Jusqu'ici, on a considéré des OPPM. Les OPPM ne sont pas physiques car ils ont une extension et une énergie infinies. Leur intérêt réside dans le fait qu'elles constituent une base de l'ensemble des solutions, et car pour une OPPM les équations, lorsqu'elles sont linéaires, se réduisent à l'équation de dispersion, qui est algébrique et simple à résoudre.

2 Propagation d'un paquet d'onde

✍ suivre Sanz

2.1 Notion de paquet d'onde

Cadre On se restreint à un milieu sans atténuation ni amplification : k est réel.

Des OPPM aux paquets d'onde Pour rester L2, on peut ne pas prononcer le mot de transformée de Fourier. Un signal physique émis par une source, et qui se propage, possède des extensions temporelle et spatiale finies. Pour étudier un signal réel, on utilise la transformée de Fourier, qui est essentiellement une projection du signal sur la base continue que sont les OPPM, restreinte aux OPPM qui vérifient la relation de dispersion [expression] Ensuite, par linéarité, on fait évoluer indépendemment chaque OPPM et on obtient l'évolution du signal. *On a décomposé $f(t, z = 0)$ dans l'espace des ω mais on aurait pu le faire dans l'espace des k. Ce n'est cependant pas toujours le meilleur choix. En particulier, lors d'un changement de milieu, la quantité conservée est la pulsation et non pas le vecteur d'onde.* Dans le cas où l'amplitude (la TF) ne prend des valeurs sur un petit intervalle de pulsation, on parle de paquet d'ondes.

Paquet d'onde On parle de paquet d'ondes quand l'amplitude $\underline{A}(\omega)$ ne prend de valeurs significatives que sur un petit intervalle de pulsations $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$, avec $\delta\omega \ll \omega_0$. Dans ce cas, il est indifférent d'écrire $\underline{s}(z,t)$ sous la forme (28.15) ou sous la forme :

$$s(z,t) = \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i(\omega t - k(\omega) z) \mathrm{d}\omega$$

Exemples Montrer des paquets d'onde : gaussien, rectangulaire. ✍ Sanz.

2.2 Evolution du paquet d'onde : vitesse de phase

Il ne faut pas seulement donner la définition de v_ϕ et v_g, mais bien les commenter physiquement.

Ordre 0 : Cas du milieu non dispersif On définit la vitesse de phase. C'est la vitesse associée à une onde monochromatique.

Chaque composante fréquentielle $\omega(k)$ du spectre se déplace à la vitesse de phase $v_\phi(\omega) = \omega/k$ associée. Il y a propagation sans déformation.

Si $v_\phi = \omega/k = cte$, le paquet d'onde se déplace en bloc entier à la même vitesse, c'est l'équation de d'Alembert et on a vu que $f(t,z) = f(z - z/v_\phi)$. On peut montrer le dif de Jérémy de l'ordre 0.*Les vitesses de phase et de groupe ont toutes les deux une réalité physique, et peuvent se mesurer. Mesurer un indice optique revient à mesurer une vitesse de phase, alors que la mesure du temps de vol d'une impulsion dans un câble coaxial donne une mesure de la vitesse de groupe.*

2.3 Evolution du paquet d'onde : vitesse de groupe

Ordre 1 : vitesse de groupe L'expression du paquet d'onde peut également se mettre sous la forme :

$$s(z,t) = \exp\left(i\left(\omega_0 t - k_0 z\right)\right) \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp\left(i\left(\left(\omega - \omega_0\right) t - \left(k(\omega) - k_0\right) z\right)\right) \mathrm{d}\omega$$

où $k_0 = k\left(\omega_0\right)$ C'est donc le produit de l'onde moyenne : $\exp i\left(\left(\omega_0 t - k_0 z\right)\right)$ par une enveloppe :

$$\mathcal{J}(z,t) = \int_{a_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp\left(i\left(\left(\omega - \omega_0\right) t - \left(k(\omega) - k_0\right) z\right)\right) \mathrm{d}\omega$$

La grandeur $\omega - \omega_0$ varie dans l'intervalle $\left[-\frac{\delta\omega}{2}, \frac{\delta\omega}{2}\right]$ avec $\delta\omega \ll \omega_0$ donc les variations temporelles de $\mathcal{J}(z,t)$ sont lentes devant celle de l'onde moyenne : $\mathcal{J}(z,t)$ module l'amplitude de l'onde moyenne, elle représente bien l'enveloppe du signal. La pulsation ω restant proche de ω_0, on peut effectuer un développement limité de $k(\omega)$ au voisinage de ω_0, en se limitant, dans un premier temps, au premier ordre :

$$k(\omega) = k_0 + \left(\omega - \omega_0\right)\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}$$

L'expression de $\mathcal{J}(x,t)$ devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(z,t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp\left(i(\omega - \omega)\left(t - z\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right)\right) \mathrm{d}\omega \\
&= \mathcal{J}\left(0, t - z\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}\right)
\end{aligned}$$

L'enveloppe de l'onde $\mathcal{J}(z,t)$ se propage à la vitesse $v_g\left(\omega_0\right) = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$, appelée vitesse de groupe, où ω_0 est la fréquence de la porteuse. À cet ordre d'approximation, la fonction $\mathcal{J}(z,t)$ se propage sans se déformer. Ceci n'est en fait vrai qu'à l'ordre 1.

Glissement de phase Si la relation de dispersion n'est pas linéaire, $v_g \neq v_\phi$. La porteuse et l'enveloppe ne se propagent pas à la même vitesse et donc la porteuse "glisse" à l'intérieur de l'enveloppe. *On parle de dispersion normale lorsque $v_\varphi > v_g$ c'est-à-dire lorsque la porteuse se déplace plus vite que l'enveloppe.* En revanche, l'onde n'est pas déformée au cours du temps et garde son caractère d'onde plane progressive, mais ce n'est pas une onde plane progressive pour autant car sa forme change au cours de la propagation à cause du glissement de la porteuse. On montre l'animation python "ordre1", sinon il y a le gif de Jérémy où on peut suivre un point rouge.

Bonus : interprétation avec la phase stationnaire On peut interpréter ceci à l'aide de la méthode de la phase stationnaire : toutes les ondes du paquet interfèrent constructivement pour le point (t,z) tel que $\omega t - k(\omega) z = 2n\pi$, d'où en dérivant par rapport à ω : $t = z/v_g$. La forme de l'enveloppe n'est pas modifiée au cours de la propagation, le paquet d'onde se déplace sans étalement ni déformation.

2.4 Evolution du paquet d'onde : vitesse de groupe

Ordre 2 : étalement du paquet d'onde Dans ce cas, la vitesse de groupe dépend de ω, l'enveloppe se déforme. On peut montrer que cela conduit à une étalement

Illustration numérique de la dispersion
On sort le code python "ordre2"

On aurait aussi pu procéder par analyse dimensionnelle. Si $d^2\omega/dk^2$ est grand, alors l'étalement est rapide : lié au milieu. Si Δx_0 est petit (donc Δk grand), alors l'étalement est rapide : lié au signal. *L'équation d'évolution du paquet d'onde est l'équation de Schrödinger, qui est aussi l'équation paraxiale. Un profil gaussien s'étale en $\sigma(t) = \sqrt{1 + (t/t_d)^2}$, comme la divergence d'un faisceau gaussien !*

Conclusion sur la dispersion La dispersion dépend du milieu mais aussi du paquet d'onde : il faut regarder si la relation de dispersion du milieu est linéaire à l'échelle de $\Delta\omega$ du paquet d'onde.

Soyons plus physique. Pour expliquer cette déformation, on considère un paquet d'onde d'extension spatiale Δx_0 à $t = 0$. Son extension dans l'espace des k est $\Delta k \sim 1/\Delta x_0$. Il en résulte que le paquet d'onde va se propager avec des vitesses de groupes différentes, comprises entre $v_g(k_0 - \Delta k/2)$ et $v_g(k_0 + \Delta k/2)$, soit une différence

$$\begin{aligned} \Delta v_g &= \Delta k \times \mathrm{d}v_g/\mathrm{d}k \\ &= \Delta k \times \mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2 \\ &= (1/\Delta x_0) \times \mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Cette différence de vitesse de groupe va créer un étalement du paquet d'onde en $\Delta v_g t$. Il faut lui ajouter l'étalement initial Δx_0, que l'on suppose indépendant de $\Delta v_g t$. Alors : $\Delta x(t)^2 = \Delta x_0^2 + (\Delta v_g t)^2$, soit :

$$\boxed{\Delta x(t) = \Delta x_0 \sqrt{1 + (t/t_d)^2}, \quad t_d = \frac{\Delta x_0^2}{\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}k^2}.} \tag{24}$$

Application : limitation du débit On peut dessiner deux paquets d'onde d'étroits en entrée, séparés d'un silence (Morse : 1-0-1) et à la réception, ils se sont étalés et se recouvrent : le signal a été déformé, on n'est pas sûr s'il y a eu un silence 0 entre les 1.

Application : analyse de spectre On utilise les propriétés dispersives des matériaux (prismes) pour analyser le spectre de la lumière.

Récapitulatif sur la partie

- Un paquet d'onde est une somme continue d'OPPM.
- Chaque OPPM se propage à sa vitesse de phase.
- L'enveloppe se propage à la vitesse de groupe.
- Dans un milieu dispersif, il y a glissement de phase et le paquet d'onde s'étale. La dispersion dépend du milieu mais aussi du paquet d'onde : il faut regarder si la relation de dispersion du milieu est linéaire à l'échelle de $\Delta\omega$ du paquet d'onde.

Validité des résultats Attention : la notion de vitesse de groupe, et les résultats sur l'étalement, ne sont valables que si la dispersion est faible pour pouvoir justifier les DL. Ce n'est donc valide que sur des temps $t \ll t_d$. Il faut essentiellement que v_g varie peu sur l'extension du paquet d'onde.

2.5 Retour sur le plasma

On trace les courbes pour v_g et v_ϕ pour les ondes électromagnétiques transverses. Pour $\omega > \omega_p$, les vitesses de phase et de groupe sont :

$$\begin{cases} v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2}}} \\ v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1-\frac{\omega_P^2}{\omega^2}} \end{cases}$$

Calcul de vitesse de groupe Pour calculer la vitesse de groupe, le plus simple est de dériver par rapport à ω la relation de dispersion :

$$2k\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2\omega}{c^2}$$

d'où :

$$\frac{\omega}{k} \times \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2 \quad \text{ou encore} \quad v_\varphi \times v_g = c^2$$

On note que :

- La relation $v_\varphi v_g = c^2$ est liée à la forme particulière de la relation de dispersion (appelée relation de Klein-Gordon).
- $v_g < c$: tout va bien. On peut avoir $v_\phi > c$: ce n'est pas la vitesse de propagation de l'énergie ou de l'information.
- On montre en calculant le vecteur de Poynting $< \vec{\Pi} >$ et $< u >$ pour l'onde que v_g est la vitesse de propagation de l'énergie. *On peut faire le calcul sur transparent.* C'est un résultat assez général pour les milieux transparents. *Sauf zones d'absorptions.*

Application L'étalement du paquet d'onde limite le débit d'information [schéma].

3 Câble coaxial avec pertes

Modèle avec pertes On a ajouté r qui modélise les pertes par effet Joule, g qui modélise le caractère imparfait de l'isolant entre l'âme et la gain.

Relation de dispersion [expression] On note que la relation est complexe : il va y avoir dispersion et absorption, l'absorption elle-même dépendant de la fréquence.

Ordres de grandeur On les discute.

4 Ondes gravito-capillaires

✍ suivre Polydon, compléments : GHP, de Gennes.

4.1 Observations

Ondes gravito-capillaires

Présentation On s'intéresse dans ce paragraphe aux ondes à la surface d'un fluide au repos, couplant la déformation de la surface au champ de vitesse du fluide. Ces ondes sont aisément observables : vagues, rides engendrées par le vent ou par la chute d'un objet, etc. On montre la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=dsrUxhaaWks`. En jetant un caillou dans l'eau, on observe après quelques instants l'existence de deux séries d'ondes, l'une étant plus rapide et à des longueurs d'ondes plus courtes.

- des petites longueurs d'onde d'environ 1 mm, qui se propagent vite, à 70 cm/s environ.
- des grandes longueurs d'onde d'environ 2 cm, qui se propagent moins vite, à 20 cm/s environ.

L'objet de cette partie et de comprendre ces deux phénomènes.

Phénomènes en compétition Qualitativement, trois phénomènes sont en compétition : l'inertie du fluide tend à le faire persévérer dans son mouvement, alors que la pesanteur et la tension superficielle tendent respectivement à abaisser le centre de gravité du fluide et à en lisser la surface.

4.2 Relation de dispersion

Hypothèses Si on fait l'approche analyse dimensionnelle, ne pas donner toutes les hypothèses d'un coup.

- écoulement parfait, équation d'Euler : on néglige la dissipation par viscosité, valable sur un temps $\tau \ll \lambda^2/\nu$. En terme de longueur, la longueur d'atténuation typique en régime capillaire est 30cm et de 1 km dans le régime gravitaire. *Munis des vitesses de phase approximatives, on peut évaluer les distances typiques d'atténuations dans les deux régimes. Dans le régime capillaire, on trouve* $L^* \sim \left(\rho\gamma\lambda^3\right)^{1/2}/\eta$. *Pour* $\lambda = 1\text{mm}$ *par exemple, on obtient* $L^* \simeq 30\text{cm}$. *Dans le régime gravitaire,* $L^* \sim \rho g^{1/2}\lambda^{5/2}/\eta$ *et les longueurs d'atténuation deviennent rapidement très élevées (quelques kilomètres pour* $\lambda \sim 1\text{m}$ *). Les vagues en mer correspondent à ce second régime.*
- écoulement incompressible, irrotationnel : potentiel
- faibles perturbation : on néglige l'accélération convective dans l'équation d'Euler (ou de façon équivalente, le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Bernoulli) devant le terme d'instationnarité. Il faut donc avoir $v_0 \ll c = \omega/k$.
- faible perturbation : l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment lisse pour que l'on puisse assimiler la normale à la surface libre à la verticale : il faut pour cela $\partial_x z_0 \ll 1$
- faible perturbation : l'amplitude de la déformation de l'interface doit être suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que les conditions aux limites sont prises en $z = h$: il faut donc $|z_0 - h| \ll h$.

- eau profonde $kh \gg 1$ *Dans ce cas, la relation de dispersion ne dépend pas de h. Dans le cas opposé, celui des marée pour lequel on a $\lambda \sim 5000km \gg h \sim 4km$ et $v_\phi = \sqrt{gh}$, ce qui justifie que l'océan ne constitue pas un milieu dispersif pour les ondes de marée. Par ailleurs cette expression de la vitesse de phase en eau peu profonde explique des phénomènes simples qui méritent d'être mentionnés en passant, comme le déferlement des vagues, ou le fait que lorsque une longue vague arrive près de la plage celle-ci se raidit et s'aligne avec la plage*

Analyse dimensionnelle, version express De façon générale, les divers paramètres intervenant dans le problème sont la masse volumique ρ, l'intensité de la pesanteur g, la tension de surface γ, l'épaisseur de fluide h, la pulsation de l'onde ω, son nombre d'onde k, et l'amplitude de la perturbation de la surface libre ζ_0. Nous disposons donc de sept paramètres pour trois dimensions indépendantes. Dans l'hypothèse des petites perturbations, ζ_0 n'intervient pas. Dans le cadre des eaux profondes, H n'intervient pas. On a 5 inconnues pour 3 dimensions donc le théorème de Vaschy-Buckingham implique alors que le problème est déterminé par deux nombres sans dimensions qu'on choisit comme

$$\tilde{K} = k\ell_c, \quad et \quad \tilde{\Omega} = \omega/\sqrt{kg}$$

A l'ordre le plus bas, les comportements limites de la fonction $\tilde{\Omega}(\tilde{K}$ sont :

$$\text{pour } \tilde{K} \ll 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim 1 \text{ et pour } \tilde{K} \gg 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim \tilde{K}$$

Bonus : Analyse dimensionnelle : paramètres pertinents, théorème Pi ✍ suivre Lidon. Polydon On utilise le théorème Π (prérequis). De façon générale, les divers paramètres intervenant dans le problème sont la masse volumique ρ, l'intensité de la pesanteur g, la tension de surface γ, l'épaisseur de fluide h, la pulsation de l'onde ω, son nombre d'onde k, et l'amplitude de la perturbation de la surface libre ζ_0. Nous disposons donc de sept paramètres pour trois dimensions indépendantes. Le théorème de Vaschy-Buckingham implique alors que le problème est déterminé par quatre nombres sans dimension que nous choisissons comme

$$\tilde{K} = k\ell_c, \quad \tilde{H} = kh, \quad \tilde{Z} = k\zeta_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega} = \omega/\sqrt{kg}$$

Nous pouvons donc seulement affirmer que la relation de dispersion se met sous la forme

$$\tilde{\Omega} = f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z})$$

- Cas purement gravitationnel : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \ll 1$, c'est la gravité qui domine la capillarité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec la pesanteur : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{g}$. En ordre de grandeur on obtient $\omega^2 \sim kg$
- Cas purement capillaire : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \gg 1$, c'est la capillarité qui domine la gravité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec le gradient de pression capillaire à l'interface : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{\nabla} P/\rho$. En ordre de grandeur, $\|\vec{\nabla} P\| \sim k\Delta P \sim k \times (\gamma k)$ donc $\omega^2 \sim \gamma k^3/\rho$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire le comportement général de f, il se trouve que c'est la somme des deux cas limites, ce qui n'est pas aberrant puisque les effets liés à la gravité et ceux liés à la capillarité apparaissent comme une somme dans l'équation de propagation.

Bonus : Cadre : régime d'eaux profondes, petites amplitudes Considèrons alors le cas d'eaux profondes, soit $\tilde{H} \gg 1$, et d'une onde de faible amplitude, soit $\tilde{Z} \ll 1$. Supposons ainsi que dans ce régime, f ne dépend plus que de $\tilde{K}$. *Cela correspond au cas d'une auto-similitude de première espèce, que nous supposons adaptée. Si cette hypothèse impliquait des résultats en désaccord avec l'expérience, il faudrait rechercher $f(\tilde{K}, \tilde{H}, \tilde{Z})$ sous la forme $\tilde{H}^\alpha \tilde{Z}^\beta \psi\left(\tilde{K}\tilde{H}^{-\gamma}\tilde{Z}^{-\delta}\right)$. Notons néanmoins que f doit être indépendante de $\tilde{Z}$ puisque l'on effectue une analyse linéaire, où l'amplitude de l'onde est infinitésimale.*

Bonus : Comportements asymptotiques Tout d'abord, notons qu'il ne reste pour décrire le mouvement du fluide qu'une échelle de temps $1/\omega$ et une échelle de longueur $1/k$ pertinentes, la longueur capillaire étant une caractéristique statique du fluide. Dès lors, la vitesse d'une particule de fluide a pour ordre de grandeur $v_0 = \omega/k$, la vitesse de phase de l'onde de surface. Nous pouvons alors obtenir les comportements asymptotiques de f avec $\tilde{K}$. *C'est là que tout peut sembler un peu fumeux, dans la mesure où les forces que l'on tente d'équilibrer agissent dans des directions orthogonales. Mais ce que l'on prend pour de la magie n'est que la puissance de l'analyse dimensionnelle : essayer de distinguer deux directions reviendrait à ajouter une longueur dans le problème.* A l'ordre le plus bas, les comportements limites de la fonction f sont :

$$\text{pour } \tilde{K} \ll 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim 1 \text{ et pour } \tilde{K} \gg 1, \tilde{\Omega} = f(\tilde{K}) \sim \tilde{K}$$

- Cas purement gravitationnel : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \ll 1$, c'est la gravité qui domine la capillarité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec la pesanteur : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{g}$. En ordre de grandeur on obtient $\omega^2 \sim kg$

- Cas purement capillaire : Si l'on considère la situation $\tilde{K} \gg 1$, c'est la capillarité qui domine la gravité. On doit donc équilibrer l'inertie du fluide avec le gradient de pression capillaire à l'interface : $\partial_t \vec{v} \sim \vec{\nabla} P/\rho$. En ordre de grandeur, $\|\vec{\nabla} P\| \sim k\Delta P \sim k \times (\gamma k)$ donc $\omega^2 \sim \gamma k^3/\rho$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire le comportement général de f, il se trouve que c'est la somme des deux cas limites, ce qui n'est pas aberrant puisque les effets liés à la gravité et ceux liés à la capillarité apparaissent comme une somme dans l'équation de propagation.

Relation de dispersion On donne la relation de dispersion et son allure.

$$\omega^2 = gk\left(1 + k^2\ell_c^2\right)\tanh(kh) \quad \text{et} \quad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1 + k^2\ell_c^2\right)\tanh(kh)}$$

Commençons par discuter de la relation de dispersion. Divers régimes peuvent être distingués :

- selon la valeur de kh : si $\lambda \gg h$, on est dans le régime d'eaux peu profondes et $\tanh(kh) \sim kh$, alors que si $\lambda \ll h$, on est dans le régime d'eaux profondes et $\tanh(kh) \sim 1$. La tangente hyperbolique variant cependant assez lentement loin de 0, l'hypothèse d'eaux profondes est assez peu restrictive et reste valable dans de nombreux cas. Nous nous y plaçons pour la suite.
- selon la valeur de $k\ell_c$: si $\lambda \ll \ell_c$, la capillarité domine et on a $\omega^2 \simeq gk^3\ell_c^2$ et $c \simeq \sqrt{gk}\ell_c$ alors que si $\lambda \gg \ell_c$ la gravité domine et on a $\omega^2 \simeq gk$ et $c \simeq \sqrt{g/k}$

Interprétation des observations Dans l'expérience du caillou tombant dans un lac, le caillou crée une impulsion qui excite toutes les fréquences. La série d'ondes rapides de courte longueur correspond aux ondes capillaires, alors que la série d'onde lentes et de grande longueur d'onde correspond aux ondes gravitaires. On remarque en outre que la vitesse des ondes passe par un minimum non nul $c_{\min}$ pour $k\ell_c = 1$. Il s'agit de la vitesse relative minimale à laquelle un obstacle doit se déplacer par rapport au fluide environnant pour laisser un sillage stationnaire, en forme de V comme celui que l'on peut observer derrière un canard ou un bateau. Si l'obstacle se déplace à une vitesse inférieure à $c_{\min} = 23cm/s$ à température ambiante. la perturbation restera localisée autour de lui. L'émission d'un sillage dissipe de l'énergie, intervenant dans les problèmes de résistance à la progression en surface d'un fluide (on parle de résistance de vague). *Ce type de critère se retrouve dans de multiples domaines, dès qu'une relation de dispersion présente une vitesse minimale non-nulle : critère de Landau pour la superfluidité, amortissement Landau dans les plasmas, rayonnement Cherenkov.*

Régime gravitaire $v_g \sim v_\phi/2$: c'est l'ingrédient pour l'angle de Kelvin des bateaux. Wake pattern from ships often fall into this category. The single waves seem to roll faster than the "plow" or "fan" that follows the boat. As a result, the single waves roll in a way past the "fan" and disappear soon afterwards.

Régime capillaire $v_g \sim (3/2)v_\phi$ In this case, the group velocity is actually greater than the phase velocity (corresponding to anomalous dispersion). In this case, individual waves seems to appear from nothing at the front of the group of waves, and then move "backwards" through the group and disappear. However, relative to the water, the single waves will always propagate away from the source that created the waves (as long as we do not have reflection), but the illusion of walking backwards is because the group velocity is even greater than the phase velocity

Limite La limite se situe à $\lambda \sim l_c$ la longueur capillaire. La relation de dispersion $v_\phi(\omega)$ possède un minimum à 23 cm/s. *C'est la vitesse minimale qu'un objet doit avoir pour laisser un sillage stationnaire. Former un sillage dissipe de l'énergie, c'est la résistance de vague. Les trajectoires des particules de fluide sont elliptiques.*

Bonus : trajectoire des particules de fluide Dans le cas des eaux profondes, et loin du fond, les trajectoires deviennent circulaires. On aurait pu le prédire par analyse dimensionnelle, puisque nous avons vu que dans le régime d'eaux profondes, les directions verticale et horizontale doivent être traitées de façon équivalente.

Complément : houle *Lorsque la houle déferle sur la plage, il s'agit d'un changement de régime (eaux profondes à eaux peu profondes) des ondes de surface.*

Complément : sillage des bateaux ✍ Physics of Waves, Arnt Inge Vistnes, chap 8.4.4 image, Talk Marc Rabaud, Article Marc Rabaud, Contruction géométrique du sillage (APJ), encore plus clair pour la construction géométrique

Observation : l'angle du sillage est souvent de 19 degrés, indépendemment de la taille ou de la vitesse du mobile. Pour les bateaux, on est dans le régime gravitaire : l'ingrédient clef est $v_g \sim v_\phi/2$. Comme le cône de Mach, lorsque $v > v_\phi$, il y a un cône d'accumulation des vagues dont l'angle dépend de la vitesse du mobile : $v_\phi = v_0 \sin\theta$. Mais l'angle qu'on voit est celui de la vitesse de groupe, obtenu par construction géométrique (quand on trace le cône de Mach on retient le point milieu, ce qui fait un nouveau cône : celui qu'on voit). Comme le milieu est dispersif, à chaque longueur d'onde est associée un cône, dont l'angle varie. L'angle présente un maximum à un certain angle donné constant : c'est l'angle dominant qu'on observe, en supposant que toutes les longueurs d'ondes sont excitées. C'était la théorie de Kelvin. En fait, l'angle devient plus étroit quand la vitesse augmente (dépendance en le nombre de Froude), comme le cône de Mach. En disant que le bateau ne peut émettre des longueurs d'ondes plus grandes que sa taille, on retrouve le cône de Mach aux grandes vitesses.

Pour expliquer les arcs aux centre dans la trajectoire du bateau, on considère les ondes de vitesse de phase au voisinage de $v_\phi = U$ la vitesse du bateau (paquet d'onde quasi-monochromatique), qui sont les seules qui donnent un motif stationnaire dans le référentiel du bateau. Ainsi, lorsque le bateau passe au point M, il excite un onde sphérique dont le front progresse à même vitesse que le bateau. Comme $v_g \sim v_\phi/2$, à distance 2L de M, le paquet d'onde excité se trouve à distance L de M. On en déduit la règle : à distance L du bateau, le rayon de courbure du motif est L.

Complément : atténuation des ondes gravito-capillaire La viscosité atténue les ondes gravito-capillaires. En fait, une petite tension de surface augmente l'atténuation (même si la tension de surface tend à lisser l'interface). En effet, la longueur caractéristique d'atténuation est $L = v_g\tau$ et $\tau = \lambda^2/\nu$ où ν est la viscosité cinématique. Or v_g diminue avec la tension de surface γ.

Conclusion

Cette leçon a permis de comprendre la propagation d'un signal réel à travers un milieu réel, qui en général est dispersif et absorbant. Les points importants sont les suivants :

- Un signal de durée finie s'étale à mesure qu'il se propage.
- L'information et l'énergie se propagent généralement à la vitesse de groupe.

Les conséquences sont importantes pour la transmission d'informations, que ce soit par les lignes téléphoniques ou pour Internet, ou pour des signaux GPS. Nous nous sommes restreints aux milieux infinis. Nous verrons plus tard que des conditions aux limites peuvent produire de la dispersion, même dans un milieu non dispersif (un guide d'onde dans le vide par exemple).

Ouverture :

Compléments/Questions

Compléments

Solitons La dispersion peut être compensée par des non linéarités. C'est ainsi que naissent des solitons, qui se propagent sans déformation. Pour que la compensation soit efficace, les solitons doivent avoir une forme bien choisie. Cependant, pour que la notion de relation de dispersion ait encore un sens il faut que ces non-linéarités restent faibles. Si les linéarités sont trop fortes, l'approche en Fourier n'a plus de sens, et il peut même ne plus exister de relation de dispersion.

Limites de la vitesse de groupe La vitesse de groupe n'est pas toujours la vitesse de propagation de l'énergie. Il faut que le milieu soit suffisamment peu dispersif. Si le milieu est très dispersif, il est en pratique très absorbant, et le signal est alors très déformé. Par exemple aux résonances d'un milieu diélectrique, on a v' et $vg > c$, cf. Portelli thème 21.

Equations/systèmes dispersives Câble coaxial avec pertes, équation de Schrödinger, équation paraxiale, chaîne de pendules couplés, fibre optique, ondes internes dans l'océan.

Ondes internes Elles se propageant sous forme de rayon, avec v_ϕ perpendiculaire à v_g. Papier Thierry Dauxois

Lien/non lien entre dispersion et absorption On peut avoir les 2, aucun, et l'un sans l'autre. Mais en optique, les deux sont liés par Kramers-Kronig car v_ϕ est relié à n qui est relié à la réponse du milieu χ.

Questions

- Comment sont réalisées les impulsions LASER femtosecondes ? Milieu actif à large bande (cf. principe de Heisenberg) + focalisation résonnante de Kerr (non linéaire).
- Pourquoi pas de A/λ dans le développement.

- Devant une classe : comment vous définiriez le phénomène de dispersion ? Au début de la leçon, écrire une définition claire d'un milieu dispersif. Comment défini un milieu dispersif ou non à partir d'une équation de dispersion ? Relation de dispersion linéaire en $k \to$ non dispersif. $\omega(k)$ non linéaire en $k \to$ dispersif.
- Quelle est la vitesse de phase dans un milieu d'indice n pour une onde électromagnétique ? La longueur d'onde est multipliée par n car la propagation est plus lente. (propagation Vitesse de phase $v_\phi = c/n$.
- Pour le goniomètre avec un réseau, comment s'affranchir de la mesure du 0 ? Regarder l'ordre 1 et l'ordre -1. Faire le minimum de déviation à chaque fois.
- Pouvez vous m'en dire un peu plus sur la transition entre optique géométrique et optique ondulatoire ?
- Qu'est ce qu'un paquet d'onde ? Comment relier le fait que paquet d'onde ait une dispersion en fréquence avec une onde monochromatique ? Inégalité de Heisenberg. Energie finie $\to$ dispersion du paquet d'onde finie. : $\Delta\omega\Delta t > 1/2$.
- Le paquet d'onde a été défini en complexe, et trace $A(x, t)$, qu'est ce que c'est ? Le module ? La partie réelle ? (réponse du jury : le module au carré $\approx$ énergie. Puis en plus l'énergie est plus intéressante à tracer).
- Avec deux ondes monochromatiques de fréquences différentes, expliquer simplement pourquoi le paquet d'onde va se déformer (avec un schéma). ("change état d'interférence entre les deux composants ?").
- Peut expliquer l'étalement d'un paquet d'onde sans trop de calculs. Dessiner un paquet d'onde gaussien, à X_0 et $X(t)$ déformé. $X(t) = X_0 + v_g t$ alors $\Delta X^2 = \Delta X_0^2 + \Delta v_g^2 t^2$. $\Delta v_g = v_g(k_0 + \Delta k) - v_g(k_0) = (dv_g/dk)\Delta k = d^2\omega/dk^2$. On voit le lien entre étalement du paquet d'onde et dérivée seconde de $\omega(k)$.
- Est ce que la dispersion est toujours causée par le milieu ? (non, aussi par des conditions aux limites). Est ce que la dispersion est toujours nuisible ? Exemple d'application où on exploite la dispersion. Mesure de spectres d'absorption/émission par dispersion. Sonder la matière si on connaît la relation de dispersion.
- Autres exemples de milieux dispersifs ? Conducteur ohmique ?
- Dissipation dans un plasma ? σ est imaginaire pur. $\vec{j}$ et $\vec{E}$ en quadrature de phase, la moyenne de $\vec{j} \cdot \vec{E}$ sera nul.
- Comment utiliser une analogie avec l'électronique pour introduire la notion de milieu dispersif ? La courbe de dispersion serait le diagramme de Bode (un plateau dans Bode serait une droite dans la courbe $k(\omega)$. Le paquet d'onde serait le signal électrique. La ionosphère est un passe-haut.
- Existe-t-il toujours une relation de dispersion k(!) ? La reponse est non et c'est un point qui merite d'etre discute dans la lecon.
- Les ondes electromagnetiques qui se propagent dans un plasma sont-elles toujours transverses ? Dans cotre modele, que se passe-t-il si on envoit une onde de pulsation egale a la pulsation plasma, sur le plasma ? Voir ref J.-L. Delcroix et A. Bers, Physique des plasmas, volume 1 et 2, CNRS Edition - EDP science (1994).
- **Le lien entre absorption et dispersion est-il général ?** Oui, Kramers-Krönig
- **Pourquoi u(x+dx,t) devient u(x,t) dans la loi des mailles ?**
- **La dispersion a-t-elle un intérêt ?** Prismes
- **Pour le modèle de Lorentz (électron élastiquement lié), que se passe-t-il si les électrons sont considérés comme quantiques ? Pourquoi v est petit par rapport à c pour l'électron ?**
- **Où a-t-on de la dispersion, à part le coax ?**
- **Question d'élève : comment voir la dispersion sans calcul, sans équation ?**
- **Comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? Et si on frappe dans les mains ?**
- **L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonores ? Dans le cadre d'un concert que se passe-t-il, qu'entendons-nous si on est tout près, à un mètre, ou à un kilomètre ?**
- **Signification du temps caractéristique dans la relation de dispersion du conducteur ?**
- **Comment démontre-t-on l'expression de la vitesse de phase ? Idem pour la vitesse de groupe ; ne pas faire la démo, mais donner le principe physique qui permet de la faire.**

- **Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ?**
- **Cas où k imaginaire pur, quel type d'onde obtient-on ? Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ?** Onde évanescente
- **Quelle loi permet d'écrire la première équation pour le cornet acoustique ?**
- **Pourquoi utilise-t-on habituellement une décomposition en séries de Fourier pour caractériser une onde plane et une transformée de Fourier dans le cas d'un paquet d'onde ?** Une onde plane est périodique, elle peut se décomposer en séries de Fourier et son spectre est donc discret. Un paquet d'onde n'est pas périodique, et on ne peut pas le décomposer en séries de Fourier. Il faut alors introduire la notion de transformée de Fourier afin de remonter à son spectre continu.
- **Pourquoi considère-t-on les noyaux immobiles dans le modèle de l'électron élastiquement lié ?** La masse d'un électron étant très inférieure à celle d'un noyau, son mouvement peut être négligé. C'est l'approximation de Born-Oppenheimer.
- **Quelle est l'origine du terme de frottement fluide dans le modèle de l'électron élastiquement lié ?** Le terme de frottement fluide est introduit de manière phénoménologique dans le modèle. Il permet de prendre en compte la dissipation par rayonnement de l'électron, ainsi que les collisions dans un gaz ou les interactions avec les vibrations du réseau cristallin dans un solide.
- **Que représentent les parties réelles et imaginaires d'un vecteur d'onde ?** On décompose habituellement le vecteur d'onde de la forme k = k' + ik". Sa partie réelle k' est liée à la dispersion de l'onde, et sa partie imaginaire k00 correspond à l'évolution de son amplitude au cours de sa propagation. Si k"< 0, le milieu est absorbant, c'est le cas de la plupart des milieux. Si k"> 0,le milieu est amplificateur, les cavités laser en sont un exemple.
- **Comment sont reliés les phénomènes de dispersion et d'absorption ?** La partie réelle k' et la partie imaginaire k" d'un vecteur d'onde sont reliées par les relations de Kramers-Kronig.
- **Est-ce que la vitesse de propagation de l'énergie est toujours égale à la vitesse de groupe ?** Non, ce n'est pas le cas lorsque les milieux sont fortement dispersifs et avec un étalement important. La résonance d'une onde dans un diélectrique est un bon contre-exemple, car la vitesse de groupe est alors supérieure à la célérité de la lumière.
- **Citer un exemple d'onde se propageant dans un milieu dispersif mais pour laquelle sa dispersion est compensée.** Un soliton (ou onde solitaire) se propage sans se déformer dans un milieu dispersif à cause des nonlinéarités du milieu. C'est une solution de l'équation de Korteweg-de Vries qui modélise par exemple les ondes à la surface de l'eau dans le cas d'une faible profondeur.
- **Pour les exemples présentés, la pulsation ω est réelle et le vecteur d'onde k est complexe, est-ce que l'inverse est possible ?** Lorsque l'on fixe la pulsation ω d'une onde, on étudie sa propagation dans l'espace en remontant à son vecteur d'onde k, qui peut être complexe. Mais par analogie il serait également possible de fixer son vecteur d'onde k réel, puis d'étudier l'évolution temporelle de l'onde avec sa pulsation ω, qui pourrait être complexe.
- **Bande passante de l'oscilloscope ?** Ca dépend du modèle mais environ 100 MHz.
-
- Un indice optique est-il toujours plus grand que 1 ? Pas dans le plasma !
- Le lien entre absorption et dispersion est-il général ? Pour le modèle de Lorentz (électron élastiquement lié), que se pase-t-il si les électrons sont considérés comme quantiques ? Pourquoi v est petit par rapport à c pour l'électron ? Pourquoi u(x+dx,t) devient u(x,t) dans la loi des mailles ? La dispersion a-t-elle un intérêt ? Où a-t-on de la dispersion, à part le coax ? Question d'élève : comment voir la dispersion sans calcul, sans équation ?
- Comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? Et si on frappe dans les mains ? L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonores ? Dans le cadre d'un concert que se passe-t-il, qu'entendons-nous si on est tout près, à un mètre, ou à un kilomètre ? Comment démontre- t-on l'expression de la vitesse de phase ? Idem pour la vitesse de groupe ; ne pas faire la démo, mais donner le principe physique qui permet de la faire. Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ? Signification du temps caractéristique dans la relation de dispersion du conducteur ? Cas où k imaginaire pur, quel type d'onde obtient-on ? Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ? Quelle loi permet d'écrire la première équation pour le cornet acoustique ?

Commentaires

Nombre d'Abbe/constringence/coefficient de dispersion : $V = (n(\lambda_D) - 1)/(n(\lambda_F) - n(\lambda_C))$ où λ_D est la raie D du sodium à 589,3 nm, λ_F la raie F de l'hydrogène à 486,1 nm, λ_C la raie C de l'hydrogène à 656,3 nm. V quantifie la dispersion *i.e.* la variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde $n(\lambda)$, ainsi que l'aberration chromatique transversale d'une optique. Plus le nombre d'Abbe est élevé, moins le verre est dispersif.

Verre crown : Ces verres ont un indice de réfraction faible, d'environ 1,52, et un nombre d'Abbe élevé, supérieur à 50 (entre 50 et 85), ils ont donc une faible dispersion chromatique.

Verre flint : est un type de verre avec un indice de réfraction élevé et un nombre d'Abbe faible (très dispersifs). L'indice de réfraction des flints varie entre 1,5 et 2,0 selon leur composition. A l'origine, contient de l'oxyde de plomb (II), aujourd'hui, on peut ajouter du lanthane, du titane, du baryum, etc. pour en modifier les caractéristiques.

Doublet achromatique : doublet de lentilles conçu pour limiter les effets des aberrations chromatique et sphérique. Typiquement : une lentille convexe en verre crown et une lentille concave en verre flint.

Rappeler le niveau au début et les pré-requis à l'oral au début. Le plasma dilué dépend en fonction du jour ou de la nuit. Change d'un facteur 5.

Les trucs qu'ils ont déjà vu que l'on veut juste rappeler, faire une slide.

Introduire clairement la notion de dispersion.

Expliquer clairement pourquoi prend un paquet d'onde : OPPH pas physique. Pas faire le calcul. Mettre sur un transparent. Comme ça reste sur le commentaire physique ! Conseil, simulation en python. Introduire de la vitesse de groupe après l'introduction du paquet d'onde.

Transition entre partie plus théorie et exemple, dire que la dispersion peut provenir de milieu ou des conditions aux limites. On prend un exemple de MILIEU dispersif (plasma ou autre). Pour le plasma, c'est easy de faire le PFD.

Pour les notations en complexe, préciser clairement si complexe ou non (bar, ...).

Justifier que localement neutre toujours prend du temps. Donc travailler sur B.

Commentaires

Faire ressortir les messages importants : Dans une leçon sur la dispersion, important de dire que la dispersion peut être générée par le milieu ou par les conditions aux limites. Important de dire en introduction que on se focalise que sur les milieux dispersifs. Dire que la dispersion déforme le signal. Un milieu est dispersif pour un paquet d'onde donné. Analogie avec l'éléctricité/filtrage peut être intéressante pour dire que ça dépend de la fréquence de la porteuse par exemple.

Intro sur arc en ciel bien. Peut aussi parler des problèmes liés aux télécommunications.

On peut traiter les milieux ohmiques pour parler d'effet de peau et d'atténuation.

Alternative : relation de Rayleigh, dispersion normale/anormale. Ondes hydrodynamiques, BUP ondes gravitocapillaires. Chaine de pendules

Biblio : Garing (ondes mécaniques, diélectriques). H prépa sur le plasma. Dunod ancien programme pour la vitesse de groupe.

La vitesse de groupe peut être négative au voisinage de zones d'absorption.

Passage

Prérequis : Electromagnétisme. Ondes (équation de d'Alembert et solutions). Optique géométrique.

Plan

Intro : arc-en-ciel (photo). Schéma d'une goutte et de un rayon bleu et un rayon orange/rouge incidents. Rayon rouge réfracté/réfléchi/réfracté plus haut que le rayon bleu. Puis schéma avec un observateur. Il voit le bleu d'une goutte plus basse que celle du rouge. Couleurs réfractées de manières différents i.e. $n(\lambda)$. On va voir comment n dépend de la longueur d'onde avec une manip de laboratoire.

I)Construction d'un arc-en-ciel. 1)Montage. Spectre en sortie d'un goniomètre et d'une lampe Hg $\rightarrow$ on voit plusieurs raies. Rappels sur le prisme vu en optique géométrique, minimum de déviation (diapo avec schéma et notation). $A = r + r'$, $D = i + i' - A$ alors $n = \frac{\sin((A+Dm)/2)}{\sin(A/2)}$. Relation empirique de Cauchy : $n(\lambda) = A + B/\lambda$. Manip : prendre le dernier point au goniomètre pour fitter A et B.

II) Propagation d'un paquet d'onde. 1) Vitesse de phase et vitesse de groupe. Pour les solutions de l'équation de d'Alembert : $v_\phi = \pm c = \omega/k$. Développement limité de ω_k autour de k_0. Définition de la vitesse de groupe. Diapo. Ecrire la forme du paquet d'onde (comme dans le cours de Jérémy). porteuse x enveloppe : faire un petit schéma qui met en avant vitesse de phase et vitesse de groupe. 2) Étalement du paquet d'onde. Dans le DL de $\omega(k)$, l'ordre 1 est la vitesse moyenne, les ordres supérieurs sont les termes d'étalement. Encore une fois, petit schéma illustratif de l'étalement.

III) Exemple : un plasma. 1) Établir la relation de la dispersion. Haute atmosphère : densité de $n = 10^{12}\text{m}^{-3}$, plasma intersidéral : $n = 10^4\text{m}^{-3}$. Hypothèses : ions fixes (par rapport aux électrons). Agitation thermique et poids négligés. Homogène et localement neutre. $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Utilise equations de l'électromagnétisme pour exprimer k en fonction de ω (cf cours d'électromagnétisme). Schéma de k en fonction de ω. 2) Plasma intersidéral. $n_e = 2.8 \cdot 10^4\ \text{m}^{-3}$, $L = 10^9$ années lumières. $\lambda_1 = 0.4\mu\text{m}$, $\lambda_2 = 0.8\mu\text{m}$ trouve un $\omega_p \approx 9.3 \cdot 10^3 rad/s$. On cherche un δt entre les deux longeurs d'ondes : $\delta t = L(1/v_{g2} - 1/v_{g1} \approx 1.9 \cdot 10^{-13} s$.