LP 31 – Presentation de l'optique géométrique à l'aide du princip

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✍ *Le nom du livre*, **l'auteur** [1]

⟶ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➢ prérequis

Expériences

☕ Biréfringence du quartz

Table des matières

1 Cadre de l'optique géométrique **3**
1.1 L'optique géométrique et rayon lumineux . . . 3
1.2 Chemin optique . . . 4
1.3 Principe de Fermat énoncé . . . 4

2 Lois de l'optique géométrique **4**
2.1 Propagation en ligne droite dans un milieu homogène . . . 4
2.2 Retour inverse . . . 5
2.3 Lois de Snell-Descartes . . . 5

3 Apports du principe de Fermat **6**
3.1 Equation des rayons lumineux. Eikonale . . . 6
3.2 Analogie mécanique . . . 6
3.3 Mirages . . . 6
3.4 Fibre optique à gradient d'indice . . . 7
3.5 Stigmatisme. . . . 8

Préparation

Demander la manip de stratification du sel avec laser. Demander laser + diaphragme. Choper les photos du Houard.

A Préparation

Jury : Il faut faire le lien avec l'optique ondulatoire (Malus par exemple)

Ressources : diverses expériences d'optique géométrique https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI

Plan : l'analogie mécanique est assez anecdotique, on peut s'en passer. Il faut amener les exemples le plus tôt possible.

Passage : bien distinguer les chemins optiques (AB) de la longueur AB.

Question : fonction eïkonale S(r) (cf. ma fiche d'optique), théorème de Malus (grad S=nu), construction de Huyghens (1/n, westbrook, vidéo), Loi de Gladstone $n-1=\mathrm{K}\rho$ (empririque), relation de clausius mossotti, interprétation du stigmatisme avec le principe de Fermat (tous les chemins sont stationnaires)

A l'eau : Lire le portelli pour les mirages + analogie mécanique + fibre à gradient d'indice.

Message

On peut réécrire les lois de l'optique géométrique comme découlant d'un principe variationnel, qui contient toute l'optique géométrique.

Introduction

Certaines lois de l'optique géométrique, comme la réflexion sur un miroir plan sont connues depuis l'antiquité. D'autres comme la réfraction sur un dioptre séparant deux milieux ont été découvertes plus tard au 17ème siècle par Snell et Descartes.

Lois de la réflexion et de la réfraction
On montre la vidéo (mettre sur pause) : https://youtu.be/J22D4tQu5GI?t=22. On voit un faisceau réfléchi et réfracté. Les lois de l'optique géométrique permettent de prédire les angles.

Critiquant la rigueur de la démarche de Descartes, Fermat (1601-1671) travaille aussi sur le sujet et énonce dans sa Synthèse sur les réfractions, le principe d'économie naturelle : "La nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples".

Objectif Dans cette leçon, nous allons utiliser le principe de Fermat pour retrouver l'optique géométrique connue. On va aller plus loin en proposant une équation des rayons lumineux dans un milieu à indice continument variable pour l'appliquer à la fibre gradient d'indice.

1 Cadre de l'optique géométrique

1.1 L'optique géométrique et rayon lumineux

Optique géométrique L'optique géométrique s'appuie sur le modèle du rayon lumineux et ne fait pas d'hypothèses sur la nature de la lumière. A la place, on utilise des règles issues d'observations empiriques (i) propagation rectiligne dans un milieu homogène (ii) retour inverse (iii) lois de Snell-Descartes de la réflexion et réfraction pour un dioptre.

Lien avec l'électromagnétisme, approximation de grandes longueurs d'ondes L'optique géométrique peut se retrouver à partir des lois de l'électromagnétisme dans l'approximation des milieux lentement variables : : les variations des amplitudes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ainsi que les variations de ϵ_r et μ_r sont très lentes à l'échelle de la longueur d'onde λ. Plus compactement, $|\nabla A| \ll A/\lambda$ avec A qui vaut $\vec{E}$,$\vec{B}$, ϵ_r et μ_r. *Et hypothèse d'indépendance des rayons lumineux ou encore milieu linéaire, sinon relation de constitution non-linéaire.*

Rayon lumineux En électromagnétisme, il a été vu que l'énergie se propage selon le vecteur de Poynting. On peut alors définir un rayon lumineux comme une ligne en tout point tangente au vecteur de Poynting. On fait un petit dessin

Expérience
Un Laser, un diaphragme, un écran et un peu de poussière de craie. On peut se faire une idée de ce qu'est un rayon lumineux avec un laser. https://www.youtube.com/watch?v=F_ewMFdd34A#t=0m19s. On voit le laser grâce à la diffusion par les poussières de craies. Quand le diaphragme est grand ouvert, le rayon laser se propage bien droit, comme le prévoit l'optique géométrique. Mais il faut garder en tête que le laser a une structure gaussienne et en particulier une extension non nulle. Si on réduit la taille du diaphragme essayer d'isoler un rayon lumineux, on voit apparaître la diffraction : https://youtu.be/9D8cPrEAGyc?t=2

Limites :L'optique géométrique est insuffisante pour décrire la diffraction et les effets de polarisation. Elle ne permet pas de calculer des flux, des puissances et ne dit rien sur la nature physique de la lumière ou son interaction avec la matière.

1.2 Chemin optique

Ce ne sont que des rappels, il faut passer vite

Indice optique Dans un milieu d'indice réel n, la lumière se propage à une vitesse $v = c/n < c$ plus faible que celle de la lumière. On définit alors le chemin optique comme un temps de vol multiplié par c.

Bonus : indice optique en électromagnétisme $n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega) \times \mu_r(\omega) = [1 + \chi_e(\omega)] \times [1 + \chi_m(\omega)]$ où χ_e et χ_m sont les coefficients de réponse du milieu aux excitations électromagnétiques (théorie de la réponse linéaire appliquée aux milieux matériels).

Temps de vol Pour deux points A et B reliés par un chemin $\mathcal{C}$, le temps de vol est physiquement le temps mis par la lumière pour aller de A à B. Un schéma et un calcul sont sur fiche.

Chemin optique On définit alors le chemin optique.

1.3 Principe de Fermat énoncé

Le principe de Fermat s'énonce : entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est stationnaire (par rapport à des chemins fictifs voisins)

Bonus : principe de Fermat en milieu anisotrope Le principe de Fermat n'est pas valable, à strictement parler, dans un milieu anisotrop mais il peut se généraliser : c'est le principe de Fermat-Grandjean.

Bonus : limites du principe de Fermat Le principe de Fermat de décrit pas les effets de polarisation (cf. isolateur optique et retour inverse).

Principe variationnel Le principe de Fermat est un principe variationnel, comme en mécanique analytique : pour trouver la trajectoire $\mathcal{C}$ de la lumière, il faut rendre stationnaire l'intégrale qui définit le chemin optique *i.e.* trouver $\mathcal{C}$ tel que $dL = 0$ Ecrire cf. fiche et faire un beau dessin pour la ligne droite. Dans le formalisme Lagrangien, le chemin optique est une action effective (elle n'a pas l'unité d'une action énergie×temps), à une reparamétrisation près, l'indice optique joue le rôle de Lagrangien.

Bonus : comment la lumière chosit-elle le bon chemin ? La lumière, en tant qu'onde, parcourt tous les chemins, mais les interférences sont destructives partout où le chemin optique, qui est lié à la phase de l'onde, n'est pas stationnaire. À noter que c'est aussi l'idée de l'intégrale de chemin en mécanique quantique : on somme sur tous les chemins possibles entre état initial et final, et les interférences constructives se font sur la trajectoire classique.

Stationnaire vs extrémal vs minimal Attention, stationnaire ne signifie pas extrémal et encore moins minimal. On peut aborder ce point après les lois de la réflexion, on considérant des miroirs concaves et convexes. On montre des exemples et schémas de chemins optiques minimal, non minimal.

↓ *On a maintenant défini le cadre de l'étude et le principe fondamental qui va nous permettre de démontrer les lois de l'optique géométrique*

.

2 Lois de l'optique géométrique

Le principe de Fermat contient les lois de l'optique géométrique.

2.1 Propagation en ligne droite dans un milieu homogène

Application : la ligne droite On sait tous que lorsqu'on est pressé et qu'on court en terrain plat, le chemin le plus court est la ligne droite *en espace plat.*. Ainsi, on retrouve que la lumière se déplace en ligne droite dans un espace homogène.

Propagation en ligne droite dans un milieu homogène En milieu homogène, le chemin optique est proportionnel se réduit à la longueur géométrique du chemin. En espace plat, la plus petite distance entre deux points est le segment qui relie les deux points. On le formalise. Dans un milieu homogène, la lumière se propage donc en ligne droite. *Pour le montrer, on peut écrire* $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx$ *puis les équations d'Euler-Lagrange associées, ce qui revient à montrer l'iconale avec* $n = cte$*..*

2.2 Retour inverse

Les chemins optiques pour le trajet aller ou le trajet inverse sont égaux. On fait le calcul. Si l'un est stationnaire, l'autre aussi. Ce qui était un postulat précédemment est ici une conséquence du principe de Fermat.

Bonus : violation du retour inverse avec effet Faraday et isolateur optique En effet, l'optique géométrique ne dit rien sur la répartition du flux.

L'effet Faraday est un effet magnéto-optique qui apparaît dans la plupart des matériaux diélectriques transparents lorsqu'ils sont soumis à des champs magnétiques. L'effet Faraday est le résultat d'une résonance ferromagnétique. Cette résonance implique qu'en décomposant la polarisation de la lumière en deux polarisations circulaires tournant en sens contraire, ces deux composantes se propagent à des vitesses différentes, donnant ainsi un pouvoir rotatoire au matériau. Il apparaît alors un déphasage entre ces deux composantes. La conséquence principale est qu'un rayon lumineux entrant avec une polarisation rectiligne dans le milieu considéré ressort avec une orientation de sa polarisation différente.

Pour l'effet Faraday, la différence d'indice est proportionnelle à l'amplitude (algébrique) du champ appliqué B et alors $\alpha = VBe$ avec V la constante de Verdet, dépendant du matériau. **ODG:** $V = 0.004$rad/T/mm quartz, $V = 0.1$rad/T/mm flint, $V = 0.009$ rad/T/mm benzène.

Contrairement à un milieu optiquement actif, l'effet sur la polarisation de l'onde est donc différent si l'onde se propage selon les z croissants ou les z décroissants. En fait, la polarisation tourne toujours d'un angle θ_0 autour de l'axe orienté dans le sens de B.

On peut réaliser un isolateur optique. On place deux polariseurs orientés à $\pi/4$ dans un milieu optiquement actif dont la longueur est ajustée pour que la polarisation tourne d'un angle $\pi/4$. En arrivant dans un sens, la lumière est transmise. En arrivant dans l'autre, elle est coupée. Application : limite l'effet des signaux réfléchis dans une fibre optique, permet à la lumière de sortir d'un laser tout en éviter qu'elle repénètre dedans.

On peut donner un modèle avec l'électron élastiquement lié où on rajoute la partie magnétique de la force de Lorentz en $\vec{f} = \pm\omega B_0 \vec{r}$, où le signe dépend du sens de rotation de la distribution de charge donc de la polarisation incidente. En calculant la polarisabilité dans les deux situations, on remonte pour les milieux dilués à $n^2 = 1 + \chi = 1 + N\alpha_p$ où α_p est la polarisabilité. En faisant la différences pour les deux polarisations possibles, on obtient le pouvoir rotatoire $\alpha \propto 1/\lambda^2$ pour les diélectriques où $\omega \ll \omega_0$ et $\alpha \propto \lambda^2$ pour les plasmas où $\omega \gg \omega_0$.

2.3 Lois de Snell-Descartes

Les deux propriétés précédentes découlent facilement du principe de Fermat, il reste encore des propriétés importantes vues dans le cadre de l'optique ondulatoire et démontrées dans le cadre de l'optique ondulatoire : les lois de Snell-Descartes.

Enoncé des lois de Snell-Descartes À la surface de séparation de deux milieux transparents et homogènes d'indice n_1 et n_2, appelée dioptre, une partie de la lumière est réfléchie et une autre est transmise (on parle de réfraction). Les lois de Snell-Descartes sont : On les projette

1. le rayon réfracté et le rayon réfléchis sont dans le plan d'incidence
2. $\theta_r = -\theta_i$
3. $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$

Illustration numérique de la loi de la réflexion
On fait une approche numérique avec le script "fermat_reflexion.py", ici pour illustrer. On fera une approche analytique pour la réfraction. En faisant bouger le slider, on voit que $\theta_1 = -\theta_2$ réalise un point de minimum donc de stationnarité.

Démonstration variationnelle de la loi de la réfraction On va démontrer les lois de la réfraction. on fixe A et B tel que $z_A = z_B = 0$ sans restreindre la généralité du discours et que les paramètres pour caractériser les trajets possibles entre A et B sont gouvernés par les coordonnées (x, z) d point d'incidence I. Comme les milieux 1 et 2 sont homogènes, la trajectoire des rayons lumineux est droite. On minimise L par rapport à x et y. La nullité de la dérivée du chemin optique par rapport à Z conduit à $z = 0$ ce qui correspond à la première loi de Descartes, à savoir que le rayon réfracté est situé dans le plan d'incidence ; la deuxième relation correspond quant à elle à $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ C'est le choix du sauveteur sur la plage. *On peut rappeler que les lois de Descartes se démontren à partir des conditions aux limites sur* $\overrightarrow{D}$ *et* $\overrightarrow{H}$ *dans l'étude du comportement d'une onde électromagnétique plane à l'interface de deux milieux*

diélectriques.

Réfraction vers le milieu d'indice élevé Un résultat qualitatif important sur la position des rayons incident/réfracté par rapport à la normale à un dioptre en un point est plus le milieu est réfringeant, plus le rayon est près de la normale ; on peut ainsi justifier qualitativement que les lentilles convergentes sont à bords minces.

Le principe de Fermat nous a déjà permis de rebalayer l'optique géométrique, et on ne l'a appliqué qu'à des cas particuliers. On va maintenant voir que ce principe permet d'aller plus loin encore.

3 Apports du principe de Fermat

3.1 Equation des rayons lumineux. Eikonale

On veut aller plus loin que les lois de l'optique géométrique et obtenir l'équation fondamentale de l'optique, ou équation eikonale, qui n'est rien d'autre que l'équation d'Euler-Lagrange associée au principe variationnel. On rappelle les équations d'Euler-Lagrange sur diapo. Le calcul est sur la fiche

Application : propagation rectiligne On retrouve la propagation rectiligne en milieu homogène Le calcul est sur la fiche

Courbure des rayons lumineux dans une cuve stratifiée en sel
On montre la vidéo :`https://youtu.be/JzrnFYrWbT4?t=8`. il y a un gradient de concentration de sel donc un gradient d'indice. En effet, l'indice augmente avec la densité. Le rayon est courbé vers les grands indices. *Il faut taper en incidence normale, on peut faire un témoin pour montrer que ce n'est pas un effet de la pression. On fait un mirage supérieur.*

Courbure vers les grands indices En développant dans la base de Frénet, on voit que les rayons sont courbés vers les grand indicesLe calcul est sur la fiche

Bonus : eikonale en sismologie Cette équation est aussi utilisée en sismologie pour estimer la trajectoire des rais sismiques.

3.2 Analogie mécanique

✍ Portelli

Anlogie mécanique Puisque la mécanique classique et l'optique géométrique sont décrits par des principes variationnels, on peut dégager une analogie entre les équations d'Euler-Lagrange associées. L'analogie pousse donc à décrire la trajectoire du rayon lumineux comme celle d'une particule newtonienne fictive de masse unité, de "vitesse" n soumise à la force $F = grad(n^2/2)$. La « force » qui dévie un rayon lumineux est reliée à la variation de l'indice optique du milieu.

Direction et sens de la force La déviation se fait dans le sens de l'augmentation de la valeur de l'indice.

Analogue du principe d'inertie On remarque que dans un milieu homogène, $grad(n^2) = 0$ et aucune « force » ne vient perturber la trajectoire d'un rayon lumineux. Celui-ci a donc une trajectoire rectiligne. On retrouve ici une analogie avec le principe d'inertie ! Cette analogie entre l'optique et la mécanique servira grandement à l'interprétation des phénomènes que nous verrons par la suite : la propagation d'un signal dans une fibre optique et les mirages.

Bonus : profil linéaire d'indice optique et chaînette On peut faire l'analogie entre une chaînette dans un champ gravitationnel uniforme et un rayon lumineux dans un milieu de gradient d'indice uniforme (cf. Portelli) : le profil adopté est un cosinus hyperbolique.

3.3 Mirages

✍ Houard.

Mirage optique Les mirages optiques peuvent se manifester lorsqu'il existe un variation continue de l'indice optique à l'intérieur d'une couche d'air ou d'un matériau transparent. On montre des photos du Houard. Lorsque des pinceaux de rayons lumineux se croisent, c'est qu'il y a mirage. Les paramètres importants sont le gradient de

température et la hauteur des yeux de l'observateur.

Bonus : loi de Gladstone Il faut être capable de justifier la loi de Gladstone $n - 1 = \mathrm{K}\rho$ qui gouverne l'indice d'un milieu dilué (et se déduit de la relation plus générale de Clausius-Mosotti). Par ailleurs, il faut bien préciser que pour exploiter la loi de Gladstone, on se place dans le cas où la pression atmosphérique est uniforme (car l'équilibre mécanique est atteint avant l'équilibre thermique). La relation de Gladstone peut se déduire de la relation de Clausius-Mossotti pour un indice proche de 1, qui se montre en exprimant le champ local.

Variation d'indice optique Dans l'air, la variation d'indice peut être due à la variation de température (altitude faible) ou variation de pression (haute altitude).

Mirage inférieur, supérieur On voit une image renversée tronquée. Si elle est au-dessous de l'image droite, c'est un mirage inférieur. Si elle est au-dessus, c'est un mirage supérieur.

Mirages inférieurs C'est le cas le plus fréquent, rencontré dans le désert et l'été sur le bitume. Le bitume ou le sable sont chauffés par le soleil. Il s'établit un gradient de température donc un grandient de densité donc un gradient d'indice optique. **ODG:** un gradient que quelques degrés par mètre suffit.

Mirages supérieurs Ils se produisent lorsque le gradient de température est orienté vers le haut, par exemple au contact d'une nappe d'eau. Cela peut se produire en fin d'après-midi ensoleillé, où l'eau se réchauffe plus lentement que le soleil à cause de son inertie thermique.

3.4 Fibre optique à gradient d'indice

✍ ma fiche, TD Montrouge (Sayrin), fiche sur les guides d'onde, plan corentin, Pérez.

Utilisation des fibres optiques On utilise les fibres optiques en communications (internet), endoscopie, fibroscopie.

Position du problème et objectif On connaît la fibre à saut d'indice. Typiquement, $\Delta = n_1^2 - n_2^2/2n_1$ et $n_1 = 1.5$. On considère une fibre à gradient d'indice avec un profil $n^2(r) = n_1^2\left(1 - 2\Delta\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right)$ en gardant les mêmes paramètres. Faire un schéma. Le signal est-il guidé ? Le débit maximal est-il amélioré par rapport à une fibre à saut d'indice ?

Calculs Ils sont sur la fiche et sur le TD de C. Sayrin.

Ordre de grandeur La plupart des fibres sont en silice, et la porteuse est à 1550 nm. Aujourd'hui, les fibres optiques atteignent des débits de 1 Tb/s = 10^{12}b/s.

Ouverture numérique Pour que le signal se propage, il faut que $r_{\max} < r_1$, soit $\sin\alpha_0 < \sqrt{2\Delta}$, soit finalement $\sin\alpha < n_1\sqrt{2\Delta} = \mathrm{O.N.}$. C'est l'analogue de la condition d'entrée dans la fibre optique à saut d'indice. On retrouve donc la même valeur que dans la fibre à saut d'indice : l'intérêt d'une fibre à gradient d'indice ne réside donc pas dans l'ON.

Elargissement du signal En considérant une impulsion lumineuse, un câble de longueur 10m, l'élargissement $\Delta t'$ de cette impulsion à la sortie d'une fibre à gradient d'indice de longueur L est donnée par

$$\Delta t' = \frac{n_1 L}{c}\left(\frac{1}{2\cos\theta_0} - 1 + \frac{\cos\theta_0}{2}\right)$$

où θ_0 est l'angle maximal d'entrée dans la fibre. On admet l'expression. Pour la calculer, il faudrait calculer le temps de parcours de la lumière sur un "sinus", en intégrant $\int n(z)r'(z)\mathrm{d}z$. On donne juste le résultat. On fait l'application numérique pour $L = 10$m et $\theta_i = 8°$. $\Delta t' = 0,4610^{-12}s << \Delta t = 0.22$ ns pour une fibre à saut d'indice avec les mêmes paramètres $\Delta = n_1^2 - n_2^2/2n_1$ et $n_1 = 1.5$ l'élargissement est beaucoup plus faible que dans une fibre à saut d'indice, d'où l'intérêt des fibres à gradient d'indice (qui ne réside pas dans l'O.N) pour le transport d'information avec des hauts débits.

Applications de la fibre à gradient d'indice Comparé à la fibre optique à saut d'indice, cela permet d'avoir un degré de liberté supplémentaire dans la conception de la fibre, ce qui permet de réduire réduire la dispersion. On peut choisir le profil d'indice $n(x)$ dans la fibre pour que la dispersion chromatique $n(\lambda)$ compense la dispersion due à la relation non linéaire entre ω et k, au voisinage de la longueur d'onde de travail, qui est souvent un minimum (local) d'absorption. *On essaie de créer les conditions pour propager un soliton optique.*

3.5 Stigmatisme.

Le stigmatisme des systèmes centrés démontré dans les conditions de Gauss comme conséquence du principe de Fermat (polynôme d'ordre 2 en fonction de l'inclinaison par rapport à l'axe optique et de la hauteur sur le dioptre. Foyers d'un miroir elliptique. Exemple : dans certains lasers, la lampe flash et le milieu amplificateur sont mis aux deux foyers d'un miroir elliptique (voir Optique instrumentale, optique de Fourier - J. Sur- rel, Ellipses, 1996). Plus clas- siquement, on a aussi les applications des miroirs paraboliques (paraboles de télévision, miroirs avec fluide en rotation en astronomie, phares de voitures).

Conclusion

Le principe de Fermat a été énoncé (et reformulé) sous la forme d'un principe variationnel : lorsqu'un rayon lumineux se déplace dans un milieu donné, le chemin optique est stationnaire. Cet énoncé a permis (comme d'autres principes variationnels du même type après lui dans des domaines différents) de retrouver les lois de l'optique géométrique. Les principes variationnels se sont pas souvent à l'origine d'une découverte dans un domaine de la physique, mais ouvrent plutôt à un nouveau formalisme qui en facilite la description ou bien permettent de consolider un modèle en décrivant les mêmes phénomènes par une autre voie de calcul ou de raisonnement. Il est à noter que le principe de Fermat ne s'arrête pas à l'optique géométrique, on peut faire le lien avec l'optique ondulatoire en interprétant le chemin optique dans le cadre d'une OPPH, le chemin optique s'identifie avec le déphasage subit par l'onde lors de sa propagation. Le principe de Fermat permet alors de démontrer aussi le théorème de Malus ou le stigmatisme approche. [Avec l'eikonale, on peut même retrouver une partie des résultats sur la polarisation. (b Dettwiller pp 63-66).]

On peut souligner que le principe de Fermat ne fait que sélectionner les trajectoires possibles pour la lumière – sans préciser comment la répartition du flux s'effectue entre elles.

Ouverture : En utilisant le principe de Fermat, il est également possible de réinterpréter le stigmatisme : tous les rayons issus d'un point A et atteignant le système optique passent par B, par stationnarité, le chemin optique doit être constant. Il est aussi possible de montrer le théorème de Malus (Pérez p22) et faire le lien avec l'optique ondulatoire.

Ouverture : approche EM Avec une approche EM dans les milieux lentement variables, on retrouve les lois de Descartes, l'iconale...

Compléments/Questions

[Houard] Réfraction atmosphériques, aplatissement du soleil, rayon vert, parhélies, halos.
Loi de Gladstone

Passage

Plan

On a vu l'optique géométrique dans des milieux homogènes : les rayons lumineux sont rectilignes. On a aussi vu la loi de Snell Descartes qui permet de passer d'un milieu homogène à l'autre.

Cependant, dans la nature, les milieux ne sont pas homogènes et les rayons ne vont pas tout droit, comme dans les mirages. Dans cette leçon on va donc prendre en compte la courbure des rayons.

I) Principe de Fermat.

1) Définition Dessin. Trajectoire $\mathcal{C}$ de A vers B. Vecteur tangent $\vec{u}$, $\vec{u} = d\vec{r}/ds$. Chemin optique $L(AB, \mathcal{C}) = \int_{AB} nds$. Interprétation en terme de temps de propagation.

Définition de la stationnarité d'un chemin. Le chemin optique est stationnaire en $\mathcal{C}$ si $\delta L = L(\mathcal{C}') - L(\mathcal{C}) \ll \|\delta\vec{M}\|_{sup}$. $\delta L/\|\delta M\| = 0$ au premier ordre.

2) Principe de Fermat : le trajet effectué par la lumière réalise un chemin optique stationnaire. Interprétation : la lumière tend à extrémaliser le temps de propagation δt. On retrouve la propagation rectiligne en milieu homogène.

C'est un principe variationnel.

II) Lois de l'optique géométrique.

1) Retour inverse de la lumière. (comme dans le cours)

2) Différentielle du chemin optique en milieu homogène. $AA' = dA$, $BB' = dB$, $\vec{u} = \vec{u}'$ au premier ordre ? (nan ça se simplifie dans la différence) $dL = n(d\vec{B} - d\vec{A})\vec{u}$.

3) Loi de Snell Descartes (réfraction). Le sauveteur qui court sur le sable. [Calcul sur Laura].

Le principe de Fermat permet de retrouver les lois usuelles de l'optique géométriques qu'on a vues en milieu homogène.

4) Loi fondamentale de l'optique géométrique équation eikonale. On applique Snell-Descartes à une interface entre un milieu d'indice n et un autre d'indice $n+dn$. Approche de Victor : appliquer Snell-Descartes localement, manipuler les équations. Autre approche : Euler-Lagrange.

Les rayons tendent à se rapprocher d'indice élevé. On pourrait dire que les rayons veulent passer par les milieux lents donc va maximiser son temps de parcours. Non,

III) Applications. 1) Cuve à gradient d'indice. Manip : cuve avec du sel sédimenté, on rajoute de l'eau par-dessus. On les ajoute doucement pour ne pas avoir de mélange. L'indice optique dépend de l'altitude. On éclaire avec un laser et ça courbe.

On pourrait calculer la déviation des rayons dans la cuve. Mais il faudrait se donner une forme du profil d'indice. Le gradient d'indice serait aussi inhomogène. Bof on va faire autre chose.

2) Lentille. Calcul du profil que doit avoir une lentille pour conjuguer deux points A et A'. Calcul sur diapo, dans les conditions de Gauss. On veut que le chemin optique soit stationnaire pour tous les points d'entrée de la lentille et donc on veut qu'il soit constant. Calculer le chemin optique en fonction de l'ordonnée d'entrée $L(z, e(z))$. On trouve $e(z)$ avec la condition $L(z, e(z)) = cst.$. On retrouve une forme parabolique. C'est comme les sphères à l'ordre de le plus bas. Voilà pourquoi on utiliser des lentilles sphériques.

Questions

En dire plus sur l'approche variationnelle.

- Quelle équation vérifie la phase de l'onde en électromagnétisme ? $\mathbf{grad}\mathcal{S} = n\mathbf{u}$.
- Le principe du retour inverse est-il toujours valable ? En fait même si le chemin inverse est possible, le flux peut ne pas être le même (interférences). En effet, l'optique géométrique ne dit rien sur la répartition du flux. Des lasers existent tels que, si on met un miroir en sortie, la lumière ne rentre pas dans le laser ? Oui, on utilise des isolateurs optiques, utilisant l'effet Faraday (voir wiki).
- A propos de l'analogie entre mécanique et optique, comment obtient-on des équations classiques à partir de l'optique ondulatoire ? Milieu lentement variable, équation eikonale.
- Quand on traite l'optique ondulatoire en cours, on calcule aussi des chemins optiques : en quoi est-ce que cela pourrait perturber les élèves ? Quelle réponse apporter ?
- Que répondre à un élève qui demande comment la lumière fait pour choisis le « bon » chemin ?
- En dehors des problèmes de polarisation, y a-t-il des situations dont le principe de Fermat ne rende pas compte ?
- Y a-t-il des démonstrations des lois de Descartes ne faisant pas référence à un aspect ondulatoire ? Avec le principe de Fermat. Qu'est-ce que la construction de Huygens ?
- Peut-on démontrer les lois de Descartes à partir des équations de Maxwell ?
- La forme des surfaces d'onde est toujours simple ? Non, en astrophysique observationnelle, à cause de la turbulence ils sont déformés. On utilise de l'optique adapatative (miroirs déformables piézoélectriques) pour corriger.
- Pourquoi est-ce que l'indice augmente avec la concentration ? Qu'est-ce que l'indice optique ? Un champ électrique excite des dipôles $\vec{p}$ selon $\vec{p} = \alpha\vec{E}$. La polarisation volumique est $\vec{P} = \chi\vec{E}$ avec $\chi = \rho\alpha$ où ρ est la densité de nombre. La permittivité relative est $\epsilon_r = (1+\chi)$. Alors $n = Re(\sqrt{\epsilon_r})$. L'indice optique traduit donc la réponse dipolaire du milieu à un champ électrique. Plus il y a de dipôles par unité de volume, plus le milieu répond.
- Questions sur le système avec la lentille : pourquoi chemin optique constant pour différents rayons alors que avant on le faisait pour des différences infinitésimales ? Le système est-il rigoureusement stigmatique ou approximativement stigmatique ? Rappel des conditions de Gauss. Quel est le lien avec les formules de conjugaison ?
- Donner un exemple de chemin stationnaire mais non minimal ? Cas d'un miroir elliptique (voir wikipedia pour un schema), on peut avoir un chemin optique maximal.
- Comment convaincre un élève qu'on ne peut pas isoler un rayon lumineux ? On essaie et on est confronté à la diffraction.
- Qu'est-ce qui se passe si la longueur d'onde est très petite devant la largeur de la fente ? (ça passe pas) Pourquoi dans ce cas y a t-il des petits trous dans un four à micro ondes ? Because the size of the perforations in the mesh is much less than the microwaves' wavelength (12.2 cm for the usual 2.45 GHz), microwave radiation cannot pass through the door, while visible light (with its much shorter wavelength) can.

- Si le chemin optique est noté avec les bornes A et B, on peut croire que celui-ci ne dépend que des bornes, existe t-il une autre notation ? (intégrale sur le chemin C)
- Le chemin optique est-il défini algébriquement ?
- Dans la formule n = c/v , quel type de vitesse ? (vitesse de phase ?)
- Exemples de phénomènes avec chemin stationnaire maximal, minimal et quelconque ?
- Pourquoi la température au niveau du sol est plus élevée quand dans l'air ? Conditions de stabilité de l'atmosphère ?
- Quelles sont les positions des images dans les mirages supérieurs et inférieurs ? (notion d'image renversée)
- Meilleur définition d'un rayon lumineux ? (direction du vecteur de Poynting)
- Un laser peut-il être considéré comme une source ponctuelle ? Qu'émet une source ponctuelle comme type d'onde ? Quel type d'onde émet un laser ? Après quelques longueurs de Rayleigh, le faisceau gaussien peut être considéré comme sphérique.
- Peut-on imaginer une optique atomique ?
- Peut-on retrouver la relation de conjugaison 1/p'1/p- =1/f' à partir du principe de Fermat, et si oui, comment procéder ? (Question qui pourrait légitimement être posée par un étudiant, qui raisonne à partir de ce qu'il sait).
- Historique de la notion de lumière ? Quelles sont les conceptions actuelles ? (Attention à ne pas dire trop de bêtises sur la dualité onde-corpuscule, c'est un peu plus subtil que tantôt une onde, tantôt un corpuscule selon ce qui nous arrange, le couplage avec un observateur inter- vient.)
- À quelle(s) propriété(s) du milieu l'indice optique est- il relié ? Est-il possible de démontrer la relation de Gladstone ? Oui, c'est la relation de Clausius-Mossotti pour un indice proche de 1, qui se montre en exprimant le champ local.
- En sortant du cadre de la leçon, comment définir le rayon lumineux ? Les rayons sont les lignes du vecteur de Pointing moyen.
- Comment la lumière choisit-elle le bon chemin ? Expliquer le principe de Fermat physiquement. La lumière, en tant qu'onde, parcourt tous les chemins, mais les interférences sont destructives partout où le chemin optique, qui est lié à la phase de l'onde, n'est pas stationnaire. À noter que c'est aussi l'idée de l'intégrale de chemin en mécanique quantique : on somme sur tous les chemins possibles entre état initial et final, et les interférences constructives se font sur la trajectoire classique. C'est aussi le cas en théorie des grandes déviations où le chemin le plus probable (instanton) minimise l'action de Freidlin-Wentzell.
- Autres exemples de formulation variationnelle ? Mécanique analytique, théorie des champs, théorie des grandes déviations (action de Freidlin-Wentzell).
- Y a-t-il d'autres hypothèses en optique géométrique que celles présentées ? Indépendance des rayons lumineux. (?)
- Est-ce vraiment pour des raisons de pertes que l'on préfère les fibres à gradient d'indice ? Non, c'est pour des raisons de dispersion. Le profil d'indice permet de composer une partie de la dispersion de mode.
- Fluorescence, phosophorescence.
- Est-ce qu'on peut toujours voir un mirage inférieur ? Il existe une distance minimale pour voir un mirage inférieur fixée par le prolongement du rayon qui subit une réflexion totale sur le sol.
- Le principe de Fermat est-il encore valable dans un milieu anisotrope ? À strictement parler, non, mais il peut se généraliser : c'est le principe de Fermat-Grandjean (?)
- Comment expliquer les mirages gravitationnels ? (cf optique gravitationnelle et la fameuse mesure de Eddington en 1919, lors d'une éclipse de Soleil qui a confirmé la prévision de la Relativité Générale)

Commentaires

- Attention au contrôle des ordres dans les DL.
- Préciser que dans l'optique géométrique, la longueur d'onde est petite devant les tailles du système (comme les rayons de courbure). Pour démontrer l'équation eikonale, il faut faire l'approximation des champs lentement variables.
- Dans Descartes, ne pas oublier que le rayon réfracté est dans le plan !