

LP49 – Oscillateurs, portraits de phase, non-linéarités.

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

📌 *Le nom du livre, l'auteur*¹

→ Expliciter si besoin l'intérêt du livre dans la leçon et pour quelles parties il est utile.

Prérequis

➤ prérequis

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

1	Portraits de phase	3
1.1	Notion d'espace des phases	3
1.2	Portrait de phase de l'OH et propriétés	4
1.3	Effet de la dissipation	4
2	Oscillateurs à potentiel non linéaire	5
2.1	Pendule aux grands angles	5
2.2	Enrichissement spectral	6
2.3	Perte d'isochronisme	6
2.4	Le double puits de potentiel	6
3	Oscillateurs auto-entretenus	7
3.1	Vers l'équation d'un oscillateur auto-entretenu l'équation de Rayleigh	7
3.2	L'équation de Van der Pol	9
3.3	Bifurcation et portraits de phase	9
3.4	Régime faiblement non linéaire	10
3.5	Régime fortement non-linéaire et oscillations de relaxation	10

Préparation

Biblio : Ma fiche, fiche physique NL, Strogatz (4 pages capturées), Bergé (Scholarvox), Krob, Jolidon (pendule+Borda)

Plan : 🍷 Leçon un peu abstraite sur des système dynamiques, il faut faire un max de commentaires physiques sur ce qu'on présente

Manip : logiciel pplane, enrichissement spectral, python double puits portrait de phase à visualiser, champ de vecteur pour van der pol

Passage :

Questions : solitons

Ressources Laura

- Pendule simple <http://experiences.math.cnrs.fr/Pendule-simple.html>
- http://perso.ens-lyon.fr/thomas.gibaud/pdf/bup_tg_penduleNL.pdf pour les figures
- BUP DUffait https://uhincelin.pagesperso-orange.fr/LP49_BUP_exp_oscil_meca.pdf
- <https://www.koreus.com/video/pendule-chaotique.html> Pendule chaotique.
- Animations variées : <http://experiences.math.cnrs.fr/-Systemes-dynamiques-.html>

Introduction

L'oscillateur harmonique, intérêt Le point commun de la masse accrochée à un ressort, du pendule simple en mécanique ou encore du circuit LC en électrocinétique sont qu'ils présentent des comportements oscillants. De plus, en l'absence de dissipation et aux petites amplitudes, ils peuvent être modélisés par l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Outre ces exemples en mécanique et en électronique, le grand intérêt de l'OH est qu'il représente l'approximation à l'ordre le plus bas de tout système à potentiel analytique autour d'une position d'équilibre stable *pas les potentiels en $|x|$* .

Propriétés remarquables de l'oscillateur harmonique L'OH présente des propriétés remarquables

- La période des oscillations est indépendante de leur amplitude, c'est l'isochronisme des oscillations. *C'est un cas très particulier !*
- L'énergie totale est conservée, il n'y a pas de dissipation.

Objectifs Les propriétés de l'oscillateur harmonique sont plutôt l'exception que la règle. L'objectif de cette leçon est d'aller au-delà de l'oscillateur harmonique. En effet, en général, les oscillateurs présentent des non-linéarités, ce qui les rend plus compliqués à résoudre mais ce qui rend leur comportement plus riche. Tout d'abord, on va introduire la notion de portraits de phase, ce qui va permettre la caractérisation qualitative des systèmes, mêmes non-linéaire. Ensuite, on va introduire des oscillateurs non-linéaires et montrer la variété de leurs comportements et applications (physique riche !). En particulier, on va aborder l'oscillateur de van der Pol, dans lequel la non-linéarité peut compenser la dissipation.

1 Portraits de phase

1.1 Notion d'espace des phases

Pendule simple On établit rapidement l'équation du mouvement. On considère un pendule simple. On fait les hypothèses suivantes :

- masse ponctuelle m au bout d'un fil inextensible de longueur l
- liaison parfaite et mouvement plan
- dissipation négligée (ex : frottement de l'air, liaison pivot imparfait)

On applique le TMC dans le référentiel du laboratoire, considéré galiléen, par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au plan du mouvement, passant par le point d'attache O . La force qui s'exerce est le poids, $\vec{P} = m\vec{g}$, de moment par $M_\Delta = mgl \sin \theta$. *en vérifiant bien le signe*. Le moment d'inertie est $I = ml^2$, donc on aboutit à l'équation du pendule

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

avec $\omega_0^2 = g/l$. Aux petits angles,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

c'est l'équation de l'OH.

De l'ordre 2 1D à l'ordre 1 2D L'équation de l'OH est d'ordre 2, qui est l'ordre minimal pour avoir des oscillations à 1D. Ici, la variable de l'OH est x . Cependant, x n'est pas le seul degré de liberté. En effet, pour caractériser le système, d'ordre 2, il faut spécifier sa position et sa vitesse. *C'est aussi pour cela qu'un OH compte pour deux degrés de libertés quadratiques en physique statistique*. Pour être plus fidèle à ces idées, on va se ramener à un système d'ordre 1 à deux dimensions. On définit $x = \theta$, $y = \dot{x}$. L'équation différentielle peut donc s'écrire de manière équivalente :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

On est passé d'une équation d'ordre 2 à une dimension à un système d'ordre 1 à deux dimensions. Plus généralement, on peut faire cette transformation pour n'importe quelle équation du deuxième ordre à une dimension de la forme $\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$. Une particularité de l'OH harmonique est que (x, y) et $(\ddot{x}, \ddot{y})$ sont reliés linéairement par une matrice constante : c'est le propre des systèmes linéaires.

Définition de la linéarité Informellement, dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause. Le système ne comporte que des termes linéaire. Plus formellement, un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition : si s_1 et s_2 sont des solutions associées éventuellement à des entrées e_1 et e_2 (pour l'OH, $e = 0$), alors $\lambda s_1 + \mu s_2$ sont solutions. 🚫 **A partir de maintenant, dans cette partie, on travaille en grandeurs x adimensionnées. Il faut imaginer que x est un angle pour le pendule, une longueur pour un système masse-ressort ou une tension électrique.**

Plan de phase L'état du système est donné par sa position et sa vitesse. Ainsi, à chaque état du système correspond un point dans le plan (x, y) appelé plan de phase (plus généralement espace des phases). En évoluant, le système décrit une trajectoire dans le plan de phase appelée trajectoire de phase. L'ensemble des trajectoires de phases que peut décrire le système forme son portrait de phase.

Simulation du plan de phase de l'OH harmonique

On montre le script 1, pour avoir une idée de quoi cela ressemble. On va montrer comme on le démontre dans la partie suivante. Pour l'OH amorti, le portrait de phase est une ellipse. On fait la correspondance entre système dans l'espace réel et espace des phases. Quand $\theta = 0$, le système est sur l'axe vertical $x = 0$ dans l'espace des phases. Quand le pendule rebrousse chemin, $y = \dot{\theta} = 0$ et le système est sur l'axe horizontal.

Sens de parcours L'ellipse est parcourue dans le sens horaire : en effet, si $y = \dot{x} > 0$, alors x augmente donc il n'y a qu'un sens de parcours possible.

Intérêt du plan de phase Quel intérêt ? Le plan de phase remplace les formules de $x(t)$ et $y(t)$ par un graphe $y(x)$. L'aspect temporel des trajectoires devient légèrement plus caché : le temps est devenu un paramètre implicite. Cependant, puisque dans le plan de phase se trouvent toutes les trajectoires, on peut visuellement avoir un aperçu qualitatif du comportement du système. Ce type de représentation joue un rôle capital, notamment dans l'étude de systèmes plus compliqués où la résolution analytique des équations différentielles n'est pas possible.

↓ On va manipuler cette notion.

1.2 Portrait de phase de l'OH et propriétés

Portrait de phase de l'OH : trajectoires elliptiques Pour l'OH, on obtient son portrait de phase avec un bilan d'énergie. En multipliant l'équation d'évolution par $\dot{x}$ et en intégrant, on obtient $\frac{\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 \frac{x^2}{2} = E$, qui est l'équation d'une ellipse. 🚫 **On travaille en grandeurs adimensionnées, l'énergie peut être cinétique, potentielle de pesanteur, électrique...** C'est caractéristique de l'OH.

Trajectoires fermées Lorsque la trajectoire est fermée, l'évolution du système est périodique : après un certain temps, il revient dans le même état (x, y) .

Système linéaire libre et origine L'OH est un système linéaire libre. Son unique point fixe est l'origine $(0,0)$.

Déterminisme et non-croisement On s'est ramené à un système d'ordre un : la trajectoire $x(t), y(t)$ est entièrement déterminée par les conditions initiales $x(0), y(0)$. Donc une trajectoire est déterminée par un seul de ses points. Ainsi, par déterminisme, deux trajectoires ne peuvent se croiser.

Réversibilité et symétrie L'équation de l'OH harmonique est invariant par renversement du temps $t \rightarrow -t$. Ainsi, le système est conservatif *i.e.* son énergie est conservée. Dans le portrait de phase, le renversement du temps se traduit par $y \rightarrow -y$. Ainsi, le portrait de phase est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Intérêt du portrait de phase En étudiant les propriétés du portrait de phase, on peut en déduire des informations sur le système (ou l'inverse).

1.3 Effet de la dissipation

L'OH amorti Maintenant on ajoute un terme de dissipation, par exemple de frottement visqueux avec l'air. L'équation d'évolution devient

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

. C'est le pendule pesant (petites amplitudes), la masse-ressort avec frottements ou encore le circuit RLC libre. Quel est l'effet de la dissipation sur le portrait de phase ?

Attraction vers l'origine On sait que l'ajout du terme dissipatif modifie l'évolution du système et le fait tendre vers $(0,0)$ quelles que soient les conditions initiales. On parle d'attracteur. On peut le montrer en calculant la variation d'énergie

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\dot{x}^2}{\tau} < 0$$

On peut parler de contraction des aires dans l'espace des phases.

Définition d'un attracteur Un attracteur est un sous-espace de l'espace des phases vers lequel tend tout ou partie des trajectoires de phases. Pour un système à un degré de liberté, l'attracteur peut être un point ou une courbe fermée.

Facteur de qualité et régimes transitoires

On sait qu'on peut associer un facteur de qualité à l'OH amorti : $Q = \tau\omega_0$, dont la valeur définit les régimes : pseudo-périodique pour $Q > 1/2$ qui présente des oscillations et amorti pour $Q < 1/2$ sans oscillations. On sort le code python 2 et teste différentes valeurs de Q , par exemple 10, 1/2, 0.1 : on fait le lien entre évolution temporelle $x(t)$ et portrait de phase (x, y) . Le portrait de phase permet de distinguer ces régimes de manière qualitative : si $Q > 1/2$, les oscillations temporelles se traduisent par des traversées de l'axe vertical $x = 0$. Les trajectoires s'enroulent autour de l'attracteur (on parle de spirale stable) ou non (noeud stable). On remarque également que le portrait de phase n'est plus symétrique par rapport à l'axe des abscisses, signe que le système n'est pas conservatif (et donc irréversible).

Bilan sur l'OH

On remet une couche sur les propriétés remarquables de l'OH qui ne seront plus vraies après L'OH présente des propriétés remarquables

- L'énergie totale est conservée, il n'y a pas de dissipation.
- L'OH est linéaire et donc la période des oscillations est indépendante de leur amplitude, c'est l'isochronisme des oscillations.

2 Oscillateurs à potentiel non linéaire

2.1 Pendule aux grands angles

Pendule aux grands angles On sort de l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement est alors non linéaire : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} y = \dot{\theta} \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin \theta \end{cases}$$

Aux grands angles, la non-linéarité devient importante et on observe des comportements différents de ceux vus jusqu'à présent. L'énergie potentielle vaut : $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$. Cette énergie potentielle non quadratique en θ conduit à des non-linéarités.

Mesure du portrait de phase du pendule pesant

On utilise ce lien : <http://experiences.math.cnrs.fr/Pendule-simple.html> On commence par le cas sans dissipation

Portrait de phase aux grands angles Le portrait de phase est plus complexe et plus intéressant. Lorsqu'on s'écarte progressivement des petits angles, on voit que les trajectoires se déforment et ne sont plus elliptiques. Une orbite fermée est une courbe isoénergétique. Comme l'énergie potentielle vaut : $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ et n'est pas quadratique, on n'obtient pas une ellipse.

Libration Si on lance le pendule avec une vitesse suffisante, le pendule tourne sans arrêt dans la même direction, on a un mouvement de libration. [On le montre en cliquant sur le quadrant en haut à gauche.](#)

Bonus : homocline/hétérocline Si on part d'un angle $\theta = -\pi$ qui est un point fixe, on rejoint théoriquement un autre point fixe ($\theta = \pi$) en un temps infini. On peut d'ailleurs noter que l'origine n'est plus le seul point fixe, les différents points fixes correspondent aux différents extrema du potentiel. La trajectoire correspondante dans le portrait de phase est une séparatrice, qui est une trajectoire hétérocline (c'est-à-dire qui lie deux points fixes).

2.2 Enrichissement spectral

Enrichissement spectral sur le pendule aux grands angles Sur la transformée de Fourier, un pic apparaît à 3ω , où ω est la pulsation du fondamental. Cet enrichissement spectral est une conséquence très générale de l'ajout de non-linéarités. [On fait un commentaire les paramètres d'acquisition de la transformée de Fourier, il faut échantillonner suffisamment pour respecter le critère de Shannon et acquérir sur une durée assez longue pour que les pics de fréquence soient bien résolus.](#)

Présente des harmoniques impairs Cela est dû à la symétrie du terme en $\sin(\theta)$ dont le développement en série entière ne comporte que des termes impairs.

2.3 Perte d'isochronisme

Perte d'isochronisme On a une perte d'isochronisme : la période des oscillations dépend de l'amplitude, donc des conditions initiales. [On le montre avec le script 3 : l'évolution temporelle pour plusieurs conditions initiales donne des périodes différentes.](#)

Régime faiblement non-linéaire, formule de Borda On calcule la formule de Borda, avec une approche perturbative de Lindstedt-Poincaré. On motive l'ansatz à 3ω avec la mesure de l'harmonique triple précédente. [Le calcul est sur fiche.](#)

Commentaires de la formule de Borda On la commente : le système a une symétrie $\theta \rightarrow -\theta$, donc il ne peut y avoir le terme à l'ordre 1 en θ doit être nul. On s'attend physiquement à une diminution de la pulsation aux grands angles. C'est le cas ! *Le prochain terme est en $11\theta_0^4/3074$. Le développement s'obtient avec les intégrales elliptiques, cf. cours physique NL.*

Message

- Les systèmes linéaires et l'isochronisme des oscillations sont l'exception plutôt que la règle.
- Les phénomènes non-linéaires en plus d'apporter des corrections à l'isochronisme, font apparaître des phénomènes nouveaux (enrichissement spectral).



On s'est intéressé à une perturbation du potentiel harmonique. On va en étudier un bien différent.

2.4 Le double puits de potentiel

Je trouve que cette partie n'apporte pas grand chose, à part jouer avec des diagrammes de phase, il n'y a pas vraiment de physique nouvelle.

Le modèle du double puits Jusqu'ici, on a considéré des systèmes avec une seule position d'équilibre. On va voir étudier un système avec deux positions d'équilibres, qu'on va modéliser par un potentiel de la forme $V(\theta) = -a\theta^2 + b\theta^4$ avec $b > 0, a < 0$. [On trace l'allure, avec des minima à \$\pm\sqrt{a/b}\$](#) On va voir la puissance des portraits de phase pour l'analyse des solutions.

Applications du modèle de double puits Le double puits modélise, deux ressorts face à face (NL géométrique), une barre en fer entre deux aimants, un circuit électronique bien choisi ou encore dans le domaine microscopique le potentiel d'inversion de la molécule d'ammoniac. Plus généralement, l'intérêt du double puits est qu'il est l'approximation à l'ordre le plus bas de tout système bistable.

Portrait de phase On le fait en numérique et au tableau. Au voisinage d'une position d'équilibre, on sait que le système se comporte locale comme un OH amorti : les trajectoires convergent vers le point fixe. Pour compléter le reste, on remarque que si l'énergie est suffisante, la particule oscille dans les deux puits avant d'en tomber dans un seul : on complète le diagramme des phases.

Bonus : diagramme de bifurcation

Bilan sur les potentiels non-linéaires

En introduisant des non-linéarités dans le terme de potentiel, on a ainsi vu émerger de nouveaux comportements, notamment :

- la perte d'isochronisme, qui est l'exception de l'OH
- l'enrichissement spectral

We now have to make a detour out of mathematics into science. We have to ask : what are the fundamental kinds of behaviors that can be seen in a scientific system, and what do they look like mathematically ? We have all seen scientific concepts of equilibrium playing a fundamental role in many scientific theories. Chemistry. We are told that chemical substances placed in a box will quickly go to equilibrium, called “chemical equilibrium.” Thermodynamics : A hot cup of coffee in a cooler room will quickly go to an equilibrium temperature with the environment, a condition called “thermodynamic equilibrium.” If “equilibrium” truly described scientific phenomena, we could stop the investigation right here and begin to look for point attractors in all of our models of natural phenomena. But are systems in nature really governed by equilibrium dynamics ? No !

3 Oscillateurs auto-entretenus

3.1 Vers l'équation d'un oscillateur auto-entretenu l'équation de Rayleigh

✦ Garfinkel, Modeling Life, [Rayleigh's Clarinet: vidéo avec de super explications](#)

Oscillateurs auto-entretenus, cycle limite Dans la nature, on observe des oscillateurs auto-entretenus qui sont des systèmes qui engendrent des oscillations périodiques, étant alimentés par une source d'énergie qui compense la dissipation, inévitablement présente. Par exemple :

- la température du corps : In all mammals, body temperature shows a clear 24-hour rhythm, whose amplitude can be as much as 1° . This daily rhythm is not the result of simple external cues such as the light-dark cycle, because it persists even in continuous darkness.
- Expression des gènes : Genes are often under regulation that causes them to express in an oscillatory pattern, with cycles ranging from hours to days. Oscillatory gene expression has been detected in many genes, including Hes1, which is critical in neural development.
- Les instruments de musique : on souffle en continu et il en ressort des notes bien déterminées.
- Battements du coeur
- Grincement d'une porte, couinement des freins (stick-slip)
- Les oscillations des ponts et ailes d'avions dues à l'écoulement d'air (détachement de tourbillons de von Karman, pont de Tacoma : bifurcation de Hopf sous-critique)

Cependant, ils présentent une différence fondamentale avec l'oscillateur harmonique libre ou l'oscillateur amorti forcé : leur fréquence d'oscillation est une caractéristique intrinsèque de l'oscillateur : elle n'est pas imposée par une fréquence particulière du forçage extérieur ou par les conditions initiales.

Différence avec l'OH L'OH ne peut pas décrire ces systèmes. En effet, si on perturbe un OH en augmentant l'amplitude : le système va osciller à une plus grande amplitude et le system “remembers” the perturbation forever. This is generally undesirable in a biological system. For instance, the body temperature rhythm should be stable to perturbations : if you have a fever one day, you want to be able to return to the normal oscillation. On observe des oscillations robustes, de nature complètement différent des oscillateurs harmoniques/amorti : la forme des oscillations

n'est pas imposée par une fréquence particulière du forçage extérieur ou par les conditions initiales.

Cycle limite Contrairement aux oscillateurs harmoniques, les oscillations en régime permanent ne dépendent pas de l'état initial : quel que soit la CI, le système converge vers les mêmes oscillations : on parle de cycle limite. Le cycle limite est un attracteur, qui est aussi une trajectoire fermée *topologiquement isolée*. Si on perturbe le système, il relaxe vers le cycle limite. L'OH présente aussi des trajectoires fermées, mais ce ne sont pas des cycles limites car si on perturbe l'OH il ne relaxe pas vers une trajectoire particulière.

Le clarinette de Rayleigh $\blacktriangleleft$ Rayleigh's Clarinet: vidéo avec de super explications

Ainsi, on veut combiner l'idée des oscillations avec l'idée de robustesse en fréquence. Une des premières personnes à avoir compris cela était Lord Rayleigh est dans le contexte musical. En effet, un instrument de musique est un objet mécanique permettant de produire des oscillations alors que le forçage du musicien à travers son souffle est continu. L'oscillation est la note musicale. Pour un instrument musical, une propriété critique est que la fréquence d'oscillations ne peut pas dépendre de l'amplitude de l'oscillation. On veut juste une amplitude plus grande. C'est ce qui traduit une oscillation stable ou un cycle limite.

Modèle de Rayleigh Pour cela, Rayleigh a effectué un modèle physique puis mathématique de la clarinette. L'objectif est de trouver un modèle physique qui peut expliquer pourquoi la anche peut osciller à une fréquence donnée, indépendamment du forçage. [On montre le schéma](#). On note x la position verticale du roseau. Le PFD donne $\ddot{x} = F(x, v)$. 🔴 Dans cette section, on raisonne toujours en grandeurs adimensionnées. Que mettre dans $F(x, v)$?

- Sans le clarinettiste, l'anche de la clarinette est comme un ressort qui exerce une force de rappel $-x$.
- Comment modéliser le clarinettiste ? Le clarinettiste éloigne le système de l'équilibre. Il rend l'origine instable. Si l'anche est penchée, le courant d'air va le faire pencher encore plus. [On fait un dessin](#). C'est comme une porte dans le vent : si elle s'entrouvre elle s'ouvre en grand. Mathématiquement, cela se traduit par une friction négative, qui fait diverger le système du point d'équilibre. [On trace une force de friction \$g\(v\)\$ avec une pente positive proche de l'origine](#). Le coefficient de friction est du sens opposé aux systèmes dissipatifs, le système est alors instable et a tendance à diverger de l'origine. C'est le comportement à basse vitesse.
- La trajectoire ne peut pas diverger vers un état d'énergie infinie, ce n'est pas physique. A haute vitesse, les frottements de l'air deviennent dominants et tendent à freiner les mouvements de la anche. [On trace une force de friction avec une pente négative à \$|v|\$ grand](#).

Résumons, à basse vitesse, on veut une déstabilisation qui se traduit par un amortissement négatif. A haute vitesse, on veut un amortissement positif. Comment coudre les bouts ? [On relie les bouts au tableau](#). On prend la fonction la plus simple : une fonction cubique

$$g(v) = v - v^3$$

Pour les faibles vitesses et les grandes vitesses, on a bien les comportements voulus.

Système dynamique En assemblant tout, on se retrouve avec l'équation du mouvement

$$\ddot{x} = -x - v - v^3$$

Elle se réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -x + v - v^3 \end{cases} \quad (1)$$

Intuition d'un cycle limite Rayleigh n'avait pas les outils pour résoudre le système. Mais il fait le raisonnement suivant : pour des grandes vitesses, la force de frottement en $-v^3$ fait spiraler vers l'origine. [On fait un dessin](#). Pour des petites vitesses, on spirale hors de l'origine à cause du terme en $+v$ [On poursuit le dessin](#). Donc il doit y avoir une orbite fermée [On achève le dessin!](#). Son raisonnement géométrique, avec le portrait de phase, fut prouvé mathématiquement par Poincaré 50 ans plus tard par des arguments topologiques *avec le théorème de Poincaré-Bendixon*.. Ainsi, Rayleigh, en réalisant un modèle on a trouvé comment avoir des oscillations stables et donc une note stable.

Forme du cycle limite Le cycle limite n'est pas rond/elliptique, sinon, la clarinette aurait le son pur d'un diapason. La non-ellipticité est caractéristique du son de l'instrument/des harmoniques.

Bonus : cahier des charges mathématiques $\blacktriangleleft$ suivre Bergé p25. Reprenons l'équation de l'OH amorti. Si $\gamma > 0$, il y a dissipation et toutes les trajectoires convergent vers l'origine, qui est un attracteur. Si $\gamma < 0$, l'énergie diverge, ce qui n'est pas physique. De plus, l'OH amorti est une équation linéaire donc en particulier homogène : si $x(t)$ est solution, alors $\alpha x(t)$ aussi : il y a invariance d'échelle ou invariance par dilatation. Donc pour obtenir l'équation d'un oscillateur entretenu, il faut :

- rompre l'homogénéité en espace (ou invariance par dilatation) : un cycle limite ne peut être présent que dans des systèmes non-linéaires.
- introduire un apport continu d'énergie pour empêcher la relaxation vers l'origine
- éviter la divergence de l'énergie

De plus, un cycle limite est impossible pour un système gradient

3.2 L'équation de Van der Pol

De Rayleigh à Van der Pol ∇ **Par ici** En dérivant l'équation de Rayleigh, on arrive à l'équation de Van der Pol. **Le calcul est sur la fiche.** A un changement d'échelle près,

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

On remarque l'expression d'une force de frottement qui dépend de l'amplitude x . Si $\mu > 0$, le terme de frottement apporte de l'énergie lorsque $x < 1$ et le terme dissipe de l'énergie lorsque $x > 1$. On voit encore ici comme un cycle limite peut apparaître. **On aurait pu introduire l'équation de Van der Pol en faisant un raisonnement similaire sur la clarinette.** Mais historiquement, Rayleigh est arrivé au modèle présenté en premier, puis Van der Pol a donné son équation.

Obsolète : l'équation de Van der Pol Partant du constat ci-dessus, Van der Pol a remarqué qu'un moyen mathématiquement très simple consiste à faire dépendre de frottement γ de l'amplitude θ des oscillations. On veut s'arranger pour que si l'amplitude des oscillations est faible, $\gamma < 0$ et si l'amplitude est grande, $\gamma > 0$. Similairement à l'approche de Landau des transitions de phase, on peut faire un développement de γ en puissance de θ en s'arrêtant à l'ordre le plus bas compatible avec les symétries. Comme seul le module de l'amplitude a une importance et pas son signe, on cherche une dépendance $\gamma(x^2)$. La dépendance la plus simple est alors [expression]. On a introduit une amplitude de référence, qui brise l'invariance par dilatation. En fait, l'oscillateur de Van der Pol est le prototype des oscillateurs auto-entretenus.

Obsolète : oscillateur de Van der Pol électronique

Pourquoi avoir changé de forme d'équation ? On peut le réaliser avec un circuit électrique en TP. **Cela ne vaut pas trop le coup de donner un circuit concret avec 4 AO.** On se contente de faire tourner le script python. On présente le dispositif sur transparent, avec le dipôle à résistance négative. On peut faire varier R_{NL} . On peut montrer l'enrichissement spectral encore aussi.

3.3 Bifurcation et portraits de phase

Oscillateur de Van der Pol numérique

On sort le script "Van der Pol.py" Si $\mu < 0$, les trajectoires convergent vers l'origine. Si $\mu > 0$, on montre que différentes conditions initiales convergent vers un cycle limite ($\mu = 0.3$ est joli). Sinon, on peut montrer la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=KzInKpTw0MY>

Régime $\mu < 0$, l'origine est attracteur Lorsque R_{NL} est supérieure à une valeur critique déterminée par les autres constituants, le coefficient μ est négatif. On peut montrer que le portrait de phase possède un unique attracteur en $(0,0)$. C'est clair puisque pour des petites perturbations autour du point fixe, le terme de frottement est dissipatif, les oscillations sont amorties : $(\mu(x^2 - 1) > 0)$

Régime $\mu > 0$, cycle limite Diminuer R_{NL} jusqu'à environ $17k\Omega$. On observe sur l'oscilloscope, l'apparition d'une trajectoire fermée. Lorsque R_{NL} est inférieure à la valeur critique, μ est positif. On peut montrer que $(0,0)$ devient un point fixe instable, et que l'attracteur est désormais une courbe fermée appelée cycle limite. On peut encore une fois le comprendre avec l'équation : les petites oscillations sont amplifiées ($\mu(x^2 - 1) < 0$) jusqu'à une certaine valeur, puis amorties. La forme du cycle limite ne dépend pas des conditions initiales, uniquement des valeurs des constituants du circuit. *Ouvrir la boucle contenant l'élément non-linéaire pour placer le système en $(0,0)$ puis refermer. Court-circuiter la boucle non-linéaire pour créer une condition initiale différente puis retirer. Le cycle limite est le même.*

Bifurcation de Hopf surcritique Quand μ devient positif, le point fixe stable devient instable, et un cycle limite apparaît. On parle de bifurcation de Hopf.

On voit que le cycle limite pour des valeurs de μ faibles ressemble fortement à une ellipse. C'est cohérent avec l'équation de Van der Pol : pour $\mu \rightarrow 0$ l'équation se ramène à celle de l'oscillateur harmonique. Ce régime dit faiblement non-linéaire est donc caractérisé par un signal de sortie quasi-sinusoidal (une fois le régime permanent atteint)

3.4 Régime faiblement non linéaire

⚡ Bergé.

Energie du système A la force de rappel on associe une énergie potentielle, qui est la même de l'oscillateur harmonique. L'énergie du système est donc finalement $E = \dot{x}^2/2 + \omega_0^2 x^2/2$.

Approche énergétique Par définition du cycle limite, l'énergie totale est conservée en moyenne sur une période, on peut donc écrire, avec $\langle . \rangle$ la moyenne sur une période :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \ddot{x}\dot{x} + \omega_0^2 x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = \mu \dot{x}^2(1 - x^2) \\ \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= \mu \langle \dot{x}^2 \rangle - \mu \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

Approximation du régime quasi-sinusoidal Pour caractériser ce régime, nous allons calculer l'amplitude des oscillations. On se place dans l'approximation d'un signal quasi-sinusoidal : $x(t) = x_0 \sin(t)$. Connaissant la forme de la solution, on peut calculer ces moyennes. On obtient donc

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle x^2 \dot{x}^2 \rangle \Rightarrow \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 = \frac{1}{8} \omega_0^2 r^4 \Rightarrow r = 2$$

L'amplitude des oscillations ne dépend pas de μ . Cependant, il s'agit ici de la tension adimensionnée par le changement de variable fait en début de partie. En réalité, les oscillations du cycle limite varient comme $\sqrt{\mu}$.

Lorsque μ augmente, les oscillations sont de plus en plus anharmoniques. Puis, on entre dans le régime fortement non-linéaire, où les oscillations comportent une phase rapide et une phase lente : ce sont les oscillations de relaxation.

3.5 Régime fortement non-linéaire et oscillations de relaxation

⚡ Strogatz.

Oscillations de relaxation

On augmente μ et on voit des oscillations de relaxation : on montre l'évolution temporelle avec séparation d'échelle, sur Python ou sur vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=4y1BhSy9srQ>

Reformulation de l'équation Manifestement, il y a une séparation d'échelle de temps, avec une variation rapide et une variation lente. Pour mieux les comprendre, on va faire un changement de variable. Nous allons récrire l'équation de Van der Pol sous la forme d'un système, en prenant une définition différente de la vitesse généralisée y . On voit que l'on peut faire apparaître une dérivée temporelle contenant les deux premiers termes de l'équation (on revient à l'équation de Rayleigh en fait) :

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right] + x = 0$$

En définissant $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ et $y = \frac{\dot{x}}{\mu} + F(x)$ on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu(y - F) \\ \dot{y} = -\frac{x}{\mu} \end{cases}$$

Sur le portrait de phase modifié (x, y) on fait apparaître $F(x)$. On se place dans le cas $\mu \gg 1$. On a alors

$$\begin{cases} \dot{x} \gg 1 & \text{et } |y| \ll 1 & \text{pour } y > F(x) \\ \dot{x} \ll -1 & \text{et } |y| \ll 1 & \text{pour } y < F(x) \end{cases}$$

Résolution graphique On s'appuie sur le schéma de la fiche Le fait que $\mu \gg 1$ fait apparaître deux échelles de temps très différentes en y et x . On part haut sur la branche $y = F(x)$. Comme $\ddot{x}$ domine sur $\ddot{y}$, x relaxe vite vers $F(x)$. Ensuite, $\dot{y} = -x/\mu < 0$ donc y diminue en suivant la courbe $y = F(x)$, jusqu'au moment où si y diminue, le $\dot{x} \ll 1$ va faire sauter le système de l'autre côté.

Interprétation graphique, oscillations de relaxation On voit des oscillations de relaxation. Elles sont constituées d'une alternance de variations de tension très rapides puis très lentes. On parle d'oscillations de relaxation. C'est un phénomène très courant dans plein de domaines : collé-glissé en frottement solide, de la corde de violon, les battements du coeur...

Calcul de la période C'est optionnel, c'est sur fiche.

Le succès de l'équation de Van der Pol est de pouvoir modéliser des oscillations quasi-harmoniques auto-entretenus mais aussi des oscillations de relaxation à séparation d'échelles de temps, simplement en faisant varier un paramètre.

Oscillations NL forcées

Résonance modifiée

Génération d'harmonique en optique non-linéaire

. L'optique non linéaire mérite d'être présentée dans le cadre de cette leçon au vu de son importance pratique pour la recherche fondamentale comme la recherche appliquée et l'industrie. A ce titre, un exemple concret d'utilisation du doublage de fréquence optique est le pointeur laser vert, obtenu à 532 nm par doublage d'un cristal de Nd :YAG. Ainsi, le sigle YAG, s'il est présenté, doit être connu : Nd :YAG signifie Néodyme Yttrium Aluminium Garnet et la raie laser obtenue émet à 1064 nm, ce qui par doublage de fréquence donne la couleur verte à 532 nm (aucune longueur d'onde à 1060 nm n'est donc mise en jeu).

Chaos - attracteur étrange

Conclusion

- perte d'isochronisme
- perte du principe de superposition
- enrichissement spectral
- nouveaux types d'attracteurs

Durant toute cette leçon, on s'est intéressé à des oscillations libres. On a d'abord vu le cas simple mais courant de l'oscillateur harmonique, à travers une approche un peu nouvelle basée sur l'étude du portrait de phase. On a ensuite rajouté des non-linéarités dans le potentiel et on a étudié leur impact sur les oscillations. Le portrait de phase nous a permis de voir qu'elles donnaient lieu à des solutions qualitativement différentes. Dans le cas du pendule, on a vu qu'on perdait l'isochronisme et qu'on avait enrichissement spectral. L'exemple du double puits nous a permis de nous familiariser avec la notion de bifurcation. Finalement, on a rajouté une non-linéarité dans le terme de dissipation : cela permet de décrire des oscillateurs auto-entretenus. À travers l'exemple de l'oscillateur de Van der Pol, on a compris comment on pouvait avoir apparition d'un cycle limite, puis déformation du cycle pour donner lieu à des oscillations de relaxation, et donc à une physique différente est plus riche. Mais encore une fois, on s'est restreint à des oscillations libres. Prenons maintenant le cas simple du pendule et observons l'effet d'un forçage (animation). On voit que le mouvement paraît particulièrement imprévisible : on parle de comportement chaotique. Cela signifie qu'on a un comportement apériodique aux temps longs, dans un système déterministe, qui met en évidence une sensibilité aux conditions initiales. Le chaos peut également intervenir dans un système non forcé ; il faut alors plus de degrés de liberté. Mais avec le chaos, c'est tout un nouveau champ d'étude qui s'ouvre. Et le portrait de phase y tient une place prépondérante. En effet, alors que les signaux temporels des systèmes chaotiques apparaissent imprévisibles et peu lisibles, l'étude de leur plan de phase permet de faire émerger des structures, d'approcher de plus près la physique, de comprendre, et de prévoir. **Ouverture** : Dancing ball. Chaos.

Introduction

Définition abstraite d'un oscillateur (Larousse). Exemples dans la physique, hors de la physique, en biologie : le coeur etc.

I/ Oscillateurs linéaires. Equation générique d'un OH. Mise sous forme d'un système d'équation d dimension 2 et d'ordre 1.

Approximation d'ordre le plus bas de de tout potentiel qui présente un minimum.

Exemples de OH : masse-ressort, LC.

Définition de plan de phase, trajectoire de phase, portrait de phase.

Trajectoires fermées équivalent potentiel périodique. Point fixe (définitions).

Pour l'OH, trajectoires sont des ellipses. Cela vient du potentiel quadratique : $E = 1/2\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = cte$.

Caractéristique des des système linéaires et libres : l'origine est le seul point fixe du système.

2) Oscillateur amorti. Le point fixe qui était un centre devient un attracteur.

Dessins de portraits de phase.

II/ Non linéaires. Pendule pesant aux grandes amplitudes : pas ellipse au début, ellipse à la fin.

On peut voir le cycle du calcul de Thierry avec l'oscillo.

Ouverture sur les systèmes à stabilité multiple, bifurcations en climatologie (cf. rapport de stage).

Ouverture sur le chaos : on peut mettre en évidence la structure des systèmes chaotiques avec le portrait de phase, plus difficilement avec les signaux temporels.

Conclusion

Ouverture :

Compléments/Questions

Importance de l'anharmonicité Dilatation thermique des solides.

Passage

Plan

Questions

- Ouverture sur le chaos : quel type de chaos ? Qu'est-ce que le chaos ? Pourquoi traiter le Van der Pol, quel intérêt pédagogique ? Même question pour le stick-slip. Quels commentaires physiques peut-on faire sur la formule de Borda ? Même question sur le portrait de phase du pendule. Citer des noms (en rapport avec la leçon). Qu'est-ce qu'une bifurcation ?
- Le pendule que vous avez considéré a-t-il une particularité ? S'il était pesant cela changerait-il quelque-chose ? Pourriez-vous nous donner une expression plus complète du développement de la période en fonction de l'angle ?
- Sur les portraits de phase, j'avais tracé la dérivée en fonction de l'angle et j'avais parlé de portrait quasi circulaire : expliquer pourquoi ? (en fait ça donne l'équation d'une ellipse) Qu'aurait-il fallu tracer pour avoir des cercles ?
- Le ressort : Est-ce qu'on aurait pu trouver l'expression de la position d'équilibre autrement qu'en résolvant l'équation différentielle ? Vous avez parlé de lien avec la dilatation thermique, est-ce que vous pourriez expliquer ?
- Oscillations forcées : vous avez déclaré que la solution centrale est instable, vous pourriez expliquer pourquoi ?
- À partir de l'équation différentielle de van der Pol, comment expliqueriez-vous simplement pourquoi la non linéarité stabilise les oscillations ? C'est quoi en gros l'amplitude des oscillations (s_0) ? Plutôt plus petit ou plus grand ?
- Y a-t-il un intérêt particulier à l'oscillateur de van der Pol ? Avez-vous un exemple de système mécanique qu'il peut représenter ? Comment représenter le portrait de phase du pendule pour qu'il soit plus facilement reconnaissable ?
- Comment expliquer simplement aux élèves le fait que l'harmonique apparaissant soit à $3f$, l'absence d'harmonique à $2f$, et le fait que l'on peut prévoir que l'harmonique suivante sera $5f$ dans le spectre du pendule simple ? Serait-ce différent si l'on avait un pendule pesant ?

- Qu'est ce qu'une harmonique ? Comment les mettre en évidence par une expérience simple ? Et comment les voir dans cette expérience ? Est-ce qu'on peut voir sur la représentation de l'énergie potentielle du pendule simple que les non-linéarités vont augmenter la période ? Sur le portrait de phase du pendule simple, vous avez indiqué un sens de rotation, de quoi dépend-il ? Sur la résonance, comment pourrait-on se convaincre que la partie de la courbe dans le creux de la vague correspond à un mouvement instable ? Vous avez montré que sur la dilatation des métaux la valeur moyenne n'était plus la longueur du ressort à vide, alors que pour le pendule simple, la valeur moyenne reste $\theta = 0$, comment expliquer cette différence ? Asymétrie du potentiel. Comment se fait-il que le pendule simple ne fait apparaître que les harmoniques impaires ? Pouvait-on le prévoir avec l'expression de l'énergie potentielle ? Quelles sont les conditions pour qu'on puisse développer un signal en série de Fourier, et est-ce qu'on peut toujours le faire ?
- A quoi est lié le fait que les trajectoires de l'OH sont fermées ? Conservation du vecteur de Runge-Lenz, théorème de Bertrand. En fait $1/r$ et r^2 sont les mêmes potentiels à transformation conforme près.
- Pourquoi l'OH amorti ne peut spiraler vers l'intérieur ? L'énergie diminue, comme le démontre avec un bilan d'énergie.
- Expliquer le fait qu'il faut un temps infini pour aller d'un état instable à l'autre. (1) on arrive avec une vitesse nulle sur le point (mais en vrai on peut tendre vers 0 et avoir une intégrale divergente donc ralentir vers une vitesse nulle et quand même avancer) (2) Qualitativement, par déterminisme, on ne peut pas atteindre le point fixe sinon ça voudrait dire qu'on serait parti du point fixe (Cauchy Lipschitz). (3) on peut on peut résoudre analytiquement l'équation dans ce cas particulier où on part du maximum d'énergie et on trouve un temps infini.
- Exemple de système dynamique sans point stable ? En 1D, un potentiel max en 0 et décroissant à l'infini. Avec une infinité de points instables ? $dx/dt = \sin^2 x$ tous les points sont instables.
- Equation à une variable x , à partir de quel ordre on peut avoir du chaos ? Il faut un espace des phases de dimension 3. Donc il faut un système d'ordre 2.
- Commenter la formule de Borda ? Pas d'ordre impair par symétrie du système. Il y a des coefficients positifs car le potentiel en $(1-\cos)$ s'élargit plus vite que le potentiel quadratique.
- Exemple de bifurcation fourche ? Anneau sur cerceau qui tourne, masse accrochée à deux ressorts, flambage d'une poutre.
- Intérêt en physique du solide des oscillateurs anharmoniques ? Nécessaire pour expliquer la dilatation thermique.
- Que se passe-t-il si on met $x^2 + 1$ dans Van der Pol ? Cela devient un système tout le temps dissipatif.
- Si on paramétrise la dissipation par $x^2 + \alpha$ quelle bifurcation on obtient en $\alpha = 0$? Bifurcation de Hopf (sur-critique ?).
- Citer des bifurcations. Cf. cours de Thierry Dauxois + bif. homocline.
- Système simple pour décrire la dynamique des populations ? Modèles proies prédateur, processus de Galton-Watson (stochastique), équation logistique $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.
- Equations NL en physique ? Schrödinger NL (condensats de bosons, effet Kerr, supraconducteurs), sinus Gordon.
- Théorème de Poincaré Bendixon.

Commentaires