

LP04 – Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

29 juin 2020

Laura Guislain & Pascal Wang

Niveau :

Commentaires du jury

Bibliographie

✦ *Perez, Mécanique*

✦ *BUP 587*

✦ CODE PYTHON SUR LES MAREES

→ Les bases, des info sur le gyroscopes

→ Quelques détails sur le gyroscope. Vraiment en plus et pas obligatoire.

→

Prérequis

➤ Matrice d'inertie

➤ Changement de référentiel, effet sur la dérivation

Expériences

☞ Biréfringence du quartz

Table des matières

1	Introduction à partir de l'étude de la toupie	3
1.1	Angles d'Euler	3
1.2	Approximation gyroscopique	4
1.3	Équations de précession	4
2	Conséquences dans le domaine macroscopique	6
2.1	Gyroscope	6
2.2	Précession des équinoxes	8
3	Conséquences dans le domaine microscopique	9
3.1	Moment cinétique et moment magnétique	9
3.2	Précession de Larmor	10
3.3	Résonance magnétique nucléaire	11

Jury

- Trouver l'orientation et le sens des effets gyroscopiques sur des exemples simples.
- Principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes
- Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique.
- les référentiels doivent être correctement définis
- Les gyroscopes employés pour l'illustration expérimentale du sujet sont souvent sous-utilisés et ne sont pas lancés suffisamment fort pour qu'effectivement l'approximation gyroscopique soit valable !
- Faire plein de schémas.

A regarder ?

BUP p86-87 BUP 889 p1541 Astuces de Feynman : gyroscope directionnel et horizon artificiel

Préparation

Préparation : il faut harmoniser les notations.

Plan : on peut ne pas traiter le gyroscope du tout, qui est redondant avec la toupie. On peut sauter le modèle de Bohr et direct partir sur du moment cinétique intrinsèque et la RMN. On pourrait faire I/ toupie + précession des équinoxes II/ RMN.

Ressources : Pérez mécanique

Introduction

On a déjà conduit l'étude d'un solide tournant autour d'un axe fixe ou en translation. L'idée de cette leçon est d'étudier des systèmes pour lesquels la rotation n'est plus contrainte selon une unique direction. On va s'intéresser dans un premier temps à un système qui est connu depuis l'Antiquité : la toupie.

Mouvement d'une toupie

On montre la vidéo : <https://youtu.be/L8pH6fw0Yc?t=5>. Cette vidéo est belle aussi : la précession est plus nette car la vitesse de rotation est plus élevée et elle est très symétrique <https://www.youtube.com/watch?v=kbh1Yzzq00w>. Dans cette vidéo, l'approximation gyroscopique est mieux respectée. Si on en sort, le mouvement est celui de Lagrange/Poisson.

Présentation Le poids tend à la faire tomber, et pourtant elle tourne. La toupie a un mouvement différent d'un solide qui tourne simplement autour d'un axe. Son axe de rotation tourne. C'est le mouvement de précession.

Bonus : contre-braquage La fin de la vidéo explique le contre-braquage, mais aussi Fred et Jamy : <https://www.dailymotion.com/video/x952g8>. Quand on roule vite à moto, tourner le guidon à gauche induit un couple gyroscopique qui fait pencher la moto à droite, ce qui fait tourner à droite. C'est dangereux qui on tourne trop le guidon, mais cela peut aider le virage de tourner le guidon en sens inverse.

Définition : précession On définit la précession comme la variation au cours du temps de l'orientation de l'axe de rotation d'un solide.

Objectifs On veut caractériser le mouvement de précession, montrer que la précession se retrouve dans différents domaines, avec des propriétés communes qu'on mettra en évidence au cours de cette leçon.

1 Introduction à partir de l'étude de la toupie

Bien rattacher tous les paragraphes au comportement de la toupie, et préciser à chaque fois que c'est général.

Système : toupie On veut modéliser la toupie. On considère un solide homogène possédant une symétrie de révolution, en contact en un point avec le sol, dans un champ de pesanteur uniforme. De plus, on néglige les frottements fluides et les frottements au niveau du point de contact.

Référentiel On pourrait le faire dans le référentiel du laboratoire R , supposé galiléen, mais il est plus commode de se placer dans le référentiel propre de la toupie R_0 , dont l'origine O est le point de contact avec le sol et un des axes est l'axe de la toupie. Ce référentiel n'est pas galiléen.

1.1 Angles d'Euler

30 min oblige, on considère que ce sont des prérequis et on pose juste les notations.

Coordonnées d'un solide Le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel fait intervenir six paramètres, qui sont, par exemple, les trois coordonnées décrivant la position de son centre de masse et trois angles. Pour les angles, un choix possible de paramétrisation est les angles d'Euler.

Angles d'Euler On peut passer du repère du laboratoire à celui de la toupie par trois rotations que nous allons définir : précession, nutation, rotation propre. On montre le schéma wikipedia et le diagramme synthétique.

Angles d'Euler sur le gyroscope

On illustre ces angles sur le gyroscope : <https://youtu.be/zc8b2Jo7mno?t=44> Le gyroscope utilisé est appelé "gyroscope à la Cardan" car le rotor est supporté par deux cadres qui l'entourent par l'extérieur. Le centre de gravité du rotor est fixe et coïncide avec le centre de rotation. En outre, une suspension à la Cardan permet au gyro de prendre librement toutes les positions autour de son centre de masse. Cela lui assure trois degrés de liberté de rotation. On montre les axes/angles sur le gyroscope.

Analogie sur la toupie Sur la toupie, on a donc observé une rotation propre à grande vitesse et une précession à moins grande vitesse. Plus la toupie est freinée par les frottements de l'air et du contact solide/solide, plus l'angle de précession augmente (nutation).

Vecteur rotation dans le référentiel propre On peut maintenant exprimer le vecteur rotation dans le référentiel propre de la toupie [expression].

On a remarqué autre chose : de façon assez évidente, il fallait faire tourner la toupie autour de son axe propre pour observer ce mouvement, donc la vitesse de rotation propre va être importante. Dans le cadre des vitesses de rotations propres dominantes, on va simplifier l'expression du vecteur rotation avec l'approximation dite gyroscopique, qu'on validera a posteriori.

1.2 Approximation gyroscopique

Nécessité de l'approximation On peut montrer les équations d'Euler, dire que ça a l'air compliqué. On va faire une approximation

Énoncé On dit que le mouvement d'un solide de révolution S autour d'un point fixe satisfait à l'approximation gyroscopique lorsque sa vitesse de rotation autour de son axe de révolution est très grande devant les autres vitesses de rotation. Les expressions sont sur la fiche. En vrai, l'approximation gyroscopique est sur le moment d'inertie.

Validité Pour la toupie, à l'oeil ODG: 10 tr/s pour la rotation propre, 1 tr/s pour la précession. Pour les questions, être conscient que l'énoncé général est avec les composantes du moment d'inertie, mais que ça se simplifie quand on a une symétrie de révolution, ce qu'on considère ici.

Conséquence sur l'expression du moment cinétique On garde en tête que $\vec{L}_P = I\vec{\Omega}$ n'est valable que si P est le centre de gravité ou un point fixe. Sinon, on a la contribution du "point matériel".

Dans l'approximation gyroscopique, le moment cinétique est colinéaire au vecteur rotation

Les expressions sont sur la fiche.

Comment mettre en équation le mouvement de la toupie ?

1.3 Équations de précession

Système et hypothèses Le système est toujours la toupie S , de centre d'inertie C . On applique le TMC au point de contact avec le support O dans Re . Les actions qui s'appliquent sont : (i) le poids (ii) la réaction du support, mais elle est appliquée en O donc a un moment nul (iii) les moment de liaison au point O , négligées (liaison parfaite) (iv) forces de frottement de l'air, négligées.

Equation du mouvement Le calcul est aussi sur la fiche. Le théorème du moment cinétique appliqué au solide S , par exemple une toupie, au point de fixation O , donne vectoriellement, en supposant que les actions de contact ont un moment nul (liaison parfaite) : $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{OC} \times m\mathbf{g}$ ce qui s'écrit $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \approx \mathbf{L}_O \times \frac{mgl}{L_O}$ puisque le moment cinétique est pratiquement porté par le vecteur $\mathbf{OC}$ de longueur l .

On tombe sur l'équation de précession.

Propriétés de la précession De l'équation vectorielle approchée précédente, on déduit aisément deux propriétés remarquables.

- En multipliant les deux membres de l'équation par $\mathbf{L}_O$, on voit que :

$$\mathbf{L}_O \cdot \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \approx \mathbf{L}_O \cdot \left(\mathbf{L}_O \times \frac{mgl}{L_O} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{dL_O^2}{dt} = \frac{dL_O^2}{dt} \approx 0 \quad \text{et} \quad L_O \approx \text{Cte}$$

- Si on multiplie les deux membres par $\mathbf{e}_z$, on trouve :

$$\mathbf{e}_z \cdot \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \approx \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L}_O \times \frac{mgl}{L_O} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{e}_z) = \frac{dL_{Oz}}{dt} \approx 0 \quad \text{et} \quad L_{Oz} \approx \text{Cte}$$

Ainsi, au cours du mouvement, la norme L_O de $\mathbf{L}_O$ et sa projection L_{Oz} du moment cinétique suivant un axe vertical sont approximativement constants. Il en résulte que le vecteur $\mathbf{L}_O$ décrit un cône de sommet O , d'axe Oz défini par le champ de pesanteur et de demi-angle au sommet θ_0 que fait $\mathbf{L}_O$ avec l'axe vertical Oz . Retenons donc : L'axe de rotation propre Oz' précessionne autour de la direction du champ de pesanteur

L'équation de précession conserve la norme du moment cinétique et sa projection sur l'axe vertical.

Il en résulte donc que le vecteur $\vec{L}_O$ décrit un cône de sommet O et d'axe Oz défini par le champ de pesanteur.

Animation de précession

On montre la vidéo <https://youtu.be/L8pH6fw0Yc?t=108>

Vitesse angulaire de précession [Calcul sur fiche](#)

Vérification de l'approximation gyroscopique On fait un ordre de grandeur, sur [fiche](#). Pour une toupie conique, de hauteur $h = 5\text{cm}$ et de rayon de base $R_b = 3\text{cm}$ qui tourne à la vitesse de $30\text{tr} \cdot \text{s}^{-1}$, on trouve, puisque $l = 3h/4$ et $I_3 = 3mR_b^2/10$:

$$\Omega_p = \frac{mgl}{I\Omega} = \frac{5gh}{2R_b^2\Omega} \approx \frac{5 \times 9,80 \times 0,05}{2 \times 9 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 30} \approx 7,2 \text{rad.s}^{-1}$$

La durée d'une précession complète est donc $T_p = 2\pi/\Omega_p = 0,87$. On trouve une période de précession bien supérieure à la période de rotation propre, donc l'approximation gyroscopique est ok. On ne vérifie pas la nutation par le calcul mais on peut voir à l'oeil que la période est aussi bien supérieure à celle de rotation propre.

Effet des frottements Ce mouvement de précession à angle constant suppose donc que l'on ait négligé les forces de frottement. Dans le cas contraire, la vitesse de rotation propre ainsi que la vitesse de précession vont diminuer et l'angle de nutation va augmenter jusqu'à $\theta = \pi$ à l'équilibre. C'est le phénomène de relaxation.

Effet contre-intuitif D'après l'analyse précédente, l'effet de la pesanteur, force verticale, est de déplacer le centre de masse dans un plan horizontal. Cela devient clair en raisonnant sur le moment cinétique, avec un schéma. On montre le schéma avec $\vec{\Gamma}$ qui change la direction de $\vec{L}$.

Bonus : au delà de l'approximation gyroscopique, mouvement de Lagrange et Poisson [Wikipedia](#), [bon schémas](#) On appelle mouvement de Lagrange et Poisson le mouvement d'un solide homogène ayant la symétrie matérielle de révolution, mobile autour d'un point fixe O et soumis à des forces dont le moment en O est dirigé suivant la ligne des nœuds. Une grande variété de solides physiques (toupie, instruments gyroscopiques de navigation, mouvement de la Terre dans le référentiel du centre de masse, etc.) ont un tel mouvement. On introduit une énergie potentielle effective $E_{p,eff}(\theta)$ et $E_m(\theta)$ l'énergie mécanique en fonction de l'angle de nutation. Cette procédure est à comparer à la résolution du mouvement dans un potentiel central, dans lequel on utilise la conservation du moment cinétique pour réduire la dynamique à celle du rayon r dans une énergie effective $E_{eff}(r)$. Ce n'est en fait pas un hasard, ces deux résolutions sont des manifestations de ce qu'on appelle l'intégrabilité de ces modèles, qui permet de résoudre des théories qui possèdent suffisamment de symétries. Le mouvement n'est possible que si $E_m \geq E_0$ valeur seuil. Si $E_m = E_0$, une seule valeur de θ est possible, il y a précession pure. Si $E_m > E_0$, un intervalle de valeurs de θ est possible, l'angle de précession varie : c'est le mouvement de nutation. On peut avoir un mouvement cycloïdal, des rebroussements périodiques. *Le mouvement de Lagrange de la toupie est le mouvement d'une toupie pesante autour d'un point de son axe, la réaction d'axe n'ayant pas de moment par rapport à ce point (rotule parfaite). C'est à peu près le mouvement d'une toupie ordinaire, à ceci près que dans une toupie, sa pointe est ronde et glisse en frottant sur le plan où elle « repose » : il s'ensuit par application du théorème du couple gyroscopique qu'elle se redresse et vient en position de toupie dormante (i.e. en rotation stable autour d'un axe vertical).*

Bonus : mouvement de Poincaré [Pérez](#), ma fiche, [Wiki](#), avec des animations top!. On appelle mouvement de Poincaré le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O tel qu'en ce point le moment des actions extérieures soit nul. Ce mouvement serait, par exemple, celui d'un ballon de rugby soumis à la seule action de la pesanteur, dans le référentiel du centre de masse, ou encore celui de la Terre. Les caractéristiques du problème sont que l'énergie mécanique et le moment cinétique sont conservés. On le résout avec les équations d'Euler. Dans un mouvement de Poincaré d'un solide ayant la symétrie de révolution, l'angle de nutation ainsi que les vitesses angulaires de précession et de rotation propre sont stationnaires. **ODG**: la Terre a un mouvement de Poincaré de période 432 jours. On trouve 305 jours avec la théorie du solide indéformable mais on tombe sur le bon résultat en prenant en compte l'élasticité de la Terre.

Bonus : toupie asymétrique <http://arkadiusz-jadczyk.eu/blog/2017/02/hardest-concept-grasp-physics/>

There are two important conserved quantities in rotations of a free asymmetric top about its center of mass : the length L of the angular momentum vector, and the kinetic energy E . They have simple expressions in the orthogonal

frame attached to the body and aligned along its principal axes :

$$L^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2$$

$$2E = I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2$$

where I_1, I_2, I_3 are the principal moments of inertia, and $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ are the three components of the angular velocity vector in the moving frame. While I_1, I_2, I_3 are constants that depend on the shape and the mass distribution within the body, the angular velocity vector $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ is, in general, time-dependent. On peut réécrire ces conservations :

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$$

$$2E = \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}$$

Le mouvement est restreint, dans l'espace des composantes de $\vec{L}$ à l'intersection d'une ellipse avec une sphère !

Bonus : tippe top $\ntriangleleft$ Pérez, <https://www.youtube.com/watch?v=Kwihc4kbNVA> Le centre de masse est plus bas que le centre géométrique de la courbure. La force de friction induit un couple qui fait basculer la toupie. Il faut dépasser vitesse limite !

↓ On poursuit l'étude sur le gyroscope

2 Conséquences dans le domaine macroscopique

2.1 Gyroscope

Qu'est-ce qu'un gyroscope ? Le gyroscope est une solide de révolution tournant autour de son axe à très grande vitesse et suspendu par son centre de masse C de façon parfaite. Il a été inventé par Foucault en 1850. Cet instrument a été inventé par Foucault en 1850 et appelé ainsi parce qu'il permet de visualiser (scope) le mouvement de rotation (gyro) de la Terre sans avoir à observer les étoiles. **ODG:** La vitesse gyroscopique est comprise entre 8000 et 20000 tours/min. *Le gyroscope a souvent une géométrie plate pour maximiser son moment d'inertie.*

Précession du gyroscope

Présentation On montre la vidéo : <https://youtu.be/-D-0BZaInt4?t=41> Lorsque le gyroscope est équilibré, son axe de rotation est inchangé.

TMC et propriété fondamentale On applique le TMC au centre de masse G dans R galiléen et en considérant les liaisons idéales. Le poids s'applique en G donc son moment en G est nul. On considère aucun autre moment extérieur : on trouve

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt})_R = 0$$

que le moment cinétique est conservé.

Ainsi, la direction de $\vec{L}$ est fixe dans un référentiel galiléen.

Dans l'approximation gyroscopique, le vecteur rotation est colinéaire à $\vec{L}$ donc a une direction fixe aussi.

Effet d'un déséquilibre À l'aide d'un poids disposé au point A sur l'axe Δ , on déséquilibre le gyroscope. Cela revient à exercer une force $\mathbf{P}$ verticale. Le poids exerce un couple qui a tendance à faire tourner le gyroscope vers le bas. Pourtant, lorsque le gyroscope tourne, on constate que l'axe se déplace selon une direction horizontale, ce qui semble paradoxal. On dirait que le gyroscope obéit à une équation de précession. *Si cette force est horizontale, alors l'axe Δ se déplace verticalement..*

Analyse quantitative Le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse C , donne :

$$\left(\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \right)_R = \mathbf{C}\mathbf{A} \times \mathbf{F}_{oc} = CA \frac{\mathbf{L}_C}{L_C} \times \mathbf{F}_{oc}$$

où on a utilisé que CA , Δ et $\vec{L}_C$ sont alignés, dans l'approximation gyroscopique. On reconnaît une équation de précession. Si $\mathbf{F}_{oc}$ est verticale, la variation de moment cinétique, et donc celle de l'axe Δ , sont portées par un vecteur horizontal. En revanche, si $\mathbf{F}_{oc}$ est horizontal, la variation de moment cinétique présente une contribution verticale.

Validation de l'approximation gyroscopique A l'oeil, la précession dure plusieurs secondes alors que la rotation propre effectue plusieurs tours par seconde.

Analyse qualitative En fait, cela devient clair en raisonnant en terme de moment angulaire et de couple. On fait un schéma où $\vec{L}$ est modifié de manière incrémentale par Γ le couple exercé.

Stabilisation au gyroscope

On montre le début de la vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=cjV-yDNdeOI>. Le gyroscope est le disque argenté (disque dur) sous la caméra. Quand on l'allume, c'est stable !

Couple gyroscopique Pour le voir, on introduit la notion de couple gyroscopique. Quand le gyroscope est soumis à un couple extérieur, ce dernier répond conformément au principe d'action réciproque en exerçant un couple opposé. On fait le calcul. C'est ce que l'on constate lorsqu'on impose manuellement une rotation à l'axe d'une roue en rotation autour de son axe par exemple, en faisant tourner, autour d'un axe vertical, l'axe de révolution horizontal d'un ventilateur électrique, on ressent au niveau des poignets les effets de ce couple gyroscopique.

Application : gyroscope anti-roulis dans les bateaux ∇ Pérez. Le couple gyroscopique exercé par un lourd gyro, sur le navire dans lequel il est embarqué, permet d'enrayer le début d'un roulis. En effet, dès que le navire est soumis à un couple de rotation autour d'un axe longitudinal, un mécanisme impose à l'axe Δ du gyro, initialement vertical, une vitesse de rotation $\Omega_{\Delta/\mathcal{R}}$ autour d'un axe horizontal ; le couple gyroscopique $\mathbf{L}_C \times \Omega_{\Delta/\mathcal{R}}$ qui en résulte permet provoquer une réaction permettant de redresser le navire. **ODG** : un gyroscope de navire est constitué d'un disque de diamètre $2R = 3\text{m}$ et de masse $m = 50$ tonnes. Sa vitesse de rotation propre est $\Omega = 15\text{tr.s}^{-1}$ et celle de précession $\Omega_{\Delta/\mathcal{R}} = 1,2\text{ rad. s}^{-1}$. Le couple gyroscopique vaut donc

$$\Gamma_C = L_C \Omega_{\Delta/\mathcal{R}} = \frac{mR^2}{2} \Omega \Omega_{\Delta/\mathcal{R}} = \frac{5 \times 10^4 \times 1,5^2}{2} \times 2\pi \times 15 \times 1,2 = 6,375 \times 10^6 \text{N.m}$$

Application : garder le cap De plus, si le gyroscope est embarqué sur un véhicule accéléré (avion, sous-marins, bateaux, navette spatiale, satellite), il permet de maintenir le véhicule sur la trajectoire prévue. En effet, si ce dernier vient à changer de trajectoire, l'axe du gyroscope, fixe par rapport aux étoiles, change d'orientation ce qui crée un couple gyroscopique. Ce changement est utilisé pour déclencher un mécanisme chargé de redresser la trajectoire.

Bonus : gyroscope optique On rencontre aussi des gyroscopes optiques, à effet Sagnac, qui permettent une grande précision des mesures de vitesses angulaires. Pour stabiliser la trajectoire d'un véhicule, on utilise actuellement des gyromètres laser ou gyrolasers qui permettent de mesurer la vitesse angulaire du véhicule et par conséquent de corriger cette trajectoire. L'avantage des gyrolasers vient de leur mode de fonctionnement non mécanique, mais essentiellement optique : on provoque un phénomène d'interférence entre les trajets optiques des faisceaux lumineux parcourus dans des sens opposés ; comme le décalage interférentiel dépend de la vitesse de rotation angulaire du gyrolaser, on accède à la valeur de cette vitesse.

Bonus : expérience de la chaise et de la roue On peut montrer qu'on tourne avec la roue et la chaise (foireux ?) On peut comparer au couple exercé par un gamin sur une balançoire à bascule ou autres ODG [https://fr.wikihow.com/calculer-un-couple-\(en-physique\)](https://fr.wikihow.com/calculer-un-couple-(en-physique))

Bonus : mise en évidence de la rotation de la Terre Dans le cas d'expériences précises où le référentiel galiléen considéré est le référentiel de Copernic, l'axe du gyro reste orienté vers un même point du ciel, indépendamment du mouvement de son support lié à la Terre. Par rapport à l'axe Δ du gyro qui est fixe dans le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_0$ lié aux étoiles, la Terre a un mouvement de rotation propre caractérisé par le vecteur Ω_T de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$, égal en norme à $7,3 \times 10^{-5}\text{ rad. s}^{-1}$. Par conséquent, la rotation apparente de Δ par rapport à $\mathcal{R}$ est :

$$\Omega_{\Delta/\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{R}_0/\mathcal{R}} = -\Omega_T$$

Ainsi, dans le référentiel terrestre, on peut observer l'axe du gyroscope tourner, autour de l'axe sud-nord de rotation de la Terre, avec une vitesse angulaire égale à l'opposé de la vitesse de rotation propre de la Terre, d'où la mise en

évidence et la mesure de cette vitesse.

Bonus : compas gyroscopique ou gyrocompas On sait que, par rapport au référentiel du laboratoire, l'axe Δ du gyro tourne autour de l'axe sud-nord défini par le vecteur rotation de la Terre Ω_T . En réalité, en raison des frottements, Δ s'aligne suivant Ω_T . Il pointe vers le Nord.

- Pour mesurer le méridien, on impose à l'axe Δ du gyro d'être horizontal ; l'axe s'immobilise alors selon l'axe horizontal Δ_m , contenu dans le plan du méridien local formé par Ω_T et la verticale du lieu (cf. schéma Pérez).
- Pour mesurer la latitude, on impose ensuite à l'axe Δ du gyro de se mouvoir dans un plan vertical. L'axe Δ s'oriente alors suivant Ω_T , c'est-à-dire suivant la direction de l'étoile polaire.. On en déduit la latitude du lieu qui est donnée par l'angle (Δ_m, Ω_T)

Les compas gyroscopiques sont quelquefois utilisés à poste fixe, comme les chercheurs de nord ; mais ils ont trouvé leur application essentiellement comme compas, à bord des navires et sous-marins. Leur précision est de quelques dixièmes de degré.

Bonus : cerceau et vélo On peut illustrer cette stabilité à l'aide d'un cerceau (masse m et rayon r) qui roule sans glisser sur un plan horizontal. L'expérience courante nous apprend que ce système se maintient verticalement si la rotation est suffisante et qu'une légère perturbation par rapport au plan vertical est facilement neutralisée. On l'interprète à l'aide du théorème du moment cinétique, appliqué au point géométrique de contact I mobile, par lequel passe constamment la réaction qu'exerce le sol :

$$\frac{d\mathbf{L}_I}{dt} + \mathbf{v}_I \times m\mathbf{v}_C = \mathbf{IC} \times m\mathbf{g} \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_I = \mathbf{L}_C + \mathbf{IC} \times m\mathbf{v}_C \approx 2mr^2\Omega$$

Comme $\mathbf{v}_I$ et $\mathbf{v}_C$ sont pratiquement colinéaires dans l'approximation gyroscopique, le terme complémentaire $\mathbf{v}_I \times m\mathbf{v}_C$ est négligeable. Quant à l'influence du poids lorsque le cerceau s'écarte d'un plan vertical, elle se traduit par une variation horizontale $d\mathbf{L}_I$ du moment cinétique et par conséquent par une précession de l'axe du cerceau autour de la verticale (Fig. 26.6). Ainsi le cerceau garde son inclinaison par rapport à la verticale sous l'effet du poids ou de toute autre force verticale.

C'est par un raisonnement analogue que l'on serait tenté d'expliquer la bonne stabilité d'une bicyclette en mouvement dans une position verticale, si la rotation propre des roues est suffisante. Une analyse minutieuse montre que c'est, en réalité, la force centrifuge dans le référentiel non galiléen lié au vélo qui permet d'expliquer cette stabilité (????).

Bonus : contre-braquage $\triangleleft$ Fred et Jamy : <https://www.dailymotion.com/video/x952g8>. Quand on roule vite à moto, tourner le guidon à gauche induit un couple gyroscopique qui fait pencher la moto à droite, ce qui fait tourner à droite. C'est dangereux qui on tourne trop le guidon, mais cela peut aider le virage de tourner le guidon en sens inverse.

2.2 Précession des équinoxes

Passer rapidement si on est à plus de 20 min, sinon on peut y consacrer au moins 5 min

Equinoxes Le vecteur rotation de la Terre est perpendiculaire au plan de l'équateur. D'autre part, le Soleil se trouve apparemment dans le plan de l'écliptique, c'est-à-dire dans le plan du mouvement de révolution du centre de la Terre autour du Soleil. Or le plan de l'écliptique n'est pas confondu avec le plan équatorial. **ODG:** l'angle est de 23.5 degrés. Ainsi, le Soleil semble percer, deux fois dans l'année, le plan équatorial terrestre, une première fois à l'équinoxe de printemps où il émerge du plan équatorial, et une seconde fois à l'équinoxe d'automne où il passe en-dessous de ce plan. Finalement,

Un équinoxe est un instant de l'année où l'axe Terre-Soleil change d'hémisphère céleste.

Précession des équinoxes On peut montrer cette animation : <https://youtu.be/qlVGeoZDjok?t=7> ou cette vidéo : <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/precession-Hipparque.xml> La précession des équinoxes est le changement de direction de l'axe de rotation de la Terre dans le référentiel de Copernic. **ODG:** une rotation tous les 26 000 ans environ. On l'appelle précession des équinoxes car c'est aussi est la très lente variation de la position apparente du Soleil, dans le ciel, à chaque printemps. Ce phénomène a été découvert par l'astronome grec Hipparque, peu après l'an -150 (avec des éclipses lunaires, qui permettent de savoir la direction du Soleil, même la nuit !)

Explication de la précession de la Terre

- A cause de sa rotation propre et de la force centrifuge qui est résulte, la Terre n'est pas sphérique et possède un bourrelet équatorial. **ODG:** excentricité $e = 1/300$.

- A cause du bourrelet, les forces de marées du Soleil et de la Lune (c'est M/d^3 qu'il faut comparer, la Lune a une influence double du Soleil) tendent à amener l'excès de masse présent à l'équateur vers le plan de l'écliptique. En effet, [on montre le schéma de la fiche](#). En dessinant, les flèches, le moment résultant des forces de marées qui s'applique sur la Terre.
- On a les deux ingrédients pour la précession : la rotation propre rapide (qu'on va comparer) et le couple de rappel.

Approximation gyroscopique Pour Les moments d'inertie selon les axes sont du même ordre de grandeur car l'excentricité est de $1/300$. Pour les périodes de rotation, la rotation terrestre se fait en 24h, la précession des équinoxes se fait en 26000 ans. On peut donc se placer dans l'approximation gyroscopique.

Période de précession ➤ Pérez p420. [L'expression du couple de rappel est compliquée](#). On donne directement que la période de précession est de 26 000 ans.

Conséquences

- L'année tropique est plus courte que l'année sidérale, de 20 minutes.
- On va changer d'étoile polaire.
- On balaie les constellations du zodiaque. Autrement dit, au moment de l'équinoxe de printemps, le Soleil est toujours à l'entrée du signe du Bélier par convention, mais ce dernier ne contient plus la constellation du Bélier, mais celle des Poissons. Quant à la constellation du Bélier, elle se trouve désormais dans le signe suivant, celui du Taureau et ainsi de suite.

On a établi une équation de précession à l'échelle macroscopique, et on en a dégagé certaines propriétés (le moment cinétique par rapport au point de fixation a une norme et une projection sur l'axe vertical constante). Ce phénomène se retrouve à des échelles et nous allons maintenant changer complètement d'échelle pour le montrer.

Les ingrédients d'une précession sont la rotation rapide le long d'un axe et un couple appliqué dans un axe perpendiculaire.

Ces ingrédients se retrouvent aussi dans le domaine microscopique

3 Conséquences dans le domaine microscopique

3.1 Moment cinétique et moment magnétique

Le Bellac pp91-93 (si c'est pas clair, voir le Sanz PC p638)

Problématique L'entourage des atomes ou des entités présentes dans un milieu influe sur les champs ressentis par les dites entités. Si nous avons une façon de savoir comment une entité ressent un champ extérieur appliqué, nous pourrions nous faire une idée de la nature du milieu qu'il entoure directement. Ainsi avoir la possibilité de mesurer localement un champ ressenti par des atomes nous informerait sur leur voisinage proche.

Modèle classique du magnétisme Comment un électron peut-il engendrer un moment magnétique ? On adopte le modèle classique de Bohr qui permet de rendre compte qualitativement d'un résultat mais il faut garder à l'esprit que la compréhension profonde du magnétisme est de nature quantique. Dans le modèle planétaire de Bohr de l'atome d'hydrogène : l'électron (charge $-e$), en mouvement circulaire autour du proton, est assimilé à une petite spire conductrice parcourue par un courant. Le moment magnétique de cette spire élémentaire a pour expression :

$$\mathbf{m} = iS\mathbf{n} = \frac{\delta q}{dt}\pi r^2\mathbf{n} = \frac{-e}{T}\pi r^2\mathbf{n} = \frac{-evr}{2}\mathbf{n}$$

où S est l'aire du disque défini par la trajectoire circulaire, $\mathbf{n}$ la normale orientée de ce disque, v la vitesse du mouvement orbital et $T = 2\pi r/v$ la période de révolution du mouvement de l'électron. Comme le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ au centre O du noyau est : $\mathbf{L}_O = \mathbf{OA} \times m_e\mathbf{v} = m_evr\mathbf{n}$, on a bien :

$$\mathbf{m} = \gamma^{(e)}\mathbf{L}_O \quad \text{avec} \quad \gamma^{(e)} = -\frac{e}{2m_e}$$

On voit que γ a les dimensions d'une charge électrique massique. **ODG:** $\gamma \sim 10^{11} \text{C/kg}$.

L'intérêt de ce modèle est qu'il aboutit à un résultat central, qui reste vrai en mécanique quantique est qu'on peut associer un moment magnétique à un moment cinétique (orbital ou intrinsèque) et qu'ils sont colinéaires.

Moment cinétique intrinsèque, facteur de Landé [Wiki](#) En réalité, en plus du moment cinétique orbital, l'électron possède un moment cinétique intrinsèque. Le rapport gyromagnétique n'est pas le même. En général, $\gamma = gq/2m$. Pour le moment orbital, $g = 1$. Pour le moment intrinsèque de l'électron, $g \approx -2,0023$. Pour le moment intrinsèque du proton, $g_p \approx +5.6$. Il faut un traitement quantique, qui fait sortir un rapport gyromagnétique. g est autour de l'unité. Comme les masses ont un rapport 2000, c'est le magnétisme des électrons qui domine celui du proton (et du neutron).

↓
Conséquence de la colinéarité des deux moments

3.2 Précession de Larmor

[Cagnac pp241-242]

Système et référentiel On considère un champ magnétique $\vec{B}_0$ uniforme dans lequel on plonge l'atome à 1 électron étudié précédemment. Le système considéré est l'électron. On se place dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. L'électron subit une force de Lorentz. Mais en moyenne, l'électron se résume à une spire de moment magnétique $\vec{\mu}$.

Inventaires des couples On recense les couples exercés en O la position du noyau, considéré fixe. Hypothèse : le couple de la force de Lorentz se résume à celui moyenné sur plusieurs périodes de révolution, où l'électron se comporte comme un dipôle magnétique. Cela revient à dire que le champ magnétique perturbe faiblement l'orbite circulaire de l'électron. Le couple de la force de Lorentz se résume, en moyenn, à celui exercé sur un dipôle : $\vec{M} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$ [on vérifie l'hypothèse plus tard](#). La force électrique est centrale et donc exerce un couple nul par rapport à l'origine O . On néglige l'influence des autres électrons.

Equation du mouvement L'application du théorème du moment cinétique au système {électron} au point O du noyau, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ donne

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 \\ &= \gamma \vec{L} \wedge \vec{B}_0 \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{L} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

où on a utilisé la proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique.

Mouvement de précession On retrouve alors à équation similaire à celle obtenue dans le domaine macroscopique où $\vec{B}_0$ est l'analogie de la pesanteur $\vec{g}$.

On retrouve en fait les ingrédients de la précession : moment cinétique et couple orthogonal au moment cinétique.

Ainsi, comme pour la toupie dans l'approximation gyroscopique, le vecteur moment cinétique a une norme constante et une projection selon la direction du champ magnétique constante. Par conséquent, le moment magnétique précessionne autour de la direction du champ $\vec{B}_0$ à la vitesse angulaire ω_0 . On appelle ω_0 la pulsation de LARMOR. Dans le cas d'un électron orbitant autour d'un noyau, cette vitesse angulaire, dite de Larmor, a pour expression :

$$\Omega_L = -\gamma^{(e)} \mathbf{B} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}$$

De plus, $\vec{\omega}_0$ et $\vec{B}_0$ ont la même direction puisque γ est négatif. La rotation s'effectue donc dans le sens autour de $\vec{B}_0$.

Ainsi, un champ magnétique n'oriente pas mais fait tourner l'axe de rotation de l'électron autour du noyau.

Animation de précession

On peut montrer <https://youtu.be/p3WnFYBnghU?t=39> pour une animation.

Ordre de grandeur

- Champ magnétique terrestre : $B \simeq 10^{-4} \text{ T} \Rightarrow \omega_0 = |\gamma|B = \frac{e}{2m_e}B \simeq 8.8 \cdot 10^6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$
- En laboratoire : $B \simeq 1 \text{ T} \Rightarrow \omega_0 \simeq 8.8 \cdot 10^{10} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Vérification des hypothèses : perturbation de la trajectoire Calculons Ω_L pour l'atome de Bohr dans un champ magnétique, de l'ordre de $1T$:

$$\Omega_L \approx \frac{eB}{2m_e} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{2 \times 0,91 \times 10^{-30}} \approx 0,88 \times 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Il est instructif de comparer cette valeur à la vitesse angulaire de l'électron sur son orbite. Dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène on a :

$$a_B \approx 53 \text{ pm} \quad v \approx \frac{c}{137} \approx 2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \frac{v}{a_B} \approx 4 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \frac{\Omega_L}{v/a_B} \ll 1$$

On en déduit que la perturbation apportée par le champ magnétique au mouvement orbital de l'électron est très faible. Ceci justifie l'expression du couple utilisée, qui moyenne la trajectoire de l'électron. NB : ce n'est pas une approximation gyroscopique ici. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Larmor : "Le mouvement dans le référentiel de Larmor associé au champ magnétique B est le même que le mouvement dans le référentiel du laboratoire, en absence de champ magnétique".

Relaxation En réalité, à cause de collisions aléatoires (gaz), de interactions avec les dipôles magnétiques voisins (liquide, solide), avec les phonons (solide), on observe un phénomène de relaxation, qu'on peut modéliser par une relaxation exponentielle à la Drude, avec des temps caractéristique, pouvant être différents pour la composante longitudinale (dont dépend l'énergie) et la composante transverse (à énergie constante). Le moment magnétique finit par relaxer vers le champ magnétique. **ODG:** de 1ms à 1h, selon la phase, les conditions. C'est le paramagnétisme!. On parle aussi d'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert : https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_de_Landau-Lifshitz-Gilbert.

Bonus : Expérience de Einstein de Haas Comme un bonhomme assis sur une chaise libre de pivoter commencer à pivoter lorsqu'il incline une roue préalablement mise en rotation, par conservation du moment cinétique, si on magnétise une substance, alors le solide acquiert un moment cinétique tel que $\vec{\sigma}_{mag} + \vec{\sigma}_{solide} = 0$. Cela se voit mieux sur des substance ferromagnétiques. C'est l'expérience de Einstein de Haas. Réciproquement, en faisant tourner un solide on peut le magnétiser, c'est l'expérience de Barnett (1935). Mesure délicate : **ODG:** 6000 tr/min et $B \sim 10^{-8}$, il faut compenser le champ terrestre.

3.3 Résonance magnétique nucléaire

[Cagnac pp256-259]

RMN La résonance magnétique nucléaire (RMN) est une technique inventée séparément par Purcell et Bloch en 1946. On soumet les moments magnétiques nucléaires intrinsèques, dit de spin $\mathbf{S}$, de la matière condensée (liquide ou solide) à un fort champ magnétique uniforme, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, de l'ordre de quelques teslas. *Le magnétisme est dominé par celui des électrons. Pour être sensible à celui du noyau, 2000 fois plus petit, il faut utiliser des champs plus intenses.* Pour réaliser des champs aussi intenses, on utilise un électro-aimant à supraconducteurs que l'on plonge dans de l'hélium liquide. On montre la figure du Pérez.

Application du champ tournant On soumet, en outre, l'échantillon à un champ magnétique supplémentaire $\mathbf{b} = b_m \mathbf{e}_{x'}$, produit par une bobine. Ce champ, beaucoup plus faible que $\mathbf{B}_0$, est orthogonal à ce dernier et tourne à la vitesse angulaire $\Omega \mathbf{e}_z$ autour de la direction de $\mathbf{B}_0$.

Equation de précession Appliquons le théorème du moment cinétique, au dipôle magnétique de moment $\mathbf{m}_N$, en son centre de masse, par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$. On a, puisque $\mathcal{R}$ est galiléen :

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{m}_N \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = -\gamma_s^{(N)} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \times \mathbf{S}$$

puisque $\mathbf{m}_N = \gamma_s^{(N)} \mathbf{S}$, $\gamma_s^{(N)}$ étant le coefficient gyromagnétique de spin du noyau. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, qui tourne autour de Oz , à la vitesse angulaire $\Omega = \Omega \mathbf{e}_z$ par rapport à $\mathcal{R}$, les champs $\mathbf{B}_0$ et $\mathbf{b}$ sont stationnaires. *Attention, ce n'est pas le référentiel de Larmor qui tourne à Ω_0 .* Il vient donc, d'après la formule de changement de référentiel :

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \Omega \times \mathbf{S} = -\gamma_s^{(N)} (\mathbf{B}_0 + \mathbf{b}) \times \mathbf{S}$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = -\gamma_s^{(N)} \left(\mathbf{B}_0 + \mathbf{b} + \frac{\Omega}{\gamma_s^{(N)}} \right) \times \mathbf{S} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{d\mathbf{S}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \Omega' \times \mathbf{S}$$

en introduisant :

$$\Omega_0 = -\gamma_s^{(N)} \mathbf{B}_0 \quad \Omega_b = -\gamma_s^{(N)} \mathbf{b} \quad \text{et} \quad \Omega' = \Omega_0 + \Omega_b - \Omega \mathbf{e}_z$$

Ainsi, le moment magnétique $\mathbf{m}_N$ précessionne autour de l'axe Oz , avec le vecteur vitesse angulaire Ω' . **Bilan : on a fait le TMC dans un référentiel galiléen, puis on change de référentiel en se plaçant dans le référentiel tournant.**

Résonance Si $\Omega \neq \Omega_0$, l'orientation relative de $\mathbf{m}_N$ et $\mathbf{b}$ change rapidement. La valeur moyenne du produit est quasi-nulle et $\mathbf{b}$ a peu d'effet. Si la condition $\Omega = \Omega_0$, dite de résonance, est satisfaite, on s'attend à ce que $\mathbf{b}$ ait grand effet :

$$\Omega' = \Omega_b = -\gamma_s^{(N)} \mathbf{b}$$

Ainsi, à la résonance, le moment magnétique $\mathbf{m}_N$ précessionne autour de $\mathbf{b}$, avec la vitesse angulaire $\Omega_b = -\gamma_s^{(N)} \mathbf{b}$, puis finit par s'orienter selon $\mathbf{b}$ en raison de la relaxation. *Lorsqu'on prend en compte la relaxation, on arrive aux équations de Bloch (lien avec les équations de Bloch optique du laser ?).*

To summarise, the rotating field B_1 influences the atom only when its rotation frequency $\omega/2\pi$ is very close to the Larmor frequency $\omega_0/2\pi = -(\gamma/2\pi)B_0$, whence the name magnetic resonance. When the frequencies are equal, the rotating field is capable of radically altering the orientation of the atomic magnetic moment with respect to the fixed field $\mathbf{B}_0$

Bonus : vision quantique, lien avec les oscillations de Rabi A la résonance, classiquement, la composante m_z du moment magnétique selon B_0 fluctue entre $\pm m_z$. En mécanique quantique, c'est en fait la probabilité de transition de $-m_z$ à $+m_z$ qui oscille en $C_2 + C_1 \cos(\sqrt{\omega_1^2 + \delta\omega^2}t)$: ce sont les oscillations de Rabi. En réalité, ces oscillations sont amorties par les processus de relaxation spin-spin, spin-réseau. Lorsqu'on les prend en compte en introduisant un temps de relaxation, on arrive aux équations de Bloch, utilisées aussi pour les systèmes à deux niveaux et pour les lasers.

Animaiton de RMN

On montre la vidéo : <https://youtu.be/p3WnFYBnghU?t=39> Les commentaires de la vidéo sont super ! On peut l'utiliser pour expliquer l'impulsion $\pi/2$ et l'écrantage.

Application à la chimie $\blacktriangleleft$ Cagnac pp270-272, Fox p369, [Culturesciences](#)

Cette technique permet d'accéder, par l'intermédiaire de la pulsation Ω du champ tournant, au champ magnétique local ressenti $\vec{B}(r)$ par les protons, qui peut être différent de $\vec{B}_0$ à cause des effets d'écran. Comme les effets d'écran varient avec l'environnement spatial de ces protons, on en tire des informations précieuses sur cet environnement. Si $\sigma(\mathbf{r})$ caractérise l'écrantage dans l'échantillon considéré, la condition de résonance s'explique selon :

$$\Omega(r) = \Omega_0[1 - \sigma(r)] \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \gamma_s^{(p)} B_0$$

Le coefficient gyroscopique de spin du proton s'écrit

$$\gamma_s^{(p)} = g_s^{(p)} \frac{e}{2m_p} \quad \text{avec} \quad g_s^{(p)} \approx 5,585 \quad \text{et} \quad \frac{e}{2m_p} = \frac{\mu_N}{\hbar}$$

Ordre de grandeur Comme $\gamma_s^{(p)} \approx 26,87 \times 10^7 \text{ rad.s}^{-1}.\text{T}^{-1}$

$$\Omega = 26,87 \times 10^7 \times B_0 \text{ et } \nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 42,6 \times 10^6 \times B_0$$

pour la fréquence. On en déduit la fréquence correspondante en MHz : $\nu \approx 300\text{MHz}$ pour $B_0 = 7\text{T}$. Pour augmenter la sensibilité, on utilise un champ magnétique B_0 très intense. Le domaine électromagnétique concerné est celui de la radio ($\lambda = c/\nu = 10\text{m}$). Aussi, on peut utiliser la RMN pour mesurer des concentrations en étudiant l'intensité du signal.

Application : imagerie par Résonance Magnétique (IRM) L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est une technique d'imagerie médicale permettant d'obtenir des vues en deux ou en trois dimensions de l'intérieur du corps de façon non invasive. L'IRM nécessite un champ magnétique puissant et stable produit par un aimant supraconducteur qui crée une magnétisation des tissus par alignement des moments magnétiques de spin. Des champs magnétiques oscillants plus faibles, dits « radiofréquence », sont alors appliqués de façon à légèrement modifier cet alignement et produire un phénomène de précession qui donne lieu à un signal électromagnétique mesurable. La spécificité de l'IRM consiste à localiser précisément dans l'espace l'origine de ce signal RMN en appliquant des champs magnétiques non uniformes, des « gradients », qui vont induire des fréquences de précession légèrement différentes en fonction de la position des atomes dans ces gradients. Sur ce principe qui a valu à ses inventeurs, Paul Lauterbur et Peter Mansfield le prix Nobel de physiologie ou médecine en 2003, il est alors possible de reconstruire une image en deux dimensions puis en trois dimensions de la composition chimique et donc de la nature des tissus biologiques explorés.

Bonus : spin nucléaire Pour que cette interaction soit observée, le noyau doit avoir un spin nucléaire I non-nul. La valeur du spin I dépend de la parité de A et Z . A pair et Z pair $\rightarrow I = 0$. A pair et Z impair $\rightarrow I$ entier. A impair $\rightarrow I$ demi-entier. Exemple ^{12}C , ^{16}O ont un spin nucléaire nul et sont inactifs en RMN. ^{13}C , ^1H , ^{19}F sont actifs.

Bonus : RMN en pratique $\ntriangleleft$ Fox (annexe). En pratique, on applique le champ tourner pendant une durée $T(\pi/2)$ pour faire en sorte que le spin M soit dans le plan perpendiculaire $\vec{B}_0$: c'est une impulsion $\pi/2$. Le champ $\vec{B}_1$ qui donne l'impulsion est induit par la circulation d'un courant dans une bobine solénoïde. Lorsque l'on coupe l'impulsion $\vec{B}_1$ le système de spin retourne à l'équilibre en produisant un champ électromagnétique qui induit un courant dans cette même bobine. Elle sert donc à la fois de système d'émission et de réception. Ce courant induit est le signal effectivement mesuré. En effectuant la TF du signal (réponse indicielle), on a accès à la courbe de résonance.

Bonus : résonance paramagnétique électronique [Chimie Libretext](#) C'est la résonance magnétique due au moment magnétique d'origine électronique. On l'utilise pour (i) mesurer des rapports gyromagnétiques d'un atome/ion/molécule pour contraindre sa structure interne (ii) mesurer des temps de relaxation en mesurant la courbe de résonance, ce qui fournit des indications sur les interactions intermoléculaires en jeu. Comparé à la RMN, on monte souvent plus haut en fréquence, ce qui augmente la résolution. Cependant, comme l'écart énergétique dû à l'effet Zeeman est faible devant kT_{ambient} , il faut refroidir vers 10 voir 2 Kelvins pour ne pas que les deux niveaux soient équipopulés. The electromagnetic radiation used in NMR typically is confined to the radio frequency range between 300 and 1000 MHz, whereas EPR is typically performed using microwaves in the 3-400 GHz range. Due to the short relaxation times of electron spins in comparison to nuclei, EPR experiments must often be performed at very low temperatures, often below 10 K, and sometimes as low as 2 K. This typically requires the use of liquid helium as a coolant. EPR spectroscopy is inherently roughly 1,000 times more sensitive than NMR spectroscopy due to the higher frequency of electromagnetic radiation used in EPR in comparison to NMR.

Conclusion

Les ingrédients d'une précession sont la rotation rapide le long d'un axe et un couple appliqué dans un axe perpendiculaire.

Ouverture : Gyroscope, paramagnétisme, Vision quantique, oscillations de Rabi, horloges atomiques

Compléments/Questions

Précession : <https://www.youtube.com/watch?v=mp7vjsRnWh4>

Précession Einstein-de Sitter Une particule plongée dans un champ gravitationnel va également voir son moment cinétique propre entrer en précession du fait de l'existence de celui-ci. On parle d'effet de Sitter, prédit pour la première fois en 1916 par Willem de Sitter.

Précession Lense-Thirring La relativité générale prédit également qu'un corps tournant provoque un effet d'entraînement de l'espace-temps dans le sens de sa rotation. Cet effet Lense-Thirring provoque une précession supplémentaire du moment cinétique orbital d'un corps si le plan de l'orbite n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation du corps central, ainsi qu'une précession supplémentaire du périastre et du moment cinétique propre des corps soumis à l'influence du corps central.

Précession de Thomas Le moment cinétique propre (le spin) d'une particule va également subir une précession si la particule est accélérée. Ce résultat, conséquence de la relativité restreinte, a été correctement expliqué pour

la première fois par Llewellyn Thomas dans le courant des années 1920 et porte le nom de précession de Thomas. Dans le cas de l'électron, cette précession réduit l'interaction spin-orbite par un facteur $1/2$, parfois appelé facteur de Thomas. Mathématiquement, elle provient de ce que la combinaison de plusieurs boost de Lorentz ne correspond pas nécessairement à une boost de Lorentz, mais à la combinaison d'une telle transformation et d'une rotation d'espace.

Précession du périhélie de Mercure RG.

Gyroscope

- BUP 587 + Perez
- Définition : un gyroscope est un solide de révolution tournant autour de son axe à **très grande vitesse** et suspendu par son centre de masse de façon parfaite (def Perez).
- Inventé par L. Foucault en 1850. Appelé par W. Thompson.
- Propriété : comme les liaisons sont parfaites et C le centre de masse, $\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = 0$. Donc L_C est une constante dans tout ref Galiléen. Or $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ par symétrie, $\boldsymbol{\omega} = c\mathbf{st}$. **L'axe du gyroscope pointe toujours vers un même point de R .** Si le gyro est dans le référentiel de Copernic, l'axe du gyroscope pointe toujours vers un même point du ciel! (explique aussi la stabilité d'une assiette de cirque en rotation sur une baguette).
- Applications :
 - Stabilisation d'une trajectoire : l'axe du gyroscope est fixe par rapport aux étoiles, donc si la trajectoire (navire, avion) change, l'axe du gyro change par rapport à l'objet! *Pour stabiliser la trajectoire d'un véhicule, on utilise actuellement des gyromètres laser ou gyrolasers qui permettent de mesurer la vitesse angulaire du véhicule et par conséquent de corriger cette trajectoire. L'avantage des gyrolasers vient de leur mode de fonctionnement non mécanique, mais essentiellement optique (cf. Optique et Quantique) : on provoque un phénomène d'interférence entre les trajets optiques des faisceaux lumineux parcourus dans des sens opposés ; comme le décalage interférentiel dépend de la vitesse de rotation angulaire du gyrolaser, on accède à la valeur de cette vitesse.*
 - Mise en évidence de la rotation de la Terre : l'axe du gyroscope est fixe dans le référentiel de Copernic. L'axe du gyroscope tourne autour de l'axe sud nord de rotation de la Terre avec une vitesse angulaire égale mais de sens opposé!
 - Compas gyroscopiques : pointe vers le Nord. Les compas gyroscopiques sont quelquefois utilisés à poste fixe, comme les chercheurs de nord ; mais ils ont trouvé leur application essentiellement comme compas, à bord des navires et sous-marins. Leur précision est de quelques dixièmes de degré.
 - Gyrocompas de Foucault (1852) : permet de donner la plan du méridien (rejoint les pôles, même longitude) et la latitude. (i) En théorie, l'axe Δ du gyro fait un cône (précesse) autour de l'axe de rotation de la Terre. En vrai, à cause des frottement, il tourne autour du même axe. (ii) On impose au gyro d'être horizontal. L'axe du gyro (Δ_m) tente de s'aligner avec l'axe de rot de la Terre (Ω) ie l'axe du gyro est dans le plan du méridien local formé par Ω et la verticale du lieu. (voir schéma perez). (iii) On en déduit la latitude qui est l'angle entre Δ_m et Ω (quand gyro libre).
 - Couple gyroscopique = le moment qu'exerce un gyroscope sur son support lorsqu'on contraint son axe à changer d'orientation. Perez pour les calculs, écrit $d\mathbf{L}_C/dt_\Delta = 0$ puis TMC par rapport à R . $\mathbf{M}_{C,g \rightarrow \text{ext}} = \mathbf{L}_C \wedge \boldsymbol{\omega}$. **Quand le gyroscope est soumis à un couple extérieur, ce dernier répond conformément au principe d'action réciproque en exerçant un couple opposé.** Application : on tourne quand on est sur le tabouret avec la roue qui tourne. (apparemment il y a des odg dans la nouvelle version du perez page 422 à voir!)
 - Gyroscope anti-roulis sur les navires. Quand le navire bascule, le couple exercé sur un gros gyroscope permet de redresser le bateau. ODG dans le Perez
- Types de gyroscopes : roue (avec un ddl angulaire), les gyro "1 axe" avec 2 ddl angulaires (la rot autour de z n'est pas compté dans le nom), les gyro "2 axes" avec 3ddl angulaires

Questions

- **Méca du solide** Comment on définit formellement le référentiel propre d'inertie? Pour un solide quelconque? Comment expliquer aux élèves la formule : $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_u + \dot{\phi}\vec{e}_z$? tous les vecteurs sont fixes? Comment montrer que non? • Relation entre moment cinétique et vecteur rotation? Que sont les axes principaux d'inertie? Matrices d'inertie? Comment calculer un moment d'inertie?

- **Gyroscope** Gyroscope anti-roulis, pourquoi ça tourne quand on appuie à un endroit, de manière pas intuitive? Quel est le nom du dispositif qui tient l'ensemble? Vous avez dit que le gyroscope permettait de mettre en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre, comment exactement? Application du gyro dans le domaine maritime (en lien avec l'expression du couple gyroscopique)? Dans bateau, quelle partie du gyro (que j'avais montré) serait elle relié à la coque? Garder le cap, quel domaine est ce utilisé? (les avions de chasse notamment, système de rétroaction). Sur un échelle de temps de 24h, qu'observe-t-on si on maintient la rotation du gyro? sur un an? Pourquoi le gyroscope a aussi un mouvement de nutation quand on le lance? - Pourquoi il tombe au bout d'un moment quand il précesse? Où est le point fixe dans ce gyroscope? Explication du fonctionnement du gyrocompas?
- **Equinoxe** Quelle est la différence entre jour sidéral et jour terrestre? Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Jour_sid%C3%A9ral Expliquer le phénomène des saisons.
- **Approximation gyroscopique, au delà?** Pourquoi et comment expliquer aux élèves que OC (le vecteur entre le point fixe et le centre d'inertie) est colinéaire au moment cinétique? Expérimentalement quand on sort de cette approximation / quand la toupie n'a pas la symétrie de révolution, que se passe-t-il? Mouvement de Lagrange/Poisson. Est-ce que c'est possible d'étudier des mouvements hors du cadre de l'approximation gyroscopique? Par exemple?
- **Toupie** Quelles sont les autres forces qui s'appliquent sur la toupie? Support. Pourquoi leurs moments sont nuls? Exercé en O au point d'attache. Pourquoi la toupie s'arrête? Comment se traduisent les frottements dans le TMC, si on les prenait en compte? Pour la toupie, y a-t-il que le poids comme force? Pourquoi on ne prend pas en compte la réaction du support dans les calculs? Quels types de frottement qui fait que la toupie tombe? Vous avez étudié la toupie comme en contact ponctuel fixe avec le sol, pourquoi la toupie se déplace-t-elle en réalité? Qu'est-ce qu'il se passe si le support de la toupie est accéléré (par exemple dans un ascenseur, ou en chute libre)? Sur la résolution du mouvement de Poincaré d'un solide, vous avez exhibé des solutions particulières, quelles sont les solutions générales? Que peut-on conclure en prenant le produit scalaire de l'équation du mouvement (exacte) de la toupie avec le vecteur e_z ?
- **Modèle de Bohr, quantification** Limites du modèle atomique classique, conséquences de la quantification de L, qu'est-ce qu'on mesure exactement en RMN, à quoi avons-nous, accès lors d'une mesure, comment on sait qu'on est à la pulsation de résonance?
- **Paramagnétisme** Matériau para, plonge dans champ B et acquiert une aimantation induite. Pourquoi, alors qu'on a vu que ça ne devrait que faire précesser les moments magnétiques autour de la direction du champ? (pas de réponse).
- **MQ.** Comment à partir de l'expression de l'état initial, on obtient l'état au temps t? (application de l'opérateur évolution)
- **Résonance magnétique** Pourquoi parle-t-on de résonance magnétique, en quoi est-ce une résonance, pourquoi cette condition est appelée résonance? Quelle correction quantique faudrait-il rajouter dans le modèle présenté de la RMN? Relaxation vers l'équilibre, mais c'est plutôt classique. Couplage spin-spin, spin-réseau, écrantage. Dans le paramagnétisme, pourquoi les spins ne précessent pas mais s'alignent? Il y a un terme de relaxation (terme de Gilbert). Pourquoi en résonance magnétique le champ fixe est plus intense que le champ tournant? Pourquoi la sensibilité dépend du champ fixe? C'est quoi la sensibilité? Quelles origines du moment cinétique? La résonance magnétique du neutron existe-t-elle? Oui, spin 1/2. Dans le cas du proton, le moment magnétique est-il orbitaire comme vous l'avez présenté avec le modèle de Bohr? Non intrinsèque. Pour le proton, de quoi dépend le facteur gyromagnétique? Pour la résonance magnétique, quel phénomène se passe quand la pulsation est environ égale à la pulsation de Larmor? Qu'est-ce qu'on mesure exactement en RMN? Comment on effectue cette mesure en pratique? Pour la RMN, quel type de particule est étudiée? (les protons H). Autre type de moment cinétique? (orbitaire). Influence des voisins? couplage, décalage en fréquence. Résolution typique d'un spectro RMN pour la détermination de la fréquence? Intérêt de faire varier le champ B0 plutôt que f? (les équations sont les mêmes, juste plus simple à réaliser).
- **Rapport gyromagnétique** Par rapport à l'expérience d'Einstein et de Haas, vous avez dit que la valeur du rapport gyromagnétique mesurée n'était pas en accord avec le modèle semi-classique et qu'il fallait faire appel à des modèles quantiques, pouvez-vous expliciter? https://en.wikipedia.org/wiki/Land%C3%A9_g-factor
- **Qu'est-ce qu'un référentiel? Comment construit-on un référentiel galiléen?** Premier principe de la dynamique = principe d'existence d'un référentiel galiléen.
- **Différence fondamentale entre le gyroscope et la toupie?** Toupie : précession due à la gravité. Pas de précession pour le gyroscope

- Pourquoi le gyroscope est-il plat ?
- Terre : Pourquoi y a-t-il précession ? Période de précession ? Terre pas sphérique (force centrifuge)
- Qu'est-ce que les forces de marée ?
- Est-ce que vous connaissez d'autres types de précession ? Précession de Thomas, précession de Lenses-Thirring, précession de l'orbite de Mercure
- Gyroscope dans les téléphones portables ? Gyroscope optique (effet Sagnac)
- Pourquoi un tenseur d'inertie est-il symétrique ?
- Instabilités quand on fait tourner les solides
- — Dans le calcul du moment magnétique de l'électron, à quelle condition peut-on approximer l'orbite de l'électron à une spire circulaire ? — L'équation de précession pour le domaine microscopique nécessite-t-elle l'approximation gyroscopiques pour être établie ? — Est-ce que la RMN est un problème classique ou quantique ? — Que devient la relation $\mu = \gamma L$ lorsque l'on passe en mécanique quantique ? — Quels sont les différents types de moments cinétiques en mécanique quantique (orbital et de spin) ? Qu'est-ce que le facteur de Landé ? — Que se passe-t-il à la résonance en RMN ? — Que peut-on conclure en prenant le produit scalaire de l'équation du mouvement (exacte) de la toupie avec le vecteur $\mathbf{e}_z$? — Quelle importance a le fait que l'approximation gyroscopique fasse intervenir les moments d'inertie du solide ? — Quelle est la géométrie la plus adaptée pour faciliter la validité de l'approximation gyroscopique ? Est-ce qu'une tige longue et fine ferait une bonne toupie ? — Quel est le principe d'un gyroscope ? — Comment faire pour que le poids ait un moment dynamique nul ? — Qu'est-ce que l'effet paradoxal ? Que se passe-t-il lorsque l'on penche une roue de vélo en rotation ?
- Quelle est la différence entre jour sidéral et jour terrestre ? Expliquer le phénomène des saisons. Pourquoi parle-t-on de résonance magnétique, en quoi est-ce une résonance, pourquoi cette condition est appelée résonance ? Quelles sont les autres forces qui s'appliquent sur la toupie ? Pourquoi leurs moments sont nuls ? Pourquoi la toupie s'arrête ? Comment se traduisent les frottements dans le TMC, si on les prenait en compte ? L'équation gyroscopique n'apparaît pas dans la partie I (Cas de la toupie), pourquoi ? (choix pédagogique, elle est là quand même, il faut juste changer de référentiel). Quelle correction quantique faudrait-il rajouter dans le modèle présenté de la RMN ?
- Pourquoi en résonance magnétique le champ fixe est plus intense que le champ tournant ? Pourquoi la sensibilité dépend du champ fixe ? C'est quoi la sensibilité ? Quelles origines du moment cinétique ? La résonance magnétique du neutron existe-t-elle ? Dans le cas du proton, le moment magnétique est-il orbitalaire comme vous l'avez présenté avec le modèle de Bohr ? Pour le proton, de quoi dépend le facteur gyromagnétique ? Expliquer la précession des équinoxes. Pour la résonance magnétique, quel phénomène se passe quand la pulsation est environ égale à la pulsation de Larmor ? Pour la toupie, y a-t-il que le poids comme force ? Pourquoi on ne prend pas en compte la réaction du support dans les calculs ? Quels types de frottement qui fait que la toupie tombe ?
- Comment on définit formellement le référentiel propre d'inertie ? Pour un solide quelconque ? Vous avez étudié la toupie comme en contact ponctuel fixe avec le sol, pourquoi la toupie se déplace-t-elle en réalité ? Pourquoi la toupie finit par tomber ? Qu'est-ce qu'il se passe si le support de la toupie est accéléré (par exemple dans un ascenseur, ou en chute libre) ? Sur la résolution du mouvement de Poinsot d'un solide, vous avez exhibé des solutions particulières, quelles sont les solutions générales ? Pouvez-vous revenir sur le mouvement de précession de la Terre ? (partie expédiée en raison du manque de temps et peu claire) Vous avez dit que le gyroscope permettait de mettre en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre, comment exactement ? Est-ce que c'est possible d'étudier des mouvements hors du cadre de l'approximation gyroscopique ? Par exemple ? Par rapport à l'expérience d'Einstein et de Haas, vous avez dit que la valeur du rapport gyromagnétique mesurée n'était pas en accord avec le modèle semi-classique et qu'il fallait faire appel à des modèles quantiques, pouvez-vous expliciter ? Qu'est-ce qu'on mesure exactement en RMN ? Comment on effectue cette mesure en pratique ?
- Application du gyro dans le domaine maritime (en lien avec l'expression du couple gyroscopique) ? Dans bateau, quelle partie du gyro (que j'avais montré) serait elle relié à la coque ? Garder le cap, quel domaine est ce utilisé ? (les avions de chasse notamment, système de rétroaction). Sur un échelle de temps de 24h, qu'observe t on si on maintient la rotation du gyro ? sur un an ? Pour la RMN, quel type de particule est étudiée ? (les protons H). Autre type de moment cinétique ?

(orbitaire). Influence des voisins? couplage, décalage en fréquence. Résolution typique d'un spectro RMN pour la détermination de la fréquence? Intérêt de faire varier le champ B_0 plutôt que f ? (les équations sont les mêmes, juste plus simple à réaliser).

- Matériau para, plonge dans champ B et acquiert une aimantation induite. Pourquoi, alors qu'on a vu que ça ne devrait que faire précesser les moments magnétiques autour de la direction du champ? (pas de réponse). Comment à partir de l'expression de l'état initial, on obtient l'état au temps t ? (application de l'opérateur évolution)